Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Иркутский государственный университет»

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова» Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Марков Никита Юрьевич

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ЖЕСТКИХ И МЯГКИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В КВАРК-ГЛЮОННОЙ ПЛАЗМЕ

1.3.3 – Теоретическая физика

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Раджабов Андрей Евгеньевич

Иркутск – 2026

Оглавление

Введение **5**

1 Гамильтонов формализм для мягких бозе-возбуждений **16**

1.1 Гамильтониан взаимодействия бесцветных плазмонов 16

1.2 Корреляционная функция четвёртого порядка 22

1.3 Кинетическое уравнение для глюонных возбуждений 26

1.4 Вершинная функция $T^{\,a\;\,a_1\;\,a_2\;\,a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}$ 28

1.5 Вершинные функции $U^{\,a\;\,a_1\;\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ и $V^{\,a\;\,a_1\;\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ 30

1.6 Выводы 34

2 Гамильтонов формализм для мягких ферми-возбуждений **36**

2.1 Гамильтониан взаимодействия плазмонов и плазминов 36

2.2 Канонические преобразования 43

2.3 Устранение “несущественного” гамильтониана $H^{(3)}$ 46

2.4 Эффективный гамильтониан четвёртого порядка. Упругое рассеяние плазмина на плазмоне 48

2.5 Эффективный гамильтониан четвёртого порядка. Упругое рассеяние плазмина на плазмине 52

2.6 Корреляционная функция четвёртого порядка для мягких кварк-антикварковых возбуждений 55

2.7 Кинетическое уравнение для рассеяния плазмина на плазмине . . 58

2.8 Вершинные функции $T^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}$, $\mathcal{G}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, $\mathcal{K}^{\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ и $\mathcal{P}^{\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ 61

2.9 Кинетические уравнения для мягких кварковых и глюонных возбуждений 66

2.10 Вершинная функция $T^{(2)\,i\,i_1\,a_1\,a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ 69

2.11 Выводы 74

3 Гамильтонов формализм для бозе-возбуждений в КГП: рассеяние плазмона на жёстких частицах 78

3.1 Гамильтониан взаимодействия плазмонов и жёсткой частицы . . . 78
3.2 Каноническое преобразование 83
3.3 Исключение "несущественного" гамильтониана $H^{(3)}$. Эффективный гамильтониан четвёртого порядка 86
3.4 Корреляционная функция четвёртого порядка 91
3.5 Кинетическое уравнение для мягких глюонных возбуждений . . . 93
3.6 Первый момент относительно цвета кинетического уравнения (3.51) 94
3.7 Второй момент относительно цвета кинетического уравнения (3.51) 96
3.8 Уравнение для среднего значения цветного заряда $\mathcal{Q}^d$ 99
3.9 Система кинетических уравнений для мягких глюонных возбуждений 102
3.10 Взаимодействие бесконечно узких пакетов 106
3.11 Выводы 112

4 Классическая матрица рассеяния для жёстких и мягких бозе-возбуждений 114

4.1 Классическая матрица рассеяния 114
4.2 Рассеяние плазмона на жёсткой цветозаряженной частице 117
4.3 Явный вид классической матрицы рассеяния 120
4.4 Потери энергии цветозаряженной частицы в КХД плазме 123
4.5 Эффективный ток 124
4.6 Выражение для потери энергии жёсткой частицы 127
4.7 Оценка потерь энергии 130
4.8 Выводы 132

5 Гамильтонов формализм для бозе-возбуждений в КГП: тормозное излучение плазмонов 134

5.1 Гамильтониан взаимодействия плазмонов и двух жёстких частиц 134
5.2 Канонические преобразования 137
5.3 Эффективный гамильтониан пятого порядка $\mathcal{H}^{(5)}$ 139
5.4 Многовременная теория возмущений 144

5.5 Матричное кинетическое уравнение для мягких глюонных возбуждений 147
5.6 Первый и второй моменты по цвету матричного кинетического уравнения 150
5.7 Выводы 154

Заключение **156**

A Эффективные трёх- и четырёхглюонные вершины и глюонный пропагатор **159**

B Эффективные кварк-глюонные вершины и кварковый пропагатор **161**

C Первая система условий каноничности **164**

D Вторая система условий каноничности **167**

E Следы произведений генераторов в присоединённом представлении **169**

F Построение точного решения системы (3.93) **171**

Список литературы **176**

Введение

Актуальность работы. Известно, что в классической теории электронионной плазмы слабая турбулентность подразделяется на два типа (см., например, [1]). Первый тип вызван процессами рассеяния волн на частицах плазмы. Второй – порождается процессами распада, слияния и взаимного рассеяния волн друг на друге, при которых не происходит обмен энергией между частицами и волнами. В работах [2–7] были подробно исследованы уравнения динамики простейших коллективных возбужденных состояний (ленгмюровских плазмонов) в электронно-ионной плазме. Рассматриваемые уравнения описывают процессы упругого рассеяния между плазмонами.

В настоящее время разработка теории, способной описать новое фундаментальное состояние материи — кварк-глюонную плазму (КГП), вызывает большой интерес. Такая плазма, состоящая из асимптотически свободных кварков, антикварков и глюонов (см., например, обзор [8]), может образовываться при столкновениях ультрарелятивистских тяжёлых ядер. Исследования показывают, что в пределе высоких температур неабелева плазма хорошо описывается эффективной теорией возмущений E. Braaten и R.D. Pisarski [9] (так называемое приближение жёстких температурных петель (HTL)), которая была сформулирована J.-P. Blaizot и E. Iancu на языке кинетических уравнений [10]. Кварк-глюонную плазму можно рассматривать как состоящую из подсистемы жёстких термальных кварков и глюонов и подсистемы мягких плазменных возбуждений, между которыми происходит взаимный обмен энергией. В высокотемпературной кварк-глюонной плазме существуют два вида коллективных плазменных возбуждений: с поперечной поляризацией и с продольной поляризацией (*плазмоны*). В отсутствие внешнего цветного магнитного или электрического полей матрица плотности коллективных глюонных возбуждений является диагональной, в связи с чем эти возбуждения следует считать бесцветными.

Кроме того, хорошо известно, что в высокотемпературной неабелевой плазме, содержащей безмассовые кварки (антикварки), дисперсионные соотношения для возбуждений мягких фермионов имеют две независимые ветви [11–13]. Первая – нормальные моды возбуждения, в которых соотношение между киральностью и спиральностью такое же, как и при нулевой температуре. Вторая ветвь описывает чисто коллективные возбуждения, в которых обычное соотношение между киральностью и спиральностью заменяется обратным [14]. По аналогии с плазмонной (продольной) модой глюонов, имеющих чисто коллективный характер, эта абнормальная мода была названа *плазмино* [15].

В работе [16] авторы, основываясь на предложенном в [9, 10] приближении, представили кинетическое описание процессов нелинейного взаимодействия бесцветных и цветных плазминов и плазмонов, в основе которого лежит вычисление порождающих эти процессы эффективных токов, с помощью которых далее определяются матричные элементы нелинейных взаимодействий между произвольным (четным) числом бесцветных плазмонов. В данной диссертационной работе развит альтернативный подход к кинетическому описанию нелинейной динамики плазминов и плазмонов, базирующийся на классическом формализме Гамильтона, применимом к системам с распределенными параметрами, предложенный В. Е. Захаровым и др. [5–7, 17–20]. Этот подход имеет особую ценность в том, что дает универсальный алгоритм построения общей теории волн в нелинейных средах с дисперсией, рассматривая все волновые процессы с единой точки зрения, не учитывая конкретную специфику среды. В диссертационной работе в качестве такой нелинейной среды выступает высокотемпературная плазма с неабелевым типом взаимодействия.

Основой формализма В. Е. Захарова и др. в нашем случае является то, что в рамках HTL-приближения, уравнения для описания бесстолкновительной высокотемпературной плазмы, имеют гамильтонову структуру, которая была определена в статьях V.P. Nair [21, 22], J.-P Blaizot и E. Iancu [23]. На основании этого, для слабовозбуждённых состояний нам удалось разработать независимый метод для вывода кинетических уравнений для возбужденных состояний плазмы мягких продольно-поляризованных глюонных плазменных возбуждений и для мягких кварковых абнормальных мод возбуждений. Матричные

элементы плазмон-плазмонного взаимодействия при гамильтоновом описании получаются посредством специальных канонических преобразований, которые упрощают гамильтонианы взаимодействия между плазмонами и плазминами.

Далее, после построения гамильтонова описания нелинейного взаимодействия мягких коллективных возбуждений КГП был сделан следующий шаг в обобщении теории, а именно, включение в рассмотрение жёстких возбуждений КГП [24]. Такое обобщение позволило формально полностью замкнуть в единой схеме описания практически все процессы нелинейного взаимодействия в такой сложной среде как высокотемпературная кварк-глюонная плазма. Кроме того, этот шаг был важен и с точки зрения феноменологических приложений, главным образом для изучения процессов потерь энергии высокоэнергетических цветозаряженных партонов (кварков, антикварков и глюонов), проходящих сквозь горячую КХД среду, возможности возникновения турбулентных состояний, определения направления спектральной перекачки энергии плазменных возбуждений и т.п..

В свете вышесказанного, актуальность представленного в данной работе направления исследования представляется достаточно высокой.

Цель данного исследования состоит в разработке классического гамильтонова подхода, позволяющего получить самосогласованное описание нелинейных процессов взаимного рассеяния мягких коллективных бозе- и ферми-возбуждений в кварк-глюонной плазме, с дальнейшим обобщением на процессы рассеяния мягких возбуждений на жёстких тестовых частицах.

Для достижения цели решались следующие задачи:

1. Построение классического гамильтонова формализма для описания нелинейной динамики взаимодействия мягких бозонных (глюонных) и фермионных (кварк-антикварковых) возбуждений неабелевой плазмы между собой.

2. Включение в общий гамильтонов формализм процессов взаимодействия коллективных бозе-, ферми- и антиферми-возбуждений кварк-глюонной плазмы с жёсткими термальными (или внешними) цветозаряженными партонами.

3. Построение гамильтонового формализма, описывающего процесс взаимодействия жёсткой цветозаряженной частицы с целым спином с мягкими бозе-возбуждениями кварк-глюонной плазмы.

4. Вычисление эффективной амплитуды рассеяния плазмона на высокоэнергичной цветной частице и вывод соответствующей системы кинетических уравнений для плотности числа плазмонов и эволюционного уравнения для среднего значения классического цветного заряда жёсткой частицы.

5. Приложение развитой гамильтоновой теории мягких и жёстких возбуждений высокотемпературной плазмы с неабелевым типом взаимодействия к задаче вычисления потерь энергии высокоэнергетических внешних партонов, проходящих сквозь горячую КХД среду.

6. Разработка классического гамильтонова подхода к описанию процесса тормозного излучения цветных плазмонов в кварк-глюонной плазме.

Научная новизна

1. Впервые рассмотрено систематическое построение (псевдо)классического гамильтонова формализма для описания нелинейной динамики мягких бозе, ферми- и антиферми-возбуждений между собой и процессов взаимодействия с жёсткими цветозаряженными частицами в высокотемпературной плазме с неабелевым типом взаимодействия.

2. Для построения искомого формализма и корректного учета кваркового и антикваркового секторов мягких плазменных возбуждений впервые введено понятие суперскобки Пуассона для систем с распределенными параметрами, с использованием канонически-сопряженных нормальных координат, принимающих значения в алгебре Грассмана.

3. Впервые предложено обобщение классического гамильтонова формализма для кварк-глюонной плазмы на случай учета взаимодействия мягких и жёстких мод плазменных возбуждений между собой, процессов их взаимного рассеяния и нелинейного затухания Ландау. Для жёсткой частицы с целым спином скобки Ли-Пуассона были обобщены на случай сплошной среды, содержащей обычные полевые бозонные и фермионные переменные, а также неабелев цветной заряд.

4. В рамках метода Захарова-Шульмана впервые была получена классическая матрица рассеяния для взаимодействия жёстких и мягких возбуждений в кварк-глюонной плазме, а также в рамках классического формализма Гамильтона предложена процедура вывода общего выражения потери энергии быстрой цветной частицы при рассеянии на мягких бозе-возбуждениях кварк-глюонной плазмы.

5. Впервые в рамках гамильтоновой волновой теории определена эффективная амплитуда, описывающая процесс тормозного излучения мягких продольно-поляризованных глюонных возбуждений. Получены система кинетических уравнений для плотности числа тормозных плазмонов и самосогласованная нелинейная система уравнений движения для средних значений двух неабелевых зарядов сталкивающихся частиц.

Научная и практическая значимость работы. Результаты представленного исследования позволяют значительно расширить область применения общей гамильтоновой теории нелинейного взаимодействия волн в средах с дисперсией, включив в неё принципиально новое состояние материи, а именно, плазменное состояние с неабелевым типом взаимодействия. Разработанный подход имеет определенный интерес не только с точки зрения построения общей формальной гамильтоновой теории, но и в качестве феноменологических приложений, в частности, диагностики кварк-глюонной плазмы путем анализа потерь энергии жёстких цветозаряженных партонов, распространяющихся в КГП.

Методология и методы исследования. Для решения поставленной задачи были использованы методы кинетической теории и неравновесной статистической физики; классический гамильтонов формализм для построения волновой теории в нелинейных средах с дисперсией, разработанный В.Е. Захаровым и др.; эффективная теория Braaten-Pisarski, применимая к высокотемпературной неабелевой плазме (т. н. приближение «жёстких температурных петель»); а также метод Захарова–Шульмана, используемый для вычисления классической матрицы рассеяния гамильтоновой волновой системы общего вида. При вычислении потерь энергии использовался метод, применяемый в теории обычной, т. е. электрон-ионной плазмы, с необходимым обобщением на цветовую степень свободы мягких и жёстких возбуждений в КГП.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Подход к построению кинетического уравнения типа Больцмана, описывающего процесс упругого рассеяния коллективных продольно-поляризованных возбуждений (плазмонов) друг на друге в кварк-глюонной плазме и эффект нелинейного затухания Ландау.

2. (Псевдо)классическая гамильтонова теория для упругого рассеяния коллективных кварк-антикварковых возбуждений (плазмино) друг на друге и на плазмонах в высокотемпературной кварк-глюонной плазме.

3. Модель, описывающая, в рамках гамильтонова формализма, взаимодействие классической высокоэнергетической тестовой заряженной частицы, распространяющейся в высокотемпературной КГП, с коллективными продольно-поляризованными глюонными возбуждениями.

4. Вывод общей формулы потерь энергии быстрой цветозаряженной частицы при её рассеянии на мягких бозе-возбуждениях неабелевой плазмы с использованием классической $\mathcal{S}$-матрицы рассеяния.

5. Модель, описывающая на основе гамильтоновой волновой теории процесс тормозного излучения цветного плазмона при рассеянии двух жёстких цветных частиц друг на друге в горячей кварк-глюонной плазме.

Достоверность результатов. Достоверность результатов, представленных в диссертации, обеспечивается адекватным использованием математического аппарата, методологии общего канонического формализма, обоснованных методов моделирования физических процессов в кварк-глюонной плазме, а также использованием хорошо апробированных в теории абелевой плазмы методик исследования волновых процессов.

Личный вклад автора. Диссертационная работа излагает и обобщает результаты, полученные лично автором или при его участии. Автор участвовал в разработке построения (псевдо)классического гамильтонова формализма для самосогласованного описания нелинейных процессов рассеяния мягких коллективных бозе- и ферми-возбуждений в горячей кварк-глюонной плазме. Соискатель предложил обобщение данного формализма на процессы рассеяния

мягких возбуждений на жёстких цветозаряженных частицах и процессы тормозного излучения бозонных колебаний при взаимодействии тестовых частиц между собой. Автору принадлежит приложение развитой гамильтоновой теории мягких и жёстких возбуждений кварк-глюонной плазмы к задаче вычисления потерь энергии высокоэнергетических цветозаряженных частиц, проходящих сквозь горячую КХД среду. Анализ полученных результатов был выполнен автором совместно с соавторами.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на международных конференциях «Ляпуновские чтения» (Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 2021-2025 гг.), международной конференции, посвященной столетию Ефима Фрадкина (Москва, ФИАН, 2024 г.), международных конференциях «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложение (DYSC)» (Иркутск, 2023-2025 гг.).

Исследования проводились в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ гос. регистрации 121041300058-1) и грантов для аспирантов и молодых сотрудников ИГУ (темы 091-21-306, 091-24-303).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в семи статьях в научных изданиях, которые включены в список ВАК и международные реферативные базы данных Scopus и Web of Science.

Статьи в журналах, индексируемых в Web of Science:

A1. Markov Yu.A. Hamiltonian formalism for Fermi excitations in a plasma with a non-Abelian interaction / Yu.A. Markov, M.A. Markova, N.Yu. Markov // International Journal of Modern Physics A. – 2023. – Vol. 38. – P. 2350015. – DOI: 10.1142/S0217751X2350015X.

A2. Markov Yu.A. Hamiltonian formalism for Bose excitations in a plasma with a non-Abelian interaction I: Plasmon – hard particle scattering / Yu.A. Markov, M.A. Markova, N.Yu. Markov // Nuclear Physics A. – 2024. – Vol. 1048. – P. 122903. – DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2024.122903.

A3. Markov Yu.A. Classical scattering matrix for hard and soft Bose-excitations in a non-Abelian plasma within the Hamiltonian formalism / Yu.A. Markov, M.A.

Markova, D.M. Gitman, N.Yu. Markov // European Physical Journal Plus. – 2025. – Vol. 140. – P. 1060. – DOI: 10.1140/epjp/s13360-025-06982-x.

Статьи в журналах из списка ВАК:

A4. Марков Ю.А. Гамильтонов формализм для бозе-возбуждений в плазме с неабелевым типом взаимодействия / Ю.А. Марков, М.А. Маркова, Н.Ю. Марков, Д.М. Гитман // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2020. – Т. 157, Вып. 2. – С. 327–341. – DOI: 10.31857/S004445102002011X.

A5. Марков Ю.А. Гамильтонов формализм для коллективных фермионных волн в кварк-глюонной плазме / Ю.А. Марков, М.А. Маркова, Н.Ю. Марков // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2021. – Т. 64, № 12. – С. 68-78. – DOI: 10.17223/00213411/64/12/68.

A6. Марков Ю.А. Гамильтонов формализм для коллективных бозонных волн в кварк-глюонной плазме: рассеяние плазмонов на жёсткой цветной частице / Ю.А. Марков, М.А. Маркова, Н.Ю. Марков // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2023. – Т. 66, № 12. – С. 151-165. – DOI: 10.17223/00213411/66/12/18.

A7. Марков Ю.А. Гамильтонов формализм для коллективных бозонных волн в кварк-глюонной плазме: тормозное излучение плазмона / Ю.А. Марков, М.А. Маркова, Н.Ю. Марков // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2026. – Т. 69, № 6. – С. 117–132. – DOI: 10.17223/00213411/69/6/14.

Иные публикации, в том числе в сборниках трудов конференций:

1. Марков Ю.А. Гамильтонов формализм для жёстких и мягких возбуждений в плазме с неабелевым взаимодействием / Ю.А. Марков, М.А. Маркова, Н.Ю. Марков // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2024. – Т. 234. – С. 143-158. – DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-143-158.
2. Марков Ю.А. О точном решении уравнений эволюции для двух взаимодействующих узких волновых пакетов, распространяющихся в неабелевой плазме / Ю.А. Марков, М.А. Маркова, Н.Ю. Марков // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2024. – Т. 234. – С. 159–169. – DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-159-169.

3. Markov Yu.A. Energy loss of a high-speed color particle in non-Abelian plasma within the framework of the Hamiltonian formalism / Yu.A. Markov, M.A. Markova, N.Yu. Markov // Journal of Mathematical Sciences. – 2025. – Vol. 293, No. 3. – P. 396-403. – DOI: 10.1007/s10958-025-08010-w.

4. Markov Yu.A. Classical scattering matrix for hard and soft excitations in a plasma with non-Abelian interaction / Yu.A. Markov, M.A. Markova, N.Yu. Markov // Journal of Mathematical Sciences. – 2025. – Vol. 292, No. 5. – P. 561-569. – DOI: 10.1007/s10958-025-07947-2.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 186 страниц, включая 12 рисунков и 1 таблицу. Список литературы включает 119 наименований.

Краткое содержание работы

Во **Введении** сформулированы цель и задачи работы, обоснована актуальность темы исследования. Указана её научная новизна и научно-практическая значимость, обсуждаются методы и подходы к решению поставленных задач. Перечислены основные научные положения, выносимые на защиту. Представлены сведения об апробации работы и публикациях по теме диссертации. Излагается краткое содержание диссертационной работы.

В **главе 1** изложена общая методика, разработанная В. Е. Захаровым и др. для построения волновой теории в нелинейных средах с дисперсией. Предложен гамильтонов подход для коллективных продольно-поляризованных бесцветных возбужденных состояний (плазмонов) в высокотемпературной КГП. В явном виде выведено каноническое преобразование, с помощью которого можно упростить гамильтониан взаимодействия мягких глюонных возбуждений и таким образом определить новый эффективный гамильтониан. Построено кинетическое уравнение типа Больцмана, описывающее упругое рассеяние коллективных продольных поляризованных возбуждений в глюонной плазме, а также эффект нелинейного затухания Ландау.

Основные результаты главы 1 опубликованы в работе [A4].

Глава 2 посвящена обсуждению способов нахождения кинетического уравнения типа Больцмана, которое описывает упругое рассеяние плазминов

на плазмонах в кварк-глюонной плазме. Выполнено обобщение пуассоновской суперскобки, включающей как коммутирующие, так и антикоммутирующие переменные, на случай сплошной среды и представлены соответствующие уравнения Гамильтона. Проведено сравнение эффективной амплитуды взаимодействия плазминов и плазмонов, полученной на основе классической теории Гамильтона, с соответствующим матричным элементом, найденным на основе высокотемпературной КХД в приближении так называемых жёстких температурных петель. Определен явный вид вершинных и коэффициентных функций в эффективных амплитудах и в канонических преобразованиях. Получен явный вид эффективных гамильтонианов четвертого порядка, описывающих процесс упругого рассеяния плазмина на плазмине, а также плазмина на плазмоне.

Основные результаты главы 2 опубликованы в работах [A1, A5].

В **главе 3** изложенный выше общий подход применяется для процессов взаимодействия коллективных продольно-поляризованных глюонных возбуждений (плазмонов) с классической тестовой цветной частицей, проходящей через высокотемпературную кварк-глюонную плазму. Предложено обобщение скобок Ли–Пуассона на случай непрерывной среды с бозонными нормальными переменными поля и неабелевым цветным зарядом, а также приведены соответствующие уравнения Гамильтона. Выведены канонические преобразования, одновременно включающие степени свободы мягких коллективных возбуждений бозонов и степени свободы жёстких пробных частиц, а также полная система условий каноничности этих преобразований. Получена явная форма эффективного гамильтониана четвертого порядка, описывающего процесс упругого рассеяния плазмонов на жёсткой частице, и кроме того, получена система уравнений типа Больцмана, которая учитывает также эволюцию среднего значения цветного заряда жёстких частиц.

Основные результаты главы 3 опубликованы в работах [A2, A6].

В главе 4, на основе метода Захарова-Шульмана, вычислена классическая матрица рассеяния для процесса взаимодействия жёстких и мягких возбуждений в плазме с неабелевым взаимодействием. Классическая матрица рассеяния определяется в виде интегро-степенного ряда наиболее общего вида, разложенного по степеням асимптотических значений канонических бозонных переменных, которые описывают мягкие глюонные возбуждения в системе, а

также по степеням цветного заряда жёстких пробных частиц. В классической гамильтоновой формулировке представлена общая формула потерь энергии при рассеянии быстрой цветной заряженной частицы на мягких бозонных возбуждениях в кварк-глюонной плазме. Найден эффективный ток для рассматриваемого процесса рассеяния, а также проанализирована его связь с классической матрицей рассеяния. Получена формула для потери энергии быстрой цветной частицы при её распространении в высокотемпературной кварк-глюонной плазме.

Основные результаты главы 4 опубликованы в работе [А3].

В главе 5 предложена гамильтонова теория для коллективных продольно поляризованных мягких возбуждений неабелевой плазмы, взаимодействующих с двумя высокоэнергетическими цветозаряженными частицами. Найден явный вид эффективного гамильтониана пятого порядка, описывающего процесс тормозного излучения цветного плазмона при рассеянии двух жёстких цветных частиц друг на друге. Представлено обобщение скобки Ли-Пуассона на случай горячей КХД среды, включающее две независимые компоненты бозонной нормальной переменной поля и два неабелевых цветных заряда, а также приведены соответствующие уравнения Гамильтона. Предложен вывод двух систем условий каноничности, основанный на скобке Ли-Пуассона. Для построения кинетических уравнений используется теория возмущений многовременного формализма. Построена самосогласованная система четырех кинетических интегро-дифференциальных уравнений больцмановского типа с учётом временной эволюции усреднённых цветных зарядов жёстких частиц.

Основные результаты главы 5 опубликованы в работе [А7].

В **Заключении** сформулированы основные результаты проведенного диссертационного исследования.

Глава 1

Гамильтонов формализм для мягких бозе-возбуждений

1.1 Гамильтониан взаимодействия бесцветных плазмонов

В данной главе будем рассматривать общий поход В.Е. Захарова и др. применительно к высокотемпературной кварк-глюонной плазме в квазиклассическом приближении. Потенциал калибровочного глюонного поля в данной системе представляет собой матрицу размерности $N_c \times N_c$ в цветовом пространстве: $A_\mu(x) = A^a_\mu(x)\, t^a$. Он содержит $N_c^2 - 1$ эрмитовых генераторов t^a цветовой группы $SU(N_c)$ в фундаментальном представлении[1]. Тензор напряженности $F_{\mu\nu}(x) = F^a_{\mu\nu}(x)\, t^a$ с

$$F^a_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu,$$

подчиняется уравнению Янга-Миллса в A_0-калибровке:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) - ig[A_\mu(x), F^{\mu\nu}(x)] - \xi_0^{-1} n_\mu n^\nu A_\nu(x) = -j^\nu(x).$$

Здесь ξ_0 - калибровочный параметр, а 4-вектор n_μ является глобальной 4-скоростью плазмы: u_μ. Цветной ток j^ν определен как обычно следующим образом:

$$j^\nu(x) = g t^a \int d^4p\, p^\nu \,\mathrm{Tr}\,(T^a f_g(x,p)),$$

где $x = (t, \mathbf{x})$ – пространственно-временная переменная рассматриваемой системы и $(T^a)^{bc} \equiv -if^{abc}$ – генераторы в присоединенном представлении. Функция

[1]Цветной индекс a принимает значения от 1 до $N_c^2 - 1$, а векторный индекс μ изменяется от 0 до 3. Всюду далее по дважды повторяющимся индексам, по умолчанию, подразумевается суммирование и используется $\hbar = c = 1$.

распределения глюонов $f_g = f_g(x,p)$ представляет собой эрмитову матрицу $(N_c^2-1)\times(N_c^2-1)$ в цветовом пространстве.

В равновесной высокотемпературной неабелевой плазме присутствуют поперечно-поляризованное и продольно-поляризованное мягкие бозонные поля (см., например, [8,25]). Для простоты будем рассматривать процесы, связанные только с продольно-поляризованными плазменными возбуждениями (плазмонами), являющимися истинно коллективными эффектами среды, которые не имеют аналогов в обычной квантовой теории поля.

Продольную часть потенциала калибровочного поля представим в виде разложения

$$\hat{A}^a_\mu(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left(\frac{Z^l(\mathbf{k})}{2\omega^l_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}\left\{\epsilon^{\ l}_\mu\ \hat{a}^a_{\mathbf{k}}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \epsilon^{*l}_\mu\ \hat{a}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right\}, \quad k_0 = \omega^l_{\mathbf{k}}\,, \qquad (1.1)$$

где $\epsilon^{\ l}_\mu = \epsilon^{\ l}_\mu(\mathbf{k})$ – вектор поляризации продольного плазмона. Явный вид данного вектора зависит от выбора калибровки. Множитель $Z^l(\mathbf{k})$ представляет собой вычет эффективного глюонного пропагатора в плазмонном полюсе. Символы $*$ и $\dagger$ обозначают комплексное и эрмитово сопряжения, соответственно. Будем считать коэффициенты $\hat{a}^{\ a}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{a}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}$ квазичастичными операторами уничтожения и рождения плазмонов, которые подчинятся стандартным коммутационным соотношениям для бозонных операторов:

$$\left[\hat{a}^{\ a}_{\mathbf{k}},\, \hat{a}^{\ b}_{\mathbf{k}'}\right] = \left[\hat{a}^{\dagger a}_{\mathbf{k}},\, \hat{a}^{\dagger b}_{\mathbf{k}'}\right] = 0\ , \quad \left[\hat{a}^{\ a}_{\mathbf{k}},\, \hat{a}^{\dagger b}_{\mathbf{k}'}\right] = \delta^{ab}(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \qquad (1.2)$$

Многоплазмонные состояния получаются в результате многократного действия оператора $\hat{a}^{\dagger\ a}_{\mathbf{k}}$ на вакуумное состояние $|\,0\rangle$, удовлетворяющее условию

$$\hat{a}^{\ a}_{\mathbf{k}}|\,0\rangle = 0.$$

Вследствие этого, под вакуумом понимается основное невозбужденное состояние системы (состояние, не имеющее элементарных коллективных возбуждений). Для операторов $\hat{a}^{\ a}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{a}^{\dagger\ a}_{\mathbf{k}}$ отличны от нуля только те матричные элементы, которые соответствуют изменению на единицу числа плазмонов.

Уравнение Гейзенберга на оператор $\hat{a}^a_{\mathbf{k}}$

$$\frac{\partial \hat{a}^a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = i\left[\widehat{H}, \hat{a}^a_{\mathbf{k}}\right] \qquad (1.3)$$

является квантово-механическим аналогом гамильтонова уравнения. Здесь $\widehat{H}$ – гамильтониан системы плазмонов. Запишем его в виде: $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_{int}$, где

$$\widehat{H}_0 = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ \omega_{\mathbf{k}}^{l}\, \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger\, a}\, \hat{a}_{\mathbf{k}}^{a} \tag{1.4}$$

- гамильтониан невзаимодействующих плазмонов, а $\widehat{H}_{int}$ – гамильтониан взаимодействия. Дисперсионное соотношение для плазмонов $\omega_{\mathbf{k}}^{l}$ удовлетворяет уравнению [25]:

$$\mathrm{Re}\,{}^{*}\Delta^{-1\,l}(\omega, \mathbf{k}) = 0, \tag{1.5}$$

где

$${}^{*}\Delta^{-1\,l}(\omega, \mathbf{k}) = k^2\left(1 + \frac{3\omega_{pl}^2}{\mathbf{k}^2}\left[1 - F\left(\frac{\omega}{|\mathbf{k}|}\right)\right]\right),\ F(x) \equiv \frac{x}{2}\left[\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - i\pi\theta(1-|x|)\right]$$

– обратный HTL-рессумированный продольный пропагатор, $\omega_{pl}^2 = g^2(2N_c + N_f)T^2/18$ – квадрат плазменной частоты, T – температура системы, g – постоянная сильного взаимодействия и N_f представляет собой число флейверов безмассовых кварков. Дисперсионное уравнение (1.5) получается из требования существования полюса для "скалярного" продольного пропагатора ${}^{*}\Delta^{l}(k)$ в (A.9), который включает в себя все эффекты среды в лидирующем порядке по g. Уравнение (1.5) справедливо только в случае, когда внешняя частота ω и импульс $\mathbf{k}$ являются величинами порядка gT, то есть лежат в области "мягкой" шкалы [26]. В условиях, когда константа сильной связи g мала, будем иметь $\omega,\ |\mathbf{k}| \ll T$.

Гамильтониан взаимодействия в приближении малых амплитуд представим в виде формального интегро-степенного ряда по степеням $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{a}$ и $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger a}$:

$$\widehat{H}_{int} = \widehat{H}_3 + \widehat{H}_4 + \ \ldots\ .$$

Здесь гамильтонианы взаимодействия третьего и четвёртого порядков имеют структуру вида:

$$\widehat{H}_3 = \int \frac{d\mathbf{k}\ d\mathbf{k}_1\ d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^9}\left\{V_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{\ a\ a_1\ a_2}\ \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger\, a}\ \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^{a_1}\ \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + V_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{*a\ a_1\ a_2}\ \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger\, a_1}\ \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^{\dagger\, a_2}\ \hat{a}_{\mathbf{k}}^{a}\right\} \times \tag{1.6}$$

$$\times\, (2\pi)^3\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) +$$

$$+\ \frac{1}{3}\int \frac{d\mathbf{k}\ d\mathbf{k}_1\ d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^9}\left\{U_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{\ a\ a_1\ a_2}\ \hat{a}_{\mathbf{k}}^{a}\ \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^{a_1}\ \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + U_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{*a\ a_1\ a_2}\ \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger\, a}\ \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger\, a_1}\ \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^{\dagger\, a_2}\right\} \times$$

$$\times (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\ ,$$

$$\widehat{H}_4=\frac{1}{2}\int\frac{d\mathbf{k}\ d\mathbf{k}_1\ d\mathbf{k}_2\ d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^{12}}\ T_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}^{\ a\ a_1\ a_2\ a_3}\ \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger\, a}\ \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger\, a_1}\ \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^{a_2}\ \hat{a}_{\mathbf{k}_3}^{a_3}\ (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3) \tag{1.7}$$

и т.д.. В выражении (1.7) сохранен только существенный (по терминологии В.Е. Захарова и др.) вклад, поскольку резонансные условия

$$\begin{cases}\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0\\ \omega_{\mathbf{k}}^l+\omega_{\mathbf{k}_1}^l+\omega_{\mathbf{k}_2}^l+\omega_{\mathbf{k}_3}^l=0\ ,\end{cases}\qquad\begin{cases}\mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3\\ \omega_{\mathbf{k}}^l=\omega_{\mathbf{k}_1}^l+\omega_{\mathbf{k}_2}^l+\omega_{\mathbf{k}_3}^l\end{cases}$$

не имеют решений для плазмонного спектра, который определяется дисперсионным уравнением (1.5).

Следует отметить, что подобного рода представление гамильтониана взаимодействия, в рамках квантовой теории поля, рассматривалось в монографии А.С. Шварца [27] для скалярных полей.

Коэффициентные функции $V_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}^{\ a\ a_1\ a_2}$, $U_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}^{\ a\ a_1\ a_2}$ и $T_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}^{\ a\ a_1\ a_2\ a_3}$, обладая естественной симметрией:

$$V_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}^{\ a\ a_1\ a_2}=V_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_1}^{\ a\ a_2\ a_1}\ ,\quad U_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}^{\ a\ a_1\ a_2}=U_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_1}^{\ a\ a_2\ a_1}=U_{\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}}^{\ a_1\ a_2\ a}\ , \tag{1.8}$$

$$T_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}^{\ a\ a_1\ a_2\ a_3}=T_{\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}^{\ a_1\ a\ a_2\ a_3}=T_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_3,\ \mathbf{k}_2}^{\ a\ a_1\ a_3\ a_2}=T_{\mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3,\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}_1}^{*a_2\ a_3\ a\ a_1}, \tag{1.9}$$

задают конкретные свойства горячей кварк-глюонной плазмы.

Перейдем от операторов $\hat{a}_{\mathbf{k}}^a$ к новым операторам $\hat{c}_{\mathbf{k}}^a$ по следующему правилу:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^a=\hat{c}_{\mathbf{k}}^a+ \tag{1.10}$$

$$+\int\frac{d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^6}\left[V^{(1)\ a\ a_1\ a_2}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}\ \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{a_1}\ \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2}+V^{(2)\ a\ a_1\ a_2}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}\ \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger\, a_1}\ \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2}+V^{(3)\ a\ a_1\ a_2}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}\ \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger\, a_1}\ \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{\dagger\, a_2}\right]+$$

$$+\int\frac{d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}\left[W^{(1)\ a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\ \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{a_1}\ \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2}\ \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{a_3}+\ldots+W^{(4)\ a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\ \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger\, a_1}\ \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{\dagger\, a_2}\ \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{\dagger\, a_3}\right]$$

$$+\ \ldots\ .$$

Условия каноничности данного преобразования[2]

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta\hat{a}^{\,a}_{\mathbf{k}}}{\delta\hat{c}^{\,c}_{\mathbf{k}'}}\,\frac{\delta\hat{a}^{\,b}_{\mathbf{k}''}}{\delta\hat{c}^{\dagger\,c}_{\mathbf{k}'}}\;-\;\frac{\delta\hat{a}^{\,a}_{\mathbf{k}}}{\delta\hat{c}^{\dagger\,c}_{\mathbf{k}'}}\,\frac{\delta\hat{a}^{\,b}_{\mathbf{k}''}}{\delta\hat{c}^{\,c}_{\mathbf{k}'}}\right\}=0,$$

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta\hat{a}^{\,a}_{\mathbf{k}}}{\delta\hat{c}^{\,c}_{\mathbf{k}'}}\,\frac{\delta\hat{a}^{\dagger\,b}_{\mathbf{k}''}}{\delta\hat{c}^{\dagger\,c}_{\mathbf{k}'}}\;-\;\frac{\delta\hat{a}^{\,a}_{\mathbf{k}}}{\delta\hat{c}^{\dagger\,c}_{\mathbf{k}'}}\,\frac{\delta\hat{a}^{\dagger\,b}_{\mathbf{k}''}}{\delta\hat{c}^{\,c}_{\mathbf{k}'}}\right\}=\delta^{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'')$$

налагают некоторые ограничения на функции ряда (1.10). Коэффициентные функции вида $V^{(1)\;a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}$, $V^{(2)\;a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}$ и $V^{(3)\;a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}$ должны удовлетворять условиям:

$$V^{(2)\;a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}=-2V^{*(1)\;a_2\;a_1\;a}_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}}\;,\quad V^{(3)\;a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}=V^{(3)\;a\;a_2\;a_1}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1}=V^{(3)\;a_1\;a_2\;a}_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}}\;,$$

а функции $W^{(i)}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}$, $i=1,\ldots,4$, - условиям

$$3W^{(1)\;a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}+4\int\left\{V^{*(1)\;a_2\;a\;a'}_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}'}\;V^{*(3)\;a_1\;a_3\;a'}_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}'}-V^{(1)\;a\;a_2\;a'}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}'}V^{(1)\;a'\;a_1\;a_3}_{\mathbf{k}',\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3}\right\}d\mathbf{k}=$$

$$=-\,W^{*(3)\;a_1\;a\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3},$$

$$W^{(2)\;a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}+2\int\left\{V^{(1)\;a\;a_1\;a'}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}'}\;V^{*(1)\;a_3\;a_1\;a'}_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}'}+V^{*(1)\;a'\;a\;a_1}_{\mathbf{k}',\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}\;V^{(1)\;a'\;a_3\;a_2}_{\mathbf{k}',\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2}-\right.$$

$$\left.-V^{*(1)\;a_1\;a\;a'}_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}'}\;V^{(1)\;a'\;a_3\;a_2}_{\mathbf{k}',\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2}-V^{(3)\;a\;a_1\;a'}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}'}\;V^{*(3)\;a_3\;a_2\;a'}_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}'}\right\}d\mathbf{k}'=-W^{*(2)\;a_3\;a_1\;a_2\;a}_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}},$$

$$W^{(3)\;a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}+2\int\left\{V^{(1)\;a_3\;a_1\;a'}_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}'}\;V^{(3)\;a\;a_2\;a'}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}'}+V^{*(1)\;a_1\;a\;a'}_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}'}\;V^{*(1)\;a'\;a_3\;a_2}_{\mathbf{k}',\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2}-\right.$$

$$\left.-\,V^{*(1)\;a_1\;a_3\;a'}_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}'}\;V^{*(1)\;a'\;a\;a_2}_{\mathbf{k}',\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2}-V^{(1)\;a\;a_1\;a'}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}'}\;V^{(3)\;a_3\;a_2\;a'}_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}'}\right\}d\mathbf{k}'=W^{(3)\;a_3\;a_1\;a_2\;a}_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}},$$

$$3W^{(4)\;a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}+4\int\left\{V^{*(1)\;a'\;a\;a_2}_{\mathbf{k}',\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2}\;V^{(3)\;a_3\;a_1\;a'}_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}'}-V^{*(1)\;a'\;a_3\;a_1}_{\mathbf{k}',\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1}\;V^{(3)\;a\;a_2\;a'}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}'}\right\}d\mathbf{k}'$$

$$=3W^{(4)\;a_3\;a_1\;a_2\;a}_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}}.$$

Ввиду специфики дисперсионного уравнения (1.5) в неабелевой плазме резонансные условия вида

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2\\ \omega^l_{\mathbf{k}}=\omega^l_{\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_2},\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=0\\ \omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_2}=0\end{array}\right.\tag{1.11}$$

[2] Что касается вариационных производных по операторам $\hat{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{c}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}$, то их следует понимать как пределы соответствующих функциональных производных по аддитивным классическим добавкам $\varphi^a_{\mathbf{k}}$ и $\varphi^{*a}_{\mathbf{k}}$ к операторам $\hat{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{c}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}$ [28]:

$$\hat{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}\to\hat{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}+\varphi^a_{\mathbf{k}},\quad\hat{c}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}\to\hat{c}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}+\varphi^{*a}_{\mathbf{k}}.$$

не имеют решений, другими словами, спектр продольных плазмонов является нераспадным. В этом случае каноническое преобразование (1.10) позволяет исключить "несущественный" гамильтониан $\widehat{H}_3$ (1.6), если полагать

$$V^{(1)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = -\frac{V^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}}{\omega^l_{\mathbf{k}} - \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2}}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2),$$
$$V^{(3)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = -\frac{U^{*\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}}{\omega^l_{\mathbf{k}} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_2}}\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2). \tag{1.12}$$

Предложенная процедура исключения позволила получить следующую структуру эффективного гамильтониана $\widetilde{\widehat{H}}_4$:

$$\widetilde{\widehat{H}}_4 = \frac{1}{2}\int \frac{d\mathbf{k}\;d\mathbf{k}_1\;d\mathbf{k}_2\;d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^{12}}\;\widetilde{T}^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\;\hat{c}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}\;\hat{c}^{\dagger a_1}_{\mathbf{k}_1}\;\hat{c}^{a_2}_{\mathbf{k}_2}\;\hat{c}^{a_3}_{\mathbf{k}_3}\times \tag{1.13}$$
$$\times\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3),$$

где

$$\widetilde{T}^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3} = T^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3} - \tag{1.14}$$

$$-\;2\;\frac{U^{\,b\;a_2\;a_3}_{-(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3),\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\;U^{*\,b\;a\;a_1}_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1),\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)}+\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}}\;-\;2\;\frac{V^{\,b\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\;V^{*\,b\;a\;a_1}_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}}\;-$$
$$-\;2\;\frac{V^{\,a_1\;a_2\;b}_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\;V^{*\,a_3\;a\;b}_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}}{\omega^l_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_3}}\;-\;2\,\frac{V^{\,a\;a_2\;b}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}-\mathbf{k}_2}\;V^{*\,a_3\;a_1\;b}_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_3}}\;-$$
$$-\;2\,\frac{V^{\,a\;a_3\;b}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}-\mathbf{k}_3}\;V^{*\,a_2\;a_1\;b}_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}}\;-\;2\,\frac{V^{\,a_1\;a_3\;b}_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3}\;V^{*\,a_2\;a\;b}_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2-\mathbf{k}}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}}\;.$$

Полученной эффективной амплитуде можно дать простую диаграммную интерпретацию, которая показана на рис. 1.1. Черный квадрат обозначает эффективную амплитуду $\widetilde{T}^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}$, а волновые линии – плазмоны. Первый график справа на рис. 1.1 определяет непосредственное взаимодействие четырех плазмонов, которое порождается четырехплазмонной амплитудой обычного вида $T^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}$. Остальные – связаны с взаимодействием трех плазмонов, которое порождается амплитудами $U^{\,a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}$ и $V^{\,a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}$ с промежуточными “виртуальными” колебаниями. Условие малости амплитуд в этом случае означает, что справедлива оценка

$$|\,\widetilde{T}^{(4)}||\,c\,|^2 \ll \Big(\mathbf{k}\cdot\partial\omega^l_{\mathbf{k}}/\partial\mathbf{k}\Big). \tag{1.15}$$

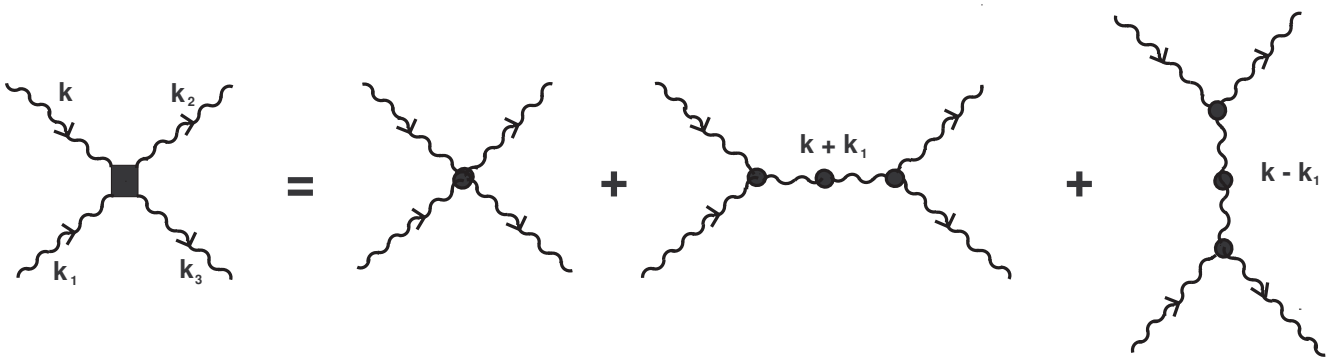


Рисунок 1.1 — Матричный элемент для четырехплазмонного распада

Таким образом, для одного и того же физического процесса существуют два эквивалентных описания гамильтоновой системы бесцветных плазмонов. В первом – можно использовать исходный гамильтонов оператор

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_3 + \widehat{H}_4 + \ \dots\ , \tag{1.16}$$

где $\widehat{H}_0, \widehat{H}_3$ и $\widehat{H}_4$ определены выражениями (1.4), (1.6) и (1.7), соответственно, а во втором – можно использовать гамильтонов оператор $\widetilde{\widehat{H}}$, который получается как результат нелинейного преобразования бозонных операторов рождения и уничтожения, $\hat{a}^{\dagger\,a}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{a}^{\,a}_{\mathbf{k}}$:

$$\widetilde{\widehat{H}} = \widetilde{\widehat{H}}_0 + \widetilde{\widehat{H}}_4 + \ \dots\ , \tag{1.17}$$

где

$$\widetilde{\widehat{H}}_0 = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ \omega^{\,l}_{\mathbf{k}}\, \hat{c}^{\dagger\,a}_{\mathbf{k}}\, \hat{c}^{\,a}_{\mathbf{k}},$$

а оператор $\widetilde{\widehat{H}}_4$ определен видом (1.13). Уравнения Гейзенберга на операторы $\hat{a}^{\,a}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}$ имеют форму, полностью аналогичную (1.3), с соответствующими операторами Гамильтона (1.15) и (1.17).

1.2 Корреляционная функция четвёртого порядка

Гамильтониан (1.13) описывает процесс упругого рассеяния цветных плазмонов друг на друге $2 \to 2$. Уравнения движения для $\hat{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{c}^{\dagger\,b}_{\mathbf{k}}$ определяются соответствующими уравнениями Гейзенберга:

$$\frac{\partial \hat{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = i\Big[\widetilde{\widehat{H}}_0 + \widetilde{\widehat{H}}_4,\ \hat{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}\Big] = -i\omega^{\,l}_{\mathbf{k}}\, \hat{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}\ - \tag{1.18}$$

$$- i\int \frac{d\mathbf{k}_1\ d\mathbf{k}_2\ d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}\ \widetilde{T}^{\ a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\ \hat{c}^{\dagger\,a_1}_{\mathbf{k}_1}\, \hat{c}^{\,a_2}_{\mathbf{k}_2}\, \hat{c}^{\,a_3}_{\mathbf{k}_3}\ (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)$$

и

$$\frac{\partial \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger\, b}}{\partial t} = i\Big[\widetilde{\widehat{H}}_0 + \widetilde{\widehat{H}}_4,\, \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger\, b}\Big] = i\omega_{\mathbf{k}}^{\,l}\, \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger\, b} + \tag{1.19}$$

$$+ i\int \frac{d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}\, \widetilde{T}^{*\ b\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\, \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{a_1}\, \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{\dagger a_2}\, \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{\dagger a_3}\, (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3).$$

В случае отсутствия внешнего поля, они дают возможность получить кинетическое уравнение для плотности $N_{\mathbf{k}}^{ab\,l} \equiv \delta^{ab} N_{\mathbf{k}}^{l}$ числа бесцветных плазмонов.

Если при низкой степени нелинейности (1.15) совокупность волн имеет случайные фазы, то для статистического описания этой совокупности можно ввести корреляционную функцию вида:

$$\langle\, \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger\, a}\, \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\,b} \rangle = \delta^{ab} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') N_{\mathbf{k}}^{l}. \tag{1.20}$$

Следует особо отметить, что функция распределения квазичастиц (плазмонов) $N_{\mathbf{k}}^{l} \equiv N^{l}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)$ зависит не только от импульса плазмона $\hbar\mathbf{k}$, но и от координат $\mathbf{x}$ и времени t. Она имеет смысл только при условии, когда число плазмонов является величиной, медленно меняющейся в пространстве и времени. Это означает, что в диапазоне расстояний порядка длины волны $\lambda = 2\pi/k$ и в течении промежутков времени порядка периода колебаний $T = 2\pi/\omega_{\mathbf{k}}^{l}$, изменение этой функции должно быть намного меньше функции $N_{\mathbf{k}}^{l}$.

Определим далее уравнение для плотности числа плазмонов $N_{\mathbf{k}}^{l}$, исходя из уравнений Гейзенберга (1.18) и (1.19). Умножение уравнений (1.18) и (1.19) на $\hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger\, b}$ и $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\,a}$ справа и слева, соответственно, приводит к уравнению вида:

$$\frac{\partial \hat{c}_{\mathbf{k}}^{a}}{\partial t}\, \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger\, b} = -i\omega_{\mathbf{k}}^{\,l}\, \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\,a}\, \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger\, b} -$$

$$- i\int \frac{d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}\, \widetilde{T}^{\ a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\, \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger\, b}\, \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger\, a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2}\, \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{a_3}\, (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3),$$

$$\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\,a}\, \frac{\partial \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger\, b}}{\partial t} = i\omega_{\mathbf{k}}^{\,l}\, \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\,a}\, \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger\, b} +$$

$$+ i\int \frac{d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}\, \widetilde{T}^{*\ b\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k}',\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\, \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\,a}\, \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{a_1}\, \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{\dagger a_2}\, \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{\dagger a_3}\, (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3).$$

Путем сложения и усреднения двух последних уравнений получаем далее

$$\delta^{ab} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{l}}{\partial t} \;= \tag{1.21}$$

$$= - i\int \frac{d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}\, \Big\{ \widetilde{T}^{\ a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\, I^{\ b\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k}',\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\, (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) -$$

$$- \widetilde{T}^{*\ b\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k}',\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\ I^{a_2\ a_3\ a\ a_1}_{\mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3,\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}_1}\ (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\Big\}.$$

Функция

$$I^{\ a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3} = \langle\, \hat{c}^{\dagger\ a}_{\mathbf{k}}\, \hat{c}^{\dagger\ a_1}_{\mathbf{k}_1}\, \hat{c}^{\ a_2}_{\mathbf{k}_2}\, \hat{c}^{\ a_3}_{\mathbf{k}_3}\,\rangle$$

является четырёхточечной корреляционной функцией. Дифференцируя её по t и принимая во внимание (1.18) и (1.19), запишем уравнение, которое содержит корреляционные функции шестого порядка по операторам $\hat{c}^{\dagger\ a}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{c}^{\ a}_{\mathbf{k}}$ в правой части:

$$\frac{\partial I^{\ a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}}{\partial t} = i\big[\,\omega^l_{\mathbf{k}} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2} - \omega^l_{\mathbf{k}_3}\big]\ I^{\ a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3} + \tag{1.22}$$

$$+ i\int \frac{d\mathbf{k}'_1\ d\mathbf{k}'_2\ d\mathbf{k}'_3}{(2\pi)^9}\ \widetilde{T}^{*\ a\ a'_1\ a'_2\ a'_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}'_1,\ \mathbf{k}'_2,\ \mathbf{k}'_3}\ \langle\, \hat{c}^{\ a'_1}_{\mathbf{k}'_1}\, \hat{c}^{\dagger\ a'_2}_{\mathbf{k}'_2}\, \hat{c}^{\dagger\ a'_3}_{\mathbf{k}'_3}\, \hat{c}^{\dagger\ a_1}_{\mathbf{k}_1}\, \hat{c}^{\ a_2}_{\mathbf{k}_2}\, \hat{c}^{\ a_3}_{\mathbf{k}_3}\,\rangle (2\pi)^3\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}'_3)$$

$$+ i\int \frac{d\mathbf{k}'_1\ d\mathbf{k}'_2\ d\mathbf{k}'_3}{(2\pi)^9}\ \widetilde{T}^{*\ a_1\ a'_1\ a'_2\ a'_3}_{\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}'_1,\ \mathbf{k}'_2,\ \mathbf{k}'_3}\ \langle\, \hat{c}^{\dagger\ a}_{\mathbf{k}}\, \hat{c}^{\ a'_1}_{\mathbf{k}'_1}\, \hat{c}^{\dagger\ a'_2}_{\mathbf{k}'_2}\, \hat{c}^{\dagger\ a'_3}_{\mathbf{k}'_3}\, \hat{c}^{\ a_2}_{\mathbf{k}_2}\, \hat{c}^{\ a_3}_{\mathbf{k}_3}\,\rangle (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}'_3)$$

$$- i\int \frac{d\mathbf{k}'_1\ d\mathbf{k}'_2\ d\mathbf{k}'_3}{(2\pi)^9}\ \widetilde{T}^{\ a_2\ a'_1\ a'_2\ a'_3}_{\mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}'_1,\ \mathbf{k}'_2,\ \mathbf{k}'_3}\ \langle\, \hat{c}^{\dagger\ a}_{\mathbf{k}}\, \hat{c}^{\dagger\ a_1}_{\mathbf{k}_1}\, \hat{c}^{\dagger\ a'_1}_{\mathbf{k}'_1}\, \hat{c}^{\ a'_2}_{\mathbf{k}'_2}\, \hat{c}^{\ a'_3}_{\mathbf{k}'_3}\, \hat{c}^{\ a_3}_{\mathbf{k}_3}\,\rangle (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}'_3)$$

$$- i\int \frac{d\mathbf{k}'_1\ d\mathbf{k}'_2\ d\mathbf{k}'_3}{(2\pi)^9}\ \widetilde{T}^{\ a_3\ a'_1\ a'_2\ a'_3}_{\mathbf{k}_3,\ \mathbf{k}'_1,\ \mathbf{k}'_2,\ \mathbf{k}'_3}\ \langle\, \hat{c}^{\dagger\ a}_{\mathbf{k}}\, \hat{c}^{\dagger\ a_1}_{\mathbf{k}_1}\, \hat{c}^{\ a_2}_{\mathbf{k}_2}\, \hat{c}^{\dagger\ a'_1}_{\mathbf{k}'_1}\, \hat{c}^{\ a'_2}_{\mathbf{k}'_2}\, \hat{c}^{\ a'_3}_{\mathbf{k}'_3}\,\rangle (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}'_3).$$

Выразим корреляционные функции шестого порядка в терминах парных корреляторов. Первую корреляционную функцию в правой части уравнения (1.22) запишем в виде:

$$\langle\, \hat{c}^{\ a'_1}_{\mathbf{k}'_1}\, \hat{c}^{\dagger\ a'_2}_{\mathbf{k}'_2}\, \hat{c}^{\dagger\ a'_3}_{\mathbf{k}'_3}\, \hat{c}^{\dagger\ a_1}_{\mathbf{k}_1}\, \hat{c}^{\ a_2}_{\mathbf{k}_2}\, \hat{c}^{\ a_3}_{\mathbf{k}_3}\,\rangle = \tag{1.23}$$

$$= (2\pi)^9\Big\{\delta^{a_3a'_3}\delta^{a_2a'_2}\delta^{a_1a'_1}\,\delta(\mathbf{k}'_3 - \mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1)\,N^l_{\mathbf{k}_3}N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_1} +$$

$$+ \delta^{a_3a'_3}\delta^{a_1a_2}\delta^{a'_2a'_1}\,\delta(\mathbf{k}'_3 - \mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}'_1)\,N^l_{\mathbf{k}_3}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}'_1} +$$

$$+ \delta^{a'_3a'_1}\delta^{a_1a_3}\delta^{a'_2a_2}\,\delta(\mathbf{k}'_3 - \mathbf{k}'_1)\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2)\,N^l_{\mathbf{k}'_1}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2} +$$

$$+ \delta^{a'_3a'_1}\delta^{a_1a_2}\delta^{a'_2a_3}\,\delta(\mathbf{k}'_3 - \mathbf{k}'_1)\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_3)\,N^l_{\mathbf{k}'_1}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_3} +$$

$$+ \delta^{a'_3a_2}\delta^{a_1a_3}\delta^{a'_2a'_1}\,\delta(\mathbf{k}'_3 - \mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}'_1)\,N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}'_1} +$$

$$+ \delta^{a'_3a_2}\delta^{a'_1a_1}\delta^{a'_2a_3}\,\delta(\mathbf{k}'_3 - \mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_3)\,N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_3}\Big\}.$$

В выражении (1.23) требуемый вклад в искомое кинетическое уравнение дают только первый и последний члены. Подставив их в первый интеграл в правой

части (1.22) и выполнив суммирование по a'_1, a'_2 и a'_3 и интегрирование по $\mathbf{k}'_1$, $\mathbf{k}'_2$ и $\mathbf{k}'_3$, в результате получим

$$i\left\{\widetilde{T}^{*\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3} N^l_{\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}_2} N^l_{\mathbf{k}_3} + \widetilde{T}^{*\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3} N^l_{\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}_2} N^l_{\mathbf{k}_3}\right\}(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3) =$$

$$= 2i\,\widetilde{T}^{*\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3} N^l_{\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}_2} N^l_{\mathbf{k}_3}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3). \qquad (1.24)$$

В качестве примера выпишем явный вид вклада, порождаемого вторым членом в представлении (1.23):

$$N^l_{\mathbf{k}} N^l_{\mathbf{k}_1}\delta(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\,\delta(\mathbf{k}_3-\mathbf{k})\,\delta^{a_1 a_2}\,i\int \widetilde{T}^{*\,a\;b\;b\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}',\,\mathbf{k}',\,\mathbf{k}} N^l_{\mathbf{k}'}\,d\mathbf{k}'.$$

Очевидно, что эти два последних выражения имеют отличную друг от друга структуру.

Обратимся далее ко второй шеститочечной корреляционной функции в (1.22), Здесь в явном виде выписываем только так называемые правильные члены:

$$\langle\, \hat{c}^{\dagger\,a}_{\mathbf{k}}\, \hat{c}^{a'_1}_{\mathbf{k}'_1}\, \hat{c}^{\dagger\,a'_2}_{\mathbf{k}'_2}\, \hat{c}^{\dagger\,a'_3}_{\mathbf{k}'_3}\, \hat{c}^{a_2}_{\mathbf{k}_2}\, \hat{c}^{a_3}_{\mathbf{k}_3}\,\rangle =$$

$$= (2\pi)^9\Big\{\delta^{a\,a'_1}\delta^{a_2 a'_2}\delta^{a_3 a'_3}\delta(\mathbf{k}'_1-\mathbf{k}\,)\delta(\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}'_3-\mathbf{k}_3)\,N^l_{\mathbf{k}} N^l_{\mathbf{k}_2} N^l_{\mathbf{k}_3} + (2\rightleftarrows 3) + \ldots\Big\}.$$

При подстановке данного выражения во второй интеграл в (1.22), приходим к выражению, которое аналогично (1.24):

$$2i\,\widetilde{T}^{*\,a_1\;a\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3} N^l_{\mathbf{k}} N^l_{\mathbf{k}_2} N^l_{\mathbf{k}_3}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3).$$

Проводя подобное рассуждение для третьей и четвертой корреляционных функций в (1.22), получаем, что оставшиеся два члена равны

$$-2i\,\widetilde{T}^{a_2\;a_3\;a\;a_1}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}} N^l_{\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}_3}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)$$

и

$$-2i\,\widetilde{T}^{a_3\;a_2\;a\;a_1}_{\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}} N^l_{\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}_2}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3).$$

С учетом соотношений:

$$\widetilde{T}^{a_2\;a_3\;a\;a_1}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} = \widetilde{T}^{*\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}, \quad \widetilde{T}^{a_3\;a_2\;a\;a_1}_{\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} = \widetilde{T}^{*\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3},$$

вместо (1.22) приходим к уравнению

$$\frac{\partial I^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}}{\partial t} = i\big[\,\omega^l_{\mathbf{k}} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2} - \omega^l_{\mathbf{k}_3}\big]\, I^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3} + \qquad (1.25)$$

$$+ 2i\,\widetilde{T}^{*\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}\Big(N^l_{\mathbf{k}} N^l_{\mathbf{k}_2} N^l_{\mathbf{k}_3} + N^l_{\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}_2} N^l_{\mathbf{k}_3} - N^l_{\mathbf{k}} N^l_{\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}_3} - N^l_{\mathbf{k}} N^l_{\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}_2}\Big)\times$$

$$\times\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3).$$

1.3 Кинетическое уравнение для глюонных возбуждений

Сейчас обратимся непосредственно к выводу кинетического уравнения для плазмонов. Самосогласованная система, состоящая из двух уравнений (1.21) и (1.25), определяет изменение во времени плотности числа плазмонов $N^l_{\mathbf{k}}$. С целью упрощения задачи в уравнении (1.25) будем пренебрегать членом с производной по времени в сравнении с членом, который содержит разность собственных частот волновых пакетов, тогда вместо (1.25) получим

$$I^{\;a\;\;a_1\;\;a_2\;\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3} \simeq N^l_{\mathbf{k}} N^l_{\mathbf{k}_1} (2\pi)^6 \Big[\delta^{a\,a_2}\delta^{a_1\,a_3}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)+\delta^{a\,a_3}\delta^{a_1\,a_2}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\Big]$$

$$- \frac{2}{\Delta\omega - i0}\, \widetilde{T}^{*\;a\;\;a_1\;\;a_2\;\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3} \Big(N^l_{\mathbf{k}} N^l_{\mathbf{k}_2} N^l_{\mathbf{k}_3} + N^l_{\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}_2} N^l_{\mathbf{k}_3} - N^l_{\mathbf{k}} N^l_{\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}_3} - N^l_{\mathbf{k}} N^l_{\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}_2}\Big) \times$$
$$\times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3),$$

где

$$\Delta\omega \equiv \omega^l_{\mathbf{k}} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2} - \omega^l_{\mathbf{k}_3}.$$

Первый член в правой части, отвечающий некоррелированным волнам (чисто гауссовым флуктуациям), является решением однородного уравнения для функции $I^{\;a\;\;a_1\;\;a_2\;\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}$. Второй член описывает отклонение четырёхточечной корреляционной функции от гауссова приближения при малой степени нелинейности взаимодействующих волн.

Подстановка первого члена в правую часть уравнения (1.21) даёт

$$- i\,(2\pi)^3 N^l_{\mathbf{k}} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\; N^l_{\mathbf{k}_1} \Big\{ \widetilde{T}^{\;a\;\;a_1\;\;b\;\;a_1}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}',\;\mathbf{k}_1}\, \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \;+\; \widetilde{T}^{\;a\;\;a_1\;\;a_1\;\;b}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_1\;\;\mathbf{k}'}\, \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') -$$

$$- \widetilde{T}^{*\;b\;\;a_1\;\;a\;\;a_1}_{\mathbf{k}',\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}\, \delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) \;-\; \widetilde{T}^{*\;b\;\;a_1\;\;a_1\;\;a}_{\mathbf{k}',\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}}\, \delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) \Big\} =$$

$$= - i\,2(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') N^l_{\mathbf{k}} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\; N^l_{\mathbf{k}_1} \Big\{ \widetilde{T}^{\;a\;\;a_1\;\;b\;\;a_1}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1} - \widetilde{T}^{*\;b\;\;a_1\;\;a\;\;a_1}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1} \Big\}. \qquad (1.26)$$

Аналогично поступаем со вторым членом:

$$- 2i \int \frac{d\mathbf{k}_1\; d\mathbf{k}_2\; d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9} \Big\{ \widetilde{T}^{a\;\;a_1\;\;a_2\;\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3} \left(\frac{1}{\Delta\omega - i0}\right) \widetilde{T}^{*\;b\;\;a_1\;\;a_2\;\;a_3}_{\mathbf{k}',\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3} \times$$

$$\times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\, (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \Big[\, N^l_{\mathbf{k}}\, N^l_{\mathbf{k}_2} N^l_{\mathbf{k}_3} + \;\ldots\, \Big] -$$

$$- \widetilde{T}^{\;a_2\;\;a_3\;\;b\;\;a_1}_{\mathbf{k_2},\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}',\;\mathbf{k}_1} \left(\frac{1}{\Delta\omega + i0}\right) \widetilde{T}^{*\;a_2\;\;a_3\;\;a\;\;a_1}_{\mathbf{k_2},\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1} \times$$

$$\times (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\Big[\,N^l_{\mathbf{k}}\,N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}+\ \ldots\,\Big]\Big\}.$$

С учетом равенства

$$\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)=\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3),$$

приводим последнее выражение к более удобному виду:

$$-2i(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\int\frac{d\mathbf{k}_1\;d\mathbf{k}_2\;d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}\;(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\Big[N^l_{\mathbf{k}}\,N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}+\ldots\,\Big]\times$$

$$\times\left\{\frac{\widetilde{T}^{a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}\,\widetilde{T}^{*\,b\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}}{\Delta\omega-i0}\;-\;\frac{\widetilde{T}^{a_2\ a_3\ b\ a_1}_{\mathbf{k_2},\,\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k}',\,\mathbf{k}_1}\,\widetilde{T}^{*\,a_2\ a_3\ a\ a_1}_{\mathbf{k_2},\,\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}}{\Delta\omega+i0}\right\}. \tag{1.27}$$

Свертка (1.21), (1.26) и (1.27) с δ^{ab} при учёте

$$\frac{1}{\Delta\omega-i0}\;-\;\frac{1}{\Delta\omega+i0}=2i\pi\delta(\Delta\omega)$$

и сокращения на $(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$, приводит к кинетическому уравнению для бесцветных продольных глюонных возбуждений:

$$\frac{dN^l_{\mathbf{k}}}{dt}\;=\frac{4}{d_A}\,N^l_{\mathbf{k}}\int\frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\;N^l_{\mathbf{k}_1}\,\mathrm{Im}\Big[\widetilde{T}^{\,a\ a_1\ a\ a_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}\Big]+ \tag{1.28}$$

$$+\frac{2}{d_A}\int\frac{d\mathbf{k}_1\;d\mathbf{k}_2\;d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}\;(2\pi)^4\delta(\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^l_{\mathbf{k}_3})\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\times$$

$$\times\widetilde{T}^{a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}\,\widetilde{T}^{*\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}\Big(N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}+N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}-N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_3}-N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2}\Big).$$

Здесь $d_A=N_c^2-1$ – размерность присоединённого представления группы $SU(N)$. Первое слагаемое в правой части (1.28) описывает нелинейное затухание Ландау (см., например, [29]), его декрементом является линейный функционал плотности числа плазмонов $N^l_{\mathbf{k}}$:

$$\hat\gamma\{N^l_{\mathbf{k}}\}\equiv\gamma^l(\mathbf{k})=-\frac{4}{d_A}\int\frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\;N^l_{\mathbf{k}_1}\,\mathrm{Im}\Big[\widetilde{T}^{\,a\ a_1\ a\ a_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}\Big].$$

Второй член в (1.28) связан с упругим рассеянием плазмона на плазмоне. Уравнение (1.28) также можно записать в несколько иной, более удобной форме:

$$\frac{dN^l_{\mathbf{k}}}{dt}\equiv\frac{\partial N^l_{\mathbf{k}}}{\partial t}+\mathbf{v}^l_{\mathbf{k}}\cdot\frac{\partial N^l_{\mathbf{k}}}{\partial\mathbf{x}}=-\,\hat\gamma\,\{N^l_{\mathbf{k}}\}\,N^l_{\mathbf{k}}-N^l_{\mathbf{k}}\Gamma_{\mathrm{d}}[N^l_{\mathbf{k}}]+(1+N^l_{\mathbf{k}})\Gamma_{\mathrm{i}}[N^l_{\mathbf{k}}]\;, \tag{1.29}$$

где

$$\mathbf{v}^l_{\mathbf{k}}=\frac{\partial\omega^l_{\mathbf{k}}}{\partial\mathbf{k}}=-\left[\left(\frac{\partial\mathrm{Re}\,\varepsilon^l(k)}{\partial\mathbf{k}}\right)\left(\frac{\partial\mathrm{Re}\,\varepsilon^l(k)}{\partial\omega}\right)^{-1}\right]\Bigg|_{\omega=\omega^l_{\mathbf{k}}}$$

– групповая скорость продольных колебаний, а обобщенная скорость распада $\Gamma_{\rm d}$ и обратная скорость регенерации $\Gamma_{\rm i}$ являются нелинейными функционалами плотности числа плазмонов:

$$\Gamma_{\rm d}[N^l_{\mathbf{k}}] = \int d\mathcal{T}^{(3)}\, w_4(\mathbf{k},\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3) N^l_{\mathbf{k}_1}(1+N^l_{\mathbf{k}_2})(1+N^l_{\mathbf{k}_3})$$

и, соответственно,

$$\Gamma_{\rm i}[N^l_{\mathbf{k}}] = \int d\mathcal{T}^{(3)}\, w_4(\mathbf{k},\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)(1+N^l_{\mathbf{k}_1}) N^l_{\mathbf{k}_2} N^l_{\mathbf{k}_3}\,.$$

Здесь

$$w_4(\mathbf{k},\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3) = \frac{2}{d_A}\, \widetilde{T}^{\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\, \widetilde{T}^{*a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3} \tag{1.30}$$

– вероятность рассеяния для упругого столкновения двух бесцветных плазмонов, а мера интегрирования определена следующим образом:

$$d\mathcal{T}^{(3)} \equiv (2\pi)^4\, \delta(\omega^l_{\mathbf{k}} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2} - \omega^l_{\mathbf{k}_3})\, \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\, \frac{d\mathbf{k}_1\ d\mathbf{k}_2\ d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}\ .$$

В пределе больших чисел заполнения плазмонных состояний $N^l_{\mathbf{k}} \gg 1$, правая часть уравнения Больцмана (1.29) переходит в (1.28).

1.4 Вершинная функция $T^{\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}$

Найдем вершинные функции $T^{\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}$, $U^{\,a\ a_1\ a_2}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}$ и $V^{\,a\ a_1\ a_2}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}$, входящие в (1.14). Функцию $T^{\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}$ будем определять в приближении жёстких температурных петель (HTL) [8]. В статье [30] в рамках данного приближения была вычислена вероятность для процесса упругого рассеяния двух плазмонов:

$$w_4(\mathbf{k},\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3) = 3\mathrm{M}^{aa_1a_2a_3}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1,-\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_3)\mathrm{M}^{*\,aa_1a_2a_3}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1,-\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_3). \tag{1.31}$$

Матричный элемент четырёхплазмонного распада записывается в виде:

$$\mathrm{M}^{aa_1a_2a_3}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1,-\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_3) = g^2 \left(\frac{\mathrm{Z}_l(\mathbf{k})}{2\omega^l_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \left(\frac{\tilde{u}^{\mu}(k)}{\sqrt{\bar{u}^2(k)}}\right) \times \tag{1.32}$$

$$\times \prod_{i=1}^{3} \left(\frac{\mathrm{Z}_l(\mathbf{k}_i)}{2\omega^l_{\mathbf{k}_i}}\right)^{1/2} \left(\frac{\tilde{u}^{\mu_i}(k_i)}{\sqrt{\bar{u}^2(k_i)}}\right)\ {}^{*}\tilde{\Gamma}^{aa_1a_2a_3}_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k,k_1,-k_2,-k_3)\Big|_{\rm on-shell},$$

а эффективная амплитуда ${}^{*}\tilde{\Gamma}^{\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mu\ \mu_1\ \mu_2\ \mu_3}(k,k_1,-k_2,-k_3)$ трактуется как

$${}^{*}\tilde{\Gamma}^{aa_1a_2a_3}_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k,k_1,-k_2,-k_3) = -f^{aa_1b}f^{ba_2a_3}\,{}^{*}\tilde{\Gamma}_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k,k_1,-k_2,-k_3) - \tag{1.33}$$

$$- f^{aa_2b} f^{ba_1a_3} {}^*\tilde{\Gamma}_{\mu\mu_2\mu_1\mu_3}(k, -k_2, k_1, -k_3),$$

где f^{abc} – антисимметричные структурные константы цветовой алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$, которые умножаются на чисто кинематические коэффициенты (т.н. *эффективные субамплитуды*):

$$\begin{aligned} {}^*\tilde{\Gamma}_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k, k_1, -k_2, -k_3) \equiv {}^*\Gamma_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k, k_1, -k_2, -k_3) - \\ - {}^*\Gamma_{\mu\mu_1\nu}(k, k_1, -k-k_1)\, {}^*\tilde{\mathcal{D}}^{\nu\nu'}(k_2+k_3)\, {}^*\Gamma_{\nu'\mu_2\mu_3}(k_2+k_3, -k_2, -k_3) - \\ - {}^*\Gamma_{\mu\mu_3\nu}(k, -k_3, -k+k_3)\, {}^*\tilde{\mathcal{D}}^{\nu\nu'}(k_2-k_1)\, {}^*\Gamma_{\nu'\mu_2\mu_1}(k_2-k_1, -k_2, k_1). \end{aligned} \tag{1.34}$$

Для удобства дальнейших выкладок явный вид вершинных функций ${}^*\Gamma_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k, k_1, k_2, k_3)$, ${}^*\Gamma_{\mu\mu_1\mu_2}(k, k_1, k_2)$ (A.1) – (A.7) и глюонного пропагатора ${}^*\tilde{\mathcal{D}}^{\nu\mu}(k)$ в приближении жёстких температурных петель (A.8) – (A.11) приведен в Приложении. 4-векторы

$$\tilde{u}_\mu(k) = \frac{k^2}{(k\cdot u)}\Big(k_\mu - u_\mu(k\cdot u)\Big) \quad \text{и} \quad \bar{u}_\mu(k) = k^2 u_\mu - k_\mu(k\cdot u) \tag{1.35}$$

представляют собой проекторы на продольное направление волнового вектора $\mathbf{k}$ в лоренц-инвариантной форме в гамильтоновой и лоренцевой калибровках, соответственно. Здесь u^μ – 4-скорость среды, которая в системе покоя принимает значение $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Далее, 4-векторы

$$\left(\frac{\mathrm{Z}_l(\mathbf{k})}{2\omega^l_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \frac{\tilde{u}_\mu(k)}{\sqrt{\bar{u}^2(k)}}\bigg|_{\text{on-shell}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\, \epsilon^l_\mu(\mathbf{k}) \tag{1.36}$$

в правой части (1.32) представляют собой волновые функции продольного физического глюона в калибровке A_0, где коэффициент $\sqrt{\mathrm{Z}_l(\mathbf{k})}$ обеспечивает ренормировку глюонной волновой функции за счет температурных эффектов. Коэффициент 3 в правой части (1.31) учитывает три возможных канала четырехплазмонного распада, которые изменяют плотность числа плазмонов g^*,

$$\mathrm{g}^* + \mathrm{g}^*_1 \rightleftharpoons \mathrm{g}^*_2 + \mathrm{g}^*_3, \quad \mathrm{g}^* + \mathrm{g}^*_2 \rightleftharpoons \mathrm{g}^*_1 + \mathrm{g}^*_3, \quad \mathrm{g}^* + \mathrm{g}^*_3 \rightleftharpoons \mathrm{g}^*_1 + \mathrm{g}^*_2.$$

Как видно из выражения для вероятности рассеяния плазмона на плазмоне (1.30) и (1.31), эффективная амплитуда $\widetilde{T}^{a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}$, определяемая соотношением (1.14), с точностью до множителя, можно отождествить с матричным

элементом $\mathrm{M}^{aa_1a_2a_3}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1,-\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_3)$, полученным на основе высокотемпературной квантовой теории поля. В результате получим

$$\widetilde{T}^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}=\left(\frac{d_A}{2}\right)^{1/2}\mathrm{M}^{a\,a_1\,a_2\,a_3}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1,-\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_3). \tag{1.37}$$

Исходя из (1.14) и (1.32), (1.33), получим теперь явный вид амплитуды $T^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}$, входящей в выражение для $\widehat{H}_4$ (1.7):

$$T^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}=-\left(\frac{d_A}{2}\right)^{1/2}g^2\left(\frac{\epsilon^l_\mu(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\right)\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_i}(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_i}}}\right)\times \tag{1.38}$$

$$\times\Big[f^{aa_1b}f^{ba_2a_3}\,{}^*\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k,k_1,-k_2,-k_3)+f^{aa_2b}f^{ba_1a_3}\,{}^*\Gamma^{\mu\mu_2\mu_1\mu_3}(k,-k_2,k_1,-k_3)\Big]\Big|_{\text{on–shell}}.$$

При получении явного вида искомой амплитуды учли связь (1.36) между продольным проектором и вектором поляризации. Эффективная четырёхглюонная вершина ${}^*\Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma}(k,k_1,k_2,k_3)$ в правой части последнего выражения определяется формулами (А.5) – (А.7).

1.5 Вершинные функции $U^{\,a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}$ и $V^{\,a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}$

Далее определим явную форму коэффициентных функций $U^{\,a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}$ и $V^{\,a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}$, которые входят в подинтегральные выражения гамильтонова оператора третьего порядка $\widehat{H}_3$ (1.6). В отличие от предыдущего случая, ситуация здесь более сложная. Если принять во внимание (1.14) и (1.32) – (1.34), тогда из (1.37) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
&\frac{U^{\,b\;a_2\;a_3}_{-(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3),\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\;U^{*\;b\;a\;a_1}_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1),\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)}+\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}}+\frac{V^{\,b\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\;V^{*\;b\;a\;a_1}_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}}+\\
&+\frac{V^{\,a_1\;a_2\;b}_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\;V^{*\;a_3\;a\;b}_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}}{\omega^l_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_3}}+\frac{V^{\,a\;a_2\;b}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}-\mathbf{k}_2}\;V^{*\;a_3\;a_1\;b}_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_3}}+\\
&+\frac{V^{\,a\;a_3\;b}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}-\mathbf{k}_3}\;V^{*\;a_2\;a_1\;b}_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}}+\frac{V^{\,a_1\;a_3\;b}_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3}\;V^{*\;a_2\;a\;b}_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2-\mathbf{k}}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}}=\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{d_A}{2}\right)^{1/2}g^2\left(\frac{\epsilon^l_\mu(k)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\right)\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_i}(k_i)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_i}}}\right)\times
\end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\Big[\,f^{aa_1b}f^{ba_2a_3}\Big({}^*\Gamma^{\mu\mu_1\nu}(k,k_1,-k-k_1)\,{}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k_2+k_3)\,{}^*\Gamma^{\nu'\mu_2\mu_3}(k_2+k_3,-k_2,-k_3)+$$

$$+ {}^*\Gamma^{\mu\mu_3\nu}(k,-k_3,-k+k_3)\,{}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k_2-k_1)\,{}^*\Gamma^{\nu'\mu_2\mu_1}(k_2-k_1,-k_2,k_1)\Big) +$$

$$+ f^{aa_2b}f^{ba_1a_3}\Big({}^*\Gamma^{\mu\mu_1\nu}(k,-k_2,-k+k_2)\,{}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(-k_1+k_3)\,{}^*\Gamma^{\nu'\mu_2\mu_3}(-k_1+k_3,k_1,-k_3) +$$

$$+ {}^*\Gamma^{\mu\mu_3\nu}(k,-k_3,-k+k_3)\,{}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(-k_1+k_2)\,{}^*\Gamma^{\nu'\mu_2\mu_1}(-k_1+k_2,k_1,-k_2)\Big)\Big]\Big|_{\text{on-shell}}.$$

Первым шагом для трёхточечных амплитуд $U^{\,a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}$ и $V^{\,a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}$ полагаем:

$$U^{\,a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2} = f^{\,a\,a_1\,a_2}\,U_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}, \qquad V^{\,a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2} = f^{\,a\,a_1\,a_2}\,V_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}.$$

Данное представление вершинных функций является однозначным. Поскольку структурные константы $f^{aa_1a_2}$ являются антисимметричными по перестановке цветных индексов, тогда из (1.8) получим

$$V_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2} = -\,V_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1}\;, \quad U_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2} = -\,U_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1} = U_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}}\,. \tag{1.40}$$

С учетом тождества

$$f^{\,a_1\;a_2\;b}f^{\,b\;a_3\;a} = -f^{\,a\;a_2\;b}f^{\,b\;a_1\;a_3} + f^{\,a\;a_1\;b}f^{\,b\;a_2\;a_3},$$

левая часть (1.39) приводится к виду:

$$f^{\,a\;a_1\;b}f^{\,b\;a_2\;a_3}\left[\frac{U_{-(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3),\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\;U^*_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1),\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)}+\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}} + \frac{V_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\;V^*_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}^l_1}-\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{V_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\;V^*_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_3}} + \frac{V_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}-\mathbf{k}_3}\;V^*_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}+\omega_{\mathbf{k}_1}-\omega_{\mathbf{k}_2}}\right] -$$

$$-f^{\,a\;a_2\;b}f^{\,b\;a_1\;a_3}\left[\frac{V_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\;V^*_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_3}} + \frac{V_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}-\mathbf{k}_2}\;V^*_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}+\omega_{\mathbf{k}_1}-\omega_{\mathbf{k}_3}} + \right.$$

$$\left. + \frac{V_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}-\mathbf{k}_3}\;V^*_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}+\omega_{\mathbf{k}_1}-\omega_{\mathbf{k}_2}} + \frac{V_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3}\;V^*_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2-\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_2}}\right].$$

Сравнение коэффициентов, стоящих после произведений антисимметричных структурных констант $f^{\,a\;a_1\;b}f^{\,b\;a_2\;a_3}$ и $f^{\,a\;a_2\;b}f^{\,b\;a_1\;a_3}$ в полученном выше выражении и соответствующих коэффициентов в правой части (1.39), приводит к

$$\frac{U_{-(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3),\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\;U^*_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1),\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}}{\omega_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)}+\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}_1}} + \frac{V_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\;V^*_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}-\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_1}} +$$

$$+ \frac{V_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\;V^*_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}}{\omega_{-(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)}+\omega_{\mathbf{k}_2}-\omega_{\mathbf{k}_1}} + \frac{V_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}-\mathbf{k}_3}\;V^*_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}+\omega_{\mathbf{k}_1}-\omega_{\mathbf{k}_2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d_A}{2}\right)^{1/2} g^2 \left(\frac{\epsilon^l_\mu(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\right) \prod_{i=1}^{3} \left(\frac{\epsilon^l_{\mu_i}(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_i}}}\right) \times$$

$$\times \Big[{}^*\Gamma^{\mu\mu_1\nu}(k, k_1, -k-k_1)\, {}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k+k_1)\, {}^*\Gamma^{\nu'\mu_2\mu_3}(k_2+k_3, -k_2, -k_3) +$$

$$+ {}^*\Gamma^{\mu\mu_3\nu}(k, -k_3, -k+k_3)\, {}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k_2-k_1)\, {}^*\Gamma^{\nu'\mu_2\mu_1}(k_2-k_1, -k_2, k_1)\Big]\Big|_{\text{on-shell}}.$$

Подобное выражение справедливо для второй вершинной функции. Если рассмотреть структуру этого выражения, можно заметить, что здесь на самом деле присутствуют два независимых соотношения:

$$\frac{U_{-(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3),\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\ U^*_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1),\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}} + \omega^l_{\mathbf{k}_1}} + \frac{V_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\ V^*_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}} - \omega^l_{\mathbf{k}_1}} = \tag{1.41}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d_A}{2}\right)^{1/2} g^2 \left(\frac{\epsilon^l_\mu(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\right) \prod_{i=1}^{3} \left(\frac{\epsilon^l_{\mu_i}(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_i}}}\right) \times$$

$$\times \Big[{}^*\Gamma^{\mu\mu_1\nu}(k, k_1, -k-k_1)\, {}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k+k_1)\, {}^*\Gamma^{\nu'\mu_2\mu_3}(k_2+k_3, -k_2, -k_3)\Big]\Big|_{\text{on-shell}}$$

и

$$\frac{V_{\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\ V^*_{\mathbf{k}_3,\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}_3-\mathbf{k}}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_2} - \omega^l_{\mathbf{k}_1}} + \frac{V_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_3,\ \mathbf{k}-\mathbf{k}_3}\ V^*_{\mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2}} = \tag{1.42}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d_A}{2}\right)^{1/2} g^2 \left(\frac{\epsilon^l_\mu(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\right) \prod_{i=1}^{3} \left(\frac{\epsilon^l_{\mu_i}(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_i}}}\right) \times$$

$$\times \Big[{}^*\Gamma^{\mu\mu_3\nu}(k, -k_3, -k+k_3)\, {}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k_2-k_1)\, {}^*\Gamma^{\nu'\mu_2\mu_1}(k_2-k_1, -k_2, k_1)\Big]\Big|_{\text{on-shell}}.$$

Выражения в левых частях (1.41) и (1.42) учитывают четность дисперсионного соотношения, т.е. $\omega^l_{-\mathbf{k}} = \omega^l_{\mathbf{k}}$.

Далее в эффективных глюонных пропагаторах ${}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}$ в правых частях (1.41) и (1.42) оставляем только слагаемые с продольным проектором $\tilde{Q}_{\nu\nu'}$. Для первого пропагатора ${}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k+k_1)$ выполним замену

$${}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k+k_1) \Rightarrow -\tilde{Q}_{\nu\nu'}(k+k_1)\, {}^*\Delta^l(k+k_1).$$

Здесь, принимая во внимание (A.10) и (A.9), правую часть можно определить следующим образом:

$$-\frac{\tilde{u}_\nu(k+k_1)\,\tilde{u}_{\nu'}(k+k_1)}{\bar{u}^2(k+k_1)}\ \frac{1}{(k+k_1)^2 - \Pi^l(k+k_1)}. \tag{1.43}$$

Для второго пропагатора ${}^{*}\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k_2 - k_1)$ можно записать аналогичное соотношение. Вблизи полюса $\omega \sim \omega^l_{\mathbf{k}}$ продольный скалярный пропагатор ${}^{*}\Delta^l(k) = {}^{*}\Delta^l(\omega, \mathbf{k})$ будет иметь вид (см., например, [31]):

$$ {}^{*}\Delta^l(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 - \Pi^l(\omega, \mathbf{k})} \simeq \frac{\mathrm{Z}_l(\mathbf{k})}{\omega^2 - (\omega^l_{\mathbf{k}})^2} = \left(\frac{\mathrm{Z}_l(\mathbf{k})}{2\omega^l_{\mathbf{k}}}\right)\left[\frac{1}{\omega - \omega^l_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{\omega + \omega^l_{\mathbf{k}}}\right], $$

тогда для первого пропагатора будем иметь

$$ {}^{*}\Delta^l(k + k_1) \simeq -\left(\frac{\mathrm{Z}_l(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1)}{2\,\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}}\right)\left[\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}} - \omega^l_{\mathbf{k}_1}} + \frac{1}{\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}} + \omega^l_{\mathbf{k}_1}}\right]. \quad (1.44) $$

Второй пропагатор можно представить как

$$ {}^{*}\Delta^l(k_2 - k_1) \simeq -\left(\frac{\mathrm{Z}_l(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)}{2\,\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}\right)\left[\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_2} - \omega^l_{\mathbf{k}_1}} + \frac{1}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2}}\right]. \quad (1.45) $$

Согласно приведенным выше выражениям (1.41) – (1.45), искомый вид трёхплазмонных вершинных функций можно записать как

$$ V_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = g\left(\frac{d_A}{8}\right)^{1/4}\left(\frac{\epsilon^l_\mu(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\right)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_1}(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_1}}}\right)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_2}(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_2}}}\right){}^{*}\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(k, -k_1, -k_2)\Big|_{\mathrm{on-shell}} \quad (1.46) $$

и

$$ U_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = g\left(\frac{d_A}{8}\right)^{1/4}\left(\frac{\epsilon^l_\mu(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\right)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_1}(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_1}}}\right)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_2}(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_2}}}\right){}^{*}\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(-k, -k_1, -k_2)\Big|_{\mathrm{on-shell}}. \quad (1.47) $$

Следует отметить, что процессы, описываемые вершинными функциями (1.46) и (1.47), существенно различны. В качестве примера рассмотрим процесс, который представлен вторым графиком на рис. 1.1 (т.н. s-канал). Фактически, этот процесс включает в себя два подпроцесса рассеяния. Первый, в рассматриваемом приближении можно описать так (рис. 1.2): два плазмона, имеющих частоты $\omega^l_{\mathbf{k}}$ и $\omega^l_{\mathbf{k}_1}$ и волновые векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_1$, сливаются в вершине 1 в один плазмон с частотой $\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}$ и волновым вектором $\mathbf{k} + \mathbf{k}_1$, который затем в вершине 2 распадается на два плазмона с частотами $\omega^l_{\mathbf{k}_2}$ и $\omega^l_{\mathbf{k}_3}$ и волновыми векторами $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$ (рис. 1.2(а)). В классическом гамильтоновом описании функция $1/(\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}} - \omega^l_{\mathbf{k}_1})$ выступает в качестве пропагатора промежуточного "виртуального" состояния коллективных продольных возбуждений, а взаимодействие

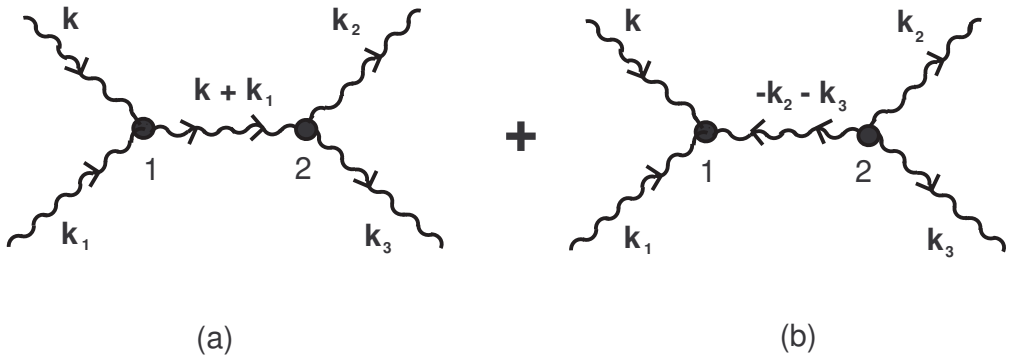


Рисунок 1.2 — Подпроцессы четырёхплазмонного упругого рассеяния, определяемые процессами трёхплазмонных распадов и слияний в s-канале

в вершинах 1 и 2 описывается функцией $V_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ (1.46).

Второй подпроцесс определяется таким образом (рис. 1.2(б)): в вершине 2 происходит трёхплазмонный распад: два плазмона, имеющих частоты $\omega^l_{\mathbf{k}_2}$ и $\omega^l_{\mathbf{k}_3}$ и волновые векторы $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$, уходят в систему, а третий плазмон с частотой $\omega^l_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3}$ и волновым вектором $\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3$ в вершине 1 сливается с двумя плазмонами с частотами $\omega^l_{\mathbf{k}}$ и $\omega^l_{\mathbf{k}_1}$ и волновыми векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_1$, которые приходят из системы. Пропагатором здесь является функция $1/(\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1})$. Взаимодействие в вершинах 1 и 2 определяется функцией $U_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ (1.44).

1.6 Выводы

В данной главе сделана попытка построить классический гамильтонов формализм для описания нелинейного взаимодействия мягких глюонных возбуждений в высокотемпературной неабелевой плазме. В явном виде было построено каноническое преобразование (1.10), которое позволило исключить гамильтониан взаимодействия третьего порядка $\widehat{H}_3$ (1.6) и получить таким образом новый эффективный гамильтониан взаимодействия $\widetilde{\widehat{H}}_4$ (1.13) с калибровочно-ковариантной амплитудой рассеяния $\widetilde{T}^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}$. Данный гамильтониан определяет упругое рассеяние двух бесцветных плазмонов друг на друге. При условии, когда величина амплитуды калибровочного поля имеет порядок [30]

$$|A_\mu(x)| \sim \sqrt{g}T \text{ и, следовательно, } N^l_{\mathbf{k}} \sim \frac{1}{g},$$

фактически соответствующий уровню тепловых флуктуаций в горячей кварк-глюонной плазме, данный процесс рассеяния будет доминирующим. Когда $g \ll 1$ при заданной амплитуде калибровочного поля, плотность числа плазмонов $N^l_{\mathbf{k}}$ достаточно большая, поэтому здесь оправдано использование чисто классического описания. Более того, здесь справедливо использовать линеаризованное уравнение Больцмана для бесцветных плазмонов, вместо точного (1.29), т.к. распределение Планка, относительно которого происходит измерение отклонения плотности числа плазмонов $\delta N^l_{\mathbf{k}}$, имеет порядок

$$N^l_{\mathrm{eq}}(\mathbf{k}) \sim \frac{T}{\omega^l_{\mathbf{k}}} \sim \frac{1}{g}\,.$$

В данном случае можно считать, что теория плазмон-плазмонного взаимодействия для малых амплитуд мягких возбуждений является линейной, а нелинейные эффекты, которые связаны с неравновесными флуктуациями плотности числа плазмонов $\delta N^l_{\mathbf{k}}$, могут считаться возмущениями.

Когда система находится в состоянии сильного возбуждения, происходит качественное изменение ситуации. Такая ситуация может возникать при столкновениях ультрарелятивистских тяжёлых ионов в экспериментах на Большом Адронном Коллайдере (CERN). По мере увеличения интенсивности возбуждений в глюонной плазме следует учитывать дальнейшие члены в разложении $\widehat{H}_{int}$. Поскольку процессы нелинейного взаимодействия с нечетным числом плазмонов запрещены, то, в принципе, путём соответствующего определения калибровочного преобразования можно устранить все «нечётные» гамильтонианы взаимодействия $\widehat{H}_{2n+1},\ n = 1, 2, \ldots$. В предельном случае при сильных возбуждениях, в условиях, когда

$$|A_\mu(x)| \sim T \text{ и, соответственно, } N^l_{\mathbf{k}} \sim \frac{1}{g^2},$$

эти преобразования содержат бесконечное число слагаемых произвольной степени по операторам рождения $\hat{c}^{\dagger\,a}_{\mathbf{k}}$ и уничтожения $\hat{c}^a_{\mathbf{k}}$. Это, в свою очередь, приведет к необходимости включения в правую часть кинетического уравнения (1.29) всех высших процессов плазмонного упругого рассеяния: $3 \to 3$, $4 \to 4$, $\ldots$, поскольку они имеют одинаковый порядок по константе сильного взаимодействия g. В данном случае процедура линеаризации кинетического уравнения для $N^l_{\mathbf{k}}$ больше неприменима и здесь приходим к нелинейной теории взаимодействия мягких глюонных возбуждений в кварк-глюонной плазме.

Глава 2

Гамильтонов формализм для мягких ферми-возбуждений

2.1 Гамильтониан взаимодействия плазмонов и плазминов

Рассмотрим потенциал калибровочного поля в виде разложения на плоские волны. В отличие от предыдущей главы, уравнение (1.1), здесь приводим разложение, включающее как продольные так и поперечные моды [32, 33]:

$$A^a_\mu(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega^l_\mathbf{k}}\right)^{1/2}\left\{\epsilon^{\,l}_\mu(\mathbf{k})\, a^a_\mathbf{k}\, e^{-i\omega^l_\mathbf{k} t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \epsilon^{*\,l}_\mu(\mathbf{k})\, a^{*\,a}_\mathbf{k}\, e^{i\omega^l_\mathbf{k} t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right\} + \qquad (2.1)$$

$$+ \sum_{\zeta=1,2}\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left(\frac{Z_t(\mathbf{k})}{2\omega^t_\mathbf{k}}\right)^{1/2}\left\{\epsilon^{\,t}_\mu(\mathbf{k},\zeta)\, a^a_\mathbf{k}(\zeta)\, e^{-i\omega^t_\mathbf{k} t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \epsilon^{*\,t}_\mu(\mathbf{k},\zeta)\, a^{*\,a}_\mathbf{k}(\zeta)\, e^{i\omega^t_\mathbf{k} t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right\}.$$

Символы $\epsilon^{\,l}_\mu(\mathbf{k})$ и $\epsilon^{\,t}_\mu(\mathbf{k},\zeta)$ вводятся для обозначений векторов поляризации продольной и поперечной мод, соответственно, где $\mathbf{k}$ – волновой вектор, $\zeta = 1, 2$ означает два возможных состояния поляризации и $*$ – комплексное сопряжение. Коэффициенты $Z_l(\mathbf{k})$ и $Z_t(\mathbf{k})$ – вычеты эффективного глюонного пропагатора в полюсах продольной и поперечной мод, соответственно, $\omega^l_\mathbf{k}$ и $\omega^t_\mathbf{k}$ – дисперсионные соотношения для соответствующих мод. Амплитуды для продольного $a^a_\mathbf{k}$ и поперечного $a^a_\mathbf{k}(\zeta)$ возбуждений будем считать обычными комплексными случайными функциями. Используя представление (2.1), коррелятор $\langle A^{*\,a}_\mu(k) A^b_\nu(k')\rangle$ можно записать в виде [16, 34]:

$$\left\langle A^{*\,a}_\mu(k) A^b_\nu(k')\right\rangle = -\delta^{ab}\delta^{(4)}(k-k')\,\frac{1}{(2\pi)^3}\times$$

$$= \left\{ \widetilde{Q}_{\mu\nu}(k) \left[\left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega^l_{\mathbf{k}}} \right) \mathcal{N}^l_{\mathbf{k}} \delta(k^0 - \omega^l_{\mathbf{k}}) + \left(\frac{Z_l(-\mathbf{k})}{2\omega^l_{-\mathbf{k}}} \right) \left(1 + \mathcal{N}^l_{-\mathbf{k}}\right) \delta(k^0 + \omega^l_{\mathbf{k}}) \right] + \right.$$

$$\left. + P_{\mu\nu}(k) \left[\left(\frac{Z_t(\mathbf{k})}{2\omega^t_{\mathbf{k}}} \right) \mathcal{N}^t_{\mathbf{k}} \delta(k^0 - \omega^t_{\mathbf{k}}) + \left(\frac{Z_t(-\mathbf{k})}{2\omega^t_{-\mathbf{k}}} \right) \left(1 + \mathcal{N}^t_{-\mathbf{k}}\right) \delta(k^0 + \omega^t_{\mathbf{k}}) \right] \right\}.$$

Явный вид продольного $\tilde{Q}_{\mu\nu}(k)$ и поперечного $P_{\mu\nu}(k)$ проекторов (в A_0-калибровке) выписан в Приложении А. В приведенном выше выражении учли, что математические ожидания произведений двух бозонных амплитуд заданы соотношениями вида:

$$\left\langle a^{*a}_{\mathbf{k}} a^b_{\mathbf{k}'} \right\rangle = \delta^{ab} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathcal{N}^l_{\mathbf{k}}, \quad \left\langle a^{*a}_{\mathbf{k}}(\zeta)\, a^b_{\mathbf{k}'}(\zeta') \right\rangle = \delta^{ab} \delta_{\zeta\zeta'} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathcal{N}^t_{\mathbf{k}}, \tag{2.2}$$

где $\mathcal{N}^l_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{N}^t_{\mathbf{k}}$ – плотности числа продольных и поперечных плазменных волн. Как и в предыдущей главе, для простоты будем рассматривать только процессы, которые связаны с возбуждениями продольно поляризованной плазмы, то есть, с плазмонами, являющимися чисто коллективным эффектом среды. Он не имеет аналогов в обычной квантовой теории поля.

Во Введении было упомянуто, что в равновесной горячей кварк-глюонной плазме с безмассовыми кварками и антикварками, наблюдают два типа физических фермионных мягких полей: первый - представляет собой нормальные возбуждения с соотношением между киральностью и спиральностью как при нулевой температуре, второй - относится к чисто коллективным возбуждениям с аномальным соотношением между киральностью и спиральностью. В дальнейшем будем обозначать эти независимые ферми-возбуждения символами $(+)$ и $(-)$. Разложение коллективного кварк-антикваркового поля на плоские волны имеет вид [33]:

$$\begin{aligned}
\psi^i_\alpha(x) &= \sum_{s=\pm} \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left(\frac{Z_s(\mathbf{q})}{2} \right)^{1/2} \times \\
&\times \left[b^{i(s)}_{\mathbf{q}}(\lambda) u^{(s)}_\alpha(\hat{\mathbf{q}}, \lambda)\, e^{-i\omega^s_{\mathbf{q}} t + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} + d^{*i(s)}_{\mathbf{q}}(\lambda) v^{(s)}_\alpha(\hat{\mathbf{q}}, \lambda)\, e^{i\omega^s_{\mathbf{q}} t - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \right], \\
\bar{\psi}^i_\alpha(x) &= \sum_{s=\pm} \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left(\frac{Z_s(\mathbf{q})}{2} \right)^{1/2} \times \\
&\times \left[b^{*i(s)}_{\mathbf{q}}(\lambda) \bar{u}^{(s)}_\alpha(\hat{\mathbf{q}}, \lambda)\, e^{i\omega^s_{\mathbf{q}} t - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} + d^{i(s)}_{\mathbf{q}}(\lambda) \bar{v}^{(s)}_\alpha(\hat{\mathbf{q}}, \lambda)\, e^{-i\omega^s_{\mathbf{q}} t + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \right],
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $\alpha = 1,2,3,4$ и спиноры $u_\alpha^{(s)}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)$ и $v_\alpha^{(s)}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)$ – решения свободного безмассового уравнения Дирака

$$\big(\gamma^0 \mp \hat{\mathbf{q}}\cdot\boldsymbol{\gamma}\big)u^{(\pm)}(\hat{\mathbf{q}},\lambda) = 0, \tag{2.4a}$$

$$\big(\gamma^0 \pm \hat{\mathbf{q}}\cdot\boldsymbol{\gamma}\big)v^{(\pm)}(-\hat{\mathbf{q}},\lambda) = 0 \tag{2.4b}$$

со спиральностью $\lambda = \pm 1$ и $\hat{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{q}/|\mathbf{q}|$. Явная форма этих спиноров, а также некоторые их свойства приведены в Приложении В. Индексы i, j, k, ... вводятся для обозначения цветовой степени свободы ферми-возбуждений и изменяются от 1 до N_c. $Z_+(\mathbf{q})$ и $Z_-(\mathbf{q})$ – вычеты эффективного кваркового пропагатора в полюсах нормальной и абнормальной мод, соответственно, а $\omega_{\mathbf{q}}^+$ и $\omega_{\mathbf{q}}^-$ – дисперсионные соотношения для соответствующих мод. Будем рассматривать амплитуды для нормальных $\big(b_{\mathbf{q}}^{i(+)}(\lambda),\, d_{\mathbf{q}}^{i(+)}(\lambda)\big)$ и абнормальных $\big(b_{\mathbf{q}}^{i(-)}(\lambda),\, d_{\mathbf{q}}^{i(-)}(\lambda)\big)$ фермионных возбуждений как переменные, принимающие значения в алгебре Грассмана. В силу представления (2.3) корреляционная функция мягких фермионных возбуждений $\langle\bar{\psi}_\alpha^i(-q)\psi_\beta^j(q')\rangle$ имеет следующую структуру [16, 34]:

$$\big\langle\bar{\psi}_\alpha^i(-q)\psi_\beta^j(q')\big\rangle = \delta^{ji}\delta^{(4)}(q-q')\times$$

$$\times\frac{1}{2(2\pi)^3}\Big\{(h_+(\hat{\mathbf{q}}))_{\beta\alpha}\Big[Z_+(\mathbf{q})n_{\mathbf{q}}^+\delta(q^0-\omega_{\mathbf{q}}^+) + Z_-(-\mathbf{q})\big(1-\bar{n}_{-\mathbf{q}}^-\big)\delta(q^0+\omega_{\mathbf{q}}^-)\Big] +$$

$$+(h_-(\hat{\mathbf{q}}))_{\beta\alpha}\Big[Z_-(\mathbf{q})n_{\mathbf{q}}^-\delta(q^0-\omega_{\mathbf{q}}^-) + Z_+(-\mathbf{q})\big(1-\bar{n}_{-\mathbf{q}}^+\big)\delta(q^0+\omega_{\mathbf{q}}^+)\Big]\Big\}.$$

Здесь матричные функции $h_\pm(\hat{\mathbf{q}}) = (\gamma^0 \mp \hat{\mathbf{q}}\cdot\boldsymbol{\gamma})/2$ являются спинорными проекторами[1] на собственные состояния спиральности, а средние значения произведений двух фермионных амплитуд имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\big\langle b_{\mathbf{q}}^{*\,i(+)}(\lambda)\,b_{\mathbf{q}'}^{j(+)}(\lambda')\big\rangle = \delta^{ij}\delta_{\lambda\lambda'}(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\mathfrak{n}_{\mathbf{q}}^+,\\
&\big\langle b_{\mathbf{q}}^{*\,i(-)}(\lambda)\,b_{\mathbf{q}'}^{j(-)}(\lambda')\big\rangle = \delta^{ij}\delta_{\lambda\lambda'}(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\mathfrak{n}_{\mathbf{q}}^-,\\
&\big\langle d_{-\mathbf{q}}^{i(+)}(\lambda)\,d_{-\mathbf{q}'}^{*\,j(+)}(\lambda')\big\rangle = \delta^{ij}\delta_{\lambda\lambda'}(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\big(1-\bar{\mathfrak{n}}_{-\mathbf{q}}^+\big),\\
&\big\langle d_{-\mathbf{q}}^{i(-)}(\lambda)\,d_{-\mathbf{q}'}^{*\,j(-)}(\lambda')\big\rangle = \delta^{ij}\delta_{\lambda\lambda'}(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\big(1-\bar{\mathfrak{n}}_{-\mathbf{q}}^-\big),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

[1] Более точно, проекторы – это спиновые матрицы [35]:

$$\Lambda_\pm(\hat{\mathbf{q}}) \equiv \gamma^0 h_\mp(\hat{\mathbf{q}}) = \frac{1\pm\gamma^0\hat{\mathbf{q}}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{2}, \quad \Lambda_+ + \Lambda_- = 1, \quad \Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm, \quad \Lambda_+\Lambda_- = \Lambda_-\Lambda_+ = 0,$$

проектирующие на спиноры, киральность которых равна (Λ_+) или противоположна (Λ_-) их спиральности.

где $\mathfrak{n}_{\mathbf{q}}^{\pm}$ и $\bar{\mathfrak{n}}_{\mathbf{q}}^{\pm}$ – плотности числа нормальных (+) и абнормальных (−), фермионных и антифермионных плазменных волн, соответственно.

В дальнейшем, с целью упрощения задачи, будем изучать только те процессами, которые включают чисто коллективные фермионные возбуждения плазмы, так называемые *плазмино*. В этом случае $q_0 = \omega_{\mathbf{q}}^{-}$ является решением дисперсионного уравнения [11–13]:

$$\mathrm{Re}\,{}^{*}\Delta_{-}^{-1}(q^0, \mathbf{q}) = 0, \tag{2.6}$$

где

$${}^{*}\Delta_{-}^{-1}(q^0, \mathbf{q}) = q^0 + |\mathbf{q}| + \frac{\omega_0^2}{|\mathbf{q}|}\left[1 - \left(1 + \frac{|\mathbf{q}|}{q^0}\right) F\left(\frac{q^0}{|\mathbf{q}|}\right)\right]$$

и $\omega_0^2 = g^2 C_F T^2/8$ – квадрат плазменной частоты кварк-антикваркового сектора плазменных возбуждений. Дисперсионное уравнение (2.6), также как (1.5), получено из полюса соответствующей "скалярной" части ${}^{*}\triangle_{-}(q)$ эффективного пропагатора кварков (B.11), который, в свою очередь, включает в себя все эффекты среды в лидирующем порядке по g. Уравнение (2.6) справедливо только тогда, когда внешняя частота q_0 и импульс $\mathbf{q}$ имеют порядок gT. В пределе, когда константа сильной связи g мала, будем иметь оценки $q_0,\ |\mathbf{q}| \ll T$.

Как уже было сказано выше, амплитуды $a_{\mathbf{k}}^{a}$ и $a_{\mathbf{k}}^{*a}$ в разложении для продольной моды колебаний (2.1) являются обычными (коммутирующими) нормальными переменными калибровочного поля, удовлетворяющими каноническим соотношениям суперскобки Пуассона

$$\left\{a_{\mathbf{k}}^{a},\, a_{\mathbf{k}'}^{b}\right\}_{\mathrm{SPB}} = 0, \quad \left\{a_{\mathbf{k}}^{*a},\, a_{\mathbf{k}'}^{*b}\right\}_{\mathrm{SPB}} = 0, \quad \left\{a_{\mathbf{k}}^{a},\, a_{\mathbf{k}'}^{*b}\right\}_{\mathrm{SPB}} = \delta^{ab}(2\pi)^3\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{2.7}$$

С другой стороны, будем рассматривать амплитуды $b_{\mathbf{q}}^{i}(\lambda)\left(\equiv\ b_{\mathbf{q}}^{i(-)}(\lambda)\right)$ и $b_{\mathbf{q}}^{*i}(\lambda)\left(\equiv b_{\mathbf{q}}^{*i(-)}(\lambda)\right)$ в разложении (2.3) для плазминной моды колебаний в качестве грассмановых (антикоммутирующих) переменных, суперскобка Пуассона (SPB) для которых имеет стандартную форму:

$$\left\{b_{\mathbf{q}}^{i}(\lambda), b_{\mathbf{q}'}^{j}(\lambda')\right\}_{\mathrm{SPB}} = 0,\ \left\{b_{\mathbf{q}}^{*i}(\lambda), b_{\mathbf{q}'}^{*j}(\lambda')\right\}_{\mathrm{SPB}} = 0, \tag{2.8}$$

$$\left\{b_{\mathbf{q}}^{i}(\lambda), b_{\mathbf{q}'}^{*j}(\lambda')\right\}_{\mathrm{SPB}} = \delta^{ij}\delta_{\lambda\lambda'}(2\pi)^3\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}').$$

Для случая сплошной среды под суперскобкой Пуассона понимаем следующее выражение:

$$\left\{F,\, G\right\}_{\mathrm{SPB}} = \tag{2.9}$$

$$= \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta F}{\delta a^c_{\mathbf{k}'}} \frac{\delta G}{\delta a^{*c}_{\mathbf{k}'}} - \frac{\delta F}{\delta a^{*c}_{\mathbf{k}'}} \frac{\delta G}{\delta a^c_{\mathbf{k}'}} \right\} + \int d\mathbf{q}' \left\{ \frac{\overleftarrow{\delta} F}{\delta b^i_{\mathbf{q}'}} \frac{\overrightarrow{\delta} G}{\delta b^{*i}_{\mathbf{q}'}} + (-1)^{P_F+P_G} \frac{\overrightarrow{\delta} F}{\delta b^{*i}_{\mathbf{q}'}} \frac{\overleftarrow{\delta} G}{\delta b^i_{\mathbf{q}'}} \right\}.$$

Здесь для правой и левой функциональных производных ввели обозначения $\overrightarrow{\delta}/\delta b^{*i}_{\mathbf{q}}$ и $\overleftarrow{\delta}/\delta b^{i\,2}_{\mathbf{q}}$, Обозначения P_F и P_G используются для грассмановой четности функций F и G, соответственно. Для краткости, в дальнейшем не будем выписывать явную зависимость b-функций от спиральности, считая, что суммирование по цветным индексам в фундаментальном представлении подразумевает также суммирование по состояниям спиральности.

В дальнейшем под фигурными скобками $\{\cdot\,,\cdot\}$ будем подразумевать суперскобку Пуассона.

Выпишем гамильтоновы уравнения для полевых функций $a^a_{\mathbf{k}}$, $b^i_{\mathbf{q}}$ и их комплексно сопряженных:

$$\frac{\partial a^a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -i\big\{a^a_{\mathbf{k}}, H\big\} \equiv -i\,\frac{\delta H}{\delta a^{*a}_{\mathbf{k}}}, \qquad \frac{\partial a^{*a}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -i\big\{a^{*a}_{\mathbf{k}}, H\big\} \equiv i\,\frac{\delta H}{\delta a^a_{\mathbf{k}}}, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial b^i_{\mathbf{q}}}{\partial t} = -i\left\{b^i_{\mathbf{q}}, H\right\} \equiv -i\,\frac{\overrightarrow{\delta} H}{\delta b^{*i}_{\mathbf{q}}}, \qquad \frac{\partial b^{*i}_{\mathbf{q}}}{\partial t} = -i\left\{b^{*i}_{\mathbf{q}}, H\right\} \equiv i\,\frac{\overleftarrow{\delta} H}{\delta b^i_{\mathbf{q}}}. \tag{2.11}$$

Здесь функция $H = H^{(0)} + H_{int}$ – гамильтониан для системы, состоящей из плазмонов и плазминонов, где $H^{(0)}$ – гамильтонианом невзаимодействующих плазмонов и плазминов:

$$H^{(0)} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\omega^l_{\mathbf{k}}\,a^{*a}_{\mathbf{k}} a^a_{\mathbf{k}} + \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\,\omega^-_{\mathbf{q}}\,b^{*i}_{\mathbf{q}}\,b^i_{\mathbf{q}}, \tag{2.12}$$

H_{int} представляет собой гамильтониан взаимодействия.

В приближении малых амплитуд гамильтониан взаимодействия можно формально разложить в интегро-степенной ряд по степеням бозонных $a^a_{\mathbf{k}}$ и $a^{*a}_{\mathbf{k}}$ и фермионных $b^i_{\mathbf{q}}$ и $b^{*i}_{\mathbf{q}}$ амплитуд:

$$H_{int} = H^{(3)} + H^{(4)} + \ \dots\ ,$$

[2] Здесь следуем обозначениям, принятым для правой и левой производных в [36–38], поэтому,

$$\delta F = \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta F}{\delta a^c_{\mathbf{k}'}}\,\delta a^c_{\mathbf{k}'} + \frac{\delta F}{\delta a^{*c}_{\mathbf{k}'}}\,\delta a^{*c}_{\mathbf{k}'} \right\} + \int d\mathbf{q}' \left\{ \frac{\overleftarrow{\delta} F}{\delta b^i_{\mathbf{q}'}}\,\delta b^i_{\mathbf{q}'} + \delta b^{*i}_{\mathbf{q}'}\,\frac{\overrightarrow{\delta} F}{\delta b^{*i}_{\mathbf{q}'}} \right\}.$$

Кроме того, применяем следующее правило для вариаций амплитуд $b^i_{\mathbf{q}}(\lambda)$ и $c^a_{\mathbf{k}}$:

$$\frac{\overleftarrow{\delta} b^i_{\mathbf{q}}(\lambda)}{\delta b^{i'}_{\mathbf{q}'}(\lambda')} = \delta^{ii'}\delta_{\lambda\lambda'}(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}'), \qquad \frac{\delta c^a_{\mathbf{k}}}{\delta c^{a'}_{\mathbf{k}'}} = \delta^{aa'}(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

и т. д., таким образом, в правой части введен коэффициент $(2\pi)^3$.

где гамильтонианы взаимодействия третьего и четвертого порядков представим в виде:

$$
\begin{aligned}
H^{(3)} = \int \frac{d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^9} \Big\{ \mathcal{V}^{a\, a_1\, a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\, a^{*a}_{\mathbf{k}}\, a^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\, a^{a_2}_{\mathbf{k}_2} \,+\, \mathcal{V}^{*\,a\, a_1\, a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\, a^{a}_{\mathbf{k}}\, a^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1}\, a^{*\,a_2}_{\mathbf{k}_2} \Big\} \times \\
\times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \\
+ \frac{1}{3} \int \frac{d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^9} \Big\{ \mathcal{U}^{a\, a_1\, a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\, a^{a}_{\mathbf{k}}\, a^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\, a^{a_2}_{\mathbf{k}_2} \,+\, \mathcal{U}^{*\,a\, a_1\, a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\, a^{*\,a}_{\mathbf{k}}\, a^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1}\, a^{*\,a_2}_{\mathbf{k}_2} \Big\} \times \\
\times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) + \\
+ \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{q}\, d\mathbf{q}_1}{(2\pi)^9} \Big\{ \mathcal{G}^{a_1\, i\, i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\, a^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\, b^{*\,i}_{\mathbf{q}}\, b^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1} \,-\, \mathcal{G}^{*\,a_1\, i\, i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\, a^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1}\, b^{\,i}_{\mathbf{q}}\, b^{\,i_1}_{\mathbf{q}_1} \Big\} \times \qquad (2.13) \\
\times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q} - \mathbf{q}_1) + \\
+ \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{q}\, d\mathbf{q}_1}{(2\pi)^9} \Big\{ \mathcal{P}^{a_1\, i\, i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\, a^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\, b^{*\,i}_{\mathbf{q}}\, b^{\,i_1}_{\mathbf{q}_1} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q} + \mathbf{q}_1) + \\
+ \mathcal{P}^{*\,a_1\, i_1\, i}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}}\, a^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1}\, b^{*\,i}_{\mathbf{q}}\, b^{\,i_1}_{\mathbf{q}_1} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q} - \mathbf{q}_1) \Big\} + \\
+ \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{q}\, d\mathbf{q}_1}{(2\pi)^9} \Big\{ \mathcal{K}^{a_1\, i\, i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\, a^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\, b^{\,i}_{\mathbf{q}}\, b^{\,i_1}_{\mathbf{q}_1} \,-\, \mathcal{K}^{*\,a_1\, i\, i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\, a^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1}\, b^{*\,i}_{\mathbf{q}}\, b^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1} \Big\} \times \\
\times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q} + \mathbf{q}_1)
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
H^{(4)} = \int \frac{d\mathbf{q}\, d\mathbf{q}_1 d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^{12}}\, T^{(2)\, i\, i_1\, a_1\, a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\, b^{*\,i}_{\mathbf{q}}\, b^{\,i_1}_{\mathbf{q}_1} a^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1} a^{\,a_2}_{\mathbf{k}_2}\, (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_2) + \\
+ \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{q}\, d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^{12}}\, T^{(2)\, i\, i_1\, i_2\, i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\, b^{*\,i}_{\mathbf{q}}\, b^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1}\, b^{\,i_2}_{\mathbf{q}_2}\, b^{\,i_3}_{\mathbf{q}_3}\, (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3). \quad (2.14)
\end{aligned}
$$

Здесь не приводим бозонный вклад, пропорциональный произведению $a^{*\,a}_{\mathbf{k}}\, a^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1} a^{\,a_2}_{\mathbf{k}_2}\, a^{\,a_3}_{\mathbf{k}_3}$, поскольку он был рассмотрен ранее в главе 1. Напомним, что для простоты зависимость вершинных функций в (2.13) и (2.14), а также переменных $b^{\,i}_{\mathbf{q}}$, $b^{*\,i}_{\mathbf{q}}$ от спиральности λ не выписывается в явном виде, но всегда имеется ввиду, что суммирование по цветным индексам в фундаментальном представлении i, i_1, ... также соответствует суммированию по состояниям спиральности λ, λ_1, ... В выражении (2.14) сохранили только "существенные" члены в силу того факта, что условия резонанса для четырёхволновых процессов [16]

$$
\begin{cases} \mathbf{q} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0 \\ \omega^-_{\mathbf{q}} + \omega^-_{\mathbf{q}_1} + \omega^-_{\mathbf{q}_2} + \omega^-_{\mathbf{q}_3} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 \\ \omega^-_{\mathbf{q}} = \omega^-_{\mathbf{q}_1} + \omega^-_{\mathbf{q}_2} + \omega^-_{\mathbf{q}_3}, \end{cases}
$$

$$\begin{cases} \mathbf{q}+\mathbf{q}_1+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=0 \\ \omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_2}=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{q}=\mathbf{q}_1+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2 \\ \omega^-_{\mathbf{q}}=\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1=\mathbf{q}+\mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2 \\ \omega^l_{\mathbf{k}_1}=\omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{q}+\mathbf{q}_1=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2 \\ \omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}=\omega^l_{\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_2} \end{cases}$$

не имеют решений для плазмонных и плазминных спектров, определяемых дисперсионными уравнениями (1.5) и (2.6).

На вершинные функции $\mathcal{V}^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$, $\mathcal{U}^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$, $\mathcal{G}^{\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, $\mathcal{K}^{\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, и $T^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}$ налагаем "условия естественной симметрии":

$$\mathcal{V}^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}=\mathcal{V}^{\,a\,a_2\,a_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1}, \quad \mathcal{U}^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}=\mathcal{U}^{\,a\,a_2\,a_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1}=\mathcal{U}^{\,a_1\,a_2\,a}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}}\ ,$$

$$\mathcal{G}^{\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}=-\mathcal{G}^{\,a_1\,i_1\,i}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}}, \quad \mathcal{K}^{\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}=-\mathcal{K}^{\,a_1\,i_1\,i}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}}, \tag{2.15}$$

$$T^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}=-T^{(2)\,i_1\,i\;\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}=-T^{(2)\,i\,i_1\,i_3\,i_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_2}, \tag{2.16}$$

которые указывают на то, что на интегралы в уравнениях (2.13) и (2.14) не влияет изменение групповых индексов суммирования и переменных интегрирования. Если вещественность гамильтониана (2.13) очевидна, то вещественность гамильтониана (2.14) приводит к дополнительным соотношениям для вершинных функций $T^{(2)\,i\,i_1\,a_1\,a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ и $T^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}$:

$$T^{(2)\,i\,i_1\,a_1\,a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}=T^{*(2)\,i_1\,i\,a_2\,a_1}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1}, \qquad T^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}=T^{*(2)\,i_2\,i_3\,i\,i_1}_{\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}. \tag{2.17}$$

В нашем случае вершинные функции в гамильтонианах $H^{(3)}$ и $H^{(4)}$ определяются конкретными свойствами высокотемпературной кварк-глюонной плазмы. В первой главе в рамках HTL- приближения был получен явный вид трёхточечных вершинных функций $\mathcal{V}^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ и $\mathcal{U}^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$:

$$\mathcal{V}^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}=f^{\,a\,a_1\,a_2}\,\mathcal{V}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}, \qquad \mathcal{U}^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}=f^{\,a\,a_1\,a_2}\,\mathcal{U}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}, \tag{2.18}$$

где

$$\mathcal{V}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}=\frac{1}{2^{3/4}}\,g\left(\frac{\epsilon^l_\mu(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\right)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_1}(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_1}}}\right)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_2}(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_2}}}\right)^{*}\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(k,-k_1,-k_2)\Big|_{\text{on-shell}} \tag{2.19}$$

и

$$\mathcal{U}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = \frac{1}{2^{3/4}}\, g \left(\frac{\epsilon^l_\mu(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\right)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_1}(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_1}}}\right)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_2}(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_2}}}\right) {}^*\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(-k,-k_1,-k_2)\Big|_{\text{on-shell}}. \tag{2.20}$$

Явный вид эффективной трехглюонной вершины ${}^*\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(k,k_1,k_2)$ определяется формулами (А.1) – (А.3).

2.2 Канонические преобразования

Рассмотрим преобразование от исходных бозонной $a^a_{\mathbf{k}}$ и фермионной $b^i_{\mathbf{q}}$ функций к новым $c^a_{\mathbf{k}}$ и $f^i_{\mathbf{q}}$:

$$a^a_{\mathbf{k}} = a^a_{\mathbf{k}}(c^a_{\mathbf{k}},\, c^{*a}_{\mathbf{k}},\, f^i_{\mathbf{q}},\, f^{*i}_{\mathbf{q}}), \tag{2.21}$$

$$b^i_{\mathbf{q}} = b^i_{\mathbf{q}}(c^a_{\mathbf{k}},\, c^{*a}_{\mathbf{k}},\, f^i_{\mathbf{q}},\, f^{*i}_{\mathbf{q}}). \tag{2.22}$$

Потребуем, чтобы уравнения Гамильтона в терминах новых переменных имели вид (2.10) и (2.11) с тем же гамильтонианом H. После несложных, но довольно громоздких в техническом плане, вычислений приходим к двум системам интегральных соотношений:

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta a^a_{\mathbf{k}}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta a^{*b}_{\mathbf{k}''}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}} - \frac{\delta a^a_{\mathbf{k}}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta a^{*b}_{\mathbf{k}''}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\right\} + \int d\mathbf{q}'\left\{\frac{\overleftarrow{\delta} a^a_{\mathbf{k}}}{\delta f^i_{\mathbf{q}'}}\frac{\overrightarrow{\delta} a^{*b}_{\mathbf{k}''}}{\delta f^{*i}_{\mathbf{q}'}} + \frac{\overrightarrow{\delta} a^a_{\mathbf{k}}}{\delta f^{*i}_{\mathbf{q}'}}\frac{\overleftarrow{\delta} a^{*b}_{\mathbf{k}''}}{\delta f^i_{\mathbf{q}'}}\right\} = \delta^{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}''), \tag{2.23a}$$

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta a^a_{\mathbf{k}}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta a^b_{\mathbf{k}''}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}} - \frac{\delta a^a_{\mathbf{k}}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta a^b_{\mathbf{k}''}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\right\} + \int d\mathbf{q}'\left\{\frac{\overleftarrow{\delta} a^a_{\mathbf{k}}}{\delta f^i_{\mathbf{q}'}}\frac{\overrightarrow{\delta} a^b_{\mathbf{k}''}}{\delta f^{*i}_{\mathbf{q}'}} + \frac{\overrightarrow{\delta} a^a_{\mathbf{k}}}{\delta f^{*i}_{\mathbf{q}'}}\frac{\overleftarrow{\delta} a^b_{\mathbf{k}''}}{\delta f^i_{\mathbf{q}'}}\right\} = 0, \tag{2.23b}$$

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta a^a_{\mathbf{k}}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta b^i_{\mathbf{q}''}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}} - \frac{\delta a^a_{\mathbf{k}}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta b^i_{\mathbf{q}''}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\right\} + \int d\mathbf{q}'\left\{\frac{\overleftarrow{\delta} a^a_{\mathbf{k}}}{\delta f^k_{\mathbf{q}'}}\frac{\overrightarrow{\delta} b^i_{\mathbf{q}''}}{\delta f^{*k}_{\mathbf{q}'}} - \frac{\overrightarrow{\delta} a^a_{\mathbf{k}}}{\delta f^{*k}_{\mathbf{q}'}}\frac{\overleftarrow{\delta} b^i_{\mathbf{q}''}}{\delta f^k_{\mathbf{q}'}}\right\} = 0, \tag{2.23c}$$

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta a^a_{\mathbf{k}}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta b^{*i}_{\mathbf{q}''}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}} - \frac{\delta a^a_{\mathbf{k}}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta b^{*i}_{\mathbf{q}''}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\right\} + \int d\mathbf{q}'\left\{\frac{\overleftarrow{\delta} a^a_{\mathbf{k}}}{\delta f^k_{\mathbf{q}'}}\frac{\overrightarrow{\delta} b^{*i}_{\mathbf{q}''}}{\delta f^{*k}_{\mathbf{q}'}} - \frac{\overrightarrow{\delta} a^a_{\mathbf{k}}}{\delta f^{*k}_{\mathbf{q}'}}\frac{\overleftarrow{\delta} b^{*i}_{\mathbf{q}''}}{\delta f^k_{\mathbf{q}'}}\right\} = 0 \tag{2.23d}$$

и

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta b^i_{\mathbf{q}}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta b^{*j}_{\mathbf{q}''}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}-\frac{\delta b^i_{\mathbf{q}}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta b^{*j}_{\mathbf{q}''}}{\delta c^{c}_{\mathbf{k}'}}\right\}+\int d\mathbf{q}'\left\{\frac{\overleftarrow{\delta} b^i_{\mathbf{q}}}{\delta f^k_{\mathbf{q}'}}\frac{\overrightarrow{\delta} b^{*j}_{\mathbf{q}''}}{\delta f^{*k}_{\mathbf{q}'}}+\frac{\overrightarrow{\delta} b^i_{\mathbf{q}}}{\delta f^{*k}_{\mathbf{q}'}}\frac{\overleftarrow{\delta} b^{*j}_{\mathbf{q}''}}{\delta f^{k}_{\mathbf{q}'}}\right\}=\delta^{ij}\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}''), \tag{2.24a}$$

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta b^i_{\mathbf{q}}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta b^{j}_{\mathbf{q}''}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}-\frac{\delta b^i_{\mathbf{q}}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta b^{j}_{\mathbf{q}''}}{\delta c^{c}_{\mathbf{k}'}}\right\}+\int d\mathbf{q}'\left\{\frac{\overleftarrow{\delta} b^i_{\mathbf{q}}}{\delta f^k_{\mathbf{q}'}}\frac{\overrightarrow{\delta} b^{j}_{\mathbf{q}''}}{\delta f^{*k}_{\mathbf{q}'}}+\frac{\overrightarrow{\delta} b^i_{\mathbf{q}}}{\delta f^{*k}_{\mathbf{q}'}}\frac{\overleftarrow{\delta} b^{j}_{\mathbf{q}''}}{\delta f^{k}_{\mathbf{q}'}}\right\}=0, \tag{2.24b}$$

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta b^i_{\mathbf{q}}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta a^{a}_{\mathbf{k}''}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}-\frac{\delta b^i_{\mathbf{q}}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta a^{a}_{\mathbf{k}''}}{\delta c^{c}_{\mathbf{k}'}}\right\}+\int d\mathbf{q}'\left\{\frac{\overleftarrow{\delta} b^i_{\mathbf{q}}}{\delta f^k_{\mathbf{q}'}}\frac{\overrightarrow{\delta} a^{a}_{\mathbf{k}''}}{\delta f^{*k}_{\mathbf{q}'}}-\frac{\overrightarrow{\delta} b^i_{\mathbf{q}}}{\delta f^{*k}_{\mathbf{q}'}}\frac{\overleftarrow{\delta} a^{a}_{\mathbf{k}''}}{\delta f^{k}_{\mathbf{q}'}}\right\}=0, \tag{2.24c}$$

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta b^i_{\mathbf{q}}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta a^{*a}_{\mathbf{k}''}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}-\frac{\delta b^i_{\mathbf{q}}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta a^{*a}_{\mathbf{k}''}}{\delta c^{c}_{\mathbf{k}'}}\right\}+\int d\mathbf{q}'\left\{\frac{\overleftarrow{\delta} b^i_{\mathbf{q}}}{\delta f^k_{\mathbf{q}'}}\frac{\overrightarrow{\delta} a^{*a}_{\mathbf{k}''}}{\delta f^{*k}_{\mathbf{q}'}}-\frac{\overrightarrow{\delta} b^i_{\mathbf{q}}}{\delta f^{*k}_{\mathbf{q}'}}\frac{\overleftarrow{\delta} a^{*a}_{\mathbf{k}''}}{\delta f^{k}_{\mathbf{q}'}}\right\}=0. \tag{2.24d}$$

Эти условия каноничности могут быть записаны в весьма компактной форме, если воспользоваться определением суперскобки Пуассона (2.9) и заменить вариационные переменные на новые: $a^a_{\mathbf{k}} \to c^a_{\mathbf{k}}$ и $b^i_{\mathbf{q}} \to f^i_{\mathbf{q}}$. В этом случае используются суперскобки для исходных переменных $a^a_{\mathbf{k}}$ и $b^i_{\mathbf{q}}$ (2.7) и (2.8). Обратимся к условиям каноничности (2.23) и (2.24), которые, в свою очередь, накладывают определенные ограничения на (2.21) и (2.22). Разлагая правые части (2.21) и (2.22) в ряд по целыми степенями нормальных переменных $c^a_{\mathbf{k}}$ и $f^i_{\mathbf{q}}$, найдем общую структура преобразования (2.21) с точностью до кубических слагаемых в $c^a_{\mathbf{k}}$ и $f^i_{\mathbf{q}}$:

$$a^a_{\mathbf{k}} = c^a_{\mathbf{k}} + \tag{2.25}$$

$$+\int\frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^6}\left[V^{(1)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}\,c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{a_2}_{\mathbf{k}_2}+V^{(2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}\,c^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{a_2}_{\mathbf{k}_2}+V^{(3)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}\,c^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{*\,a_2}_{\mathbf{k}_2}\right]+$$

$$+\int\frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2}{(2\pi)^6}\left[F^{(1)\,a\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\,f^{i_1}_{\mathbf{q}_1}f^{i_2}_{\mathbf{q}_2}+F^{(2)\,a\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\,f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1}f^{i_2}_{\mathbf{q}_2}+F^{(3)\,a\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1}f^{*\,i_2}_{\mathbf{q}_2}\right]+$$

$$+\int\frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}\Big[W^{(1)\,a\,a_1\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}\,c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{a_2}_{\mathbf{k}_2}c^{a_3}_{\mathbf{k}_3}+W^{(2)\,a\,a_1\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}\,c^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{a_2}_{\mathbf{k}_2}c^{a_3}_{\mathbf{k}_3}+$$

$$+W^{(3)\,a\,a_1\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}\,c^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{*\,a_2}_{\mathbf{k}_2}c^{a_3}_{\mathbf{k}_3}+W^{(4)\,a\,a_1\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}c^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{*\,a_2}_{\mathbf{k}_2}c^{*\,a_3}_{\mathbf{k}_3}\Big]+$$

$$+\int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^9}\Big[J^{(1)\,a\,a_1\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\,c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\,f^{i_1}_{\mathbf{q}_1}f^{i_2}_{\mathbf{q}_2}\,+\,J^{(2)\,a\,a_1\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\,c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\,f^{*i_1}_{\mathbf{q}_1}f^{i_2}_{\mathbf{q}_2}+$$
$$+\,J^{(3)\,a\,a_1\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\,c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\,f^{*i_1}_{\mathbf{q}_1}f^{*i_2}_{\mathbf{q}_2}\,+\,J^{(4)\,a\,a_1\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\,c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}\,f^{i_1}_{\mathbf{q}_1}\,f^{i_2}_{\mathbf{q}_2}+$$
$$+\,J^{(5)\,a\,a_1\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\,c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}f^{*i_1}_{\mathbf{q}_1}\,f^{i_2}_{\mathbf{q}_2}\,+\,J^{(6)\,a\,a_1\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\,c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}f^{*i_1}_{\mathbf{q}_1}f^{*i_2}_{\mathbf{q}_2}\Big]+\ldots\quad.$$

Аналогичное разложение справедливо и для преобразования (2.22):

$$b^{i}_{\mathbf{q}}=f^{i}_{\mathbf{q}}+ \tag{2.26}$$

$$\int\frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{q}_1}{(2\pi)^6}\Big[Q^{(1)\,i\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1}\,c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\,f^{i_1}_{\mathbf{q}_1}+Q^{(2)\,i\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1}\,c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\,f^{*i_1}_{\mathbf{q}_1}+Q^{(3)\,i\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1}\,c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}\,f^{i_1}_{\mathbf{q}_1}+Q^{(4)\,i\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1}\,c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}\,f^{*i_1}_{\mathbf{q}_1}\Big]$$

$$+\int\frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{q}_1}{(2\pi)^9}\Big[R^{(1)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1}\,c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\,c^{a_2}_{\mathbf{k}_2}\,f^{i_1}_{\mathbf{q}_1}\,+\,R^{(2)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1}\,c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}\,c^{a_2}_{\mathbf{k}_2}\,f^{i_1}_{\mathbf{q}_1}+$$
$$+R^{(3)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1}\,c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{*a_2}_{\mathbf{k}_2}\,f^{i_1}_{\mathbf{q}_1}\,+\,R^{(4)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1}\,c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\,c^{a_2}_{\mathbf{k}_2}\,f^{*i_1}_{\mathbf{q}_1}+$$
$$+R^{(5)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1}\,c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{a_2}_{\mathbf{k}_2}\,f^{*i_1}_{\mathbf{q}_1}\,+\,R^{(6)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1}\,c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}\,c^{*a_2}_{\mathbf{k}_2}\,f^{*i_1}_{\mathbf{q}_1}\Big]+$$

$$+\int\frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^9}\Big[S^{(1)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\,f^{i_1}_{\mathbf{q}_1}\,f^{i_2}_{\mathbf{q}_2}\,f^{i_3}_{\mathbf{q}_3}\,+\,S^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\,f^{*i_1}_{\mathbf{q}_1}\,f^{i_2}_{\mathbf{q}_2}\,f^{i_3}_{\mathbf{q}_3}+$$
$$+S^{(3)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\,f^{*i_1}_{\mathbf{q}_1}f^{*i_2}_{\mathbf{q}_2}f^{i_3}_{\mathbf{q}_3}+S^{(4)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}\,f^{*i_1}_{\mathbf{q}_1}\,f^{*i_2}_{\mathbf{q}_2}\,f^{*i_3}_{\mathbf{q}_3}\Big]+\ldots\quad.$$

Заметим прежде всего, что коэффициентные функции $V^{(1)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$, $V^{(3)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$, $F^{(1,3)\,a\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}$, $J^{(1,3,4,6)\,a\,a_1\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}$, $R^{(1,3,4,6)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1}$ и $S^{(1,2,3,4)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}$ должны удовлетворять следующим условиям симметрии:

$$\begin{aligned}
&V^{(1)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}=V^{(1)\,a\,a_2\,a_1}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1}, && V^{(3)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}=V^{(3)\,a\,a_2\,a_1}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1},\\
&F^{(1)\,a\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}=-F^{(1)\,a\,i_2\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1}, && F^{(3)\,a\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}=-F^{(3)\,a\,i_2\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1},\\
&J^{(1)\,a\,a_1\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}=-J^{(1)\,a\,a_1\,i_2\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1}, && J^{(3)\,a\,a_1\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}=-J^{(3)\,a\,a_1\,i_2\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1},\\
&J^{(4)\,a\,a_1\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}=-J^{(4)\,a\,a_1\,i_2\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1}, && J^{(6)\,a\,a_1\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}=-J^{(6)\,a\,a_1\,i_2\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1},\\
&R^{(1)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1}=R^{(1)\;i\,a_2\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1}, && R^{(3)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1}=R^{(3)\;i\,a_2\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1},\\
&R^{(4)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1}=R^{(4)\;i\,a_2\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1}, && R^{(6)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1}=R^{(6)\;i\,a_2\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1},\\
&S^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}=-S^{(2)\,i\,i_1\,i_3\,i_2}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_2}, && S^{(3)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3}=-S^{(3)\,i\,i_2\,i_1\,i_3}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3},
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$S^{(1)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} = -S^{(1)\,i\,i_2\,i_1\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3} = -S^{(1)\,i\,i_1\,i_3\,i_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_2} = S^{(1)\,i\,i_2\,i_3\,i_1}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1} = \dots, \quad (2.28)$$

$$S^{(4)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} = -S^{(4)\,i\,i_2\,i_1\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3} = -S^{(4)\,i\,i_1\,i_3\,i_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_2} = S^{(4)\,i\,i_2\,i_3\,i_1}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1} = \dots. \quad (2.29)$$

Подстановка разложений (2.25) и (2.26) в (2.23) и (2.24) приводит к нетривиальным интегральным соотношениям, которые представляют собой условия связи между различными коэффициентными функциями. Интегральные соотношения между коэффициентными функциями второго и третьего порядков приведены в приложениях C и D. Ниже выпишем только алгебраические соотношения для коэффициентных функций второго порядка:

$$\begin{aligned}
&V^{(2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = -2V^{*(1)\,a_2\,a_1\,a}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}}, \quad && V^{(3)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = V^{(3)\,a_1\,a\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2},\\
&Q^{(1)\,i_1\,a\,i_2}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{q}_2} = -F^{*(2)\,a\,i_2\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1}, && Q^{(2)\,i_1\,a\,i_2}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{q}_2} = 2F^{*(1)\,a\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2},\\
&Q^{(3)\,i_1\,a\,i_2}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{q}_2} = F^{(2)\,a\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2}, && Q^{(4)\,i_1\,a\,i_2}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{q}_2} = 2F^{(3)\,a\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2}.
\end{aligned} \quad (2.30)$$

Одним из полезных следствий первых соотношений в (2.27) и (2.30) является:

$$V^{(2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = V^{(2)\,a_1\,a\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2}. \quad (2.31)$$

2.3 Устранение “несущественного” гамильтониана $H^{(3)}$

В этом разделе рассматривается задача исключения гамильтониана взаимодействия $H^{(3)}$ (2.13) при переходе от функций $a^a_{\mathbf{k}}$ и $b^i_{\mathbf{q}}$ к новым $c^a_{\mathbf{k}}$ и $f^i_{\mathbf{q}}$ в результате канонических преобразований (2.25) и (2.26). С этой целью подставим разложения (2.25) и (2.26) в свободный гамильтониан $H^{(0)}$ (2.12) и сохраним только кубические члены по степеням $c^a_{\mathbf{k}}$ и $f^i_{\mathbf{q}}$, тогда, с учетом соответствующих симметризаций или антисимметризаций, получим

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d\mathbf{k}d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^9}\Big\{\omega^l_{\mathbf{k}}\Big(V^{(1)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\,c^{*a}_{\mathbf{k}}\,c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\,c^{a_2}_{\mathbf{k}_2} + V^{*(1)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\,c^{a}_{\mathbf{k}}\,c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}\,c^{*a_2}_{\mathbf{k}_2}\Big) +\\
&+\frac{1}{2}\left(\omega^l_{\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_2}\right)\Big(V^{(2)\,a_1\,a_2\,a}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}}\,c^{a}_{\mathbf{k}}\,c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}\,c^{*a_2}_{\mathbf{k}_2} + V^{*(2)\,a_1\,a_2\,a}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}}\,c^{*a}_{\mathbf{k}}\,c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\,c^{a_2}_{\mathbf{k}_2}\Big) +\\
&+\frac{1}{3}\left(\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_2}\right)\Big(V^{(3)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\,c^{*\,a}_{\mathbf{k}}\,c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}\,c^{*a_2}_{\mathbf{k}_2} + V^{*(3)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\,c^{a}_{\mathbf{k}}\,c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\,c^{a_2}_{\mathbf{k}_2}\Big)\Big\} +
\end{aligned} \quad (2.32)$$

$$+\int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1}{(2\pi)^9}\Big\{-\Big(\omega^l_{\mathbf{k}_1} F^{*\,(1)\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1} - \frac{1}{2}\Big[\omega^-_{\mathbf{q}} Q^{(2)\,i\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1} - \omega^-_{\mathbf{q}_1} Q^{(2)\,i_1\,a_1\,i}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}}\Big]\Big) c^{a_1}_{\mathbf{k}_1} f^{*\,i}_{\mathbf{q}} f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1} +$$

$$+\Big(\omega^l_{\mathbf{k}_1} F^{(1)\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1} + \frac{1}{2}\Big[\omega^-_{\mathbf{q}} Q^{*\,(2)\,i_1\,a_1\,i}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}} - \omega^-_{\mathbf{q}_1} Q^{*\,(2)\,i\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1}\Big]\Big) c^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1} f^{\,i}_{\mathbf{q}} f^{\,i_1}_{\mathbf{q}_1} +$$

$$+\Big(\omega^l_{\mathbf{k}_1} F^{*\,(2)\,a_1\,i_1\,i}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}} + \omega^-_{\mathbf{q}} Q^{(1)\,i\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1} + \omega^-_{\mathbf{q}_1} Q^{*\,(3)\,i_1\,a_1\,i}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}}\Big) c^{a_1}_{\mathbf{k}_1} f^{*\,i}_{\mathbf{q}} f^{\,i_1}_{\mathbf{q}_1} +$$

$$+\Big(\omega^l_{\mathbf{k}_1} F^{(2)\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1} + \omega^-_{\mathbf{q}} Q^{(3)\,i\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1} + \omega^-_{\mathbf{q}_1} Q^{*\,(1)\,i_1\,a_1\,i}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}}\Big) c^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1} f^{*\,i}_{\mathbf{q}} f^{\,i_1}_{\mathbf{q}_1} -$$

$$-\Big(\omega^l_{\mathbf{k}_1} F^{*\,(3)\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1} - \frac{1}{2}\Big[\omega^-_{\mathbf{q}} Q^{*\,(4)\,i_1\,a_1\,i}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}} - \omega^-_{\mathbf{q}_1} Q^{*\,(4)\,i\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1}\Big]\Big) c^{a_1}_{\mathbf{k}_1} f^{\,i}_{\mathbf{q}} f^{\,i_1}_{\mathbf{q}_1} +$$

$$+\Big(\omega^l_{\mathbf{k}_1} F^{(3)\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1} + \frac{1}{2}\Big[\omega^-_{\mathbf{q}} Q^{(4)\,i\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1} - \omega^-_{\mathbf{q}_1} Q^{(4)\,i_1\,a_1\,i}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}}\Big]\Big) c^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1} f^{*\,i}_{\mathbf{q}} f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1}\Big\}.$$

Здесь учли условия симметрии (2.27) и (2.31). В гамильтониане $H^{(3)}$ (2.13) выполняем замены: $a^a_{\mathbf{k}} \to c^a_{\mathbf{k}}$ и $b^i_{\mathbf{q}} \to f^i_{\mathbf{q}}$. Добавляя полученное выражение к (2.32), принимая во внимание (2.30), окончательно получаем явный вид коэффициентных функций в квадратичной части канонических преобразований (2.25) и (2.26), которые исключают кубические члены гамильтониана взаимодействия:

$$\begin{cases} V^{(1)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = -\dfrac{\mathcal{V}^{a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}}{\omega^l_{\mathbf{k}} - \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2}}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \\ V^{(3)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = -\dfrac{\mathcal{U}^{*\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}}{\omega^l_{\mathbf{k}} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_2}}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \end{cases} \tag{2.33}$$

$$\begin{cases} F^{(1)\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1} = \dfrac{\mathcal{G}^{*\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^-_{\mathbf{q}} - \omega^-_{\mathbf{q}_1}}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q} - \mathbf{q}_1), \\ F^{(2)\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1} = -\dfrac{\mathcal{P}^{*\,a_1\,i_1\,i}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}}}{\omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^-_{\mathbf{q}_1} + \omega^-_{\mathbf{q}}}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}), \\ F^{(3)\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1} = \dfrac{\mathcal{K}^{*\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_1} + \omega^-_{\mathbf{q}} + \omega^-_{\mathbf{q}_1}}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q} + \mathbf{q}_1). \end{cases} \tag{2.34}$$

Коэффициенты $V^{(2)}$ и $Q^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, 4$, определяются из соотношений (2.30). В первой главе были получены выражения (2.33) (уравнение (1.12)). Как видно из (2.33) и (2.34), в виду особенности дисперсионных уравнений для бозонных (1.5) и фермионных (2.6) возбуждений в горячей кварк-глюонной плазме, усло-

вия резонанса для трёхволновых процессов с плазмонами

$$\begin{cases} \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \\ \omega^l_{\mathbf{k}} = \omega^l_{\mathbf{k}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0, \\ \omega^l_{\mathbf{k}} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_2} = 0 \end{cases}$$

и с плазмонами и плазминами

$$\begin{cases} \mathbf{q} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{k}_1 = 0, \\ \omega^-_{\mathbf{q}} + \omega^-_{\mathbf{q}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{k}_1, \\ \omega^-_{\mathbf{q}} = \omega^-_{\mathbf{q}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_1}, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{k}_1 = \mathbf{q} + \mathbf{q}_1, \\ \omega^l_{\mathbf{k}_1} = \omega^-_{\mathbf{q}} + \omega^-_{\mathbf{q}_1} \end{cases}$$

не имеют решений. Другими словами, процессы распада и слияния, включающие три коллективных возбуждения, которые лежат на резонансной поверхности $\omega^l = \omega^l_{\mathbf{k}}$ и $\omega^- = \omega^-_{\mathbf{q}}$, запрещены.

2.4 Эффективный гамильтониан четвёртого порядка. Упругое рассеяние плазмина на плазмоне

Далее приступим к выводу явного вида эффективных гамильтонианов четвертого порядка, описывающих упругое рассеяние плазмина на плазмине и плазмина на плазмоне. В этом разделе рассмотрим вывод эффективного гамильтониана для второго процесса рассеяния. В терминах полевых переменных $a^a_{\mathbf{k}}$ и $b^i_{\mathbf{q}}$ рассматриваемый гамильтониан для упругого рассеяния плазмина на плазмоне содержит первый член в правой части уравнения (2.14). Здесь производим замену: $a^a_{\mathbf{k}} \to c^a_{\mathbf{k}}$ и $b^i_{\mathbf{q}} \to f^i_{\mathbf{q}}$. Затем определяем аналогичные члены четвертого порядка $f^{*\,i}_{\mathbf{q}} f^{\,i_1}_{\mathbf{q}_1} c^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1} c^{\,a_2}_{\mathbf{k}_2}$, входящие в $H^{(0)}$ (2.12) и $H^{(3)}$ (2.13), которые возникают при канонических преобразованиях (2.25) и (2.26). Принимая во внимание соотношения (2.30), получаем из $H^{(0)}$:

$$\begin{aligned} &\int \frac{d\mathbf{q}\, d\mathbf{q}_1 d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^{12}} \left\{ \left(\omega^l_{\mathbf{k}_1} J^{(2)\,a_1 a_2\, i\, i_1}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}, \mathbf{q}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_2} J^{*(2)\,a_2 a_1 i_1 i}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}} + \omega^-_{\mathbf{q}} R^{(2)\,i\, a_1 a_2\, i_1}_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}_1} + \omega^-_{\mathbf{q}_1} R^{*(2)\,i_1 a_2 a_1\, i}_{\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{q}} \right) \right. \\ &- 2 \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\, \omega^l_{\mathbf{k}'} \left[V^{(1)\,a_1 a_2 a'}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}'} F^{(2)\,a'\, i\, i_1}_{\mathbf{k}', \mathbf{q}, \mathbf{q}_1} + V^{*(1)\,a_2 a_1\, a'}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}'} F^{*(2)\,a'\, i_1\, i}_{\mathbf{k}', \mathbf{q}_1, \mathbf{q}} \right] + \\ &+ \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\, \omega^-_{\mathbf{q}'} \left[4 F^{(1)\,a_1 i_1 i'}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}'} F^{*(1)\,a_2 i' i}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{q}', \mathbf{q}} + F^{(2)\,a_1 i i'}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}, \mathbf{q}'} F^{*(2)\,a_2 i_1 i'}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}'} + \right. \\ &\left. \left. + F^{(2)\,a_1 i' i_1}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}', \mathbf{q}_1} F^{*(2)\,a_2 i' i}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{q}', \mathbf{q}} + 4 F^{(3)\,a_1 i' i}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}', \mathbf{q}} F^{*(3)\,a_2 i_1 i'}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}'} \right] \right\} f^{*i}_{\mathbf{q}} f^{\,i_1}_{\mathbf{q}_1} c^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1} c^{\,a_2}_{\mathbf{k}_2}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Проанализируем вклад в круглых скобках в (2.35). Для этой цели используем интегральные соотношения, приведенные в приложении C. Для исключения функций $J^{*(2)\,a_2\,a_1\,i_1\,i}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}}$, $R^{(2)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1}$ и $R^{*(2)\,i_1\,a_2\,a_1\,i}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{q}}$ нам понадобятся соотношения (C.1b), (C.3a) и (C.4b), соответственно. В результате получим

$$\omega^l_{\mathbf{k}_1} J^{(2)\,a_1\,a_2\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q},\mathbf{q}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_2} J^{*(2)\,a_2\,a_1\,i_1\,i}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}} + \omega^-_{\mathbf{q}} R^{(2)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1} + \omega^-_{\mathbf{q}_1} R^{*(2)\,i_1\,a_2\,a_1\,i}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{q}} = \tag{2.36}$$

$$= \left(\omega^-_{\mathbf{q}} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^-_{\mathbf{q}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2}\right) J^{(2)\,a_1\,a_2\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q},\mathbf{q}_1} -$$

$$- 2\left(\omega^-_{\mathbf{q}} - \omega^-_{\mathbf{q}_1}\right) \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \left[V^{(1)\,a_1\,a_2\,a'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}'}\, F^{(2)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_1} - V^{*(1)\,a_2\,a_1\,a'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'}\, F^{*(2)\,a'\,i_1\,i}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}} \right] -$$

$$- \omega^-_{\mathbf{q}} \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} \left[4 F^{(1)\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}\, F^{*(1)\,a_2\,i\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q},\mathbf{q}'} + F^{(2)\,a_1\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}\, F^{*(2)\,a_2\,i'\,i}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}',\mathbf{q}} \right] -$$

$$- \omega^-_{\mathbf{q}_1} \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} \left[F^{(2)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\, F^{*(2)\,a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'} - 4 F^{(3)\,a_1\,i'\,i}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}}\, F^{*(3)\,a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'} \right] -$$

$$- \omega^l_{\mathbf{k}_2} \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} \left[4 F^{(1)\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}\, F^{*(1)\,a_2\,i'\,i}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}',\mathbf{q}} + F^{(2)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\, F^{*(2)\,a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'} - \right.$$

$$\left. - F^{(2)\,a_1\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}\, F^{*(2)\,a_2\,i'\,i}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}',\mathbf{q}} - 4 F^{(3)\,a_1\,i'\,i}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}}\, F^{*(3)\,a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'} \right].$$

Далее анализируем вклады четвертого порядка от гамильтониана $H^{(3)}$ (2.13). Здесь, для удобства последующих рассуждений, переходим от вершинных функций $\mathcal{V}^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$, $\mathcal{G}^{a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}_1}$, $\mathcal{P}^{a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}_1}$ и $\mathcal{K}^{a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}_1}$ к коэффициентным $V^{(1)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ и $F^{(i)\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}_1}$, $i = 1, 2, 3$, по правилам (2.33) и (2.34). Как следствие, имеем

$$\int \frac{d\mathbf{q}\, d\mathbf{q}_1 d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^{12}}\, f^{*\,i}_{\mathbf{q}} f^{\,i_1}_{\mathbf{q}_1} c^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1} c^{\,a_2}_{\mathbf{k}_2} \times \tag{2.37}$$

$$\left\{ -2 \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \left[\left(\omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}'} - \omega^l_{\mathbf{k}_2}\right) V^{(1)\,a_1\,a_2\,a'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}'}\, F^{(2)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_1} + \left(\omega^l_{\mathbf{k}_2} - \omega^l_{\mathbf{k}'} - \omega^l_{\mathbf{k}_1}\right) V^{*(1)\,a_2\,a_1\,a'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'}\, F^{*(2)\,a'\,i_1\,i}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}} \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\omega^l_{\mathbf{k}'} + \omega^-_{\mathbf{q}} - \omega^-_{\mathbf{q}_1}\right) V^{(1)\,a_1\,a_2\,a'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}'}\, F^{(2)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_1} - \left(\omega^l_{\mathbf{k}'} - \omega^-_{\mathbf{q}} + \omega^-_{\mathbf{q}_1}\right) V^{*(1)\,a_2\,a_1\,a'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'}\, F^{*(2)\,a'\,i_1\,i}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}} \right] \right.$$

$$+ \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} \left[\left(\omega^l_{\mathbf{k}_2} - \omega^-_{\mathbf{q}'} + \omega^-_{\mathbf{q}_1}\right) F^{(2)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\, F^{*(2)\,a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'} + \left(\omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^-_{\mathbf{q}'} + \omega^-_{\mathbf{q}}\right) F^{(2)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\, F^{*(2)\,a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'} \right.$$

$$\left. \left. - \left(\omega^l_{\mathbf{k}_1} + \omega^-_{\mathbf{q}'} - \omega^-_{\mathbf{q}_1}\right) F^{(2)\,a_1\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}\, F^{*(2)\,a_2\,i'\,i}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}',\mathbf{q}} - \left(\omega^l_{\mathbf{k}_2} - \omega^-_{\mathbf{q}} + \omega^-_{\mathbf{q}'}\right) F^{(2)\,a_1\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}\, F^{*(2)\,a_2\,i'\,i}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}',\mathbf{q}} \right] \right.$$

$$-4\int\frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\Big[\big(\omega^-_{\mathbf{q}}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}+\omega^-_{\mathbf{q}'}\big)F^{(1)\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}'}F^{*\,(1)\,a_2\,i'\,i}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{q}',\,\mathbf{q}}-\big(\omega^-_{\mathbf{q}'}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}\big)F^{(1)\,a_1\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1}F^{*\,(1)\,a_2\,i'\,i}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{q}',\,\mathbf{q}}$$

$$+\big(\omega^l_{\mathbf{k}_2}+\omega^-_{\mathbf{q}'}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}\big)F^{(3)\,a_1\,i'\,i}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}',\,\mathbf{q}}F^{*\,(3)\,a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}'}+\big(\omega^l_{\mathbf{k}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}'}+\omega^-_{\mathbf{q}}\big)F^{(3)\,a_1\,i'\,i}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}',\,\mathbf{q}}F^{*\,(3)\,a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}'}\Big]\Big\}.$$

Здесь мы не стали собирать подобные члены, так как данное выражение более подходит для последнего шага наших вычислений. Объединим (2.35), (2.37) и первый вклад в (2.14), с учетом (2.36), и приведем подобные члены. Большинство из них взаимно сокращаются. Последним шагом является переход от функций $V^{(1)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ и $F^{(i)\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, $i=1,2,3$, к "физическим" функциям $\mathcal{V}^{a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$, $\mathcal{G}^{a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, $\mathcal{P}^{a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ и $\mathcal{K}^{a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ по правилам (2.33) и (2.34). Таким образом, эффективный гамильтониан четвертого порядка, описывающий упругое рассеяние плазмина на плазмоне, будет иметь вид:

$$\mathcal{H}^{(4)}_{qg\to qg}=\int\frac{d\mathbf{q}\,d\mathbf{q}_1\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^{12}}\times \tag{2.38}$$

$$\times\Big\{\big(\omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}\big)J^{(2)\,a_1\,a_2\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}+\widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,a_1\,a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}+\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_2)\Big\}f^{*\,i}_{\mathbf{q}}f^{\,i_1}_{\mathbf{q}_1}c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{a_2}_{\mathbf{k}_2},$$

где эффективная амплитуда $\widetilde{T}^{(2)}$ имеет следующую структуру:

$$\widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,a_1\,a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}=T^{(2)\,i\,i_1\,a_1\,a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}- \tag{2.39}$$

$$-4\,\frac{\mathcal{G}^{a_2\,i\,i'}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{q},\,\mathbf{k}_2-\mathbf{q}}\,\mathcal{G}^{*\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^-_{\mathbf{q}}-\omega^-_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q}}}+\frac{\mathcal{P}^{a_2\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_1}\,\mathcal{P}^{*\,a_1\,i'\,i}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_1+\mathbf{q},\,\mathbf{q}}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^-_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}}-\frac{\mathcal{P}^{a_2\,i\,i'}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}-\mathbf{k}_2}\,\mathcal{P}^{*\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^-_{\mathbf{q}-\mathbf{k}_2}}+$$

$$+4\,\frac{\mathcal{K}^{a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{q}_1,\,-\mathbf{k}_2-\mathbf{q}_1}\,\mathcal{K}^{*\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,-\mathbf{k}_1-\mathbf{q}}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^-_{-\mathbf{k}_2-\mathbf{q}_1}}-2\,\frac{\mathcal{V}^{a_1\,a_2\,a'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\,\mathcal{P}^{*\,a'\,i_1\,i}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}}}{\omega^l_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}}}-2\,\frac{\mathcal{P}^{\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\,\mathcal{V}^{*\,a_2\,a_1\,a'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}}.$$

Напомним, что здесь явно не выписываем зависимость от спиновой переменной. Суммирование по цветному индексу i' в четырех членах в правой части (2.39) подразумевает также суммирование по спиральности λ'. Например, в числителе третьего слагаемого необходимо, вообще говоря, записать

$$\sum_{\lambda'=\pm1}\mathcal{P}^{a_2\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_1}(\lambda',\lambda_1)\,\mathcal{P}^{*\,a_1\,i'\,i}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_1+\mathbf{q},\,\mathbf{q}}(\lambda',\lambda) \tag{2.40}$$

и т.д.. Первый член в фигурных скобках в выражении (2.38) имеет в качестве множителя $(\omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_2})$ фактически закон сохранения энергии для

данного процесса рассеяния (см. (2.99)). В случае выполнения равенства

$$\omega^{-}_{\mathbf{q}} + \omega^{l}_{\mathbf{k}_1} - \omega^{-}_{\mathbf{q}_1} - \omega^{l}_{\mathbf{k}_2} = 0$$

при

$$\mathbf{q} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_2 = 0,$$

вклад этого члена в эффективный гамильтониан можно отбросить. В дальнейшем для обозначения эффективных гамильтонианов будем использовать каллиграфическую букву $\mathcal{H}$, то же самое относится и к гамильтониану $\mathcal{H}^{(0)}$ для невзаимодействующих плазмонов и плазминов в новых переменных:

$$\mathcal{H}^{(0)} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, \omega^{l}_{\mathbf{k}}\, c^{*a}_{\mathbf{k}} c^{a}_{\mathbf{k}} + \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\, \omega^{-}_{\mathbf{q}}\, f^{*i}_{\mathbf{q}} f^{i}_{\mathbf{q}}. \tag{2.41}$$

На рисунке 2.1 схематически изображены различные члены в эффективной амплитуде $\widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,a_1\,a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$. Прямые и волновые линии обозначают возбуждения мягких кварков и мягких глюонов, соответственно Первый график представля-

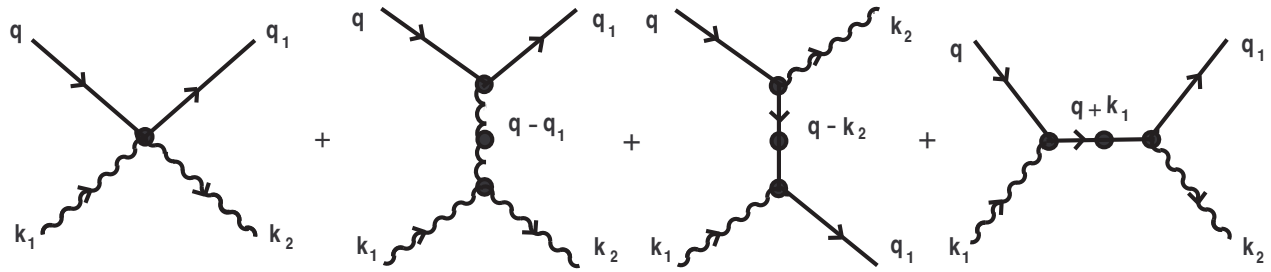


Рисунок 2.1 — Матричный элемент для процесса упругого рассеяния плазминов на плазмоне

ет собой прямое взаимодействие плазмина с плазмоном, индуцированное амплитудой $T^{(2)\,i\,i_1\,a_1\,a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ в общем выражении (2.39). Остальные графики изображают процессы взаимодействия двух плазминов с плазмонами и трех плазмонов между собой, которые порождаются амплитудами $\mathcal{G}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, $\mathcal{P}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, $\mathcal{K}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ и $\mathcal{V}^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ с промежуточными виртуальными колебаниями и представляют собой вклады s и t каналов. Эффективная амплитуда $\widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,a_1\,a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ содержит в себе также вклад от u-канала. На данном рисунке он не изображен.

2.5 Эффективный гамильтониан четвёртого порядка. Упругое рассеяние плазмина на плазмине

Определим теперь эффективный гамильтониан для упругого рассеяния плазмина на плазмине. Как и в ранее рассмотренном случае, для начала необходимо получить все пропорциональные произведению вклады $f^{*\,i}_{\mathbf{q}} f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1} f^{\,i_2}_{\mathbf{q}_2} f^{\,i_3}_{\mathbf{q}_3}$ из гамильтониана $H^{(0)}$ (2.12) как результат канонических преобразований бозонной $a^a_{\mathbf{k}}$ и фермионной $b^i_{\mathbf{q}}$ переменных (2.25) и (2.26). Принимая во внимание соотношения (2.30), получаем следующие вклады от $H^{(0)}$:

$$\int \frac{d\mathbf{q}\,d\mathbf{q}_1\,d\mathbf{q}_2\,d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^{12}} \left\{ \frac{1}{2}\Big(\omega^-_{\mathbf{q}} S^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} - \omega^-_{\mathbf{q}_1} S^{(2)\,i_1\,i\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} + \omega^-_{\mathbf{q}_3} S^{*(2)\,i_3\,i_2\,i_1\,i}_{\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}} - \omega^-_{\mathbf{q}_2} S^{*(2)\,i_2\,i_3\,i_1\,i}_{\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}} \Big) \right.$$

$$- \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\, \omega^l_{\mathbf{k}'} \Big[F^{(1)\,a'\,i_2\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} F^{*(1)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1} + F^{(3)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1} F^{*(3)\,a'\,i_2\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} \Big] - \tag{2.42}$$

$$- \frac{1}{4} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\, \omega^l_{\mathbf{k}'} \Big[F^{(2)\,a'\,i_1\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3} F^{*(2)\,a'\,i_2\,i}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}} + F^{(2)\,a'\,i\,i_2}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2} F^{*(2)\,a'\,i_3\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1} -$$

$$\left. - F^{(2)\,a'\,i\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_3} F^{*(2)\,a'\,i_2\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1} - F^{(2)\,a'\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2} F^{*(2)\,a'\,i_3\,i}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}} \Big] \right\} f^{*\,i}_{\mathbf{q}} f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1} f^{\,i_2}_{\mathbf{q}_2} f^{\,i_3}_{\mathbf{q}_3}.$$

Там, где необходимо, была выполнена антисимметризация, на что указывают соответствующие коэффициенты $1/2$ и $1/4$. Проанализируем выражение в круглых скобках в (2.42). Для этого используем интегральные соотношения, приведенные в приложении D. Для исключения функций $S^{(2)\,i_1\,i\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}$, $S^{*(2)\,i_3\,i_2\,i_1\,i}_{\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}}$ и $S^{*(2)\,i_2\,i_3\,i_1\,i}_{\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}}$ используем соотношения (D.4a) и (D.2b), соответственно. В итоге получаем

$$\omega^-_{\mathbf{q}} S^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} - \omega^-_{\mathbf{q}_1} S^{(2)\,i_1\,i\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} + \omega^-_{\mathbf{q}_3} S^{*(2)\,i_3\,i_2\,i_1\,i}_{\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}} - \omega^-_{\mathbf{q}_2} S^{*(2)\,i_2\,i_3\,i_1\,i}_{\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}} = \tag{2.43}$$

$$= \big(\omega^-_{\mathbf{q}} + \omega^-_{\mathbf{q}_1} - \omega^-_{\mathbf{q}_2} - \omega^-_{\mathbf{q}_3} \big) S^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} -$$

$$- \frac{1}{2}\, \omega^-_{\mathbf{q}_1} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \Big[F^{(2)\,a'\,i_1\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3} F^{*(2)\,a'\,i_2\,i}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}} + F^{(2)\,a'\,i\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_3} F^{*(2)\,a'\,i_2\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1} -$$

$$- F^{(2)\,a'\,i\,i_2}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2} F^{*(2)\,a'\,i_3\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1} - F^{(2)\,a'\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2} F^{*(2)\,a'\,i_3\,i}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}} \Big] +$$

$$+\frac{1}{2}\,\omega^{-}_{\mathbf{q}_2}\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\,\Big[4F^{(1)\,a'\,i_2\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\,F^{*\,(1)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}+F^{(2)\,a'\,i\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_3}\,F^{*\,(2)\,a'\,i_2\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1}-$$

$$-4F^{(3)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\,F^{*\,(3)\,a'\,i_2\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}-F^{(2)\,a'\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2}\,F^{*\,(2)\,a'\,i_3\,i}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}}\Big]-$$

$$-\frac{1}{2}\,\omega^{-}_{\mathbf{q}_3}\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\,\Big[4F^{(1)\,a'\,i_3\,i_2}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_2}\,F^{*\,(1)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}+F^{(2)\,a'\,i\,i_2}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2}\,F^{*\,(2)\,a'\,i_3\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1}-$$

$$-4F^{(3)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\,F^{*\,(3)\,a'\,i_3\,i_2}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_2}-F^{(2)\,a'\,i_1\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3}\,F^{*\,(2)\,a'\,i_2\,i}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}}\Big].$$

Перейдем теперь к анализу вкладов четвертого порядка от гамильтониана $H^{(3)}$ (2.13). Здесь, как и ранее, переходим от вершинных функций $\mathcal{G}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, $\mathcal{P}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ и $\mathcal{K}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ к коэффициентным: $F^{(i)\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, $i=1,2,3$, по правилам (2.34). Проводя соответствующую антисимметризацию, там где это необходимо, в результате приходим к

$$\int\frac{d\mathbf{q}\,d\mathbf{q}_1\,d\mathbf{q}_2\,d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^{12}}\,f^{*\,i}_{\mathbf{q}}f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1}f^{\,i_2}_{\mathbf{q}_2}f^{\,i_3}_{\mathbf{q}_3}\times \tag{2.44}$$

$$\Big\{\frac{1}{4}\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\,\Big[\big(\omega^{l}_{\mathbf{k}'}-\omega^{-}_{\mathbf{q}_1}+\omega^{-}_{\mathbf{q}_3}\big)F^{(2)\,a'\,i\,i_2}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2}\,F^{*\,(2)\,a'\,i_3\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1}-\big(\omega^{l}_{\mathbf{k}'}-\omega^{-}_{\mathbf{q}}+\omega^{-}_{\mathbf{q}_3}\big)F^{(2)\,a'\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2}\,F^{*\,(2)\,a'\,i_3\,i}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}}$$

$$+\big(\omega^{l}_{\mathbf{k}'}-\omega^{-}_{\mathbf{q}}+\omega^{-}_{\mathbf{q}_2}\big)F^{(2)\,a'\,i_1\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3}\,F^{*\,(2)\,a'\,i_2\,i}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}}-\big(\omega^{l}_{\mathbf{k}'}-\omega^{-}_{\mathbf{q}_1}+\omega^{-}_{\mathbf{q}_2}\big)F^{(2)\,a'\,i\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_3}\,F^{*\,(2)\,a'\,i_2\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1}$$

$$+\big(\omega^{l}_{\mathbf{k}'}+\omega^{-}_{\mathbf{q}_1}-\omega^{-}_{\mathbf{q}_3}\big)F^{(2)\,a'\,i_1\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3}\,F^{*\,(2)\,a'\,i_2\,i}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}}-\big(\omega^{l}_{\mathbf{k}'}+\omega^{-}_{\mathbf{q}}-\omega^{-}_{\mathbf{q}_3}\big)F^{(2)\,a'\,i\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_3}\,F^{*\,(2)\,a'\,i_2\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1}$$

$$+\big(\omega^{l}_{\mathbf{k}'}+\omega^{-}_{\mathbf{q}}-\omega^{-}_{\mathbf{q}_2}\big)F^{(2)\,a'\,i\,i_2}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2}\,F^{*\,(2)\,a'\,i_3\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1}-\big(\omega^{l}_{\mathbf{k}'}+\omega^{-}_{\mathbf{q}_1}-\omega^{-}_{\mathbf{q}_2}\big)F^{(2)\,a'\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2}\,F^{*\,(2)\,a'\,i_3\,i}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}}\Big]$$

$$+\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\,\Big[\big(\omega^{l}_{\mathbf{k}'}-\omega^{-}_{\mathbf{q}}-\omega^{-}_{\mathbf{q}_1}\big)F^{(1)\,a'\,i_2\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\,F^{*\,(1)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}+\big(\omega^{l}_{\mathbf{k}'}-\omega^{-}_{\mathbf{q}_2}-\omega^{-}_{\mathbf{q}_3}\big)F^{(1)\,a'\,i_2\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\,F^{*\,(1)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$$

$$+\big(\omega^{l}_{\mathbf{k}'}+\omega^{-}_{\mathbf{q}}+\omega^{-}_{\mathbf{q}_1}\big)F^{(3)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\,F^{*\,(3)\,a'\,i_2\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}+\big(\omega^{l}_{\mathbf{k}'}+\omega^{-}_{\mathbf{q}_2}+\omega^{-}_{\mathbf{q}_3}\big)F^{(3)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\,F^{*\,(3)\,a'\,i_2\,i_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\Big]\Big\}.$$

Как и в случае с (2.37), здесь не стали приводить подобные члены, поскольку данное выражение более удобно для последующих вычислений. Во втором члене в правой части (2.14) делаем замены $b^{*\,i}_{\mathbf{q}}\to f^{*\,i}_{\mathbf{q}}$ и $b^{i}_{\mathbf{q}}\to f^{i}_{\mathbf{q}}$. Добавляем (2.42) и (2.44) к полученному таким образом выражению (с учетом (2.43)) и приводим подобные. Здесь большинство членов взаимно сокращается. На последнем шаге переходим от коэффициентных функций $F^{(i)\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, $i=1,2,3$, к вершинным функциям $\mathcal{G}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, $\mathcal{P}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ и $\mathcal{K}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ по правилам (2.34). Тем самым можно получить эффективный гамильтониан четвертого порядка для

упругого рассеяния плазмина на плазмине:

$$\mathcal{H}^{(4)}_{qq\to qq} = \frac{1}{2}\int \frac{d\mathbf{q}\,d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^{12}} \times \tag{2.45}$$

$$\times\Big\{\big(\omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}_2}-\omega^-_{\mathbf{q}_3}\big)S^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}+\widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)\Big\}\times$$

$$\times\, f^{*\,i}_{\mathbf{q}} f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1} f^{\,i_2}_{\mathbf{q}_2} f^{\,i_3}_{\mathbf{q}_3},$$

где эффективная амплитуда $\widetilde{T}^{(2)}$ имеет следующую структуру:

$$\widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} = T^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} + 2\,\frac{\mathcal{G}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\,\mathcal{G}^{*\,a\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}}{\omega^l_{\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3}-\omega^-_{\mathbf{q}_2}-\omega^-_{\mathbf{q}_3}} + 2\,\frac{\mathcal{K}^{\,a\,i_2\,i_3}_{-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\,\mathcal{K}^{*\,a\,i\,i_1}_{-\mathbf{q}-\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}}{\omega^l_{-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}+\omega^-_{\mathbf{q}_2}+\omega^-_{\mathbf{q}_3}} +$$

$$+\frac{1}{2}\Bigg[\left(\frac{\mathcal{P}^{\,a\,i\,i_2}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2}\,\mathcal{P}^{*\,a\,i_3\,i_1}_{\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1}}{\omega^l_{\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}_3}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}} + \frac{\mathcal{P}^{\,a\,i_1\,i_3}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3}\,\mathcal{P}^{*\,a\,i_2\,i}_{\mathbf{q}_2-\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}}}{\omega^l_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}_3}}\right) - \tag{2.46}$$

$$-\left(\frac{\mathcal{P}^{\,a\,i_1\,i_2}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2}\,\mathcal{P}^{*\,a\,i_3\,i}_{\mathbf{q}_3-\mathbf{q},\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}}}{\omega^l_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}_2}} + \frac{\mathcal{P}^{\,a\,i\,i_3}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_3}\,\mathcal{P}^{*\,a\,i_2\,i_1}_{\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1}}{\omega^l_{\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}_2}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}}\right)\Bigg].$$

Первый член в фигурных скобках в (2.45) содержит множитель, который представляет собой закон сохранения энергии для данного процесса рассеяния. Следуя рассуждениям предыдущего раздела применительно к эффективному гамильтониану (2.45) в случае выполнения равенства

$$\omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}_2}-\omega^-_{\mathbf{q}_3}=0$$

при

$$\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3=0,$$

вклад этого члена можно считать равным нулю. Напомним, что эффективная амплитуда (2.46) зависит также от четырех переменных спиральности λ, λ_1, λ_2 и λ_3. Диаграммная интерпретация полученной эффективной амплитуды представлена на рис. 2.2. Здесь изображены графики для процессов упругого рассеяния плазмина на плазмине.

Как будет показано далее, в рамках квазиклассического описания кварк-глюонной плазмы, четырёхплазминная амплитуда $T^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}$ в выражении (2.46) отсутствует. Это является причиной, по которой нет диаграммы, изображающей прямое взаимодействие четырех плазминов. Условие малости амплитуд в этом чисто “фермионном” случае означает выполнение условия

$$|\,\widetilde{T}^{(2)}||\,f\,|^2 \ll \Big(\mathbf{q}\cdot\partial\omega^-_{\mathbf{q}}/\partial\mathbf{q}\Big). \tag{2.47}$$

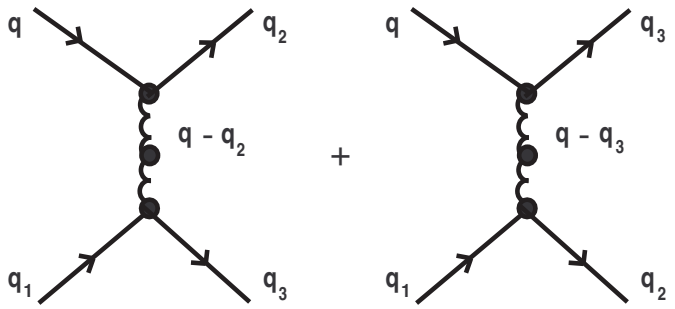


Рисунок 2.2 — Упругое рассеяние плазмина на плазмине, подобное мёллеровскому рассеянию

2.6 Корреляционная функция четвёртого порядка для мягких кварк-антикварковых возбуждений

Далее будем рассматривать гамильтониан $\mathcal{H}^{(4)}_{qq\to qq}$ (2.45), тогда запишем

$$\frac{\partial f^{*\,i}_{\mathbf{q}}}{\partial t} = -i\Big\{f^{*\,i}_{\mathbf{q}},\, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(4)}_{qq\to qq}\Big\} = i\omega^{-}_{\mathbf{q}}\, f^{*\,i}_{\mathbf{q}} - \tag{2.48}$$

$$- i\int \frac{d\mathbf{q}_1\, d\mathbf{q}_2\, d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^9}\, \widetilde{T}^{*(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\, f^{\,i_1}_{\mathbf{q}_1}\, f^{*\,i_2}_{\mathbf{q}_2} f^{*\,i_3}_{\mathbf{q}_3}\, (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3),$$

$$\frac{\partial f^{\,j}_{\mathbf{q}'}}{\partial t} = -i\Big\{f^{\,j}_{\mathbf{q}'},\, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(4)}_{qq\to qq}\Big\} = -i\omega^{-}_{\mathbf{q}'}\, f^{\,i}_{\mathbf{q}'} - \tag{2.49}$$

$$- i\int \frac{d\mathbf{q}_1\, d\mathbf{q}_2\, d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^9}\, \widetilde{T}^{(2)\,j\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\, f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1} f^{\,i_2}_{\mathbf{q}_2}\, f^{\,i_3}_{\mathbf{q}_3}\, (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}' + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3).$$

В первом уравнении учли грассманову природу функций $f^{\,i}_{\mathbf{q}}$, $f^{*\,i}_{\mathbf{q}}$ и свойство симметрии для эффективной амплитуды рассеяния $\widetilde{T}^{(2)}$ относительно перестановки первой и второй пар индексов (и импульсов) между собой или, другими словами, при взаимной перестановке входящих и исходящих внешних плазминных линий

$$\widetilde{T}^{*(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} = \widetilde{T}^{(2)\,i_2\,i_3\,i\,\,i_1}_{\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}. \tag{2.50}$$

В отсутствие внешнего поля в неабелевой плазме, используя точные уравнения (2.48) и (2.49), можно определить кинетическое уравнение для плотности числа бесцветных плазминов $n^{ij\,-}_{\mathbf{q}} \equiv \delta^{ij} n^{-}_{\mathbf{q}}$. В случае, когда ансамбль взаимодействующих фермионных возбуждений при низком уровне нелинейности (2.47) имеет случайные фазы, он может быть описан статистически путем введения фермионной корреляционной функции:

$$\big\langle f^{*\,i}_{\mathbf{q}}(\lambda) f^{\,j}_{\mathbf{q}'}(\lambda')\big\rangle = \delta^{ij}\delta_{\lambda\lambda'}(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')n^{-}_{\mathbf{q}}. \tag{2.51}$$

Здесь явно выделена зависимость от спиральности. Ее эволюция, обусловленная влиянием нелинейных резонансных четырёхволновых взаимодействий, описывается соответствующим кинетическим уравнением, которое будет получено ниже.

Введение функции распределения фермионных квазичастиц (плазминов) $n^-_{\mathbf{q}} \equiv n^-(\mathbf{q}, \mathbf{x}, t)$ имеет смысл только в случае, когда число плазминов медленно меняется в пространстве и во времени. Это означает, что на расстояниях порядка длины волны $\lambda = 2\pi/q$ и на временных интервалах порядка периода колебаний $T = 2\pi/\omega^-_{\mathbf{q}}$ изменение функции должно быть намного меньше, в сравнении с функцией $n^-_{\mathbf{q}}$.

На основании уравнений (2.48) и (2.49), можно определить кинетическое уравнение для плотности числа плазминов $n^-_{\mathbf{q}}$. С этой целью умножим уравнения (2.48) и (2.49) справа и слева на $f^{*\,j}_{\mathbf{q}'}$ и $f^{\,i}_{\mathbf{q}}$, соответственно:

$$\frac{\partial f^{\,i}_{\mathbf{q}}}{\partial t}\, f^{*\,j}_{\mathbf{q}'} = -i\omega^-_{\mathbf{q}} f^{\,i}_{\mathbf{q}} f^{*\,j}_{\mathbf{q}'} +$$

$$+ i\int \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^9}\; \widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\; f^{*\,j}_{\mathbf{q}'} f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1} f^{\,i_2}_{\mathbf{q}_2}\, f^{\,i_3}_{\mathbf{q}_3}\, (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3),$$

$$f^{\,i}_{\mathbf{q}}\, \frac{\partial f^{*\,j}_{\mathbf{q}'}}{\partial t} = i\omega^-_{\mathbf{q}'} f^{\,i}_{\mathbf{q}} f^{*\,j}_{\mathbf{q}'} -$$

$$- i\int \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^9}\; \widetilde{T}^{*\,(2)\,j\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\; f^{\,i}_{\mathbf{q}}\, f^{\,i_1}_{\mathbf{q}_1} f^{*\,i_2}_{\mathbf{q}_2} f^{*\,i_3}_{\mathbf{q}_3}\, (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}' + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3).$$

Суммируя и усредняя два последних уравнения, получаем далее

$$\delta^{ij}(2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')\, \frac{\partial n^-_{\mathbf{q}}}{\partial t} = \tag{2.52}$$

$$= -i\int \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^9}\; \Big\{ \widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\; I^{\,j\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\, (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) -$$

$$- \widetilde{T}^{*\,(2)\,j\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\; I^{\,i_2\,i_3\,i\,i_1}_{\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\, (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}' + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \Big\},$$

где

$$I^{\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} = \left\langle f^{*\,i}_{\mathbf{q}}\, f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1} f^{\,i_2}_{\mathbf{q}_2}\, f^{\,i_3}_{\mathbf{q}_3} \right\rangle \tag{2.53}$$

– четырёхточечный коррелятор. Дифференцирование корреляционной функций $I^{\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}$ по t, с использованием (2.48) и (2.49), приводит к уравнению, в

правую часть которого входят корреляционные функции шестого порядка по $f^{*\,i}_{\mathbf{q}}$ и $f^{\,i}_{\mathbf{q}}$:

$$\frac{\partial I^{\,i\;i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}}{\partial t} = i\left[\,\omega^{-}_{\mathbf{q}} + \omega^{-}_{\mathbf{q}_1} - \omega^{-}_{\mathbf{q}_2} - \omega^{-}_{\mathbf{q}_3}\right] I^{\,i\;i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} - \tag{2.54}$$

$$- i\int \frac{d\mathbf{q}'_1\,d\mathbf{q}'_2\,d\mathbf{q}'_3}{(2\pi)^9}\; \widetilde{T}^{*(2)\,i\;i'_1\,i'_2\,i'_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}'_1,\,\mathbf{q}'_2,\,\mathbf{q}'_3} \left\langle f^{\,i'_1}_{\mathbf{q}'_1}\, f^{*\,i'_2}_{\mathbf{q}'_2} f^{*\,i'_3}_{\mathbf{q}'_3} f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1} f^{\,i_2}_{\mathbf{q}_2}\, f^{\;i_3}_{\mathbf{q}_3} \right\rangle (2\pi)^3\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}'_1-\mathbf{q}'_2-\mathbf{q}'_3)$$

$$- i\int \frac{d\mathbf{q}'_1\,d\mathbf{q}'_2\,d\mathbf{q}'_3}{(2\pi)^9}\; \widetilde{T}^{*(2)\,i_1\,i'_1\,i'_2\,i'_3}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}'_1,\,\mathbf{q}'_2,\,\mathbf{q}'_3} \left\langle f^{*\,i}_{\mathbf{q}} f^{\,i'_1}_{\mathbf{q}'_1} f^{*\,i'_2}_{\mathbf{q}'_2} f^{*\,i'_3}_{\mathbf{q}'_3} f^{\,i_2}_{\mathbf{q}_2}\, f^{\;i_3}_{\mathbf{q}_3} \right\rangle (2\pi)^3\delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}'_1-\mathbf{q}'_2-\mathbf{q}'_3)$$

$$- i\int \frac{d\mathbf{q}'_1\,d\mathbf{q}'_2\,d\mathbf{q}'_3}{(2\pi)^9}\; \widetilde{T}^{(2)\,i_2\,i'_1\,i'_2\,i'_3}_{\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}'_1,\,\mathbf{q}'_2,\,\mathbf{q}'_3} \left\langle f^{*\,i}_{\mathbf{q}} f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1} f^{*\,i'_1}_{\mathbf{q}'_1}\, f^{\,i'_2}_{\mathbf{q}'_2} f^{\,i'_3}_{\mathbf{q}'_3}\, f^{\;i_3}_{\mathbf{q}_3} \right\rangle (2\pi)^3\delta(\mathbf{q}_2+\mathbf{q}'_1-\mathbf{q}'_2-\mathbf{q}'_3)$$

$$- i\int \frac{d\mathbf{q}'_1\,d\mathbf{q}'_2\,d\mathbf{q}'_3}{(2\pi)^9}\; \widetilde{T}^{(2)\,i_3\,i'_1\,i'_2\,i'_3}_{\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}'_1,\,\mathbf{q}'_2,\,\mathbf{q}'_3} \left\langle f^{*\,i}_{\mathbf{q}} f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1} f^{\,i_2}_{\mathbf{q}_2}\, f^{*\,i'_1}_{\mathbf{q}'_1} f^{\,i'_2}_{\mathbf{q}'_2}\, f^{\,i'_3}_{\mathbf{q}'_3} \right\rangle (2\pi)^3\delta(\mathbf{q}_3+\mathbf{q}'_1-\mathbf{q}'_2-\mathbf{q}'_3).$$

Для получения самосогласованной системы уравнений на корреляторы, выразим корреляционные функции шестого порядка в терминах парных. Для примера приведем вид первой корреляционной функции в правой части (2.54):

$$\left\langle f^{\,i'_1}_{\mathbf{q}'_1}\, f^{*\,i'_2}_{\mathbf{q}'_2} f^{*\,i'_3}_{\mathbf{q}'_3} f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1} f^{\,i_2}_{\mathbf{q}_2}\, f^{\;i_3}_{\mathbf{q}_3} \right\rangle = \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
= -(2\pi)^9 \Big\{ & \delta^{i'_3 i_2}\delta^{i'_1 i_1}\delta^{i'_2 i_3}\,\delta(\mathbf{q}'_3-\mathbf{q}_2)\delta(\mathbf{q}'_1-\mathbf{q}_1)\delta(\mathbf{q}'_2-\mathbf{q}_3)\, n^{-}_{\mathbf{q}_2} n^{-}_{\mathbf{q}_1} n^{-}_{\mathbf{q}_3} - \\
& - \delta^{i'_3 i_3}\delta^{i'_2 i_2}\delta^{i_1 i'_1}\,\delta(\mathbf{q}'_3-\mathbf{q}_3)\delta(\mathbf{q}'_2-\mathbf{q}_2)\delta(\mathbf{q}'_1-\mathbf{q}_1)\, n^{-}_{\mathbf{q}_3} n^{-}_{\mathbf{q}_2} n^{-}_{\mathbf{q}_1} + \\
& + \delta^{i'_3 i'_1}\delta^{i_1 i_3}\delta^{i'_2 i_2}\,\delta(\mathbf{q}'_3-\mathbf{q}'_1)\delta(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3)\delta(\mathbf{q}'_2-\mathbf{q}_2)\, n^{-}_{\mathbf{q}'_1} n^{-}_{\mathbf{q}_3} n^{-}_{\mathbf{q}_2} - \\
& - \delta^{i'_3 i'_1}\delta^{i_1 i_2}\delta^{i'_2 i_3}\,\delta(\mathbf{q}'_3-\mathbf{q}'_1)\delta(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\delta(\mathbf{q}'_2-\mathbf{q}_3)\, n^{-}_{\mathbf{q}'_1} n^{-}_{\mathbf{q}_2} n^{-}_{\mathbf{q}_3} + \\
& + \delta^{i'_3 i_3}\delta^{i_1 i_2}\delta^{i'_2 i'_1}\,\delta(\mathbf{q}'_3-\mathbf{q}_3)\delta(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\delta(\mathbf{q}'_2-\mathbf{q}'_1)\, n^{-}_{\mathbf{q}_3} n^{-}_{\mathbf{q}_2} n^{-}_{\mathbf{q}'_1} - \\
& - \delta^{i'_3 i_2}\delta^{i_1 i_3}\delta^{i'_2 i'_1}\,\delta(\mathbf{q}'_3-\mathbf{q}_2)\delta(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3)\delta(\mathbf{q}'_2-\mathbf{q}'_1)\, n^{-}_{\mathbf{q}_2} n^{-}_{\mathbf{q}_3} n^{-}_{\mathbf{q}'_1} \Big\}.
\end{aligned}$$

В этом выражении требуемый вклад в искомое кинетическое уравнение дают только первые два члена. После замены этих членов на первый интеграл в правой части (2.54), суммирования по цветным индексам i'_1, i'_2, i'_3 и интегрирования по импульсам $\mathbf{q}'_1$, $\mathbf{q}'_2$, $\mathbf{q}'_3$, получим

$$-i\left\{ \widetilde{T}^{*(2)\,i\;i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\; n^{-}_{\mathbf{q}_1} n^{-}_{\mathbf{q}_2} n^{-}_{\mathbf{q}_3} - \widetilde{T}^{*(2)\,i\;i_1\,i_3\,i_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_2}\; n^{-}_{\mathbf{q}_1} n^{-}_{\mathbf{q}_2} n^{-}_{\mathbf{q}_3} \right\} (2\pi)^3\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3) \tag{2.56}$$

$$= -2i\,\widetilde{T}^{*(2)\,i\;i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\; n^{-}_{\mathbf{q}_1} n^{-}_{\mathbf{q}_2} n^{-}_{\mathbf{q}_3} (2\pi)^3\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3).$$

Здесь на последнем шаге учли свойство антисимметрии эффективной амплитуды $\widetilde{T}^{(2)}$ при перестановке двух последних цветных индексов и соответствующих импульсов

$$\widetilde{T}^{*(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} = -\widetilde{T}^{*(2)\,i\,i_1\,i_3\,i_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_2}. \tag{2.57}$$

Далее рассмотрим вторую шеститочечную корреляционную функцию в (2.54). В этом корреляторе явно записываем только относящиеся к рассматриваемому процессу рассеяния члены:

$$\left\langle f^{*\,i}_{\mathbf{q}}\, f^{\,i'_1}_{\mathbf{q}'_1}\, f^{*\,i'_2}_{\mathbf{q}'_2}\, f^{*\,i'_3}_{\mathbf{q}'_3}\, f^{\,i_2}_{\mathbf{q}_2}\, f^{\,i_3}_{\mathbf{q}_3}\right\rangle =$$

$$= -(2\pi)^9\Big\{\delta^{i\,i'_1}\delta^{i_2 i'_2}\delta^{i_3 i'_3}\,\delta(\mathbf{q}'_1-\mathbf{q}\,)\delta(\mathbf{q}'_2-\mathbf{q}_2)\delta(\mathbf{q}'_3-\mathbf{q}_3)\,n^-_{\mathbf{q}}n^-_{\mathbf{q}_2}n^-_{\mathbf{q}_3} - (2'\rightleftarrows 3') + \ldots\Big\}.$$

Подставляя это выражение во второй интеграл в (2.54), получим выражение, которое аналогично (2.56):

$$2i\,\widetilde{T}^{*(2)\,i_1\,i\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\; n^-_{\mathbf{q}}n^-_{\mathbf{q}_2}n^-_{\mathbf{q}_3}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3).$$

Применяя аналогичные рассуждения для третьего и четвертого корреляторов в правой части (2.54), получим два оставшихся вклада, соответственно,

$$2i\,\widetilde{T}^{(2)\,i_2\,i_3\,i\,i_1}_{\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\; n^-_{\mathbf{q}}n^-_{\mathbf{q}_1}n^-_{\mathbf{q}_3}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3).$$

и

$$-2i\,\widetilde{T}^{(2)\,i_3\,i_2\,i\,i_1}_{\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\; n^-_{\mathbf{q}}n^-_{\mathbf{q}_1}n^-_{\mathbf{q}_2}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3).$$

Учитывая соотношения симметрии (2.50) и (2.57) для $\widetilde{T}^{(2)}$, вместо (2.54) приходим к уравнению для коррелятора четвертого порядка:

$$\frac{\partial I^{\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}}{\partial t} = i\left[\,\omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}_2}-\omega^-_{\mathbf{q}_3}\right] I^{\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} - \tag{2.58}$$

$$-\,2i\,\widetilde{T}^{*(1)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\left(n^-_{\mathbf{q}}n^-_{\mathbf{q}_2}n^-_{\mathbf{q}_3}+n^-_{\mathbf{q}_1}n^-_{\mathbf{q}_2}n^-_{\mathbf{q}_3}-n^-_{\mathbf{q}}n^-_{\mathbf{q}_1}n^-_{\mathbf{q}_3}-n^-_{\mathbf{q}}n^-_{\mathbf{q}_1}n^-_{\mathbf{q}_2}\right)\times$$

$$\times\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3).$$

2.7 Кинетическое уравнение для рассеяния плазмина на плазмине

При получении кинетического уравнения, которое описывает упругое рассеяние плазминов между собой, будем придерживаться линии рассуждений, использованной для бозонного случая в первой главе. В уравнении (2.58) будем

пренебрегать членом с производной по времени в сравнении с членом, содержащим разность собственных частот волновых пакетов. Вместо (2.58) имеем

$$I^{i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} \simeq\; n^-_{\mathbf{q}} n^-_{\mathbf{q}_1}\,(2\pi)^6 \Big[\delta^{i\,i_3}\delta^{i_1\,i_2}\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}_3)\delta(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2) - \delta^{i\,i_2}\delta^{i_1\,i_3}\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}_2)\delta(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3)\Big]$$

$$+\;\frac{2}{\Delta\omega - i0}\;\widetilde{T}^{*(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\Big(n^-_{\mathbf{q}} n^-_{\mathbf{q}_2} n^-_{\mathbf{q}_3} + n^-_{\mathbf{q}_1} n^-_{\mathbf{q}_2} n^-_{\mathbf{q}_3} - n^-_{\mathbf{q}} n^-_{\mathbf{q}_1} n^-_{\mathbf{q}_3} - n^-_{\mathbf{q}} n^-_{\mathbf{q}_1} n^-_{\mathbf{q}_2}\Big)\times$$

$$\times\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3), \qquad (2.59)$$

где для краткости ввели обозначение для резонансной разности частот

$$\Delta\omega = \omega^-_{\mathbf{q}} + \omega^-_{\mathbf{q}_1} - \omega^-_{\mathbf{q}_2} - \omega^-_{\mathbf{q}_3}. \qquad (2.60)$$

Первый член в правой части (2.59), соответствующий чисто гауссовым флуктуациям, является решением однородного уравнения для $I^{i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}$. Структура этого вклада вытекает из определений четырёхточечных и двухточечных корреляционных функций (2.53) и (2.51):

$$I^{i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} = \big\langle f^{*\,i}_{\mathbf{q}}\, f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1} f^{\,i_2}_{\mathbf{q}_2}\, f^{\,i_3}_{\mathbf{q}_3}\big\rangle \simeq \big\langle f^{*\,i}_{\mathbf{q}}\, f^{\,i_3}_{\mathbf{q}_3}\big\rangle\big\langle f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1}\, f^{\,i_2}_{\mathbf{q}_2}\big\rangle - \big\langle f^{*\,i}_{\mathbf{q}}\, f^{\,i_2}_{\mathbf{q}_2}\big\rangle\big\langle f^{*\,i_1}_{\mathbf{q}_1}\, f^{\,i_3}_{\mathbf{q}_3}\big\rangle =$$

$$= \delta^{i\,i_3}(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}_3)\,n^-_{\mathbf{q}}\,\delta^{i_1\,i_2}(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\,n^-_{\mathbf{q}_1} -$$

$$- \delta^{i\,i_2}(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}_2)\,n^-_{\mathbf{q}}\,\delta^{i_1\,i_3}(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3)\,n^-_{\mathbf{q}_1}.$$

В случае слабого уровня нелинейности взаимодействующих волн, второй член в (2.59) будет определять отклонение четырёхточечной корреляционной функции от гауссова приближения.

Подстановка первого члена в правую часть уравнения для $n^-_{\mathbf{q}}$ (2.52) даёт

$$-i\,(2\pi)^3 n^-_{\mathbf{q}}\int\frac{d\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3}\;n^-_{\mathbf{q}_1}\Big\{\widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,j\,i_1}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1}\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \;-\; \widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,i_1\,j}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}'}\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}') -$$

$$-\;\widetilde{T}^{*(2)\,j\,i_1\,i\,i_1}_{\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\,\delta(\mathbf{q}'-\mathbf{q}) \;+\; \widetilde{T}^{*(2)\,j\,i_1\,i_1\,i}_{\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}}\,\delta(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\Big\} =$$

$$= -2i\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\,n^-_{\mathbf{q}}\int\frac{d\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3}\;n^-_{\mathbf{q}_1}\Big\{\widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,j\,i_1}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1} \;-\; \widetilde{T}^{*(2)\,j\,i_1\,i\,i_1}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\Big\}. \qquad (2.61)$$

Подставляя далее второй член в правую часть (2.52), получим

$$-2i\int\frac{d\mathbf{q}_1\,d\mathbf{q}_2\,d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^9}\;\Big\{\widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\Big(\frac{1}{\omega^-_{\mathbf{q}'}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}_2}-\omega^-_{\mathbf{q}_3}-i0}\Big)\,\widetilde{T}^{*(2)\,j\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\times$$

$$\times\Big[n^-_{\mathbf{q}'} n^-_{\mathbf{q}_2} n^-_{\mathbf{q}_3} + n^-_{\mathbf{q}_1} n^-_{\mathbf{q}_2} n^-_{\mathbf{q}_3} - n^-_{\mathbf{q}'} n^-_{\mathbf{q}_1} n^-_{\mathbf{q}_3} - n^-_{\mathbf{q}} n^-_{\mathbf{q}_1} n^-_{\mathbf{q}_2}\Big]\times$$

$$\times (2\pi)^3\delta(\mathbf{q}'+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)-$$

$$-\widetilde{T}^{*(2)\,j\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\left(\frac{1}{\omega^-_{\mathbf{q}_2}+\omega^-_{\mathbf{q}_3}-\omega^-_{\mathbf{q}}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}-i0}\right)\widetilde{T}^{*(2)\,i_2\,i_3\,i\,i_1}_{\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\times$$

$$\times\Big[n^-_{\mathbf{q}}n^-_{\mathbf{q}_1}n^-_{\mathbf{q}_2}+n^-_{\mathbf{q}}n^-_{\mathbf{q}_1}n^-_{\mathbf{q}_3}-n^-_{\mathbf{q}_1}n^-_{\mathbf{q}_2}n^-_{\mathbf{q}_3}-n^-_{\mathbf{q}}n^-_{\mathbf{q}_2}n^-_{\mathbf{q}_3}\Big]\times$$

$$\times(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}'+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)\Big\}.$$

С учетом свойства (2.50) и равенства

$$\delta(\mathbf{q}'+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)\,\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)=\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\,\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3),$$

предыдущее соотношение запишем в компактном виде:

$$-2i(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\int\frac{d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^9}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)\left\{\frac{1}{\Delta\omega-i0}-\frac{1}{\Delta\omega+i0}\right\}$$

$$\times\widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\,\widetilde{T}^{*(2)\,j\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\left[n^-_{\mathbf{q}}n^-_{\mathbf{q}_2}n^-_{\mathbf{q}_3}+n^-_{\mathbf{q}_1}n^-_{\mathbf{q}_2}n^-_{\mathbf{q}_3}-n^-_{\mathbf{q}}n^-_{\mathbf{q}_1}n^-_{\mathbf{q}_3}-n^-_{\mathbf{q}}n^-_{\mathbf{q}_1}n^-_{\mathbf{q}_2}\right].\quad(2.62)$$

Напомним, что $\Delta\omega$ определяется выражением (2.60). Далее свернем полученные выражения (2.52), (2.61) и (2.62) с δ^{ij}. Принимая во внимание формулу Сохоцкого

$$\frac{1}{\Delta\omega-i0}-\frac{1}{\Delta\omega+i0}=2i\pi\,\delta(\Delta\omega)\qquad(2.63)$$

и сокращая на $(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')$, найдем требуемое кинетическое уравнение для бесцветных абнормальных кварковых возбуждений:

$$\frac{dn^-_{\mathbf{q}}}{dt}=-\frac{4}{C_A}\,n^-_{\mathbf{q}}\int\frac{d\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3}\,n^-_{\mathbf{q}_1}\,\mathrm{Im}\Big[\widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,i\,i_1}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\Big]-\qquad(2.64)$$

$$-\frac{2}{C_A}\int\frac{d\mathbf{q}_1d\mathbf{q}_2d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^9}\,(2\pi)^4\delta(\omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}_2}-\omega^-_{\mathbf{q}_3})\,\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)\times$$

$$\times\widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\,\widetilde{T}^{*(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\Big(n^-_{\mathbf{q}}n^-_{\mathbf{q}_2}n^-_{\mathbf{q}_3}+n^-_{\mathbf{q}_1}n^-_{\mathbf{q}_2}n^-_{\mathbf{q}_3}-n^-_{\mathbf{q}}n^-_{\mathbf{q}_1}n^-_{\mathbf{q}_3}-n^-_{\mathbf{q}}n^-_{\mathbf{q}_1}n^-_{\mathbf{q}_2}\Big).$$

Здесь $C_A=N_c$ – инвариант для группы $SU(N_c)$. Первый член в правой части (2.64) описывает процесс нелинейного затухания Ландау коллективных ферми-возбуждений. Его декремент представляет собой линейный функционал плотности числа плазминов $n^-_{\mathbf{q}}$:

$$\hat{\gamma}_{\mathcal{F}}[n^-_{\mathbf{q}}]\equiv\gamma^-(\mathbf{q})=\frac{4}{C_A}\int\frac{d\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3}\,n^-_{\mathbf{q}_1}\,\mathrm{Im}\Big[\widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,i\,i_1}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\Big].\qquad(2.65)$$

Второй член в (2.64) связан с процессом упругого плазмин-плазминного рассеяния. Уравнение (2.64) также может быть представлено в более наглядной форме:

$$\frac{dn^-_{\mathbf{q}}}{dt} \equiv \frac{\partial n^-_{\mathbf{q}}}{\partial t} + \mathbf{v}^-_{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial n^-_{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{x}} = -\,\hat{\gamma}_{\mathcal{F}}[n^-_{\mathbf{q}}]\, n^-_{\mathbf{q}} - n^-_{\mathbf{q}}\,\Gamma_{\rm d}[n^-_{\mathbf{q}}] + (1 - n^-_{\mathbf{q}})\Gamma_{\rm i}[n^-_{\mathbf{q}}], \qquad (2.66)$$

где

$$\mathbf{v}^-_{\mathbf{q}} = \frac{\partial \omega^-_{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = -\left[\left(\frac{\partial {\rm Re}\,{}^*\Delta^{-1}_-(q)}{\partial \mathbf{q}}\right)\left(\frac{\partial {\rm Re}\,{}^*\Delta^{-1}_-(q)}{\partial \omega}\right)^{-1}\right]\Bigg|_{\omega=\omega^-_{\mathbf{q}}}$$

– групповая скорость фермионных абнормальных колебаний, а

$$\Gamma_{\rm d}[n^-_{\mathbf{q}}] = \int d\mathcal{T}_{qq\to qq}\, w_4(\mathbf{q},\mathbf{q}_1;\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\, n^-_{\mathbf{q}_1}(1-n^-_{\mathbf{q}_2})(1-n^-_{\mathbf{q}_3})$$

и

$$\Gamma_{\rm i}[n^-_{\mathbf{q}}] = \int d\mathcal{T}_{qq\to qq}\, w_4(\mathbf{q},\mathbf{q}_1;\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\, (1-n^-_{\mathbf{q}_1}) n^-_{\mathbf{q}_2} n^-_{\mathbf{q}_3}$$

являются обобщенной скоростью затухания и обратной скоростью регенерации и представляют собой нелинейные функционалы плотности числа плазмино. Здесь

$$w_4(\mathbf{q},\mathbf{q}_1;\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) = \frac{2}{C_A} \sum_{\lambda,\,\lambda_1,\,\ldots\,=\pm} \widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\, \widetilde{T}^{*(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} \qquad (2.67)$$

– вероятность процесса упругого рассеяния двух бесцветных плазминов, а мера интегрирования определяется как

$$d\mathcal{T}_{qq\to qq} \equiv (2\pi)^4\, \delta(\omega^-_{\mathbf{q}} + \omega^-_{\mathbf{q}_1} - \omega^-_{\mathbf{q}_2} - \omega^-_{\mathbf{q}_3})\, \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3)\, \frac{d\mathbf{q}_1\, d\mathbf{q}_2\, d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^9}.$$

В заключение этого раздела отметим, что в левой части кинетического уравнения (2.66), помимо учета переноса с групповой скоростью, следует учитывать дополнительный член, связанный для классических нелинейных волн с нелинейной поправкой на частоту (см., например, обзор [6]).

2.8 Вершинные функции $T^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}$, $\mathcal{G}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, $\mathcal{K}^{\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ и $\mathcal{P}^{\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$

Переходим к определению явного вида вершинных функций $T^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}$, $\mathcal{G}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, $\mathcal{K}^{\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ и $\mathcal{P}^{\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, которые входят в эффективную амплитуду (2.46). Определяем эти функции в рамках HTL-приближения [8,39,40]. В статье [16] с

использованием данного приближения вероятность плазмин-плазминного рассеяния была найдена в виде:

$$w_{qq\to qq}^{(--;--)}(\mathbf{q},\mathbf{q}_1;\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) = \tag{2.68}$$

$$= \frac{1}{C_A}\sum_{\lambda,\,\lambda_1,\,\ldots=\pm} \mathrm{T}^{\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(\mathbf{q},\mathbf{q}_1;-\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_3)\big(\mathrm{T}^{\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(\mathbf{q},\mathbf{q}_1;-\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_3)\big)^{*}.$$

Здесь матричный элемент упругого рассеяния плазмина на плазмине определен в виде:

$$\mathrm{T}^{\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(\mathbf{q},\mathbf{q}_1;-\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_3) \equiv g^2\left(\frac{Z_-(\mathbf{q})}{2}\right)^{1/2}\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{Z_-(\mathbf{q}_i)}{2}\right)^{1/2}\times \tag{2.69}$$

$$\times\, v_{\alpha}^{(-)}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)v_{\alpha_1}^{(-)}(\hat{\mathbf{q}}_1,\lambda_1)\bar{v}_{\alpha_2}^{(-)}(\hat{\mathbf{q}}_2,\lambda_2)\bar{v}_{\alpha_3}^{(-)}(\hat{\mathbf{q}}_3,\lambda_3)\,{}^{*}\tilde{\bar{\Gamma}}^{\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(q,q_1,-q_2,-q_3)$$

и, в свою очередь, эффективная амплитуда ${}^{*}\tilde{\bar{\Gamma}}^{\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(q,q_1,-q_2,-q_3)$ определяется как

$${}^{*}\tilde{\bar{\Gamma}}^{\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(q,q_1,-q_2,-q_3) = \tag{2.70}$$

$$-\,(t^a)^{i_2 i}(t^a)^{i_3 i_1}\,{}^{*}\Gamma^{(Q)\mu}_{\alpha_2\alpha}(-q+q_2;-q_2,q)\,{}^{*}\mathcal{D}_{\mu\mu'}(-q+q_2)\,{}^{*}\Gamma^{(G)\mu'}_{\alpha_3\alpha_1}(q_1-q_3;q_3,-q_1)+$$

$$+\,(t^a)^{i_2 i_1}(t^a)^{i_3 i}\,{}^{*}\Gamma^{(Q)\mu}_{\alpha_3\alpha}(-q+q_3;-q_3,q)\,{}^{*}\mathcal{D}_{\mu\mu'}(-q+q_3)\,{}^{*}\Gamma^{(G)\mu'}_{\alpha_2\alpha_1}(q_1-q_2;q_2,-q_1).$$

Явный вид глюонного пропагатора ${}^{*}\tilde{\mathcal{D}}_{\mu\mu'}(k)$ и вершинных функций ${}^{*}\Gamma^{(Q)\mu}_{\alpha\beta}(q-q_1;q_1,-q)$ и ${}^{*}\Gamma^{(G)\mu}_{\alpha\beta}(q-q_1;q_1,-q)$ в HTL-приближении приведен в Приложениях A и B (A.8) – (A.10) и (B.4) – (B.6), соответственно. Эффективная амплитуда (2.70) удовлетворяет условию антисимметрии по перестановке двух последних внешних мягких кварковых линий:

$${}^{*}\tilde{\bar{\Gamma}}^{\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(q,q_1,-q_2,-q_3) = -\,{}^{*}\tilde{\bar{\Gamma}}^{\,i\,i_1\,i_3\,i_2}_{\alpha\alpha_1\alpha_3\alpha_2}(q,q_1,-q_3,-q_2).$$

В общем случае аналогичное свойство для перестановки двух первых мягких кварковых линий не выполняется в силу того, что эффективные кварк-глюонные вершинные функции с различным временным порядком внешних линий не равны друг другу:

$${}^{*}\Gamma^{(Q)\mu}_{\alpha\beta}(q-q_1;q_1,-q) \neq {}^{*}\Gamma^{(G)\mu}_{\alpha\beta}(q-q_1;q_1,-q).$$

Сравнивая два выражения (2.67) и (2.68) для вероятности рассеяния плазминов, видим, что эффективная амплитуда $\widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}$, определяемая выражением (2.46), должна быть идентифицирована, с точностью до числового коэффициента, с матричным элементом $\mathrm{T}^{\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(\mathbf{q},\mathbf{q}_1;-\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_3)$ (точнее, с его

комплексным сопряжением), вычисленным с использованием высокотемпературной квантовой теории поля, т.е.,

$$\widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}(\lambda,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{T}^{i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(\mathbf{q},\mathbf{q}_1;-\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_3)\right)^{*}. \tag{2.71}$$

Из (2.46) и (2.69), (2.70) непосредственно следует

$$T^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3} = 0, \tag{2.72}$$

т.е. вершинная функция, определяющая прямое взаимодействие четырех плазминов, в данном приближении обращается в ноль.

Далее нам понадобится явный вид трёхточечных вершинных функций $\mathcal{G}^{a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, $\mathcal{K}^{a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ и $\mathcal{P}^{a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, входящих в гамильтониан $H^{(3)}$ (2.13). Однако, в отличие от предыдущего случая, здесь рассмотрение оказывается более сложным. Учитывая определения (2.46), (2.69), (2.70) и соотношение (2.72), исходя из формулы (2.71), приходим к следующему исходному для анализа выражению:

$$\begin{aligned}
&2\,\frac{\mathcal{G}^{a\,i\,i_1}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\;\mathcal{G}^{*\,a\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}}{\omega^{l}_{\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3}-\omega^{-}_{\mathbf{q}_2}-\omega^{-}_{\mathbf{q}_3}} \;+\; 2\,\frac{\mathcal{K}^{a\,i_2\,i_3}_{-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}\;\mathcal{K}^{*\,a\,i\,i_1}_{-\mathbf{q}-\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}}{\omega^{l}_{-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}+\omega^{-}_{\mathbf{q}_2}+\omega^{-}_{\mathbf{q}_3}} \;+\\
&+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathcal{P}^{a\,i\,i_2}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2}\;\mathcal{P}^{*\,a\,i_3\,i_1}_{\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1}}{\omega^{l}_{\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_1}-\omega^{-}_{\mathbf{q}_3}+\omega^{-}_{\mathbf{q}_1}} \;+\; \frac{\mathcal{P}^{a\,i_1\,i_3}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3}\;\mathcal{P}^{*\,a\,i_2\,i}_{\mathbf{q}_2-\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}}}{\omega^{l}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3}-\omega^{-}_{\mathbf{q}_1}+\omega^{-}_{\mathbf{q}_3}}\right) -\right.\\
&\left.-\left(\frac{\mathcal{P}^{a\,i_1\,i_2}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2}\;\mathcal{P}^{*\,a\,i_3\,i}_{\mathbf{q}_3-\mathbf{q},\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}}}{\omega^{l}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}-\omega^{-}_{\mathbf{q}_1}+\omega^{-}_{\mathbf{q}_2}} \;+\; \frac{\mathcal{P}^{a\,i\,i_3}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_3}\;\mathcal{P}^{*\,a\,i_2\,i_1}_{\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1}}{\omega^{l}_{\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1}-\omega^{-}_{\mathbf{q}_2}+\omega^{-}_{\mathbf{q}_1}}\right)\right] =
\end{aligned} \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\,g^2\left(\frac{Z_{-}(\mathbf{q})}{2}\right)^{1/2}\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{Z_{-}(\mathbf{q}_i)}{2}\right)^{1/2}\bar{v}^{(-)}_{\alpha}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)\,\bar{v}^{(-)}_{\alpha_1}(\hat{\mathbf{q}}_1,\lambda_1)\,v^{(-)}_{\alpha_2}(\hat{\mathbf{q}}_2,\lambda_2)\,v^{(-)}_{\alpha_3}(\hat{\mathbf{q}}_3,\lambda_3)\\
&\times\Big\{(t^a)^{i i_2}(t^a)^{i_1 i_3}\,{}^{*}\Gamma^{(Q)\mu}_{\alpha\alpha_2}(-q+q_2;q,-q_2)\,{}^{*}\mathcal{D}_{\mu\mu'}(q-q_2)\,{}^{*}\Gamma^{(G)\mu'}_{\alpha_1\alpha_3}(-q_1+q_3;q_1,-q_3) -\\
&-(t^a)^{i i_3}(t^a)^{i_1 i_2}\,{}^{*}\Gamma^{(Q)\mu}_{\alpha\alpha_3}(-q+q_3;q,-q_3)\,{}^{*}\mathcal{D}_{\mu\mu'}(q-q_3)\,{}^{*}\Gamma^{(G)\mu'}_{\alpha_1\alpha_2}(-q_1+q_2;q_1,-q_2)\Big\}\Big|_{\text{shell}}.
\end{aligned}$$

Здесь использовали правила сопряжения для ресуммированных HTL-вершинных функций ${}^{*}\Gamma^{(Q)\mu}$ и ${}^{*}\Gamma^{(G)\mu}$, (B.8) и (B.9), а также правило сопряжения для эффективного глюонного пропагатора ${}^{*}\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu\mu'}$ (A.12).

На первом шаге в эффективных глюонных пропагаторах ${}^{*}\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu\mu'}$, входящих в (2.73) оставляем только члены с продольным проектором $\widetilde{Q}_{\mu\mu'}$. Так например, для первого пропагатора ${}^{*}\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu\mu'}(q-q_2)$ выполняем замену

$${}^{*}\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu\mu'}(q-q_2) \Rightarrow -\,\widetilde{Q}_{\mu\mu'}(q-q_2)\,{}^{*}\Delta^{l}(q-q_2). \tag{2.74}$$

Здесь явный вид правой части, обусловленный определениями (A.9) и (A.10), задается выражением

$$-\frac{\tilde{u}_{\mu}(q-q_2)\,\tilde{u}_{\mu'}(q-q_2)}{\bar{u}^2(q-q_2)}\;\frac{1}{(q-q_2)^2-\Pi^l(q-q_2)}.$$

Аналогичные операции выполняем и для второго пропагатора ${}^*\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu\mu'}(q-q_3)$. Используя приближение для продольного скалярного пропагатора ${}^*\Delta^l(k) = {}^*\Delta^l(\omega,\,\mathbf{k})$, для которого вблизи полюса $\omega \sim \omega^l_{\mathbf{k}}$ справедлива оценка:

$${}^*\Delta^l(\omega,\,\mathbf{k}) = \frac{1}{\omega^2-\mathbf{k}^2-\Pi^l(\omega,\,\mathbf{k})} \simeq \frac{Z_l(\mathbf{k})}{\omega^2-(\omega^l_{\mathbf{k}})^2} = \left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega^l_{\mathbf{k}}}\right)\left[\frac{1}{\omega-\omega^l_{\mathbf{k}}}-\frac{1}{\omega+\omega^l_{\mathbf{k}}}\right],$$

(см., например, [31] и [32]), для первого скалярного пропагатора имеем:

$${}^*\Delta^l(q-q_2) \simeq \tag{2.75}$$

$$-\left(\frac{Z_l(\mathbf{q}-\mathbf{q}_2)}{2\,\omega^l_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}}\right)^{1/2}\left(\frac{Z_l(-\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_3)}{2\,\omega^l_{-\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_3}}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}_3}}+\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}_3}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}}\right]$$

и для второго –

$${}^*\Delta^l(-q+q_3) \simeq \tag{2.76}$$

$$-\left(\frac{Z_l(\mathbf{q}-\mathbf{q}_3)}{2\,\omega^l_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_3}}\right)^{1/2}\left(\frac{Z_l(-\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)}{2\,\omega^l_{-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}_2}}+\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}_2}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}}\right].$$

При выводе (2.75) и (2.76) приняли во внимание четность дисперсионного соотношения (т.е. $\omega^l_{-\mathbf{k}} = \omega^l_{\mathbf{k}}$) и законы сохранения энергии и импульса, справедливые для процесса упругого плазмин-плазминного рассеяния:

$$\begin{cases} \mathbf{q}+\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3, \\ \\ \omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^-_{\mathbf{q}_1} = \omega^-_{\mathbf{q}_2}+\omega^-_{\mathbf{q}_3}. \end{cases} \tag{2.77}$$

Из аппроксимации скалярных пропагаторов (2.75) и (2.76) видно, что факторы, пропорциональные $1/(\omega^l_{\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3}-\omega^-_{\mathbf{q}_2}-\omega^-_{\mathbf{q}_3})$ и $1/(\omega^l_{\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3}+\omega^-_{\mathbf{q}_2}+\omega^-_{\mathbf{q}_3})$, отсутствуют. Однако эти факторы находятся в левой части (2.73). По этой причине в рамках приближения жёстких температурных петель необходимо, в дополнение к условию (2.72), потребовать выполнения следующих равенств:

$$\mathcal{G}^{a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1} = \mathcal{K}^{a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1} = 0. \tag{2.78}$$

Далее, в качестве второго шага, следует “распутать” цветовую структуру левой части (2.73). Для этого для трёхточечной вершинной функции $\mathcal{P}^{a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ полагаем

$$\mathcal{P}^{a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1} = (t^a)^{i\,i_1}\,\mathcal{P}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}, \quad \mathcal{P}^{*\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1} = (t^a)^{i_1\,i}\,\mathcal{P}^*_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}. \tag{2.79}$$

Принимая во внимание все вышесказанное, можно представить равенство (2.73) в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\Bigg[(t^a)^{ii_2}(t^a)^{i_1i_3}\left(\frac{\mathcal{P}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2}\,\mathcal{P}^*_{\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1}}{\omega^l_{\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}_3}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}}\;+\;\frac{\mathcal{P}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3}\,\mathcal{P}^*_{\mathbf{q}_2-\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}}}{\omega^l_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}_3}}\right)-$$

$$-\,(t^a)^{ii_3}(t^a)^{i_1i_2}\left(\frac{\mathcal{P}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_3}\,\mathcal{P}^*_{\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1}}{\omega^l_{\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}_2}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}}\;+\;\frac{\mathcal{P}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2}\,\mathcal{P}^*_{\mathbf{q}_3-\mathbf{q},\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}}}{\omega^l_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}_2}}\right)\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\,g^2\left(\frac{Z_-(\mathbf{q})}{2}\right)^{1/2}\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{Z_-(\mathbf{q}_i)}{2}\right)^{1/2}\bar v^{(-)}_{\alpha}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)\,\bar v^{(-)}_{\alpha_1}(\hat{\mathbf{q}}_1,\lambda_1)\,v^{(-)}_{\alpha_2}(\hat{\mathbf{q}}_2,\lambda_2)\,v^{(-)}_{\alpha_3}(\hat{\mathbf{q}}_3,\lambda_3) \tag{2.80}$$

$$\times\Bigg\{(t^a)^{ii_2}(t^a)^{i_1i_3}\left(\frac{Z_l(\mathbf{q}-\mathbf{q}_2)}{2\,\omega^l_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}}\right)^{1/2}\left(\frac{\tilde u_\mu(q-q_2)}{\sqrt{\bar u^2(q-q_2)}}\right)\left(\frac{Z_l(-\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_3)}{2\,\omega^l_{-\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_3}}\right)^{1/2}\left(\frac{\tilde u_{\mu'}(-q_1+q_3)}{\sqrt{\bar u^2(-q_1+q_3)}}\right)\times$$

$${}^*\Gamma^{(Q)\mu}_{\alpha\alpha_2}(-q+q_2;q,-q_2)\left(\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}_3}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}}+\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}_3}}\right){}^*\Gamma^{(G)\mu'}_{\alpha_1\alpha_3}(-q_1+q_3;q_1,-q_3)$$

$$-\,(t^a)^{ii_3}(t^a)^{i_1i_2}\left(\frac{Z_l(\mathbf{q}-\mathbf{q}_3)}{2\,\omega^l_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_3}}\right)^{1/2}\left(\frac{\tilde u_\mu(q-q_3)}{\sqrt{\bar u^2(q-q_3)}}\right)\left(\frac{Z_l(-\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)}{2\,\omega^l_{-\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2}}\right)^{1/2}\left(\frac{\tilde u_{\mu'}(-q_1+q_2)}{\sqrt{\bar u^2(-q_1+q_2)}}\right)\times$$

$${}^*\Gamma^{(Q)\mu}_{\alpha\alpha_3}(-q+q_3;q,-q_3)\left(\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}_2}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}}+\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}_2}}\right){}^*\Gamma^{(G)\mu'}_{\alpha_1\alpha_2}(-q_1+q_2;q_1,-q_2)\Bigg\},$$

где использовали свойство перестановки импульсов внешних кварков (B.8) для вершинной функции ${}^*\Gamma^{(Q)}_{\mu}$. Для того чтобы обратить соотношение (2.80) в тождество, необходимо полагать

$$\mathcal{P}^*_{\mathbf{q}_2-\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}}(\lambda_2,\lambda)=-\mathcal{P}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2}(\lambda,\lambda_2), \tag{2.81}$$

$$\mathcal{P}^*_{\mathbf{q}_3-\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1}(\lambda_3,\lambda_1)=-\mathcal{P}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3}(\lambda_1,\lambda_3),\;\ldots$$

и

$$\mathcal{P}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_2}(\lambda,\lambda_2)=2^{1/4}ig\left(\frac{Z_-(\mathbf{q})}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{Z_-(\mathbf{q}_2)}{2}\right)^{1/2}\times \tag{2.82}$$

$$\times\,\bar v^{(-)}_{\alpha}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)\,v^{(-)}_{\alpha_2}(\hat{\mathbf{q}}_2,\lambda_2)\left(\frac{\epsilon^l_\mu(\mathbf{q}-\mathbf{q}_2)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_2}}}\right){}^*\Gamma^{(Q)\mu}_{\alpha\alpha_2}(-q\;+\;q_2;q,-q_2)\Big|_{\text{on-shell}},$$

$$\mathcal{P}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_3,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_3}(\lambda_1,\lambda_3)=2^{1/4}ig\left(\frac{Z_-(\mathbf{q}_1)}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{Z_-(\mathbf{q}_3)}{2}\right)^{1/2}\times \tag{2.83}$$

$$\times \bar{v}^{(-)}_{\alpha_1}(\hat{\mathbf{q}}_1,\lambda_1)v^{(-)}_{\alpha_3}(\hat{\mathbf{q}}_3,\lambda_3)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu'}(-\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_3)}{\sqrt{2\omega^l_{-\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_3}}}\right){}^*\Gamma^{(G)\mu'}_{\alpha_1\alpha_3}(-q_1+\,q_3;q_1,-q_3)\Big|_{\rm on-shell},$$
$$\ldots .$$

Здесь 4-векторы вида

$$\left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega^l_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}\frac{\tilde{u}_\mu(k)}{\sqrt{\bar{u}^2(k)}}\Bigg|_{\rm on-shell}\equiv\frac{1}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\,\epsilon^l_\mu(\mathbf{k}) \tag{2.84}$$

в (2.82) и (2.83) – обычные волновые функции продольного глюона в A_0-калибровке, а множитель $\sqrt{Z_l(\mathbf{k})}$ обеспечивает перенормировку глюонной волновой функции благодаря тепловым эффектам среды. Для определения вершинной функции $\mathcal{P}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ (2.82) и (2.82) с целью обеспечения совместности необходимо, чтобы было справедливо равенство вида

$${}^*\Gamma^{(Q)\mu}_{\alpha\alpha_2}(-q+q_2;q,-q_2)\big|_{\rm on-shell}\;=\;{}^*\Gamma^{(G)\mu}_{\alpha\alpha_2}(-q+q_2;q,-q_2)\big|_{\rm on-shell}. \tag{2.85}$$

Как показано в [34], в силу отсутствия линейного затухания Ландау для плазминной моды, из определений двухкварковых-одноглюонных вершинных функций (B.4) – (B.6) равенство (2.85) действительно имеет место. Используя правило сопряжения HTL-ресуммированной вершинной функции ${}^*\Gamma^{(Q)}_\mu$ (B.8), нетрудно убедиться, что определение (2.82) удовлетворяет первому требованию в (2.81). В заключение выпишем правило сопряжения вершинной функции $\mathcal{P}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$. Принимая во внимание (2.79) и (2.81), имеем

$$\mathcal{P}^{*\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}=-\mathcal{P}^{\,a\,i_1\,i}_{-\mathbf{k},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}}.$$

Это свойство следует добавить к соотношениям симметрии (2.15) с оговоркой, что оно верно только в приближении жёстких температурных петель.

2.9 Кинетические уравнения для мягких кварковых и глюонных возбуждений

Нам осталось получить систему кинетических уравнений, определяющих эволюцию плотностей числа плазминов и плазмонов с учетом их упругого рассеяния друг на друге. Этот вывод в большой степени аналогичен выводу кинетического уравнения для чисто плазминных упругих взаимодействий, подробно

представленному в разделах 2.6 и 2.7. По этой причине здесь опускаем все технические детали вычислений и приводим лишь окончательные выражения.

Кинетическое уравнение для абнормальных кварковых возбуждений при их упругом рассеянии на коллективных продольных возбуждениях КГП имеет следующий вид:

$$\frac{dn^-_{\mathbf{q}}}{dt} = \frac{2}{C_A}\, n^-_{\mathbf{q}} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, N^l_{\mathbf{k}}\, \mathrm{Im}\Big[\widetilde{T}^{(2)\,i\,i\,a\,a}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q},\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}}\Big] + \tag{2.86}$$

$$+ \frac{1}{C_A} \int \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^9}\, (2\pi)^4 \delta(\omega^-_{\mathbf{q}} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^-_{\mathbf{q}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2})\, \delta(\mathbf{q} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_2) \times$$

$$\times \widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,a_1\,a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\, \widetilde{T}^{*(2)\,i\,i_1\,a_1\,a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} \Big(n^-_{\mathbf{q}_1} N^l_{\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}_2} - n^-_{\mathbf{q}} N^l_{\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}_2} - n^-_{\mathbf{q}} n^-_{\mathbf{q}_1} N^l_{\mathbf{k}_2} + n^-_{\mathbf{q}} n^-_{\mathbf{q}_1} N^l_{\mathbf{k}_1} \Big).$$

Первый член в (2.86) описывает нелинейное затухание Ландау мягких кварковых возбуждений, где, в отличие от (2.65), декремент затухания является линейным функционалом плотности числа плазмонов $N^l_{\mathbf{k}}$:

$$\hat{\gamma}_{\mathcal{F}}[N^l_{\mathbf{k}}] \equiv \gamma^-(\mathbf{q}) = -\frac{2}{C_A} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, N^l_{\mathbf{k}}\, \mathrm{Im}\Big[\widetilde{T}^{(2)\,i\,i\,a\,a}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q},\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}}\Big].$$

Второй член уравнения (2.86) связан с упругим плазмин-плазмонным рассеянием. Можно также записать уравнение (2.86) в более компактной форме:

$$\frac{dn^-_{\mathbf{q}}}{dt} \equiv \frac{\partial n^-_{\mathbf{q}}}{\partial t} + \mathbf{v}^-_{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial n^-_{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{x}} = \tag{2.87}$$

$$= -\,\hat{\gamma}_{\mathcal{F}}[N^l_{\mathbf{k}}]\, n^-_{\mathbf{q}} - n^-_{\mathbf{q}} \Gamma^{(f)}_{\mathrm{d}}[n^-_{\mathbf{q}}, N^l_{\mathbf{k}}] + (1 - n^-_{\mathbf{q}}) \Gamma^{(f)}_{\mathrm{i}}[n^-_{\mathbf{q}}, N^l_{\mathbf{k}}],$$

где обозначение $\mathbf{v}^-_{\mathbf{q}}$ вводится для групповой скорости абнормальной моды мягких кварков, а $\Gamma^{(f)}_{\mathrm{d}}$ и $\Gamma^{(f)}_{\mathrm{i}}$ – для обобщенной скорости распада и обратной скорости регенерации, которые представляют собой нелинейные функционалы плотности числа плазминов и плазмонов:

$$\Gamma^{(f)}_{\mathrm{d}}[n^-_{\mathbf{q}}, N^l_{\mathbf{k}}] = \int d\mathcal{T}_{qg\to qg}\, w_{qg\to qg}(\mathbf{q}, \mathbf{k}_1; \mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2)(1 - n^-_{\mathbf{q}_1}) N^l_{\mathbf{k}_1}(1 + N^l_{\mathbf{k}_2})$$

и, соответственно,

$$\Gamma^{(f)}_{\mathrm{i}}[n^-_{\mathbf{q}}, N^l_{\mathbf{k}}] = \int d\mathcal{T}_{qg\to qg}\, w_{qg\to qg}(\mathbf{q}, \mathbf{k}_1; \mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2) n^-_{\mathbf{q}_1}(1 + N^l_{\mathbf{k}_1}) N^l_{\mathbf{k}_2}\,.$$

Здесь

$$w_{qg\to qg}(\mathbf{q}, \mathbf{k}_1; \mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{C_A} \sum_{\lambda,\, \lambda_1 = \pm} \widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,a_1\,a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\, \widetilde{T}^{*(2)\,i\,i_1\,a_1\,a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} \tag{2.88}$$

– вероятность рассеяния при упругом столкновении бесцветных плазминов и плазмонов, а мера интегрирования определяется следующим образом:

$$d\mathcal{T}_{qg\to qg} \equiv (2\pi)^4\,\delta(\omega^-_{\mathbf{q}} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^-_{\mathbf{q}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2})\,\delta(\mathbf{q}+\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_2)\,\frac{d\mathbf{q}_1\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^9}. \quad (2.89)$$

Те же рассуждения приводят к следующему кинетическому уравнению для $N^l_{\mathbf{k}}$ при упругом рассеянии плазминов на плазминах:

$$\frac{dN^l_{\mathbf{k}}}{dt} \equiv \frac{\partial N^l_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \mathbf{v}^l_{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial N^l_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{x}} = \quad (2.90)$$

$$= -\,\hat{\gamma}_{\mathcal{B}}[n^-_{\mathbf{q}}]\,N^l_{\mathbf{k}} - N^l_{\mathbf{k}}\Gamma^{(b)}_{\mathrm{d}}[n^-_{\mathbf{q}}, N^l_{\mathbf{k}}] + (1+N^l_{\mathbf{k}})\Gamma^{(b)}_{\mathrm{i}}[n^-_{\mathbf{q}}, N^l_{\mathbf{k}}],$$

где групповая скорость продольных колебаний определена как

$$\mathbf{v}^l_{\mathbf{k}} = \frac{\partial \omega^l_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} = -\left[\left(\frac{\partial \mathrm{Re}\,\varepsilon^l(k)}{\partial \mathbf{k}}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{Re}\,\varepsilon^l(k)}{\partial \omega}\right)^{-1}\right]\Bigg|_{\omega=\omega^l_{\mathbf{k}}}$$

$\varepsilon^l(k) = (k^2\,{}^*\Delta^{\,l}(k))^{-1}$ – продольная диэлектрическая проницаемость, $\hat{\gamma}_{\mathcal{B}}[n^-_{\mathbf{q}}]$ – декремент нелинейного затухания Ландау коллективных бозе-возбуждений

$$\hat{\gamma}_{\mathcal{B}}[n^-_{\mathbf{q}}] \equiv \gamma^l(\mathbf{k}) = \frac{2}{d_A}\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\; n^-_{\mathbf{q}}\,\mathrm{Im}\Big[\widetilde{T}^{(2)\,i\,i\,a\,a}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q},\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}}\Big],$$

который является линейным функционалом плотности числа плазминов $n^-_{\mathbf{q}}$, а $\Gamma^{(b)}_{\mathrm{d}}$ и $\Gamma^{(b)}_{\mathrm{i}}$, определенные выражениями

$$\Gamma^{(b)}_{\mathrm{d}}[n^-_{\mathbf{q}}, N^l_{\mathbf{k}}] = \int d\mathcal{T}_{gq\to gq}\, w_{gq\to gq}(\mathbf{k},\mathbf{q}_1;\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2)(1+N^l_{\mathbf{k}_1})\,n^-_{\mathbf{q}_1}(1-n^-_{\mathbf{q}_2}),$$

$$\Gamma^{(b)}_{\mathrm{i}}[n^-_{\mathbf{q}}, N^l_{\mathbf{k}}] = \int d\mathcal{T}_{gq\to gq}\, w_{gq\to gq}(\mathbf{k},\mathbf{q}_1;\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2)\,N^l_{\mathbf{k}_1}(1-n^-_{\mathbf{q}_1})\,n^-_{\mathbf{q}_2}$$

представляют собой нелинейные функционалы плотностей числа плазминов и плазмонов. Здесь,

$$w_{gq\to gq}(\mathbf{k},\mathbf{q}_1;\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2) = \frac{1}{d_A}\sum_{\lambda_1,\,\lambda_2\,=\,\pm} \widetilde{T}^{(2)\,i_1\,i_2\,a\,a_1}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}\,\widetilde{T}^{*(2)\,i_1\,i_2\,a\,a_1}_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} \quad (2.91)$$

– вероятность рассеяния при упругом столкновении бесцветных плазмонов и плазминов, а мера интегрирования определяется как

$$d\mathcal{T}_{gq\to gq} \equiv (2\pi)^4\,\delta(\omega^l_{\mathbf{k}} + \omega^-_{\mathbf{q}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^-_{\mathbf{q}_2})\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_2)\,\frac{d\mathbf{q}_1\,d\mathbf{q}_2\,d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^9}\,.$$

В уравнении (2.91) $d_A = N_c^2 - 1$ – инвариант для группы $SU(N_c)$. Совокупность уравнений (2.87) и (2.90) описывает изменение во времени плотностей числа

плазминов и плазмонов. Для более общего рассмотрения, конечно, следует добавить еще два уравнения (2.66) и (1.29), связанные с процессами упругого рассеяния плазминов на плазминах и плазмонов на плазмонах.

2.10 Вершинная функция $T^{(2)\,i\,i_1\,a_1 a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$

Далее необходимо сравнить эффективную амплитуду (2.39), полученную в рамках (псевдо)классического подхода, с матричным элементом соответствующего процесса рассеяния, полученным в HTL-приближении. Вероятность плазмин-плазмонного рассеяния

$$w^{(-l;-l)}_{qg\to qg}(\mathbf{q},\mathbf{k}_1;\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2) = \tag{2.92}$$

$$= \frac{1}{C_A}\sum_{\lambda,\,\lambda_1=\pm1} \mathrm{T}^{a_1a_2,\,ii_1}_{\lambda\lambda_1}(-\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\mathbf{q}_1,-\mathbf{q})\big(\mathrm{T}^{a_1a_2,\,ii_1}_{\lambda\lambda_1}(-\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\mathbf{q}_1,-\mathbf{q})\big)^*$$

в данном приближении была получена в работе [16]. Здесь матричный элемент $\mathrm{T}^{a_1\,a_2,\,i\,i_1}_{\lambda\lambda_1}$ упругого плазмин-плазмонного рассеяния имеет следующую структуру:

$$\mathrm{T}^{a_1a_2,\,i\,i_1}_{\lambda\lambda_1}(-\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}) = g^2\left(\frac{Z_-(\mathbf{q})}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{Z_-(\mathbf{q}_1)}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{Z_l(\mathbf{k}_1)}{2\omega^l_{\mathbf{k}_1}}\right)^{1/2}\left(\frac{Z_l(\mathbf{k}_2)}{2\omega^l_{\mathbf{k}_2}}\right)^{1/2} \tag{2.93}$$

$$\times\left(\frac{\tilde{u}^{\mu_1}(k_1)}{\sqrt{\bar{u}^2(k_1)}}\right)\left(\frac{\tilde{u}^{\mu_2}(k_2)}{\sqrt{\bar{u}^2(k_2)}}\right)\Big[\,\bar{v}^{(-)}_\beta(\hat{\mathbf{q}}_1,\lambda_1)\,{}^*\tilde{\bar{\Gamma}}^{(Q)a_1a_2,\,i\,i_1}_{\mu_1\mu_2,\,\alpha\beta}(-k_1,k_2;q_1,-q)v^{(-)}_\alpha(\hat{\mathbf{q}},\lambda)\Big]_{\text{on-shell}},$$

а эффективная амплитуда ${}^*\tilde{\bar{\Gamma}}^{(Q)a_1a_2,\,ii_1}_{\mu_1\mu_2,\,\alpha\beta}(-k_1,k_2;q_1,-q)$ определяется как

$${}^*\tilde{\bar{\Gamma}}^{(Q)a_1a_2,\,ii_1}_{\mu_1\mu_2,\,\alpha\beta}(-k_1,k_2;q_1,-q) = -\Big\{\delta\Gamma^{(Q)a_2a_1,\,i_1i}_{\mu_1\mu_2,\,\beta\alpha}(k_1,-k_2;-q_1,q) + \tag{2.94}$$

$$+[t^{a_2},t^{a_1}]^{i_1i}\,{}^*\Gamma^{(Q)}_{\nu,\,\beta\alpha}(q-q_1;-q,q_1)\,{}^*\mathcal{D}^{\nu\nu'}(k_1-k_2)\,{}^*\Gamma_{\nu'\mu_1\mu_2}(k_1-k_2,-k_1,k_2) -$$

$$-(t^{a_2}t^{a_1})^{i_1i}\,{}^*\Gamma^{(Q)}_{\mu_2,\,\beta\gamma}(k_2;-q_1-k_2,q_1)\,{}^*S_{\gamma\gamma'}(-q_1-k_2)\,{}^*\Gamma^{(Q)}_{\mu_1,\,\gamma'\alpha}(-k_1;-q,q+k_1) -$$

$$-(t^{a_1}t^{a_2})^{i_1i}\,{}^*\Gamma^{(Q)}_{\mu_1,\,\beta\gamma}(-k_1;-q_1+k_1,q_1)\,{}^*S_{\gamma\gamma'}(-q_1+k_1)\,{}^*\Gamma^{(Q)}_{\mu_2,\,\gamma'\alpha}(k_2;-q,q-k_2)\Big\}.$$

HTL-ресуммированная вершина ${}^*\Gamma^{(Q)\mu}_{\alpha\beta}(q-q_1;q_1,-q)$ между кварковой парой и глюоном и HTL-индуцированная вершина $\delta\Gamma^{(Q)a_2a_1,\,i_1i}_{\mu_1\mu_2,\,\beta\alpha}(k_1,-k_2;-q_1,q)$ между

кварковой парой и двумя глюонами в правой части выражения (2.94) определяются уравнениями (B.4) и (B.7). Явный вид модифицированного средой кваркового пропагатора ${}^*S_{\alpha\alpha'}(q)$ задается формулами (B.11) – (B.13). Эффективная амплитуда (2.94) обладает следующим свойством:

$$ {}^*\tilde{\bar{\Gamma}}^{(Q)a_1a_2,\,ii_1}_{\mu_1\mu_2,\,\alpha\beta}(-k_1,k_2;q_1,-q) = {}^*\tilde{\bar{\Gamma}}^{(Q)a_2a_1,\,ii_1}_{\mu_2\mu_1,\,\alpha\beta}(k_2,-k_1;q_1,-q). $$

Сравнивая два выражения (2.88) и (2.92) для вероятности рассеяния плазмина на плазмоне, видим, что эффективная амплитуда $\widetilde{T}^{(2)\,ii_1\,a_1a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$, определенная выражением (2.39), должна быть идентифицирована с матричным элементом $\mathrm{T}^{a_1a_2,\,ii_1}_{\lambda\lambda_1}(-\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\mathbf{q}_1,-\mathbf{q})$ (точнее, с его комплексным сопряжением), вычисленным с помощью высокотемпературной квантовой теории поля:

$$ \widetilde{T}^{(2)\,ii_1\,a_1a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}(\lambda,\lambda_1) = \left(\mathrm{T}^{a_1a_2,\,ii_1}_{\lambda\lambda_1}(-\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\mathbf{q}_1,-\mathbf{q})\right)^*. \tag{2.95} $$

Из выражений (2.39) и (2.93), (2.94) сразу следует явный вид амплитуды $T^{(2)\,ii_1\,a_1a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$:

$$ T^{(2)\,ii_1\,a_1a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}(\lambda,\lambda_1) \equiv g^2 \left(\frac{Z_-(\mathbf{q})}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{Z_-(\mathbf{q}_1)}{2}\right)^{1/2} \times \tag{2.96} $$

$$ \times \left(\frac{\epsilon^l_{\mu_1}(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_1}}}\right)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_2}(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_2}}}\right)\Big[\,\bar{v}^{(-)}_\beta(\hat{\mathbf{q}},\lambda)\delta\Gamma^{(Q)a_1a_2,\,ii_1}_{\mu_1\mu_2,\,\beta\alpha}(-k_1,k_2;q_1,-q)v^{(-)}_\alpha(\hat{\mathbf{q}}_1,\lambda_1)\Big]_{\text{on-shell}}, $$

которая является вершинной функцией в определении гамильтониана четвертого порядка $H^{(4)}$ (2.14). Здесь учли связь (2.84) и свойство сопряжения для $\delta\Gamma^{(Q)a_1a_2}_{\mu_1\mu_2}$ (B.10).

Определяя явный вид функций $\mathcal{G}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, $\mathcal{K}^{\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ и $\mathcal{P}^{\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$, в эффективной амплитуде (2.39) сохраняем только те члены, которые содержат эти функции, а в матричном элементе (2.93) – (2.94) – члены с HTL-ресуммированными вершинами между парой кварков и глюоном. В результате из равенства (2.95) следует

$$ -\,4\,\frac{\mathcal{G}^{\,a_2\,i\,i'}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{q},\,\mathbf{k}_2-\mathbf{q}}\;\mathcal{G}^{*\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^-_{\mathbf{q}}-\omega^-_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q}}} \;+\; \frac{\mathcal{P}^{\,a_2\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_1}\;\mathcal{P}^{*\,a_1\,i'\,i}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_1+\mathbf{q},\,\mathbf{q}}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^-_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}} \;-\; \frac{\mathcal{P}^{\,a_2\,i\,i'}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}-\mathbf{k}_2}\;\mathcal{P}^{*\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^-_{\mathbf{q}-\mathbf{k}_2}} + $$

$$ +\,4\,\frac{\mathcal{K}^{\,a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{q}_1,\,-\mathbf{k}_2-\mathbf{q}_1}\;\mathcal{K}^{*\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q},\,-\mathbf{k}_1-\mathbf{q}}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^-_{-\mathbf{k}_2-\mathbf{q}_1}} - 2\,\frac{\mathcal{V}^{\,a_1\,a_2\,a'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\;\mathcal{P}^{*\,a'\,i_1\,i}_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}}}{\omega^l_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}}} - 2\,\frac{\mathcal{P}^{\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}\;\mathcal{V}^{*\,a_2\,a_1\,a'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}} $$

$$ = g^2\left(\frac{Z_-(\mathbf{q})}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{Z_-(\mathbf{q}_1)}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_1}(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_1}}}\right)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_2}(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_2}}}\right)\bar{v}^{(-)}_\beta(\hat{\mathbf{q}},\lambda)v^{(-)}_\alpha(\hat{\mathbf{q}}_1,\lambda_1)\times \tag{2.97} $$

$$\times\Big\{[\,t^{a_1},t^{a_2}]^{ii_1}\,{}^*\Gamma^{(Q)\nu}_{\beta\alpha}(-q+q_1;q,-q_1)\,{}^*\mathcal{D}_{\nu\nu'}(-k_1+k_2)\,{}^*\Gamma^{\nu'\mu_1\mu_2}(-k_1+k_2,k_1,-k_2)-$$

$$-(t^{a_1}t^{a_2})^{ii_1}\,{}^*\Gamma^{(Q)\mu_1}_{\beta\gamma}(k_1;q,-q-k_1)\,{}^*S_{\gamma\gamma'}(q_1+k_2)\,{}^*\Gamma^{(Q)\mu_2}_{\gamma'\alpha}(-k_2;q_1+k_2,-q_1)-$$

$$-(t^{a_2}t^{a_1})^{ii_1}\,{}^*\Gamma^{(Q)\mu_2}_{\beta\gamma}(-k_2;q,-q+k_2)\,{}^*S_{\gamma\gamma'}(q_1-k_1)\,{}^*\Gamma^{(Q)\mu_1}_{\gamma'\alpha}(k_1;q_1-k_1,-q_1)\Big\}\Big|_{\text{on-shell}}.$$

Здесь в правой части использовали правила сопряжения для HTL-индуцированных вершинных функций ${}^*\Gamma_{\mu\mu_1\mu_2}$ и ${}^*\Gamma^{(Q)}_{\mu}$ (A.4) и (B.8), а для эффективных глюонных и кварковых пропагаторов – уравнения (A.12) и (B.14), соответственно.

Как и в разделе 2.8, в эффективном пропагаторе глюонов ${}^*\mathcal{D}_{\nu\nu'}$ в (2.97) оставляем члены с продольным проектором $\widetilde{Q}_{\nu\nu'}$ и выполняем следующую замену

$$
\begin{aligned}
{}^*\mathcal{D}_{\nu\nu'}(-k_1+k_2) \Rightarrow -\,\widetilde{Q}_{\nu\nu'}(-k_1+k_2)\,{}^*\Delta^l(-k_1+k_2) \simeq \qquad (2.98)\\
\simeq \left(\frac{\epsilon^l_{\nu}(\mathbf{q}-\mathbf{q}_1)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}}}\right)\left(\frac{\epsilon^l_{\nu'}(-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega^l_{-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}}}\right)\left[\,\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}}}\;+\;\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}}\,\right],
\end{aligned}
$$

где в правой части, в силу определения меры интегрирования (2.89), учли законы сохранения энергии и импульса в элементарном акте рассеяния плазмина на плазмоне

$$
\begin{cases}
\omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}=\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_2},\\[2ex]
\mathbf{q}+\mathbf{k}_1=\mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2
\end{cases}
\qquad (2.99)
$$

и четность дисперсионного соотношения для плазмонной моды.

Из аппроксимации продольной части глюонного пропагатора (2.98) видно, что она содержит вклады, пропорциональные множителям $1/(\omega^l_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}})$ и $1/(\omega^l_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^-_{\mathbf{q}_1})$, которые имеют место в двух последних членах в левой части (2.97). Используя выражения для цветовой структуры вершинных функций $\mathcal{V}^{a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ и $\mathcal{P}^{a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ (2.18) и (2.79) и принимая во внимание свойства сопряжения

$$\mathcal{V}^*_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}=\mathcal{V}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2},\quad \mathcal{P}^*_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}}=-\mathcal{P}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1},$$

можно представить эти два члена в следующем виде:

$$-2i[\,t^{a_1},t^{a_2}]^{ii_1}\left(\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}}}\;+\;\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}}\right)\mathcal{V}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\,\mathcal{P}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}.$$

Это выражение следует сравнить с

$$[\,t^{a_1},t^{a_2}]^{ii_1}\left(\,\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}}-\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}}}\;+\;\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}}\,\right)\times$$

$$\times\left\{g\left(\frac{\epsilon^l_{\nu'}(-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega^l_{-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}}}\right)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_1}(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_1}}}\right)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_2}(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_2}}}\right){}^*\Gamma^{\nu'\mu_1\mu_2}(-k_1+k_2,k_1,-k_2)\right\}\times$$

$$\left\{g\left(\frac{Z_-(\mathbf{q})}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{Z_-(\mathbf{q}_1)}{2}\right)^{1/2}\bar{v}^{(-)}_\beta(\hat{\mathbf{q}},\lambda)v^{(-)}_\alpha(\hat{\mathbf{q}}_1,\lambda_1)\left(\frac{\epsilon^l_\mu(\mathbf{q}-\mathbf{q}_1)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}}}\right){}^*\Gamma^{(Q)\mu}_{\beta\alpha}(-q+q_1;q,-q_1)\right\}\Bigg|_{\text{shell}}.$$

Видно, что вершинные функции $\mathcal{V}_{-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ и $\mathcal{P}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}_1}(\lambda,\lambda_1)$, заданные формулами (2.19) и (2.82), соответственно, точно воспроизводятся.

Рассмотрим оставшиеся вклады в (2.97), которые содержат эффективный (запаздывающий) пропагатор кварков ${}^*S_{\gamma\gamma'}$. В приближении жёстких температурных петель структура этого пропагатора определяется уравнениями (B.11) – (B.13). Однако удобнее использовать несколько иное представление кваркового пропагатора, предложенное Weldon [41] для случая киральноинвариантной фазы КХД, а именно,

$$\begin{aligned}{}^*S(q_0,\mathbf{q}) &= \qquad (2.100)\\ &= h_+(\hat{\mathbf{q}})\left(\frac{Z_+(\mathbf{q})}{q_0-\mathcal{E}_+(\mathbf{q})}+\frac{Z^*_-(\mathbf{q})}{q_0+\mathcal{E}^*_-(\mathbf{q})}-f(q_0,|\mathbf{q}|)\right)+\\ &+h_-(\hat{\mathbf{q}})\left(\frac{Z_-(\mathbf{q})}{q_0-\mathcal{E}_-(\mathbf{q})}+\frac{Z^*_+(\mathbf{q})}{q_0+\mathcal{E}^*_+(\mathbf{q})}+f^*(-q^*_0,|\mathbf{q}|)\right).\end{aligned}$$

Полюсы q_0 в точке $\mathcal{E}_+$ и в точке $\mathcal{E}_-$ обусловлены возбуждением частиц и дырок, а полюсы q_0 в точке $-\mathcal{E}^*_-$ и в точке $-\mathcal{E}^*_+$ – возбуждением антидырок и возбуждением античастиц, соответственно. Пропагатор в уравнении (2.100) инвариантен по отношению к киральности, а также к четности, зарядовому сопряжению и обращению времени. Функция $f(q_0,|\mathbf{q}|)$ является некоторой неизвестной функцией. Требуется только, чтобы она не имела особенностей в верхней половине комплексной плоскости q_0 и удовлетворяла свойству отражения

$$f(q_0,|\mathbf{q}|)=-f^*(-q^*_0,-|\mathbf{q}|).$$

В полюсе возбуждения плазмы, когда $q_0\to\mathcal{E}_-(\mathbf{q})\simeq\omega^-_{\mathbf{q}}$, запаздывающий пропагатор (2.100) ведет себя следующим образом:

$${}^*S_{\alpha\alpha'}(q_0,\mathbf{q})\sim\sum_{\lambda=\pm1}v^{(-)}_\alpha(\hat{\mathbf{q}},\lambda)\bar{v}^{(-)}_{\alpha'}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)\,\frac{Z_-(\mathbf{q})}{q_0-\omega^-_{\mathbf{q}}}. \qquad (2.101)$$

Здесь приняли во внимание, что, в силу второго соотношения в (B.3), представление $h_-(\hat{\mathbf{q}}) = \sum_\lambda v^{(-)}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)\bar{v}^{(-)}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)$ справедливо. Используя это приближение, получаем следующие выражения для первого эффективного кваркового пропагатора в правой части уравнения (2.97):

$$ {}^*S_{\gamma\gamma'}(q_1+k_2) \simeq \sum_{\lambda'=\pm1} v^{(-)}_\gamma(\widehat{\mathbf{q}+\mathbf{k}_1},\lambda')\bar{v}^{(-)}_{\gamma'}(\widehat{\mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2},\lambda')\,\frac{Z_-^{1/2}(\mathbf{q}+\mathbf{k}_1)Z_-^{1/2}(\mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2)}{\omega^-_{\mathbf{q}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^-_{\mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2}} \tag{2.102} $$

и для второго пропагатора –

$$ {}^*S_{\gamma\gamma'}(q_1-k_1) \simeq \sum_{\lambda'=\pm1} v^{(-)}_\gamma(\widehat{\mathbf{q}-\mathbf{k}_2},\lambda')\bar{v}^{(-)}_{\gamma'}(\widehat{\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_1},\lambda')\,\frac{Z_-^{1/2}(\mathbf{q}-\mathbf{k}_2)Z_-^{1/2}(\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_1)}{\omega^-_{\mathbf{q}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^-_{\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_1}}. \tag{2.103} $$

При выводе (2.102) и (2.103) учли законы сохранения импульса и энергии для упругого рассеяния плазмина на плазмоне (2.99).

Подстановка аппроксимации (2.102) во второй член в фигурных скобках в правой части (2.97) дает:

$$ -(t^{a_1}t^{a_2})^{ii_1}\sqrt{2}g\times $$

$$ \sum_{\lambda'=\pm}\left[\left(\frac{Z_-(\mathbf{q})}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{Z_-(\mathbf{q}+\mathbf{k}_1)}{2}\right)^{1/2}\bar{v}^{(-)}_\gamma(\widehat{\mathbf{q}+\mathbf{k}_1},\lambda')v^{(-)}_\beta(\hat{\mathbf{q}},\lambda)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_1}(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_1}}}\right){}^*\Gamma^{(Q)\mu_1}_{\gamma\beta}(k_1;-q-k_1,q)\right]^*\times $$

$$ \left[\left(\frac{Z_-(\mathbf{q}_1)}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{Z_-(\mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2)}{2}\right)^{1/2}\bar{v}^{(-)}_{\gamma'}(\widehat{\mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2},\lambda')v^{(-)}_\alpha(\hat{\mathbf{q}}_1,\lambda_1)\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_2}(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_2}}}\right){}^*\Gamma^{(Q)\mu_2}_{\gamma'\alpha}(-k_2;q_1+k_2,-q_1)\right] $$

$$ \times\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^-_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}}\Bigg|_{\mathrm{on-shell}}. $$

Здесь из структуры последнего множителя видно, что этот вклад следует сравнить со вторым членом в левой части (2.97). Помня о соглашении о суммировании по спиральности (2.40), и принимая во внимание цветовую структуру трёхточечной амплитуды $\mathcal{P}^{a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ (2.79), можно записать этот член в следующем виде:

$$ (t^{a_1}t^{a_2})^{ii_1}\,\frac{\sum\limits_{\lambda'=\pm1}\mathcal{P}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2,\,\mathbf{q}_1}(\lambda',\lambda_1)\,\mathcal{P}^*_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}+\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}}(\lambda',\lambda)}{\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^-_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_1}+\omega^-_{\mathbf{q}_1}}. $$

Сравнивая это выражение с предыдущим, видим, что вершинная функция $\mathcal{P}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2}(\lambda,\lambda_1)$, заданная формулой (2.82), снова правильно воспроизводится. К

аналогичному выводу приходим, подставляя второй аппроксимированный пропагатор (2.103) в третий член правой части (2.97) и сравнивая полученное выражение с выражением

$$-\left(t^{a_2}t^{a_1}\right)^{ii_1}\frac{\sum\limits_{\lambda'=\pm1}\mathcal{P}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}-\mathbf{k}_2}(\lambda,\lambda')\,\mathcal{P}^{*}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_1}(\lambda_1,\lambda')}{\omega^{l}_{\mathbf{k}_2}-\omega^{-}_{\mathbf{q}}+\omega^{-}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}_2}}.$$

Последним шагом коэффициентные функции $\mathcal{G}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ и $\mathcal{K}^{\,a\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1}$ в первом и четвертом слагаемых в левой части (2.97) нужно полагать равными нулю в соответствии с (2.78).

2.11 Выводы

В этой главе предложен (псевдо)классический гамильтонов формализм для описания нелинейного взаимодействия мягких глюонных и мягких кварк-антикварковых возбуждений в кварк-глюонной плазме. Здесь использована эффективная теория Braaten-Pisarski. Большая часть результатов разделов 2.1 – 2.7 получена не в рамках HTL-приближения, а с применением методов кинетической теории и неравновесной статистической физики, которые являются достаточно общими для широкого класса неравновесных сред. Построение канонических преобразований бозонных $a^{a}_{\mathbf{k}}$ и фермионных $b^{i}_{\mathbf{q}}$ нормальных полевых переменных (2.25) и (2.26) дало возможность исключить гамильтониан взаимодействия $H^{(3)}$ (2.13) определить новые эффективные гамильтонианы взаимодействия $\mathcal{H}^{(4)}_{qg\to qg}$ и $\mathcal{H}^{(4)}_{qq\to qq}$ (2.38) и (2.45) с калибровочно-ковариантными амплитудами плазмин-плазмонного $\widetilde{T}^{(1)\,i\,i_1\,a_1\,a_2}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ и плазмин-плазминного $\widetilde{T}^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_3}$ рассеяния (2.39) и (2.46), соответственно. Условия каноничности (2.23) и (2.24) позволили определить самосогласованную систему независимых соотношений интегрального типа, которые связывают низшие и высшие коэффициентные функции в подынтегральных выражениях различных членов в канонических преобразованиях, которые представлены в виде интегро-степенного ряда по новым нормальным переменным $c^{a}_{\mathbf{k}}$ и $f^{i}_{\mathbf{q}}$. Построение кинетических уравнений для мягких плазменных мод, которые учитывали бы и бозонную и фермионную степени свободы одновременно, на практике является достаточно сложным, ввиду чего здесь обсуждаются только простейшие процессы упругого рассеяния плазмина на плазмине и плазмина на плазмоне в КГП.

Следует также отметить, что сама постановка задачи, учитывающая только плазмоны и плазмино, вряд ли применима к реальной физике кварк-глюонной плазмы ввиду того, что вычеты $Z_l(\mathbf{k})$ и $Z_-(\mathbf{q})$ этих мод колебаний КГП экспоненциально подавляются при больших импульсах и, кроме того, эти моды не являются устойчивыми относительно поправок высокого порядка к однопетлевому приближению для пропагаторов HTL и должны вообще обращаться в ноль при некоторых значениях $|\mathbf{k}|, |\mathbf{q}| \sim gT$. Это сделано исключительно с целью упрощения, поскольку количество ветвей для различных мод колебаний в горячей КХД-плазме достаточно велико. Поскольку рассмотрение проводилось на весьма общем уровне, в принципе, несложно переписать полученные кинетические уравнения для мягких поперечных глюонных и нормальных кварковых возбуждений. Фактически, здесь задача сводится к нескольким заменам. Например, вместо продольной части глюонного пропагатора ${}^*\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu\mu'}(k)$, как это было сделано в уравнении (2.74), теперь нужно оставить поперечную часть

$$ {}^*\widetilde{\mathcal{D}}^{\mu\mu'}(k) \Rightarrow -P^{\mu\mu'}(k)\,{}^*\Delta^t(k), $$

где, в свою очередь, поперечный проектор $P^{\mu\mu'}(k)$ должен быть представлен в виде разложения по собственным векторам поперечной поляризации [25]:

$$ P^{\mu\mu'}(k) = \sum_{\zeta=1,2} \left(\frac{\epsilon^{\mu}(k,\zeta)}{\sqrt{\epsilon^2(k,\zeta)}} \right) \left(\frac{\epsilon^{\mu'}(k,\zeta)}{\sqrt{\epsilon^2(k,\zeta)}} \right), $$

$$ \epsilon^{\mu}(k,\zeta) \equiv \mathrm{e}^{(\zeta)\mu} k^2 - k^{\mu}(\mathrm{e}^{(\zeta)} \cdot k), \quad (k \cdot \epsilon(k,\zeta)) = 0. $$

Здесь $\mathrm{e}^{(\zeta)\mu}$ – некоторые четыре-векторы, такие, что $\epsilon^{\mu}(k,\zeta)$ – линейно независимы. Это, в свою очередь, приведёт к соответствующей замене волновой функции глюона (2.84)

$$ \left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega^l_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \left(\frac{\tilde{u}^{\mu}(k)}{\sqrt{\bar{u}^2(k)}} \right) \Rightarrow \left(\frac{Z_t(\mathbf{k})}{2\omega^t_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \left(\frac{\epsilon^{\mu}(k,\zeta)}{\sqrt{\epsilon^2(k,\zeta)}} \right) $$

и к правильному выбору условий на массовой поверхности. Аналогичные замены необходимо выполнить и для фермионногого сектора возбуждений. Из кваркового пропагатора ${}^*S_{\alpha\alpha'}(q)$ необходимо выделить часть, связанную с нормальной модой кварковых возбуждений. Вместо представления (2.101) в полюсе возбуждения плазмина, в случае, когда $q_0 \to \mathcal{E}_+(\mathbf{q}) \simeq \omega^+_{\mathbf{q}}$, теперь необходимо

использовать аппроксимацию вида:

$$ {}^{*}S_{\alpha\alpha'}(q_0,\mathbf{q}) \sim \sum_{\lambda=\pm1} u_{\alpha}^{(+)}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)\bar{u}_{\alpha'}^{(+)}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)\,\frac{Z_{+}(\mathbf{q})}{q_0-\omega_{\mathbf{q}}^{+}}, $$

при необходимости выполнить замену волновых функций кварков

$$ \left(\frac{Z_{-}(\mathbf{q})}{2}\right)^{1/2} v_{\alpha}^{(-)}(\hat{\mathbf{q}},\lambda) \to \left(\frac{Z_{+}(\mathbf{q})}{2}\right)^{1/2} u_{\alpha}^{(+)}(\hat{\mathbf{q}},\lambda), $$

$$ \left(\frac{Z_{-}(\mathbf{q})}{2}\right)^{1/2} \bar{v}_{\alpha}^{(-)}(\hat{\mathbf{q}},\lambda) \to \left(\frac{Z_{+}(\mathbf{q})}{2}\right)^{1/2} \bar{u}_{\alpha}^{(+)}(\hat{\mathbf{q}},\lambda) $$

и выбрать соответствующие условия массовой поверхности. Такие замены позволят получить кинетические уравнения для бесцветной плотности числа мягких поперечных глюонных возбуждений $N_{\mathbf{k}}^{abt} \equiv \delta^{ab} N_{\mathbf{k}}^{t}$ и для плотности числа бесцветных нормальных возбуждений кварков $n_{\mathbf{q}}^{ij\,+} \equiv \delta^{ij} n_{\mathbf{q}}^{+}$ вместо (2.66), (2.87) и (2.90).

В данной главе не был затронут интересный вопрос, касающийся рассмотрения дополнительной степени свободы системы, обусловленной антиплазминной ветвью коллективных кварк-антикварковых возбуждений. Включение антиплазминной моды в общую схему построения гамильтонова формализма требует соответствующего обобщения канонических преобразований, условий каноничности, исходного гамильтониана взаимодействия и т.д.. Основная задача здесь заключается в построении эффективного гамильтониана взаимодействия четвертого порядка, который описывает процесс аннигиляции плазмина с антиплазмином с образованием двух плазмонов, а также рождение плазмин-антиплазминной пары в результате слияния двух плазмонов, и в получении самосогласованной системы из трех кинетических уравнений, определяющих изменение плотностей числа плазминов, антиплазминов и плазмонов в результате их взаимного взаимодействия. Введение антиплазминной моды не представляет особых затруднений, однако это приводит к заметному усложнению рассматриваемого формализма. Например, вместо канонических преобразований (2.21) и (2.22) необходимо рассматривать канонические преобразования трёх исходных

бозонных и фермионных функций $a^a_{\mathbf{k}}$, $b^i_{\mathbf{q}}$ и $d^i_{\mathbf{q}}$ в три новые функции $c^a_{\mathbf{k}}$, $f^{\,i}_{\mathbf{q}}$ и $\bar{f}^{\,i}_{\mathbf{q}}$:

$$a^a_{\mathbf{k}} = a^a_{\mathbf{k}}(c^a_{\mathbf{k}},\, c^{*a}_{\mathbf{k}}\, f^{\,i}_{\mathbf{q}},\, f^{*i}_{\mathbf{q}},\, \bar{f}^{\,i}_{\mathbf{q}},\, \bar{f}^{*i}_{\mathbf{q}}),$$
$$b^i_{\mathbf{q}} = b^i_{\mathbf{q}}(c^a_{\mathbf{k}},\, c^{*a}_{\mathbf{k}}\, f^{\,i}_{\mathbf{q}},\, f^{*i}_{\mathbf{q}},\, \bar{f}^{\,i}_{\mathbf{q}},\, \bar{f}^{*i}_{\mathbf{q}}),$$
$$d^i_{\mathbf{q}} = d^i_{\mathbf{q}}(c^a_{\mathbf{k}},\, c^{*a}_{\mathbf{k}}\, f^{\,i}_{\mathbf{q}},\, f^{*i}_{\mathbf{q}},\, \bar{f}^{\,i}_{\mathbf{q}},\, \bar{f}^{*i}_{\mathbf{q}}).$$

Следствием этого будет появление новых слагаемых в суперскобках Пуассона (2.23), (2.24), усложнение условий каноничности, приведённых в приложениях C и D, и т.д.. По этой причине построение гамильтонова формализма для описания динамики коллективных фермионных возбуждений с антиплазминами требует отдельного рассмотрения и в настоящей работе было сознательно исключено из общего анализа.

Глава 3

Гамильтонов формализм для бозе-возбуждений в КГП: рассеяние плазмона на жёстких частицах

3.1 Гамильтониан взаимодействия плазмонов и жёсткой частицы

Рассмотрим потенциал калибровочного поля в виде разложения на плоские волны, выписанный во второй главе (2.1). С целью упрощения задачи, будем анализировать возбуждения продольно поляризованных плазменных волн (плазмонов).

Здесь переменные $a^a_{\mathbf{k}}$ и $a^{*a}_{\mathbf{k}}$ в (2.1) удовлетворяют скобкам Ли-Пуассона (LPB):

$$\left\{a^a_{\mathbf{k}},\, a^b_{\mathbf{k}'}\right\}_{\mathrm{LPB}} = 0, \quad \left\{a^{*a}_{\mathbf{k}},\, a^{*b}_{\mathbf{k}'}\right\}_{\mathrm{LPB}} = 0, \quad \left\{a^a_{\mathbf{k}},\, a^{*b}_{\mathbf{k}'}\right\}_{\mathrm{LPB}} = \delta^{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{3.1}$$

Скобка Ли-Пуассона для цветного заряда Q^a жёсткой тестовой частицы записывается следующим образом:

$$\left\{Q^a, Q^b\right\}_{\mathrm{LPB}} = f^{abc}Q^c. \tag{3.2}$$

Выражение

$$\left\{F,\, G\right\}_{\mathrm{LPB}} = \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta F}{\delta a^c_{\mathbf{k}'}} \frac{\delta G}{\delta a^{*c}_{\mathbf{k}'}} - \frac{\delta F}{\delta a^{*c}_{\mathbf{k}'}} \frac{\delta G}{\delta a^c_{\mathbf{k}'}} \right\} + \frac{\partial F}{\partial Q^a} \frac{\partial G}{\partial Q^b} f^{abc} Q^c. \tag{3.3}$$

используется в качестве определения скобки Ли-Пуассона для сплошных сред. Первый член представляет собой стандартную каноническую скобку. В даль-

нейшем, для удобства записи под фигурными скобками $\{\,,\}$ всегда подразумеваем скобку Ли-Пуассона (3.3).

Уравнения Гамильтона для функций $a^a_{\mathbf{k}}$, $a^{*a}_{\mathbf{k}}$ и Q^a будут иметь вид:

$$\frac{\partial a^a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -i\big\{a^a_{\mathbf{k}}, H\big\} \equiv -i\,\frac{\delta H}{\delta a^{*a}_{\mathbf{k}}}, \qquad \frac{\partial a^{*a}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -i\big\{a^{*a}_{\mathbf{k}}, H\big\} \equiv i\,\frac{\delta H}{\delta a^a_{\mathbf{k}}}, \tag{3.4}$$

$$\frac{dQ^a}{dt} = \{Q^a, H\} = \frac{\partial H}{\partial Q^b}\, f^{abc} Q^c, \quad Q^a|_{t=t_0} = Q^a_0. \tag{3.5}$$

Здесь $H = H^{(0)} + H_{int}$ – гамильтониан для системы плазмонов и жёсткой пробной частицы. Гамильтониан невзаимодействующих плазмонов $H^{(0)}$ имеет вид:

$$H^{(0)} = \int d\mathbf{k}\, \omega^l_{\mathbf{k}}\, a^{*a}_{\mathbf{k}} a^a_{\mathbf{k}}, \tag{3.6}$$

а через H_{int} обозначен гамильтониан взаимодействия плазмонов и цветозаряженной жёсткой частицы. Далее считаем, что тестовая частица движется в неабелевой плазме с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. С целью учета движения частицы в заданной среде, согласно [42], перейдем к системе отсчета, в которой эта частица находится в состоянии покоя после выполнения замены $a^a_{\mathbf{k}}$ на $a^a_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}(t-t_0)}$ в потенциале калибровочного поля (2.1). В этом случае свободный гамильтониан теперь будет иметь вид:

$$H^{(0)} = \int d\mathbf{k}\, (\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\, a^{*a}_{\mathbf{k}} a^a_{\mathbf{k}}. \tag{3.7}$$

Таким образом, частота $\tilde{\omega}^l_{\mathbf{k}} \equiv \omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}$ мягкого глюонного поля A^a_μ преобразована к той системе координат, в которой заряд находится в состоянии покоя. Отметим, что в силу специфики дисперсионного уравнения для мягких продольных бозонных возбуждений (1.5) в горячей кварк-глюонной плазме, множитель $(\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})$ в (3.7) для произвольных значений волнового вектора $\mathbf{k}$ не равен нулю:

$$\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k} \neq 0. \tag{3.8}$$

Это говорит о том, что эффект линейного затухания Ландау (излучение Черенкова) отсутствует в горячей КГП.

В первой главе, посвященной построению гамильтонова формализма, было рассмотрено упругое рассеяние двух бесцветных плазмонов друг на друге, которое становится доминирующим для амплитуды калибровочного поля $A_\mu(x)$ порядка [30]:

$$|A_\mu(x)| \sim \sqrt{g}T$$

и, соответственно, плотность числа плазмонов имеет порядок

$$N^l_{\mathbf{k}} \sim \frac{1}{g}.$$

Фактически, это соответствует уровню тепловых флуктуаций в рассматриваемой среде. Для заданного значения амплитуды калибровочного поля при $g \ll 1$ плотность числа плазмонов $N^l_{\mathbf{k}}$ является достаточно большой, поэтому применение чисто классического описания здесь оправданно. Для слабо нелинейных волн разложение гамильтониана в ряд по целым степеням $a^a_{\mathbf{k}}$ и $a^{*a}_{\mathbf{k}}$ может быть ограничен конечным числом членов до четвертого порядка включительно. В настоящей главе предполагаем, что амплитуда калибровочного поля имеет порядок $\sim\sqrt{g}T$, и доминирующим является процесс упругого рассеяния плазмона на жёсткой частице. По этой причине в разложении гамильтониана взаимодействия также ограничимся членами четвертого порядка[1].

В приближении малых амплитуд гамильтониан взаимодействия можно разложить в интегро-степенной ряд по степеням $a^a_{\mathbf{k}}$ и $a^{*a}_{\mathbf{k}}$ и Q^a:

$$H_{int} = H^{(3)} + H^{(4)} + \ \dots\ ,$$

где

$$H^{(3)} = \int d\mathbf{k}\Big[\phi_{\mathbf{k}}\, a^a_{\mathbf{k}}\, Q^a + \phi^*_{\mathbf{k}}\, a^{*a}_{\mathbf{k}}\, Q^a\Big] + \tag{3.9}$$

$$+ \int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \Big\{\mathcal{V}^{a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\, a^{*a}_{\mathbf{k}}\, a^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\, a^{a_2}_{\mathbf{k}_2} \ + \ \mathcal{V}^{*\,a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\, a^{a}_{\mathbf{k}}\, a^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1}\, a^{*\,a_2}_{\mathbf{k}_2}\Big\}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) +$$

$$+ \frac{1}{3}\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \Big\{\mathcal{U}^{a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\, a^{a}_{\mathbf{k}}\, a^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\, a^{a_2}_{\mathbf{k}_2} \ + \ \mathcal{U}^{*\,a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\, a^{*\,a}_{\mathbf{k}}\, a^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1}\, a^{*\,a_2}_{\mathbf{k}_2}\Big\}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2),$$

[1] Следует обратить внимание на то, что в случае сильно возбуждённой системы ситуация качественно меняется. При учёте высокой интенсивности возбуждения в кварк-глюонной плазме в разложении H_{int} необходимо учитывать следующие слагаемые интегро-степенного ряда (3.9). В предельной ситуации, когда имеет место сильное возбуждение, то есть

$$|A_\mu(x)| \sim T \ \text{ и, соответственно, } N^l_{\mathbf{k}} \sim \frac{1}{g^2},$$

разложение H_{int} должно содержать бесконечное число слагаемых любой степени по $a^a_{\mathbf{k}}$ и $a^{*a}_{\mathbf{k}}$. Это означает, что необходимо учитывать все процессы высших порядков, связанные с упругим рассеянием плазмонов на ультрарелятивистском партоне. Здесь приходим к подлинно нелинейной теории, описывающей взаимодействие между собой мягких глюонов в кварк-глюонной плазме. В случае бесконечного числа слагаемых, для сильно возбужденных состояний, требуются более подходящие, качественно новые аналитические инструменты. Однако, когда амплитуда $a^a_{\mathbf{k}}$ невелика, динамику волны можно описать, разложив гамильтониан в ряд по канонически упорядоченным переменным вплоть до четвёртого порядка.

$$H^{(4)} = \frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1 \left\{ T^{*\,(1)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} a^{a}_{\mathbf{k}} a^{a_1}_{\mathbf{k}_1} Q^{\,a_2} + T^{(1)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} a^{*\,a}_{\mathbf{k}} a^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1} Q^{\,a_2} \right\} + \tag{3.10}$$

$$+ i\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1\, T^{(2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} a^{*\,a}_{\mathbf{k}} a^{a_1}_{\mathbf{k}_1} Q^{\,a_2} + \Xi\, Q^{a} Q^{a}.$$

Здесь необходимо особо пояснить следующий момент: несмотря на тот факт, что, например, гамильтониан $H^{(3)}$ содержит смешанные вклады, квадратичные по переменным $a^{a}_{\mathbf{k}}$ и $Q^{\,a}$ и кубические по $a^{a}_{\mathbf{k}}$, само выражение (3.9) представляет собой гамильтониан взаимодействия третьего порядка. Таким образом, цветному заряду $Q^{\,a}$ приписывается степень нелинейности *два*. На рис. 3.1 дано диаграммное изображение двух членов в квадратных скобках в первой строке (3.9), которые являются элементарными вершинами взаимодействия между мягкими глюонными возбуждениями и жёсткой цветозаряженной цветной частицей. Двойная линия обозначает жёсткую частицу с цветным зарядом $Q^{\,a}$. Вершины взаимодействия для входящих и исходящих волновых линий (плазмонов) определяются функциями $\phi_{\mathbf{k}}$ и $\phi^{*}_{\mathbf{k}}$ в гамильтониане $H^{(3)}$. Вершинные функции $\mathcal{V}^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ и $\mathcal{U}^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ определяют процессы трёхплазмонного взаимодействия.

То же самое можно отнести к гамильтониану $H^{(4)}$, содержащему как квадратичные вклады по $Q^{\,a}$, так и смешанные кубические вклады по $a^{a}_{\mathbf{k}}$ и $Q^{\,a}$. Все они образуют гамильтониан взаимодействия четвертого порядка в предположении, что степень нелинейности цветного заряда равна 2.

Вершинные функции $\mathcal{V}^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ и $\mathcal{U}^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ удовлетворяют условиям симмет-

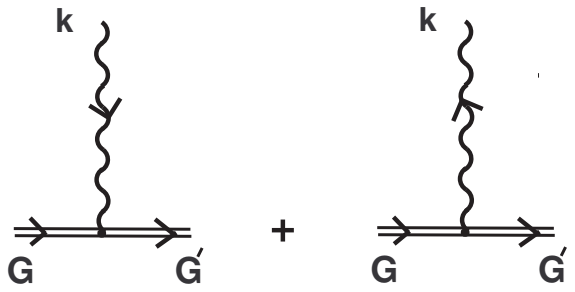


Рисунок 3.1 — Элементарные вершины взаимодействия между мягкими бозонными возбуждениями и жёсткой цветозаряженной частицей G

рии (1.8), а для вершинной функции $T^{(1)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}$ должно выполняться условие

$$T^{(1)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} = T^{(1)\,a_1\,a\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}}. \tag{3.11}$$

Если вещественность гамильтониана (3.9) очевидна, то вещественность гамильтониана (3.10) приводит к ещё одному соотношению для вершинной функции: $T^{(2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}$:

$$T^{(2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} = -T^{*\,(2)\,a_1\,a\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}}.$$

Отметим, что в нашем случае вершинные функции в гамильтонианах $H^{(3)}$ и $H^{(4)}$ определяются специфичными свойствами высокотемпературной кварк-глюонной плазмы. В главе 1, в рамках рассматриваемой аппроксимации жёстких температурных петель, приведен явный вид трёхточечных амплитуд $\mathcal{V}^{a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ и $\mathcal{U}^{a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$, структура которых определяется цветовой и импульсной факторизацией:

$$\mathcal{V}^{a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = f^{a\,a_1\,a_2}\,\mathcal{V}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}, \qquad \mathcal{U}^{a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = f^{a\,a_1\,a_2}\,\mathcal{U}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}, \tag{3.12}$$

где $\mathcal{V}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ и $\mathcal{U}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ заданы выражениями (1.46) и (1.47), соответственно, и для них выполнены свойства симметрии, определяемые соотношениями (1.40). Явный вид эффективной трёхглюонной вершины ${}^*\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(k,k_1,k_2)$ в правой части этих выражений определяется формулами (A.1) – (A.3) в Приложении А.

В заключение этого раздела для определения явного вида вершинной функции $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{k}}$ в (3.9) используем гамильтониан взаимодействия классической цветозаряженной частицы с внешним калибровочным полем $A^a_\mu(x)$:

$$H_{int} = \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^3}\, j^{a\mu}_Q(x) A^a_\mu(x),$$

где

$$j^{a\mu}_Q = g v^\mu Q^a(t)\,\delta^{(3)}\big(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{v}(t-t_0)\big), \quad v^\mu = (1,\mathbf{v}). \tag{3.13}$$

Подставим $j^{a\mu}_Q$ в H_{int} и интегрируя по переменной $\mathbf{x}$, в результате получаем при нулевых значениях t_0 и $\mathbf{x}_0$

$$H_{int} = g v^\mu Q^a(t)\, A^a_\mu\big(t,\,\mathbf{v}t\big)$$

$$= g\int d\mathbf{k}\,\left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega^l_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}\Big[(v\cdot\epsilon^l(\mathbf{k}))\,a^a_{\mathbf{k}} Q^a\, e^{-i(\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})t} + (v\cdot\epsilon^{*l}(\mathbf{k}))\,a^{*a}_{\mathbf{k}} Q^a\, e^{i(\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})t}\Big].$$

В качестве калибровочного потенциала $A^a_\mu(x)$ здесь использовали первый член с продольной поляризацией в (2.1). Сравнивая это выражение с гамильтонианом $H^{(3)}$ (3.9), приходим к следующей идентификации:

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{k}} = g\left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega^l_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}(v\cdot\epsilon^l(\mathbf{k})). \tag{3.14}$$

3.2 Каноническое преобразование

Как уже обсуждалось в главах 1 и 2, в случае нераспадного закона дисперсии, члены с вершинными функциями $\mathcal{V}^{a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ и $\mathcal{U}^{a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ в гамильтониане $H^{(3)}$, описывающие трёхволновые процессы, в некотором отношении могут не относиться к реальным физическим процессам. Действительно, ввиду специфики дисперсионного уравнения для мягких бозонных продольных возбуждений (1.5) в КГП, условия резонанса (1.11) для трёхволновых процессов с участием плазмонов решений не имеют. Кроме того, члены в $H^{(3)}$ с вершинной функцией $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{k}}$ описывают процессы черенковского испускания (поглощения) частицей, которая движется в изучаемой среде. Обсуждаемые процессы в силу условия (3.8) кинематически запрещены. Покажем далее, что здесь можно перейти к новым каноническим переменным $(c^a_{\mathbf{k}},\, c^{*a}_{\mathbf{k}})$ и $\mathcal{Q}^a$ так, что в гамильтониан взаимодействия $H^{(3)}$ в этих переменных обратиться в ноль. В данной процедуре исключения гамильтониана $H^{(3)}$ каноническое преобразование получается путем последовательного исключения членов, для которых условия резонанса (1.11) и (3.8) не выполняются.

Преобразование от исходных переменных $a^a_{\mathbf{k}}$ и Q^a к новым $c^a_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{Q}^a$ зададим в виде:

$$a^a_{\mathbf{k}} = a^a_{\mathbf{k}}(c^a_{\mathbf{k}},\, c^{*a}_{\mathbf{k}},\, \mathcal{Q}^a), \tag{3.15}$$

$$Q^a = Q^a(c^a_{\mathbf{k}},\, c^{*a}_{\mathbf{k}},\, \mathcal{Q}^a). \tag{3.16}$$

Потребуем, чтобы уравнения Гамильтона в терминах новых переменных имели вид (3.4) и (3.5) с тем же гамильтонианом H. При этом старый и новый гамильтонианы численно равны, но т.к. они записаны в разных переменных, их функциональные формы различаются. Это связано с тем, что рассматриваемые преобразования явно не зависят от времени. Довольно громоздкие выкладки

приводят к двум системам интегральных соотношений:

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta a^a_{\mathbf{k}}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta a^{*b}_{\mathbf{k}''}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}} - \frac{\delta a^a_{\mathbf{k}}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta a^{*b}_{\mathbf{k}''}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\right\} + i\,\frac{\partial a^a_{\mathbf{k}}}{\partial \mathcal{Q}^c}\frac{\partial a^{*b}_{\mathbf{k}''}}{\partial \mathcal{Q}^{c'}}\,f^{cc'd}\mathcal{Q}^d = \delta^{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}''), \quad (3.17a)$$

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta a^a_{\mathbf{k}}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta a^{b}_{\mathbf{k}''}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}} - \frac{\delta a^a_{\mathbf{k}}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta a^{b}_{\mathbf{k}''}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\right\} + i\,\frac{\partial a^a_{\mathbf{k}}}{\partial \mathcal{Q}^c}\frac{\partial a^{b}_{\mathbf{k}''}}{\partial \mathcal{Q}^{c'}}\,f^{cc'd}\mathcal{Q}^d = 0, \quad (3.17b)$$

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta a^a_{\mathbf{k}}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta Q^b}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}} - \frac{\delta a^a_{\mathbf{k}}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta Q^b}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\right\} + i\,\frac{\partial a^a_{\mathbf{k}}}{\partial \mathcal{Q}^c}\frac{\partial Q^b}{\partial \mathcal{Q}^{c'}}\,f^{cc'd}\mathcal{Q}^d = 0 \quad (3.17c)$$

и

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta Q^a}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta a^{*b}_{\mathbf{k}''}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}} - \frac{\delta Q^a}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta a^{*b}_{\mathbf{k}''}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\right\} + i\,\frac{\partial Q^a}{\partial \mathcal{Q}^c}\frac{\partial a^{*b}_{\mathbf{k}''}}{\partial \mathcal{Q}^{c'}}\,f^{cc'd}\mathcal{Q}^d = 0, \quad (3.18a)$$

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta Q^a}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta a^{b}_{\mathbf{k}''}}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}} - \frac{\delta Q^a}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta a^{b}_{\mathbf{k}''}}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\right\} + i\,\frac{\partial Q^a}{\partial \mathcal{Q}^c}\frac{\partial a^{b}_{\mathbf{k}''}}{\partial \mathcal{Q}^{c'}}\,f^{cc'd}\mathcal{Q}^d = 0, \quad (3.18b)$$

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta Q^a}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta Q^b}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}} - \frac{\delta Q^a}{\delta c^{*c}_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta Q^b}{\delta c^c_{\mathbf{k}'}}\right\} + i\,\frac{\partial Q^a}{\partial \mathcal{Q}^c}\frac{\partial Q^b}{\partial \mathcal{Q}^{c'}}\,f^{cc'd}\mathcal{Q}^d = if^{abd}Q^d, \quad (3.18c)$$

которые с использованием скобок Ли-Пуассона (3.3), после замен $a^a_{\mathbf{k}} \to c^a_{\mathbf{k}}$ и $Q^b \to \mathcal{Q}^b$ можно записать более компактно. В этом случае скобка Ли-Пуассона для исходных переменных $a^a_{\mathbf{k}}$ (3.1) и Q^b (3.2) сводится к условиям каноничности (3.17) и (3.18), которые накладывают определенные ограничения на функциональные зависимости (3.15) и (3.16). Разлагаем их далее в интегро-степенные ряды вплоть до членов шестого порядка[2] по $c^a_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{Q}^a$:

$$a^a_{\mathbf{k}} = c^a_{\mathbf{k}} + F_{\mathbf{k}}\mathcal{Q}^a + \quad (3.19)$$

$$+\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2\Big[V^{(1)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{a_2}_{\mathbf{k}_2} + V^{(2)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{a_2}_{\mathbf{k}_2} + V^{(3)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{*a_2}_{\mathbf{k}_2}\Big] +$$

$$+\int d\mathbf{k}_1\Big[\widetilde{V}^{(1)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}\mathcal{Q}^{a_2} + \widetilde{V}^{(2)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\mathcal{Q}^{a_2}\Big] +$$

$$\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2\Big[W^{(1)\,a\,a_1a_2a_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{a_2}_{\mathbf{k}_2}\mathcal{Q}^{a_3} + W^{(2)\,a\,a_1a_2a_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{a_2}_{\mathbf{k}_2}\mathcal{Q}^{a_3} + W^{(3)\,a\,a_1a_2a_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{*a_2}_{\mathbf{k}_2}\mathcal{Q}^{a_3}\Big]$$

$$+\int d\mathbf{k}_1\Big[\widetilde{W}^{(1)\,a\,a_1a_2a_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}\mathcal{Q}^{a_2}\mathcal{Q}^{a_3} + \widetilde{W}^{(2)\,a\,a_1a_2a_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\mathcal{Q}^{a_2}\mathcal{Q}^{a_3}\Big] + \ldots$$

$$+\left(G^{a\,a_1a_2}_{\mathbf{k}}\mathcal{Q}^{a_1}\mathcal{Q}^{a_2} + G^{a\,a_1a_2a_3}_{\mathbf{k}}\mathcal{Q}^{a_1}\mathcal{Q}^{a_2}\mathcal{Q}^{a_3} + \ldots\right).$$

и

$$Q^a = \mathcal{Q}^a + \int d\mathbf{k}_1\Big[M^{a\,a_1a_2}_{\mathbf{k}_1}c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\mathcal{Q}^{a_2} + M^{*a\,a_1a_2}_{\mathbf{k}_1}c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}\mathcal{Q}^{a_2}\Big] + \quad (3.20)$$

[2] Еще раз напомним, что степень нелинейности цветного заряда считаем равной двум.

$$\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \Big[M^{(1)\,a\,a_1 a_2 a_3}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} c^{a_1}_{\mathbf{k}_1} c^{a_2}_{\mathbf{k}_2} \mathcal{Q}^{a_3} + M^{(2)\,a\,a_1 a_2 a_3}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} c^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1} c^{a_2}_{\mathbf{k}_2} \mathcal{Q}^{a_3} + M^{*\,(1)\,a\,a_1 a_2 a_3}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} c^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1} c^{*\,a_2}_{\mathbf{k}_2} \mathcal{Q}^{a_3} \Big]$$

$$+ \int d\mathbf{k}_1 \Big[\widetilde{M}^{\,a\,a_1 a_2 a_3}_{\mathbf{k}_1} c^{a_1}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{Q}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} \;+\; \widetilde{M}^{*\,a\,a_1 a_2 a_3}_{\mathbf{k}_1} c^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{Q}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} \Big] + \ldots$$

$$+ F^{\,a\,a_1 a_2} \mathcal{Q}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \;+\; F^{\,a\,a_1 a_2 a_3} \mathcal{Q}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + \ldots \,.$$

Кубические члены в преобразовании (3.19) вида $c^{a_1}_{\mathbf{k}_1} c^{a_2}_{\mathbf{k}_2} c^{a_3}_{\mathbf{k}_3}$ не дают никаких вкладов в рассматриваемом приближении. В преобразовании (3.20) вклады, не содержащие цветные заряды $\mathcal{Q}^a$, опущены. Физическая интерпретация этого факта может быть следующей: цветные заряды, являясь физическими объектами, не могут "порождаться" мягким калибровочным полем рассматриваемой системы. Их равенство нулю можно показать прямыми вычислениями. При преобразовании (3.20) учитывалась вещественность цветного заряда, что также приводит к условиям

$$M^{*(2)\,a\,a_1 a_2 a_3}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = M^{(2)\,a\,a_2 a_1 a_3}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1}, \quad F^{*\,a\,a_1 a_2} = F^{\,a\,a_1 a_2}, \quad F^{*\,a\,a_1 a_2 a_3} = F^{\,a\,a_1 a_2 a_3}.$$

Кроме того, отметим, что коэффициентные функции $V^{(1)\,a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$, $V^{(3)\,a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$, $W^{(1,3)\,a\,a_1 a_2 a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$, $\widetilde{W}^{(1,2)\,a\,a_1 a_2 a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}$, $M^{(1)\,a\,a_1 a_2 a_3}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ и $\widetilde{M}^{\,a\,a_1 a_2 a_3}_{\mathbf{k}_1}$ удовлетворяют условиям симметрии:

$$\begin{aligned}
&V^{(1)\,a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = V^{(1)\,a\,a_2 a_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1}, && V^{(3)\,a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = V^{(3)\,a\,a_2 a_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1},\\
&W^{(1)\,a\,a_1 a_2 a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = W^{(1)\,a\,a_2 a_1 a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1}, && W^{(3)\,a\,a_1 a_2 a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = W^{(3)\,a\,a_2 a_1 a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1},\\
&\widetilde{W}^{(1)\,a\,a_1 a_2 a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} = \widetilde{W}^{(1)\,a\,a_1 a_3 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}, && \widetilde{W}^{(2)\,a\,a_1 a_2 a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} = \widetilde{W}^{(2)\,a\,a_1 a_3 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1},\\
&M^{(1)\,a\,a_1 a_2 a_3}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = M^{(1)\,a\,a_2 a_1 a_3}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1}, && \widetilde{M}^{\,a\,a_1 a_2 a_3}_{\mathbf{k}_1} = \widetilde{M}^{\,a\,a_1 a_3 a_2}_{\mathbf{k}_1}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Подстановка разложений (3.19) и (3.20) в условия каноничности (3.17) и (3.18) даёт нетривиальные интегральные связи между различными коэффициентными функциями, которые для третьего и четвертого порядков, приведены в Приложениях B и C. Здесь выпишем только алгебраические связи для коэффициентных функций второго порядка:

$$V^{(2)\,a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = -2 V^{*(1)\,a_2 a_1 a}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}}, \quad V^{(3)\,a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = V^{(3)\,a_1 a\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2}, \tag{3.22}$$

$$M^{\,a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k}} + i F^{*}_{\mathbf{k}} f^{\,a\,a_1 a_2} = 0, \tag{3.23}$$

$$\widetilde{V}^{(1)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} - \widetilde{V}^{(1)\,a_1\,a\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}} - iF_{\mathbf{k}}F_{\mathbf{k}_1}f^{\,a\,a_1\,a_2} = 0, \tag{3.24}$$

$$\widetilde{V}^{(2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} + \widetilde{V}^{*(2)\,a_1\,a\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}} + iF_{\mathbf{k}}F^{*}_{\mathbf{k}_1}f^{\,a\,a_1\,a_2} = 0. \tag{3.25}$$

3.3 Исключение "несущественного" гамильтониана $H^{(3)}$. Эффективный гамильтониан четвёртого порядка

Далее проведем процедуру исключения гамильтониана взаимодействия $H^{(3)}$ (3.9) при переходе от исходных функции $a^a_{\mathbf{k}}$ и цветного заряда Q^a к новым $c^a_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{Q}^a$ при канонических преобразованиях (3.19) и (3.20). В первой главе уже выполнялось подобное исключение при рассмотрении взаимодействия мягких бозонных возбуждений между собой. В этой главе будем рассматривать взаимодействия мягких бозонных возбуждений с жёсткой тестовой частицей, что является новым аспектом в данном исследовании, на котором остановимся более подробно.

Для исключения гамильтониана взаимодействия $H^{(3)}$, подставим разложения (3.19) и (3.20) в $H^{(0)}$ (3.7), и в новых переменных оставим только те члены, степень нелинейности которых равна двум или трем относительно $c^{\,a}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{Q}^a$. Далее в гамильтониане $H^{(3)}$ (3.9) сделаем замены: $a^a_{\mathbf{k}} \to c^a_{\mathbf{k}}$ и $Q^a \to \mathcal{Q}^a$. После добавления полученного выражения к выражению, следующему из гамильтониана $H^{(0)}$, получаем

$$H^{(0)} + H^{(3)} = \int d\mathbf{k}\,(\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\,c^{*a}_{\mathbf{k}}c^a_{\mathbf{k}} + \tag{3.26}$$

$$+\int d\mathbf{k}\,\Big\{\big[(\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})F^*_{\mathbf{k}} + \phi_{\mathbf{k}}\big]\,c^a_{\mathbf{k}}\mathcal{Q}^a + \big[(\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})F_{\mathbf{k}} + \phi^*_{\mathbf{k}}\big]\,c^{*a}_{\mathbf{k}}\mathcal{Q}^a\Big\}.$$

Условие равенства нулю выражения в фигурных скобках в правой части (3.26) приводит к определению явного вида коэффициентной функции $F_{\mathbf{k}}$ в каноническом преобразовании (3.19) в терминах вершинной функции $\phi_{\mathbf{k}}$:

$$F_{\mathbf{k}} = -\frac{\phi^*_{\mathbf{k}}}{\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}\,. \tag{3.27}$$

В силу условия (3.8), соотношение (3.27) имеет смысл. Из (3.23) с учетом (3.27), находим явный вид коэффициентной функции $M^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k}}$, входящей в каноническое преобразование цветного заряда Q^a (3.20):

$$M^{\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k}} = if^{\,a\,a_1\,a_2}\,\frac{\phi_{\mathbf{k}}}{\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}. \tag{3.28}$$

Требование исключения членов третьего порядка из гамильтониана $H^{(3)}$ (3.9), содержащих вершинные функции $\mathcal{V}^{a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ и $\mathcal{U}^{a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$, приводит к уже известным выражениям (1.12) для $V^{(1,3)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ в (3.19):

$$\begin{aligned} V^{(1)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} &= -\frac{\mathcal{V}^{a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}}{\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2), \\ V^{(3)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} &= -\frac{\mathcal{U}^{*\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}}{\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_2}}\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Коэффициентная функция $V^{(2)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ определяется из (3.22). Эти выражения[3] имеют смысл в силу того, что резонансные условия (1.11) для трёхплазмонных процессов не имеют решений.

Таким образом, вместо суммы $H^{(0)}+H^{(3)}$ (3.26) приходим теперь к новому гамильтониану $\mathcal{H}^{(0)}$ для невзаимодействующих плазмонов, записанному в терминах новых нормальных переменных $c^{*a}_{\mathbf{k}}$ и $c^{a}_{\mathbf{k}}$:

$$\mathcal{H}^{(0)} = \int d\mathbf{k}\,(\omega^l_{\mathbf{k}}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\,c^{*a}_{\mathbf{k}}c^{a}_{\mathbf{k}}. \tag{3.30}$$

Здесь и далее гамильтонианы в новых переменных будем обозначать через $\mathcal{H}$.

Далее построим явный вид эффективного гамильтониана $\mathcal{H}^{(4)}$, который описывает процесс упругого рассеяния плазмона на жёсткой частице. Собирая все вклады, пропорциональные произведению $c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{a_2}_{\mathbf{k}_2}\mathcal{Q}^{\,a}$, из гамильтонианов $H^{(0)}$ (3.7), $H^{(3)}$ (3.9) и $H^{(4)}$ (3.10), которые порождаются каноническими преобразованиями (3.19) и (3.20), получим эффективный гамильтониан четвертого порядка, описывающий упомянутый выше процесс:

$$\mathcal{H}^{(4)}_{gG\to gG} = i\int d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,\mathcal{T}^{(2)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}\,c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}c^{a_2}_{\mathbf{k}_2}\mathcal{Q}^{\,a}, \tag{3.31}$$

где *полная эффективная амплитуда* $\mathcal{T}^{(2)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ определена следующим образом:

$$i\mathcal{T}^{(2)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} = iT^{(2)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} + \Big[\big(\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}_2\big)\,\widetilde{V}^{*(2)\,a_2a_1\,a}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1} + \big(\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}_1\big)\,\widetilde{V}^{(2)\,a_1a_2\,a}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}\Big] \tag{3.32}$$

[3] Строго говоря, из-за сдвига собственной частоты в свободном гамильтониане $H^{(0)}$ (3.7), например, вместо первого выражения в (3.29) следует написать

$$V^{(1)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} = -\frac{\mathcal{V}^{a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}}{\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2),$$

однако ясно, что в силу δ-функции мы все равно возвращаемся к выражению (3.29).

$$+\int d\mathbf{k}\,(\omega^l_{\mathbf{k}}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\left\{F^*_{\mathbf{k}}V^{(2)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}+F_{\mathbf{k}}V^{*(2)\,a\,a_2a_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1}\right\}+$$

$$+\int d\mathbf{k}\left\{\phi_{\mathbf{k}}V^{(2)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}+\phi^*_{\mathbf{k}}V^{*(2)\,a\,a_2a_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1}\right\}+$$

$$+\left[\phi_{\mathbf{k}_2}M^{*a_2\,a_1\,a}_{\mathbf{k}_1}+\phi^*_{\mathbf{k}_1}M^{a_1a_2\,a}_{\mathbf{k}_2}\right]+$$

$$+2\int d\mathbf{k}\left\{\mathcal{V}^{a_1a_2\,a}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}}F_{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k})+\mathcal{V}^{*\,a_2a_1\,a}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}}F^*_{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1-\mathbf{k})\right\}.$$

Выпишем условие симметрии для полной эффективной амплитуды $\mathfrak{T}^{(2)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$:

$$\mathfrak{T}^{(2)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}=-\mathfrak{T}^{*(2)\,a\,a_2a_1}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1},\tag{3.33}$$

оно следует из требования вещественности эффективного гамильтониана (3.31). Подобное условие для вершинной функции $T^{(2)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}$ обсуждалось в разделе 3.1.

Перейдем к более детальному анализу структуры $\mathfrak{T}^{(2)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$. Для того чтобы избавиться от коэффициентной функции $\widetilde{V}^{*(2)\,a_2\,a_1\,a}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1}$ в первой строке (3.32), будем использовать соотношения (3.25). Если принять во внимание соотношение (3.27), то можно увидеть, что выражения во второй и третьей строках взаимно уничтожаются. Для коэффициентной функции $M^{a\,a_1a_2}_{\mathbf{k}_1}$ в четвертой строке используем соотношение, связывающее её с коэффициентной функцией $F^*_{\mathbf{k}_1}$ (3.23). В последнем вкладе в (3.32), принимая во внимание вид вершинной функции $\mathcal{V}^{a_1a_2\,a}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}}$, интегрируем по импульсу $\mathbf{k}$, учитываем цветовую декомпозицию (3.12) и согласно правилу (3.27) переходим от $F_{\mathbf{k}}$ к "физической" вершинной функции $\phi_{\mathbf{k}}$. В результате, вместо (3.32), в конечном итоге получаем

$$\mathfrak{T}^{(2)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}=-i\left[\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\right]\widetilde{V}^{(2)\,a_1a_2\,a}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}+\widetilde{T}^{(2)\,a_1a_2\,a}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2},\tag{3.34}$$

где эффективная амплитуда $\widetilde{T}^{(2)\,a_1a_2\,a}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ имеет следующую структуру:

$$\widetilde{T}^{(2)\,a_1a_2\,a}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}=T^{(2)\,a\,a_1a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}+\tag{3.35}$$

$$+f^{a_1a_2\,a}\left\{\frac{\phi^*_{\mathbf{k}_1}\phi_{\mathbf{k}_2}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}_2}+2i\left(\frac{\mathcal{V}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\phi^*_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}}{\omega^l_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)}-\frac{\mathcal{V}^*_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}\phi_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)}\right)\right\}.$$

Можно несколько упростить эту амплитуду, используя свойство сопряжения для трёхплазмонной вершины:

$$\mathcal{V}^*_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}=\mathcal{V}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2},$$

но этого делать не будем. Резонансный множитель для первого члена в правой части (3.34), который, фактически, является следствием законов сохранения импульса и энергии в изучаемом процессе рассеяния, имеет вид:

$$\omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2} - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \tag{3.36}$$

Если справедливо равенство

$$\omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2} - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = 0,$$

то вкладом этого члена в эффективный гамильтониан можно пренебречь.

Рисунок 3.2 представляет графическую интерпретацию различных членов в фигурных скобках в эффективной амплитуде (3.35). Черная точка обозначает HTL-рессумирование, а двойная линия – жёсткую частицу Два первых

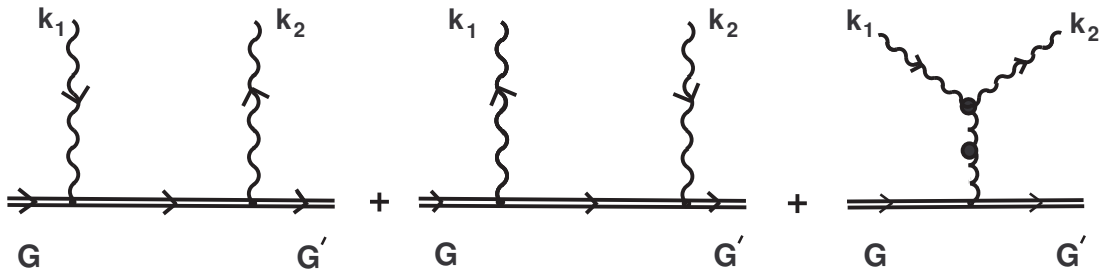


Рисунок 3.2 — Эффективная амплитуда $\widetilde{T}^{(2)\,a_1 a_2\, a}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ для процесса упругого рассеяния плазмона на жёсткой цветной частице

графика связаны с комптоновским рассеянием возбуждений мягких бозонов на жёсткой пробной частице (они связаны с первым членом в фигурных скобках выражения (3.35). Входящие и исходящие волновые линии на рис. 3.2 соответствуют нормальным переменным $c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}$ и $c^{*a_2}_{\mathbf{k}_2}$, а горизонтальная двойная линия между двумя вершинами взаимодействия – "пропагатору" жёсткой частицы

$$\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{k}_1} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}_1}. \tag{3.37}$$

Вершины взаимодействия отвечают физическим функциям $\phi^*_{\mathbf{k}_1}$ или $\phi_{\mathbf{k}_2}$. Последняя диаграмма соответствует взаимодействием жёсткой частицы с плазмонами посредством трёхплазмонной вершинной функции $\mathcal{V}^{\,a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ с промежуточным "виртуальным" колебанием. Этому колебанию в (3.35) соответствует множитель

$$\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)},$$

который, при условии равенства нулю резонансной разности частот (3.36) может быть записан несколько иначе:

$$\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} - \omega^l_{\mathbf{k}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_2}}.$$

Следуя работам Weldon [31] и Blaizot и Iancu [32], можно показать, что последнее выражение, с точностью до множителя, соответствует приближению эффективного глюонного пропагатора ${}^*\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}(k)$ (A.7)–(A.10) в плазмонном полюсе $\omega \sim \omega^l_{\mathbf{k}}$. Такое приближение было рассмотрено в [43, 45].

Первый член $T^{(2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ в правой части (3.35) соответствует прямому взаимодействию двух плазмонов с жёсткой частицей, как показано на рис. 3.3, но в

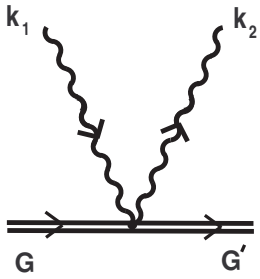


Рисунок 3.3 — Прямое взаимодействие двух плазмонов с жёсткой частицей

данной физической системе нет двойной контактной вершинной функции, которая описывала бы этот процесс,[4] поэтому нужно просто полагать эту вершину равной нулю:

$$T^{(2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} \equiv 0.$$

Принимая во внимание последнее обстоятельство и подставляя вершинную функцию $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{k}}$ (3.14) в (3.35), находим выражение для эффективной амплитуды $\widetilde{T}^{(2)\,a_1\,a_2\,a}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$, которое совпадает с аналогичным, найденным в рамках высокотемпературной квантовой хромодинамики в [52].

[4] Однако здесь можно вспомнить формализм второго порядка для фермионов [46–49], в рамках которого возникает вершина взаимодействия аналогичного типа. Неясно, можно ли такую вершину определить в рамках чисто классического формализма, без фермионов. Кроме того, в теории комплексного (псевдо)скалярного поля ϕ, взаимодействующего с электромагнитным полем, можно упомянуть двухфотонную вершинную функцию A_μ [50, 51] (скалярная КЭД). С минимальным обобщением на цветовые степени свободы (скалярная КХД), возможно, это даст нетривиальное представление для вершины $T^{(2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$.

3.4 Корреляционная функция четвёртого порядка

Перейдем к построению кинетического уравнения, которое описывает упругое рассеяние плазмона на жёсткой цветной частице. Под свободным гамильтонианом понимаем теперь новый гамильтониан $\mathcal{H}^{(0)}$, а под гамильтонианом взаимодействия – эффективный гамильтониан $\mathcal{H}^{(4)}_{gG\to gG}$, (3.30) и (3.31), соответственно. Уравнения движения для $c^{a'}_{\mathbf{k}'}$, $c^{*a}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{Q}^a$ определяются соответствующими уравнениями Гамильтона. Для мягких бозе-возбуждений и классического цветного заряда находим

$$\frac{\partial c^{a'}_{\mathbf{k}'}}{\partial t} = -i\left\{c^{a'}_{\mathbf{k}'}, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(4)}_{gG\to gG}\right\} = -i\left(\omega^l_{\mathbf{k}'} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}'\right)c^{a'}_{\mathbf{k}'} + \int d\mathbf{k}_1 \mathcal{T}^{a'a_1 d}_{\mathbf{k}',\mathbf{k}_1} c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\mathcal{Q}^d, \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial c^{*a}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -i\left\{c^{*a}_{\mathbf{k}}, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(4)}_{gG\to gG}\right\} = i\left(\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}\right)c^{*a}_{\mathbf{k}} - \int d\mathbf{k}_1 \mathcal{T}^{*a a_1 d}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}\mathcal{Q}^d \tag{3.39}$$

и

$$\frac{d\mathcal{Q}^d}{dt} = \left\{\mathcal{Q}^d, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(4)}_{gG\to gG}\right\} = \frac{\partial\left(\mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(4)}_{gG\to gG}\right)}{\partial\mathcal{Q}^{d'}} f^{dd'e}\mathcal{Q}^e = \tag{3.40}$$

$$= i f^{dd'e}\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2\, \mathcal{T}^{a_1 a_2 d'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1} c^{a_2}_{\mathbf{k}_2}\mathcal{Q}^e.$$

Здесь и в дальнейшем, для удобства записи символ “(2)” в полной эффективной амплитуде $\mathcal{T}^{(2)a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ отсутствует. Если ансамбль взаимодействующих бозе-возбуждений с малым уровнем нелинейности имеет случайные фазы, то вводя бозонный коррелятор вида:

$$\left\langle c^{*a}_{\mathbf{k}} c^{a'}_{\mathbf{k}'}\right\rangle = \mathcal{N}^{aa'}_{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \tag{3.41}$$

его можно описать статистически. Здесь $\mathcal{N}^{aa'}_{\mathbf{k}}$ обозначает плотность числа плазмонов.

Принимая во внимание уравнения Гамильтона (3.38), (3.39) и определение (3.41), можно получить кинетическое уравнение для $\mathcal{N}^{aa'}_{\mathbf{k}}$, следуя рассуждениям первой и второй глав:

$$\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\frac{\partial\mathcal{N}^{aa'}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \int d\mathbf{k}_1\left\{\mathcal{T}^{*a a_1 d}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\left\langle c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1} c^{a'}_{\mathbf{k}'}\mathcal{Q}^d\right\rangle + \mathcal{T}^{a'a_1 d}_{\mathbf{k}',\mathbf{k}_1}\left\langle c^{*a}_{\mathbf{k}} c^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\mathcal{Q}^d\right\rangle\right\}. \tag{3.42}$$

Далее, дифференцируя коррелятор четвертого порядка $\langle c^{*a}_{\mathbf{k}} c^{a_1}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{Q}^d \rangle$ по t, используя (3.38) – (3.40), приходим к уравнению для корреляторов четвертого и шестого порядков по переменным $c^{*a}_{\mathbf{k}}$, $c^{a}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{Q}^d$:

$$\frac{\partial \langle c^{*a}_{\mathbf{k}} c^{a_1}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{Q}^d \rangle}{\partial t} = i \big[\omega^l_{\mathbf{k}} - \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \big] \langle c^{*a}_{\mathbf{k}} c^{a_1}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{Q}^d \rangle + \tag{3.43}$$

$$+ \int d\mathbf{k}'_1 \Big\{ \mathcal{T}^{*\,a\,a'_1\,e}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}'_1} \langle c^{*a'_1}_{\mathbf{k}'_1} c^{a_1}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{Q}^d \mathcal{Q}^e \rangle + \mathcal{T}^{a_1\,a'_1\,e}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}'_1} \langle c^{*a}_{\mathbf{k}} c^{a'_1}_{\mathbf{k}'_1} \mathcal{Q}^d \mathcal{Q}^e \rangle \Big\} +$$

$$+ i f^{dd'e} \int d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}'_2 \, \mathcal{T}^{a'_1\,a'_2\,d'}_{\mathbf{k}'_1,\,\mathbf{k}'_2} \langle c^{*a}_{\mathbf{k}} c^{a_1}_{\mathbf{k}_1} c^{*a'_1}_{\mathbf{k}'_1} c^{a'_2}_{\mathbf{k}'_2} \mathcal{Q}^e \rangle.$$

С целью получения самосогласованной системы уравнений, выразим корреляционные функции шестого порядка в терминах парных для $c^{*a}_{\mathbf{k}}$ и $c^{a}_{\mathbf{k}}$ и усреднения $\langle \mathcal{Q}^d \rangle$, сохраняя при этом слагаемые, дающие требуемый вклад в искомое кинетическое уравнение:

$$\begin{aligned}
&\langle c^{*a'_1}_{\mathbf{k}'_1} c^{a_1}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{Q}^d \mathcal{Q}^e \rangle \simeq \delta(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1) \mathcal{N}^{a'_1 a_1}_{\mathbf{k}_1} \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle, \\
&\langle c^{*a}_{\mathbf{k}} c^{a'_1}_{\mathbf{k}'_1} \mathcal{Q}^d \mathcal{Q}^e \rangle \simeq \delta(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}) \mathcal{N}^{a a'_1}_{\mathbf{k}} \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle, \\
&\langle c^{*a}_{\mathbf{k}} c^{a_1}_{\mathbf{k}_1} c^{*a'_1}_{\mathbf{k}'_1} c^{a'_2}_{\mathbf{k}'_2} \mathcal{Q}^e \rangle \simeq \delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1) \mathcal{N}^{a a'_2}_{\mathbf{k}} \mathcal{N}^{a'_1 a_1}_{\mathbf{k}_1} \langle \mathcal{Q}^e \rangle.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Для амплитуды $\mathcal{T}^{a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ полагаем

$$\mathcal{T}^{a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = f^{a\,a_1\,a_2} \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}, \tag{3.45}$$

а для функции $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$, согласно (3.33), потребуем выполнение условия

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = \mathcal{T}^*_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1}. \tag{3.46}$$

Подстановка (3.44) и (3.45) в правую часть (3.43) и учёт условия симметрии (3.46) для амплитуды рассеяния приводит, вместо (3.43), к уравнению для коррелятора четвертого порядка

$$\frac{\partial \langle c^{*a}_{\mathbf{k}} c^{a_1}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{Q}^d \rangle}{\partial t} = i \big[\omega^l_{\mathbf{k}} - \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \big] \langle c^{*a}_{\mathbf{k}} c^{a_1}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{Q}^d \rangle + \tag{3.47}$$

$$+ i \mathcal{T}^*_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} \big[\big(T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} \big)^{a a_1} - \big(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e \big)^{a a_1} \big] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle + \mathcal{T}^*_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} \big(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} \big)^{a a_1} \langle \mathcal{Q}^e \rangle f^{dd'e}.$$

Здесь, напомним, $(T^a)^{bc} \equiv -i f^{abc}$ – генераторы в присоединенном представлении алгебры Ли. Плотности числа плазмонов записана в матричной форме: $\mathcal{N}_{\mathbf{k}} = \big(\mathcal{N}^{a a_1}_{\mathbf{k}} \big)$.

3.5 Кинетическое уравнение для мягких глюонных возбуждений

Вообще говоря, система уравнений (3.42) и (3.47), дополненная уравнением для усредненного цветного заряда (см. раздел 3.8), позволяет определить изменение плотности числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$ по времени. Однако, можно несколько упростить задачу, отбросив в уравнении (3.47) член, содержащий производную по времени в сравнении с членом, в который входит резонансный фактор $\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}$ (3.36). Вместо (3.47) тогда будем иметь

$$\left\langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \right\rangle \simeq \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\, \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa_1} \left\langle \mathcal{Q}^d \right\rangle - \tag{3.48}$$

$$- \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} + i0}\, \mathcal{T}^*_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} \left[\left(T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}\right)^{aa_1} - \left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e\right)^{aa_1} \right] \left\langle \mathcal{Q}^d \right\rangle \left\langle \mathcal{Q}^e \right\rangle -$$

$$- \frac{i}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} + i0}\, \mathcal{T}^*_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} \left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}\right)^{aa_1} \left\langle \mathcal{Q}^e \right\rangle f^{dd'e}.$$

Здесь первое слагаемое в правой части, обозначающее отсутствие взаимодействия между мягкими глюонными возбуждениями и жёсткой цветной частицей, представляет собой решение однородного уравнения для коррелятора четвертого порядка $\left\langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \right\rangle$. Остальные члены соответствуют отклонению трёхточечной функции от полностью некоррелированного состояния изучаемой системы при учете взаимодействия.

Подставляя первый член из (3.48) в уравнение (3.42) для плотности числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$, в результате получим

$$-i \left\{ \mathcal{T}_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} \left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^d\right)^{aa'} - \mathcal{T}^*_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \left(T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}'}\right)^{aa'} \right\} \left\langle \mathcal{Q}^d \right\rangle. \tag{3.49}$$

Далее подставим второе и третье слагаемые из (3.48) в правую часть уравнения (3.42). Простые алгебраические преобразования с учетом условия симметрии (3.46), приводят к

$$-\int d\mathbf{k}_1 \mathcal{T}^*_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\, \mathcal{T}_{\mathbf{k}',\mathbf{k}_1} \times \tag{3.50}$$

$$\Big\{\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}+i0}\Big(\big(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^{d'}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^{d}\big)^{aa'}f^{dd'e}\big\langle\mathcal{Q}^{e}\big\rangle+i\Big[\big(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^{e}T^{d}\big)^{aa'}-\big(T^{e}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^{d}\big)^{aa'}\Big]\big\langle\mathcal{Q}^{d}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}^{e}\big\rangle\Big)-$$

$$-\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}',\mathbf{k}_1}-i0}\Big(\big(T^{d'}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^{d}\mathcal{N}_{\mathbf{k}'}\big)^{aa'}f^{dd'e}\big\langle\mathcal{Q}^{e}\big\rangle+i\Big[\big(T^{d}T^{e}\mathcal{N}_{\mathbf{k}'}\big)^{aa'}-\big(T^{d}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^{e}\big)^{aa'}\Big]\big\langle\mathcal{Q}^{d}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}^{e}\big\rangle\Big)\Big\}.$$

Во втором члене в фигурных скобках, в силу определения (3.36), приняли во внимание, что

$$\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'}+i0}=-\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}',\mathbf{k}_1}-i0}.$$

Учитывая полученные выражения (3.42), (3.49) и (3.50) и полагая $\mathbf{k}=\mathbf{k}'$, вместо (3.42) приходим к следующему кинетическому уравнению для плотности числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{\,aa'}$:

$$\frac{\partial\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{\,aa'}}{\partial t}=-i\Big\{\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}\big(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^{e}\big)^{aa'}-\mathcal{T}^{*}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}\big(T^{e}\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\big)^{aa'}\Big\}\big\langle\mathcal{Q}^{e}\big\rangle-\int d\mathbf{k}_1\,\big|\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\big|^{2}\times \quad (3.51)$$

$$\times\Big\{\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}+i0}\Big(\big(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^{d'}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^{d}\big)^{aa'}f^{dd'e}\big\langle\mathcal{Q}^{e}\big\rangle+i\Big[\big(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^{e}T^{d}\big)^{aa'}-\big(T^{e}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^{d}\big)^{aa'}\Big]\big\langle\mathcal{Q}^{d}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}^{e}\big\rangle\Big)-$$

$$-\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}-i0}\Big(\big(T^{d'}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^{d}\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\big)^{aa'}f^{dd'e}\big\langle\mathcal{Q}^{e}\big\rangle+i\Big[\big(T^{e}T^{d}\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\big)^{aa'}-\big(T^{e}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^{d}\big)^{aa'}\Big]\big\langle\mathcal{Q}^{d}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}^{e}\big\rangle\Big)\Big\}.$$

В отличие от первой и второй глав ([43, 45]), здесь нужная нам разность в результирующем выражении не собирается:

$$\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}+i0}\;-\;\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}-i0}\;\big(\equiv-2i\pi\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1})\big). \quad (3.52)$$

Это объясняется различным расположением цветовых матриц с разными волновыми векторами: $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}=\big(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{\,aa'}\big)$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}=(\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}^{\,aa'})$.

3.6 Первый момент относительно цвета кинетического уравнения (3.51)

Выпишем цветовое разложение для матричной функции $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{\,aa'}$:

$$\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{\,aa'}=\delta^{\,aa'}N^{l}_{\mathbf{k}}+\big(T^{c}\big)^{aa'}\big\langle\mathcal{Q}^{c}\big\rangle W^{l}_{\mathbf{k}}. \quad (3.53)$$

Для определения уравнения на бесцветную часть плотности числа плазмонов $N^{l}_{\mathbf{k}}$, берем след левой и правой частей уравнения (3.51) относительно цветных индексов, полагая $a=a'$ и выполняя суммирование по индексу a. С учетом

(3.53) и формулы для следов произведения двух и трех цветных матриц в присоединенном представлении (E.1) и (E.2) (см. Приложение E), определим следы членов в правой части (3.51), которые линейны по $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}$:

$$\operatorname{tr}\mathcal{N}_{\mathbf{k}} = (N_c^2-1)N_{\mathbf{k}}^l, \qquad \operatorname{tr}\big(T^e\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\big) = N_c\big\langle\mathcal{Q}^e\big\rangle W_{\mathbf{k}}^l, \tag{3.54}$$

$$\operatorname{tr}\big[\big(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^eT^d\big)-\big(T^e\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^d\big)\big] = \delta^{ed}N_c\big(N_{\mathbf{k}}^l-N_{\mathbf{k}_1}^l\big)-\frac{1}{2}\,N_c\big(T^c\big)^{ed}\big(W_{\mathbf{k}}^l+W_{\mathbf{k}_1}^l\big)\big\langle\mathcal{Q}^c\big\rangle,$$

$$\operatorname{tr}\big[\big(T^eT^d\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\big)-\big(T^e\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^d\big)\big] = \delta^{ed}N_c\big(N_{\mathbf{k}}^l-N_{\mathbf{k}_1}^l\big)-\frac{1}{2}\,N_c\big(T^c\big)^{ed}\big(W_{\mathbf{k}}^l+W_{\mathbf{k}_1}^l\big)\big\langle\mathcal{Q}^c\big\rangle.$$

Свертка двух последних выражений с $\big\langle\mathcal{Q}^d\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}^e\big\rangle$ приводит к тому, что члены вида $W_{\mathbf{k}}^l+W_{\mathbf{k}_1}^l$ становятся равными нулю.

Более сложной структурой обладают следы квадратичных слагаемых в $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}$ в (3.51), для примера

$$\operatorname{tr}\big(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^{d'}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^d\big) = N_c\delta^{d'd}N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_1}+ \tag{3.55}$$

$$\frac{i}{2}\,N_cf^{d'dc}\big\langle\mathcal{Q}^c\big\rangle W_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_1}-\frac{i}{2}\,N_cf^{d'dc}\big\langle\mathcal{Q}^c\big\rangle W_{\mathbf{k}_1}N_{\mathbf{k}}+\operatorname{tr}\big(T^cT^{d'}T^fT^d\big)\big\langle\mathcal{Q}^c\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}^f\big\rangle W_{\mathbf{k}}W_{\mathbf{k}_1}.$$

Свертка последнего выражения с антисимметричными структурными константами $f^{dd'e}$, как это имеет место в (3.51), приводит к обращению в ноль первого члена в правой части (3.55). Последний член также будет равен нулю, если учесть свойство симметрии (E.6) для следа произведения четырех генераторов. Окончательно получим

$$f^{dd'e}\operatorname{tr}\big(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^{d'}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^d\big) = -\frac{i}{2}\,N_c^2\big\langle\mathcal{Q}^e\big\rangle\big(W_{\mathbf{k}}^lN_{\mathbf{k}_1}^l-N_{\mathbf{k}}^lW_{\mathbf{k}_1}^l\big).$$

Принимая во внимание выражения для цветных следов, можем теперь определить первый момент относительно цвета для (3.51)

$$d_A\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = 2N_c\,\mathfrak{q}_2(t)\big(\operatorname{Im}\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}\big)W_{\mathbf{k}}^l- \tag{3.56}$$

$$-N_c\mathfrak{q}_2(t)\int d\mathbf{k}_1\big|\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\big|^2\Big\{\big(N_{\mathbf{k}}^l-N_{\mathbf{k}_1}^l\big)-\frac{1}{2}\,N_c\big(W_{\mathbf{k}}^lN_{\mathbf{k}_1}^l-N_{\mathbf{k}}^lW_{\mathbf{k}_1}^l\big)\Big\}\times$$

$$\times\,(2\pi)\,\delta(\omega_{\mathbf{k}}^l-\omega_{\mathbf{k}_1}^l-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)).$$

Здесь была использована формула Сохоцкого (3.52) и введено обозначение для бесцветной квадратичной комбинации усредненного цветного заряда

$$\mathfrak{q}_2(t)\equiv\big\langle\mathcal{Q}^e\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}^e\big\rangle. \tag{3.57}$$

Множитель $d_A\equiv N_c^2-1$ в левой части (3.56) представляет собой инвариант для группы $SU(N_c)$.

3.7 Второй момент относительно цвета кинетического уравнения (3.51)

Обратимся теперь к матричному кинетическому уравнению (3.51). Свертка левой и правой части этого уравнения с цветной матрицей $(T^s)^{a'a}$ приводит к

$$\frac{\partial \operatorname{tr}\left(T^s\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\right)}{\partial t} = -i\left\{\operatorname{tr}\left(T^eT^s\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\right)\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}} - \operatorname{tr}\left(T^sT^e\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\right)\mathcal{T}^*_{\mathbf{k},\mathbf{k}}\right\}\left\langle\mathcal{Q}^e\right\rangle - \tag{3.58}$$

$$-\int d\mathbf{k}_1\left|\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\left\langle\mathcal{Q}^e\right\rangle\times$$

$$\left\{\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}+i0}\Big(\operatorname{tr}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^{d'}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^dT^s\right)f^{dd'e}+i\Big[\operatorname{tr}\left(T^s\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^eT^d\right)-\operatorname{tr}\left(T^sT^e\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^d\right)\Big]\left\langle\mathcal{Q}^d\right\rangle-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}-i0}\Big(\operatorname{tr}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^d\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^sT^{d'}\right)f^{dd'e}+i\Big[\operatorname{tr}\left(T^sT^eT^d\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\right)-\operatorname{tr}\left(T^sT^e\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^d\right)\Big]\left\langle\mathcal{Q}^d\right\rangle\Big)\right\}.$$

Здесь в левой части, учетом разложения (3.53), имеем

$$\operatorname{tr}\left(T^s\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\right) = N_c\left\langle\mathcal{Q}^s\right\rangle W^l_{\mathbf{k}}, \tag{3.59}$$

а для следов в первом члене в правой части (3.58) получим

$$\operatorname{tr}\left(T^eT^s\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\right) = \delta^{es}N_cN^l_{\mathbf{k}} + \frac{i}{2}\,N_cf^{esc}\left\langle\mathcal{Q}^c\right\rangle W^l_{\mathbf{k}},$$

$$\operatorname{tr}\left(T^sT^e\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\right) = \delta^{es}N_cN^l_{\mathbf{k}} - \frac{i}{2}\,N_cf^{esc}\left\langle\mathcal{Q}^c\right\rangle W^l_{\mathbf{k}}.$$

Свёртка мнимых частей последних выражений с цветным зарядом $\left\langle\mathcal{Q}^e\right\rangle$ обращается в ноль, и в итоге приходим к следующему виду первого члена в правой части (3.58):

$$-i\left\{\operatorname{tr}\left(T^eT^s\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\right)\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}} - \operatorname{tr}\left(T^sT^e\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\right)\mathcal{T}^*_{\mathbf{k},\mathbf{k}}\right\}\left\langle\mathcal{Q}^e\right\rangle = 2N_c\left(\operatorname{Im}\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}\right)N^l_{\mathbf{k}}\left\langle\mathcal{Q}^s\right\rangle. \tag{3.60}$$

Рассмотрим далее в (3.58) следы квадратичных членов по $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}$. Учитывая декомпозицию (3.53), легко находим первый след

$$\operatorname{tr}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^{d'}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^dT^s\right) = \operatorname{tr}\left(T^{d'}T^dT^s\right)N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_1} + \operatorname{tr}\left(T^cT^{d'}T^dT^s\right)\left\langle\mathcal{Q}^c\right\rangle W_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_1} \tag{3.61}$$

$$+\operatorname{tr}\left(T^{d'}T^cT^dT^s\right)\left\langle\mathcal{Q}^c\right\rangle N_{\mathbf{k}}W_{\mathbf{k}_1} + \operatorname{tr}\left(T^dT^sT^cT^{d'}T^f\right)\left\langle\mathcal{Q}^c\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}^f\right\rangle W_{\mathbf{k}}W_{\mathbf{k}_1}.$$

Свертка выражения (3.61) с $f^{dd'e}\langle\mathcal{Q}^e\rangle$, как и в случае (3.58), в силу формулы (E.2), для первого члена в правой части (3.61) даёт

$$\mathrm{tr}\big(T^{d'}T^dT^s\big)N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_1}f^{dd'e}\langle\mathcal{Q}^e\rangle=-\frac{i}{2}\,N_c^2\langle\mathcal{Q}^s\rangle N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_1}.$$

Третий член в (3.61) равен нулю в силу свойства симметрии (E.6). Для следа во втором члене в (3.61) имеем

$$\mathrm{tr}\big(T^cT^{d'}T^dT^s\big)f^{dd'e}\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big(T^c\big[T^{d'},T^d\big]T^s\big)f^{dd'e}=\frac{i}{2}\,\mathrm{tr}\big(T^cT^\lambda T^s\big)f^{d'd\lambda}f^{dd'e}=-\left(\frac{i}{2}\right)^2N_cf^{ces}.$$

Его свертка с $\langle\mathcal{Q}^e\rangle\langle\mathcal{Q}^c\rangle$ даёт ноль. Так, вместо (3.61), получим

$$\mathrm{tr}\big(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^{d'}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^dT^s\big)f^{dd'e}\langle\mathcal{Q}^e\rangle= \tag{3.62}$$

$$=-\frac{i}{2}\,N_c^2\langle\mathcal{Q}^s\rangle N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_1}+\,\mathrm{tr}\big(T^dT^sT^cT^{d'}T^f\big)f^{dd'e}\langle\mathcal{Q}^e\rangle\langle\mathcal{Q}^c\rangle\langle\mathcal{Q}^f\rangle W_{\mathbf{k}}W_{\mathbf{k}_1}.$$

Рассмотрим оставшийся след пятого порядка. Ввиду того, что здесь присутствует симметричный относительно индексов c и f член $\langle\mathcal{Q}^c\rangle\langle\mathcal{Q}^f\rangle$, здесь удобно использовать соотношение (E.8) в Приложении E. Окончательно имеем

$$\mathrm{tr}\big(T^dT^sT^cT^{d'}T^f\big)f^{dd'e}\langle\mathcal{Q}^e\rangle\langle\mathcal{Q}^c\rangle\langle\mathcal{Q}^f\rangle=$$

$$=-\frac{i}{2}\,f^{sdb}\,\mathrm{tr}\big(T^bT^fT^{d'}T^c\big)f^{dd'e}\langle\mathcal{Q}^e\rangle\langle\mathcal{Q}^c\rangle\langle\mathcal{Q}^f\rangle.$$

Для следа четвертого порядка применим формулу (E.3). После ряда алгебраических преобразований, правую часть предыдущего выражения можно привести к виду:

$$-\frac{i}{2}\,f^{sdb}\mathrm{tr}\big(T^bT^fT^{d'}T^c\big)f^{dd'e}\langle\mathcal{Q}^e\rangle\langle\mathcal{Q}^c\rangle\langle\mathcal{Q}^f\rangle= \tag{3.63}$$

$$=-\frac{i}{2}\left\{\frac{1}{2}\,N_c\delta^{fc}\delta^{se}-\frac{1}{4}\,N_c\Big[\mathrm{tr}\big(T^eT^sT^cT^f\big)-\mathrm{tr}\big(T^eT^sD^cD^f\big)\Big]\right\}\langle\mathcal{Q}^e\rangle\langle\mathcal{Q}^c\rangle\langle\mathcal{Q}^f\rangle$$

$$-\frac{i}{4}\,N_c\left\{\delta^{fc}\delta^{se}-\frac{1}{2}\left(\delta^{ef}\delta^{sc}+\delta^{ec}\delta^{fs}\right)\right\}\langle\mathcal{Q}^e\rangle\langle\mathcal{Q}^c\rangle\langle\mathcal{Q}^f\rangle=0.$$

Здесь были использованы соотношения (E.3) и (E.4). Коэффициент перед произведением $W_{\mathbf{k}}W_{\mathbf{k}_1}$ в правой части (3.62) тогда обратится в ноль, и, следовательно этот вклад выпадает из рассмотрения.

Аналогичный результат получим и для следа $\mathrm{tr}\big(\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^d\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^sT^{d'}\big)$ в (3.58).

Таким образом, с учетом формулы Сохоцкого (3.52), для квадратичных по $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}$ членов в (3.58) получим

$$\left\{\frac{\mathrm{tr}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^{d'}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^{d}T^{s}\right)}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}+i0}-\frac{\mathrm{tr}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^{d}\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^{s}T^{d'}\right)}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}-i0}\right\}f^{dd'e}\left\langle\mathcal{Q}^{e}\right\rangle= \tag{3.64}$$

$$=\frac{1}{2}\,iN_c^2N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_1}\left\langle\mathcal{Q}^{s}\right\rangle(2\pi)\,\delta(\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)).$$

Для первой разности следов в квадратных скобках в (3.58), которая являются линейной по $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}$, с учетом (3.53) и формул (E.2) и (E.3), приходим к выражению

$$\Big[\mathrm{tr}\left(T^{s}\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^{e}T^{d}\right)-\mathrm{tr}\left(T^{s}T^{e}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^{d}\right)\Big]\left\langle\mathcal{Q}^{d}\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}^{e}\right\rangle=$$

$$=\mathrm{tr}\left(T^{s}T^{e}T^{d}\right)\left(N^l_{\mathbf{k}}-N^l_{\mathbf{k}_1}\right)\left\langle\mathcal{Q}^{d}\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}^{e}\right\rangle+$$

$$+\mathrm{tr}\left(T^{e}T^{s}T^{c}T^{f}\right)\left(W^l_{\mathbf{k}}-W^l_{\mathbf{k}_1}\right)\left\langle\mathcal{Q}^{c}\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}^{d}\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}^{e}\right\rangle=$$

$$=\left\{2\delta^{sd}\delta^{ce}+\frac{1}{4}\,N_c d^{sd\lambda}d^{ce\lambda}\right\}\left(W^l_{\mathbf{k}}-W^l_{\mathbf{k}_1}\right)\left\langle\mathcal{Q}^{c}\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}^{d}\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}^{e}\right\rangle.$$

Член вида $N^l_{\mathbf{k}}-N^l_{\mathbf{k}_1}$ обращается в ноль. В коэффициенте перед ненулевым членом вида $W^l_{\mathbf{k}}-W^l_{\mathbf{k}_1}$ присутствует свертка двух симметричных структурных констант. В общем случае для произвольного значения N_c её нельзя свести к представлению, использующему δ-символ Кронекера.

Вместо (3.58), можно также найти кинетическое уравнение для второй "цветной" части плотности числа плазмонов мягких глюонных возбуждений плазмы $W^l_{\mathbf{k}}$, если учесть полученное выше выражение и выражения (3.59), (3.60) и (3.64):

$$N_c\frac{\partial\left(\left\langle\mathcal{Q}^{s}\right\rangle W^l_{\mathbf{k}}\right)}{\partial t}=2N_c\left(\mathrm{Im}\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}\right)N^l_{\mathbf{k}}\left\langle\mathcal{Q}^{s}\right\rangle- \tag{3.65}$$

$$-\int d\mathbf{k}_1\left|\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\left\{2\delta^{sd}\delta^{ce}+\frac{1}{4}\,N_c d^{sd\lambda}d^{ce\lambda}\right\}\left(W^l_{\mathbf{k}}-W^l_{\mathbf{k}_1}\right)\left\langle\mathcal{Q}^{c}\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}^{d}\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}^{e}\right\rangle\times$$

$$\times(2\pi)\delta(\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1))+$$

$$+\frac{1}{2}\,N_c^2\int d\mathbf{k}_1\left|\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}\left\langle\mathcal{Q}^{s}\right\rangle(2\pi)\,\delta(\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)).$$

Упрощение свертки двух симметричных структурных констант в (3.65) можно провести двумя способами. Первый "тривиальный" – связан с размерностью $N_c=2$, когда $d^{abc}\equiv 0$. Второй – соответствует $N_c=3$ и обусловлен наличием хорошо известного случайного вырождения, представленного соотношением (E.9) в Приложении E. Более подробно это будет обсуждаться в разделе 3.9.

3.8 Уравнение для среднего значения цветного заряда $\mathcal{Q}^d$

В этом разделе рассмотрим вывод уравнения движения для среднего значения цветного заряда $\mathcal{Q}^d$. Первый шаг заключается в усреднении уравнения (3.40). Таким образом, получаем

$$\frac{d\langle \mathcal{Q}^d \rangle}{dt} = i f^{dd'e} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \, \mathcal{T}^{a_1 a_2 d'}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \big\langle c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1} c^{a_2}_{\mathbf{k}_2} \mathcal{Q}^e \big\rangle, \tag{3.66}$$

где корреляционная функция четвертого порядка в правой части, в силу (3.48), имеет следующий вид:

$$\big\langle c^{*a_1}_{\mathbf{k}_1} c^{a_2}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{Q}^e \big\rangle \simeq \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathcal{N}^{a_1 a_2}_{\mathbf{k}} \big\langle \mathcal{Q}^e \big\rangle + \tag{3.67}$$

$$+ \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} + i0} \mathcal{T}^*_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} \big[\big(\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^{e'}\big)^{a_1 a_2} - \big(T^{e'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_2}\big)^{a_1 a_2} \big] \big\langle \mathcal{Q}^e \big\rangle \big\langle \mathcal{Q}^{e'} \big\rangle -$$

$$- \frac{i}{\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} + i0} \mathcal{T}^*_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} \big(\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^{d''} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_2}\big)^{a_1 a_2} \big\langle \mathcal{Q}^{e'} \big\rangle f^{ed''e'}.$$

Подставим первый член корреляционной функции в правую часть (3.66). Затем, принимая во внимание цветовую факторизацию общей эффективной амплитуды (3.45), находим

$$i f^{dd'e} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} \operatorname{tr}\big(T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}\big) \big\langle \mathcal{Q}^e \big\rangle.$$

В силу равенства $\operatorname{tr}\big(T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}\big) = N_c W^l_{\mathbf{k}_1} \big\langle \mathcal{Q}^{d'} \big\rangle$, приведенное выше выражение равно нулю. Далее подставляем второй член из корреляционной функции (3.67) в (3.66):

$$f^{dd'e} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \, |\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}|^2 \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} + i0} \big[\operatorname{tr}\big(T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^{e'}\big) - \operatorname{tr}\big(T^{d'} T^{e'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_2}\big) \big] \big\langle \mathcal{Q}^e \big\rangle \big\langle \mathcal{Q}^{e'} \big\rangle.$$

Используя соответствующую формулу для следов в (3.54), для последнего выражения находим

$$f^{dd'e} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \, |\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}|^2 \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} + i0} \times$$

$$\times \big[\delta^{d'e'} N_c \big(N^l_{\mathbf{k}_1} - N^l_{\mathbf{k}_2}\big) + \frac{1}{2} N_c \big(T^c\big)^{d'e'} \big(W^l_{\mathbf{k}_2} + W^l_{\mathbf{k}_1}\big) \big\langle \mathcal{Q}^c \big\rangle \big] \big\langle \mathcal{Q}^e \big\rangle \big\langle \mathcal{Q}^{e'} \big\rangle.$$

В силу антисимметричности структурных констант f^{abc}, этот вклад также обращается в ноль.

В качестве последнего шага подставляем третий член корреляционной функции (3.67) в правую часть (3.66). В результате получаем

$$-if^{dd'e}f^{ed''e'}\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2\,|\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}|^2\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}+i0}\,\mathrm{tr}\big(T^{d'}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^{d''}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_2}\big)\big\langle\,\mathcal{Q}^{e'}\,\big\rangle.$$

Согласно формуле (3.55) для следа в подинтегральном выражении имеем

$$\mathrm{tr}\big(\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}T^{d'}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_2}T^{d''}\big)=N_c\delta^{d'd''}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2}+\frac{i}{2}\,N_cf^{d'd''c}\big\langle\,\mathcal{Q}^c\,\big\rangle W^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2}- \tag{3.68}$$

$$-\frac{i}{2}\,N_cf^{d'd''c}\big\langle\,\mathcal{Q}^c\,\big\rangle W^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_1}+\mathrm{tr}\big(T^cT^{d'}T^fT^{d''}\big)\big\langle\,\mathcal{Q}^c\,\big\rangle\big\langle\,\mathcal{Q}^f\,\big\rangle W^l_{\mathbf{k}_1}W^l_{\mathbf{k}_2}.$$

Для первого члена находим цветовой коэффициент в виде:

$$f^{dd'e}f^{ed''e'}\delta^{d'd''}\big\langle\,\mathcal{Q}^{e'}\,\big\rangle=-N_c\delta^{de'}\big\langle\,\mathcal{Q}^{e'}\,\big\rangle=-N_c\big\langle\,\mathcal{Q}^{d}\,\big\rangle.$$

Цветовой множитель для второго члена в (3.68) равен нулю в силу

$$f^{dd'e}f^{ed''e'}f^{d'd''c}\big\langle\,\mathcal{Q}^{e'}\,\big\rangle\big\langle\,\mathcal{Q}^{c}\,\big\rangle=i\,\mathrm{tr}\big(T^dT^{e'}T^c\big)\big\langle\,\mathcal{Q}^{e'}\,\big\rangle\big\langle\,\mathcal{Q}^{c}\,\big\rangle=$$

$$=-\frac{1}{2}\,N_cf^{de'c}\big\langle\,\mathcal{Q}^{e'}\,\big\rangle\big\langle\,\mathcal{Q}^{c}\,\big\rangle\equiv 0.$$

Таким образом, вклад с произведением $W_{\mathbf{k}_1}N_{\mathbf{k}_2}$ в (3.68) выпадает из рассмотрения. В силу рассуждений, которые полностью аналогичны предыдущим, вклад с произведением $W_{\mathbf{k}_2}N_{\mathbf{k}_1}$ также обращается в ноль. Наконец, цветовой коэффициент для последнего члена (3.68) имеет вид

$$f^{dd'e}f^{ed''e'}\mathrm{tr}\big(T^cT^{d'}T^fT^{d''}\big)\big\langle\,\mathcal{Q}^{e'}\,\big\rangle\big\langle\,\mathcal{Q}^{c}\,\big\rangle\big\langle\,\mathcal{Q}^{f}\,\big\rangle.$$

Этот вклад с точностью до множителя и переопределения цветных индексов совпадает с выражением (3.63) из предыдущего раздела, где было показано, что он равен нулю. Следовательно, вклад, пропорциональный $W_{\mathbf{k}_1}W_{\mathbf{k}_2}$, также исключается из рассмотрения, и таким образом из всего выражения сохраняется только первый член в (3.68). В результате, для уравнения (3.66) имеем

$$\frac{d\langle\mathcal{Q}^d\rangle}{dt}=iN_c^2\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2\,|\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}|^2\,\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}+i0}\,N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2}\big\langle\,\mathcal{Q}^{d}\,\big\rangle. \tag{3.69}$$

На заключительном шаге используем формулу Сохоцкого:

$$\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}+i0}=\mathcal{P}\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}}-i\pi\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}),$$

где символ $\mathcal{P}$ обозначает главное значение. Квадрат модуля амплитуды $|\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}|^2$, в силу свойства (3.46), является четной функцией по отношению к перестановке $\mathbf{k}_1 \rightleftarrows \mathbf{k}_2$, в то время как функция $\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$, в силу определения (3.36), является нечетной функцией по отношению к той же перестановке, то есть $\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} = -\Delta\omega_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1}$. Следовательно, в подынтегральном выражении (3.69) сохраняется только второй член в представлении Сохоцкого, и, таким образом, в конечном итоге вместо, (3.69), можно записать

$$\frac{d\langle \mathcal{Q}^d \rangle}{dt} = N_c^2 \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \, |\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}|^2 \pi \delta(\omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2} - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)) N^l_{\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}_2} \langle \mathcal{Q}^d \rangle. \quad (3.70)$$

Вводя обозначение

$$A(t) \equiv N_c^2 \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left|\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}\right|^2 N^l_{\mathbf{k}_1} N^l_{\mathbf{k}_2} (2\pi) \delta(\omega^l_{\mathbf{k}} - \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)), \quad (3.71)$$

перепишем уравнение (3.70) в более наглядной форме

$$\frac{d\langle \mathcal{Q}^d \rangle}{dt} = \frac{1}{2} A(t) \langle \mathcal{Q}^d \rangle, \quad \langle \mathcal{Q}^d \rangle|_{t=t_0} = \mathcal{Q}^d_0, \quad (3.72)$$

где $\mathcal{Q}^d_0$ – неслучайный вектор во внутреннем цветовом пространстве, являющийся фиксированным, которым обладала высокоэнергетическая цветозаряженная частица в начальный момент времени t_0. Нас интересует зависимость бесцветной квадратичной комбинации $\mathfrak{q}_2(t)$ (3.57) от времени, а также зависимость от времени бесцветной комбинации четвёртого порядка

$$\mathfrak{q}_4(t) = \mathfrak{q}^a_2(t) \mathfrak{q}^a_2(t), \quad (3.73)$$

где

$$\mathfrak{q}^a_2(t) \equiv d^{abc} \langle \mathcal{Q}^b \rangle \langle \mathcal{Q}^c \rangle.$$

Из (3.72) находим искомую временную зависимость этих комбинаций в виде нелинейных функционалов от бесцветной части $N^l_{\mathbf{k}}$ плотности числа плазмонов:

$$\mathfrak{q}_2(t) = \mathfrak{q}_2(t_0) \exp\left\{\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau\right\}, \quad \mathfrak{q}_4(t) = \mathfrak{q}_4(t_0) \exp\left\{2\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau\right\}. \quad (3.74)$$

Таким образом, величина $\mathfrak{q}^2_2(t)$ не сохраняется при взаимодействии со случайными мягкими бозонными возбуждениями КГП.

3.9 Система кинетических уравнений для мягких глюонных возбуждений

В этом разделе приведем выписанные ранее кинетические уравнения для скалярных плотностей числа плазмонов $N^l_{\mathbf{k}}$ и $W^l_{\mathbf{k}}$ и рассмотрим их простейшие следствия. Уравнение для бесцветной части $N^l_{\mathbf{k}}$ (согласно (3.56)) записывается в виде:

$$d_A \frac{\partial N^l_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 2\mathfrak{q}_2(t) N_c \big(\mathrm{Im}\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}\big) W^l_{\mathbf{k}} - \tag{3.75}$$

$$- \mathfrak{q}_2(t) N_c \int d\mathbf{k}_1 \big|\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\big|^2 \Big\{ \big(N^l_{\mathbf{k}} - N^l_{\mathbf{k}_1}\big) - \frac{1}{2} N_c \big(W^l_{\mathbf{k}} N^l_{\mathbf{k}_1} - N^l_{\mathbf{k}} W^l_{\mathbf{k}_1}\big) \Big\} \times$$

$$\times (2\pi)\, \delta(\omega^l_{\mathbf{k}} - \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)).$$

Введем полное число "бесцветных" плазмонов, полагая по определению

$$\mathbb{N}^l(t) \equiv \int d\mathbf{k}\, N^l_{\mathbf{k}}(t). \tag{3.76}$$

Принимая во внимание (3.75) и четность квадрата модуля амплитуды относительно перестановки импульсов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_1$, получим

$$\frac{d\mathbb{N}^l(t)}{dt} = 2\,\frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t) \int d\mathbf{k} \big(\mathrm{Im}\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}\big) W^l_{\mathbf{k}}(t). \tag{3.77}$$

Последнее уравнение говорит о том, что число бесцветных плазмонов будет сохраняться только в случае, когда диссипативные эффекты отсутствуют, когда $\mathrm{Im}\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}} = 0$ (см. раздел 3.10).

Введение в рассмотрение полной энергии и импульса волновой системы бесцветных плазмонов

$$\mathbb{E}^l(t) \equiv \int d\mathbf{k}\, \omega^l_{\mathbf{k}} N^l_{\mathbf{k}}(t) \quad \text{и} \quad \mathbf{K}^l(t) \equiv \int d\mathbf{k}\, \mathbf{k} N^l_{\mathbf{k}}(t), \tag{3.78}$$

приводит, в силу того же кинетического уравнения, к виду

$$\frac{d\big(\mathbb{E}^l - \mathbf{v}\cdot\mathbf{K}^l\big)(t)}{dt} = 2\,\frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t) \int d\mathbf{k}\, (\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}) \big(\mathrm{Im}\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}\big) W^l_{\mathbf{k}}(t). \tag{3.79}$$

В силу диссипативных эффектов, величина $\big(\mathbb{E}^l - \mathbf{v}\cdot\mathbf{K}^l\big)(t)$ не сохраняется.

Наконец, рассмотрим временную зависимость энтропии бесцветных продольно поляризованных мягких глюонных возбуждений:

$$\mathbb{S}^l(t) = \int d\mathbf{k}\, \ln N^l_{\mathbf{k}}(t).$$

Производная по времени, в силу (3.75), приводит к

$$\frac{d\mathbb{S}^l(t)}{dt} = 2\,\frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t)\int d\mathbf{k}\,\big(\mathrm{Im}\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}\big)\,\frac{W^l_{\mathbf{k}}}{N^l_{\mathbf{k}}} + \tag{3.80}$$

$$+\,\mathfrak{q}_2(t)N_c\int d\mathbf{k}d\mathbf{k}_1\big|\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\big|^2\,\frac{\big(N^l_{\mathbf{k}}-N^l_{\mathbf{k}_1}\big)^2}{N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}}(2\pi)\,\delta(\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1))-$$

$$-\,\frac{1}{2}\,\mathfrak{q}_2(t)\,N_c^2\int d\mathbf{k}d\mathbf{k}_1\big|\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\big|^2\left(\frac{1}{N^l_{\mathbf{k}}}-\frac{1}{N^l_{\mathbf{k}_1}}\right)\big(W^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}-N^l_{\mathbf{k}}W^l_{\mathbf{k}_1}\big)\times$$

$$\times(2\pi)\,\delta(\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)).$$

В то время как второй член – положительный, третий – смешанный по $N^l_{\mathbf{k}}$ и $W^l_{\mathbf{k}}$, знаконеопределён, что можно увидеть из следующего выражения:

$$\left(\frac{1}{N^l_{\mathbf{k}}}-\frac{1}{N^l_{\mathbf{k}_1}}\right)\big(W^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}-N^l_{\mathbf{k}}W^l_{\mathbf{k}_1}\big)=N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}\left(\frac{1}{N^l_{\mathbf{k}}}-\frac{1}{N^l_{\mathbf{k}_1}}\right)\left(\frac{W^l_{\mathbf{k}}}{N^l_{\mathbf{k}}}-\frac{W^l_{\mathbf{k}_1}}{N^l_{\mathbf{k}_1}}\right).$$

Ввиду того, что процедура усреднения кинетического уравнения приводит необратимую эволюцию к термодинамическому равновесию, энтропия замкнутой волновой системы может только увеличиваться. Теорема о росте энтропии, являющаяся аналогом H-теоремы Больцмана для газовой кинетики [53], представляет собой математическое утверждение необратимости эволюции. В нашем случае, даже при отсутствии эффектов диссипации, ввиду знаконеопределённости члена в (3.80), однозначно утверждать, что

$$d\mathbb{S}^l(t)/dt > 0$$

нельзя. Присутствие внешней жёсткой частицы в рассматриваемой волновой системе нарушает ее замкнутость.

Уравнение для цветной части $W^l_{\mathbf{k}}$ плотности числа плазмонов задается выражением (3.65). Сравнение левой и правой частей этого уравнения с $\big\langle\mathcal{Q}^s\big\rangle$, учёт (3.72), выражений для $\mathfrak{q}_2(t)$ (3.57) и $\mathfrak{q}_4(t)$ (3.73), после сокращения левой и правой частей на $N_c\mathfrak{q}_2(t)$, приводит к уравнению для функции $W^l_{\mathbf{k}}$

$$\frac{\partial W^l_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\,A(t)\,W^l_{\mathbf{k}} + 2\,\big(\mathrm{Im}\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}\big)\,N^l_{\mathbf{k}} - \tag{3.81}$$

$$-\int d\mathbf{k}_1\,\big|\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\big|^2\left\{\rho\,\mathfrak{q}_2(t)\big(W^l_{\mathbf{k}}-W^l_{\mathbf{k}_1}\big)-\frac{1}{2}\,N_c\,N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}\right\}(2\pi)\,\delta(\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)),$$

где коэффициент ρ в фигурных скобках, в силу представлений функций $\mathfrak{q}_2(t)$ и $\mathfrak{q}_4(t)$ (3.74), имеет вид

$$\rho \equiv \frac{2}{N_c} + \frac{1}{4}\,\frac{\mathfrak{q}_4(t)}{(\mathfrak{q}_2(t))^2} = \frac{2}{N_c} + \frac{1}{4}\frac{\mathfrak{q}_4(t_0)}{(\mathfrak{q}_2(t_0))^2}.$$

Таким образом, коэффициент ρ является постоянной величиной, которая сложным образом зависит от начального значения цветного заряда $\mathcal{Q}_0^a$. Последний, напомним, является заданным детерминированным вектором в эффективном цветовом пространстве. Для частного случая $N_c = 2$, когда $d^{abc} \equiv 0$ и, как следствие, $\mathfrak{q}_4(t_0) \equiv 0$, имеем

$$\rho = 1.$$

В другом, более нетривиальном частном случае, когда $N_c = 3$, в силу определения (3.73) и свойства (E.9), находим

$$\mathfrak{q}_4(t_0) = d^{abc}d^{ab'c'}\langle\mathcal{Q}_0^b\rangle\langle\mathcal{Q}_0^c\rangle\langle\mathcal{Q}_0^{b'}\rangle\langle\mathcal{Q}_0^{c'}\rangle = \frac{1}{3}\left(\langle\mathcal{Q}_0^a\rangle\langle\mathcal{Q}_0^a\rangle\right)^2 \equiv \frac{1}{3}\left(\mathfrak{q}_2(t_0)\right)^2$$

и как результат получаем

$$\rho = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}.$$

Объединим эти два случая вместе

$$\rho = \begin{cases} 1, & \text{если } N_c = 2, \\ 3/4, & \text{если } N_c = 3. \end{cases}$$

Только для данных значений величина ρ не зависит от начального значения цветного заряда. Уравнение (3.81) необходимо добавить к (3.75), и таким образом получим самосогласованную систему кинетических уравнений, которая определяет изменение во времени бесцветной и цветной частей плотности числа плазмонов в горячей неабелевой плазме при взаимодействии мягких бозонных возбуждений с жёсткой цветозаряженной частицей.

Отметим, что для кинетического уравнения (3.81) в случае, когда диссипативные эффекты отсутствуют, нет законов сохранения, подобных (3.77) или (3.79), но здесь есть другая сохраняющаяся величина. Рассмотрим

$$\mathbb{W}^l(t) \equiv \int d\mathbf{k}\, W^l_{\mathbf{k}}(t). \tag{3.82}$$

Уберем член с мнимой частью амплитуды рассеяния в (3.81) и выполним интегрирование этого уравнения по $\mathbf{k}$. В силу того, что член вида $W^l_{\mathbf{k}} - W^l_{\mathbf{k}_1}$ равен

нулю, приходим к

$$\frac{d\mathbb{W}^l(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\,A(t)\,\mathbb{W}^l_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\,N_c \int d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}_1 \left|\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2 N^l_{\mathbf{k}} N^l_{\mathbf{k}_1}\,(2\pi)\,\delta(\omega^l_{\mathbf{k}} - \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1))$$

или с учетом (3.71) к

$$\frac{d\mathbb{W}^l(t)}{dt} = \frac{1}{2N_c}\,A(t)\big\{1 - N_c\,\mathbb{W}^l(t)\big\}.$$

Из уравнения (3.70) и определения функции $\mathfrak{q}_2(t)$ следует

$$A(t) = \frac{d\ln \mathfrak{q}_2(t)}{dt},$$

и тогда предыдущее уравнение примет вид:

$$-2d\ln\big\{1 - N_c\,\mathbb{W}^l(t)\big\} = d\ln \mathfrak{q}_2(t).$$

После интегрирования получим искомое соотношение

$$\left(\frac{1 - N_c\,\mathbb{W}^l(t_0)}{1 - N_c\,\mathbb{W}^l(t)}\right)^2 = \frac{\mathfrak{q}_2(t)}{\mathfrak{q}_2(t_0)}, \tag{3.83}$$

связывающее поведение бесцветной квадратичной комбинации $\mathfrak{q}_2(t)$ усредненного цветного заряда жёсткой частицы с поведением интегральной характеристики "цветной" части $W^l_{\mathbf{k}}$ (3.82).

Физический смысл выражения (3.83) становится очевидным, если, следуя [54–57], ввести понятие цветного заряда для мягких глюонных возбуждений

$$\mathfrak{Q}^a \equiv i\,f^{abc} \int d\mathbf{k}\,c^{*b}_{\mathbf{k}} c^c_{\mathbf{k}}.$$

С учетом (3.41), разложения (3.53) и определения функции $\mathbb{W}^l(t)$ (3.82), для усредненного цветного заряда получим

$$\big\langle \mathfrak{Q}^a \big\rangle = N_c \big\langle \mathcal{Q}^a \big\rangle\, \mathbb{W}^l(t).$$

Определяя, по аналогии с (3.57), бесцветную квадратичную комбинацию усредненного цветного заряда в виде

$$\mathfrak{q}_2(t) \equiv \big\langle \mathfrak{Q}^a \big\rangle \big\langle \mathfrak{Q}^a \big\rangle,$$

можно переписать (3.83) несколько иначе:

$$\big(\sqrt{\mathfrak{q}_2(t)} - \sqrt{\mathfrak{q}_2(t)}\,\big)^2 = \text{const}.$$

Последнее выражение интерпретируется как сохранение усредненного цветного заряда системы, которая включает в себя горячую неабелеву плазму и внешнюю жёсткую цветозаряженную частицу.

3.10 Взаимодействие бесконечно узких пакетов

С целью получения представления о поведении решения системы кинетических уравнений (3.75) и (3.81), обсудим модельную задачу взаимодействия двух бесконечно узких пакетов с волновыми векторами $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}'_0$. Такого рода задача уже была рассмотрена ранее в статьях [34, 58]. В [58] было проанализировано кинетическое уравнение, описывающее упругое рассеяние бесцветных плазмонов друг на друге. Замкнутая система кинетических уравнений, определяющая нелинейное взаимодействие плазминов и плазмонов, была рассмотрена в [34]. Благодаря относительной простоте исходных уравнений, выписанных в этих работах, были получены точные решения редуцированных кинетических уравнений. Это позволило в явном виде определить кинематические соотношения между волновыми векторами возбуждений, определив направление эффективной спектральной перекачки энергии возбуждения плазмы по спектру в сторону малых волновых чисел при сохранении энергии возбуждения для процесса столкновения плазмонов и эффективной спектральной перекачки от фермионной ветви возбуждений плазмы к бозонной и обратно для процесса рассеяния плазминов и плазмонов друг на друге. Отметим, что подход такого типа для определения направления эффективной спектральной перекачки энергии возбуждения используется в теории слабоволновой турбулентности абелевой (т.е. электрон-ионной) плазмы.

Представим $N^l_{\mathbf{k}}$ и $W^l_{\mathbf{k}}$ в виде:

$$\begin{aligned} N^l_{\mathbf{k}}(t) &= N_1(t)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) + N_2(t)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'_0), \\ W^l_{\mathbf{k}}(t) &= W_1(t)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) + W_2(t)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'_0), \end{aligned} \tag{3.84}$$

здесь $\mathbf{k}_0 \neq \mathbf{k}'_0$, т.е. пакеты продольных волн не перекрываются. В частности, из представления функции $N^l_{\mathbf{k}}(t)$ (3.84) и определений (3.76) и (3.78) следует

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^l(t) &= N_1(t) + N_2(t), \\ \left(\mathbb{E}^l - \mathbf{v}\cdot\mathbf{K}^l\right)(t) &= (\omega^l_{\mathbf{k}_0} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}_0)N_1(t) + (\omega^l_{\mathbf{k}'_0} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}'_0)N_2(t). \end{aligned} \tag{3.85}$$

Подставив (3.84) в левую и правую части уравнений (3.75) и (3.81), получаем два взаимосвязанных нелинейных уравнения для пары функций $N_1(t)$ и $N_2(t)$:

$$\frac{dN_1(t)}{dt}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) + \frac{dN_2(t)}{dt}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'_0) = \tag{3.86}$$

$$= \left\{ A_{11} N_1 + A_{13} W_1 - \frac{N_c}{d_A}\, \mathfrak{q}_2(t) B \left(N_1 W_2 - N_2 W_1 \right) \right\} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) +$$
$$+ \left\{ A_{22} N_2 + A_{24} W_2 + \frac{N_c}{d_A}\, \mathfrak{q}_2(t) B \left(N_1 W_2 - N_2 W_1 \right) \right\} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_0) +$$
$$+ \frac{N_c}{d_A}\, \mathfrak{q}_2(t) \left\{ \left| \mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0} \right|^2 (2\pi)\, \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0}) N_1 + \left| \mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}'_0} \right|^2 (2\pi)\, \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}'_0}) N_2 \right\}$$

и пары функций $W_1(t)$ и $W_2(t)$:

$$\frac{dW_1(t)}{dt}\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \frac{dW_2(t)}{dt}\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_0) = \tag{3.87}$$

$$= \left\{ A_{31} N_1 + A_{33} W_1 - \frac{1}{2}\, A(t) W_1 + B N_1 N_2 + \frac{1}{2}\, N_c \left| \mathcal{T}_{\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_0} \right|^2 (2\pi)\, \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_0}) N_1^2 \right\} \times$$
$$\times\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) +$$
$$+ \left\{ A_{42} N_2 + A_{44} W_2 - \frac{1}{2}\, A(t) W_2 + B N_1 N_2 + \frac{1}{2}\, N_c \left| \mathcal{T}_{\mathbf{k}'_0,\mathbf{k}'_0} \right|^2 (2\pi)\, \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}'_0,\mathbf{k}'_0}) N_2^2 \right\} \times$$
$$\times\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_0) +$$
$$+ \rho\, \mathfrak{q}_2(t) \left\{ \left| \mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0} \right|^2 (2\pi)\, \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0}) W_1 + \left| \mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}'_0} \right|^2 (2\pi)\, \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}'_0}) W_2 \right\},$$

где

$$\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} \equiv \omega^l_{\mathbf{k}} - \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1). \tag{3.88}$$

Ненулевые элементы A_{ij}, $i, j = 1, \ldots, 4$, определяются равенствами:

$$A_{31} = 2 \left(\mathrm{Im} \mathcal{T}_{\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_0} \right), \qquad A_{13} = \frac{N_c}{d_A}\, \mathfrak{q}_2(t) A_{31},$$
$$A_{42} = 2 \left(\mathrm{Im} \mathcal{T}_{\mathbf{k}'_0,\mathbf{k}'_0} \right), \qquad A_{24} = \frac{N_c}{d_A}\, \mathfrak{q}_2(t) A_{42},$$
$$A_{11} = -\frac{N_c}{d_A}\, \mathfrak{q}_2(t) \int d\mathbf{k} \left| \mathcal{T}_{\mathbf{k}_0,\mathbf{k}} \right|^2 (2\pi)\, \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_0,\mathbf{k}}), \qquad A_{33} = \rho\, \frac{d_A}{N_c} A_{11},$$
$$A_{22} = -\frac{N_c}{d_A}\, \mathfrak{q}_2(t) \int d\mathbf{k} \left| \mathcal{T}_{\mathbf{k}'_0,\mathbf{k}} \right|^2 (2\pi)\, \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}'_0,\mathbf{k}}), \qquad A_{44} = \rho\, \frac{d_A}{N_c} A_{22}.$$

Коэффициент B определяется следующим выражением:

$$B = \frac{1}{2}\, N_c\, \mathfrak{q}_2(t) \left| \mathcal{T}_{\mathbf{k}_0,\mathbf{k}'_0} \right|^2 (2\pi)\, \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_0,\mathbf{k}'_0}). \tag{3.89}$$

Обратим, однако, внимание на то, что этот коэффициент, вообще говоря, является обобщенной функцией. Обозначения для матричных элементов A_{ij} выбра-

ны таким образом, чтобы они соответствовали матричному умножению матрицы $\mathcal{A} \equiv (A_{ij})$ на некоторый эффективный вектор

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \Lambda_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}.$$

Структура правых частей уравнений (3.86) и (3.87) приводит к выводу, что последние члены не дают выделить вклады, пропорциональные δ-функциям: $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ и $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_0)$, как, например, в [34, 58]. Кроме того, (3.87) содержит члены вида $\left|\mathcal{T}_{\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_0}\right|^2 (2\pi)\,\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_0})$, которые в дальнейших рассуждениях отбрасываются.

Поступим следующим образом. Выполним интегрирование (3.86) и (3.87) по $\mathbf{k}$. В силу требования $\mathbf{k}_0 \neq \mathbf{k}'_0$ области интегрирования вблизи волновых векторов $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}'_0$ можно выбрать таким образом, чтобы они не перекрывались, тогда из (3.86) и (3.87) получим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1(t)}{dt} &= A_{13}W_1 - \frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t)B\big(N_1W_2 - N_2W_1\big), \\
\frac{dN_2(t)}{dt} &= A_{24}W_2 + \frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t)B\big(N_1W_2 - N_2W_1\big), \\
\frac{dW_1(t)}{dt} &= A_{31}N_1 - \frac{1}{2}\,A(t)W_1 + B\,N_1N_2, \\
\frac{dW_2(t)}{dt} &= A_{42}N_2 - \frac{1}{2}\,A(t)W_2 + B\,N_1N_2.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Заметим, что при таком подходе вклады с элементами матрицы A_{11}, A_{22}, A_{33} и A_{44} точно сокращаются с последними членами в (3.86) и (3.87). Систему (3.90) можно получить другим путём. Возьмем для конкретности выражение (3.86). Выполним интегрирование по $\mathbf{k}$ по всему импульсному пространству $\mathbf{R}^3$. Затем, умножая (3.86) на функцию $(\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})$ и снова интегрируя по $\mathbf{k}$, придем к системе двух уравнений в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega^l_{\mathbf{k}_0} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}_0 & \omega^l_{\mathbf{k}'_0} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{N}_1 \\ \dot{N}_2 \end{pmatrix} = \tag{3.91}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega^l_{\mathbf{k}_0} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}_0 & \omega^l_{\mathbf{k}'_0} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{13}W_1 \\ A_{24}W_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2(t) B\big(N_1 W_2 - N_2 W_1\big)\Delta\omega_{\mathbf{k}_0,\mathbf{k}'_0} \end{pmatrix},$$

где N_1 и N_2 с точкой используются для обозначения дифференцирования по времени t. Далее будем полагать определитель матрицы в левой части (3.91) не равным нулю:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega^l_{\mathbf{k}_0} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}_0 & \omega^l_{\mathbf{k}'_0} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}'_0 \end{pmatrix} = -\Delta\omega_{\mathbf{k}_0,\mathbf{k}'_0} \neq 0.$$

Здесь используется обозначение (3.88). В этом случае, умножение уравнения (3.91) на соответствующую обратную матрицу приводит к двум первым уравнениям системы (3.90), в которых множитель $\Delta\omega_{\mathbf{k}_0,\mathbf{k}'_0}$ сокращается (он содержится только в коэффициенте B (3.89) как аргумент δ-функции) и требование $\Delta\omega_{\mathbf{k}_0,\mathbf{k}'_0} \neq 0$ может быть отброшено. Аналогично можно получить вторую пару уравнений в (3.90). Можно увидеть, что два первых уравнения в (3.90) находятся в полном согласии с соотношениями (3.77) и (3.79) при использовании представления (3.84).

Далее попытаемся упростить систему насколько это возможно. Матричные элементы A_{13}, A_{24}, A_{31} и A_{42} перед линейными членами в правой части (3.90) пропорциональны множителям $\mathrm{Im}\mathcal{T}_{\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_0}(\mathbf{v})$ и $\mathrm{Im}\mathcal{T}_{\mathbf{k}'_0,\mathbf{k}'_0}(\mathbf{v})$. Они связаны с бесстолкновительным затуханием Ландау мягких глюонных колебаний и, как следствие, должны включать дельта-функцию Дирака, которая даёт соответствующие законы сохранения энергии и импульса:

$$\mathrm{Im}\mathcal{T}_{\mathbf{k}_0,\,\mathbf{k}_0}(\mathbf{v}) \sim \int \frac{d\Omega_{\mathbf{v}'}}{4\pi}\, w_{\mathbf{v}'}(\mathbf{v};\mathbf{k}_0)(2\pi)\delta(\omega^l_{\mathbf{k}_0} - \mathbf{v}'\cdot\mathbf{k}_0),$$

где $w_{\mathbf{v}'}(\mathbf{v};\mathbf{k}_0)$ – вероятность процесса затухания Ландау, явный вид которой можно получить, используя выражения (3.34) и (3.35), трёхточечную амплитуду $\mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ (1.46) и HTL-поправку $\delta\Gamma^{\mu\nu\rho}(k,k_1,k_2)$ (A.3). В силу того, что линейное затухание Ландау кинематически запрещено в горячей кварк-глюонной плазме, матричные элементы можно считать равными нулю:

$$A_{13} = A_{24} = A_{31} = A_{42} = 0.$$

Рассмотрим теперь члены в последних двух уравнениях в (3.90), которые содержат функцию $A(t)$, квадратичную по бесцветной части плотности числа

плазмонов, в силу (3.71), тогда члены $A(t)W_1$ и $A(t)W_2$ в (3.90) имеют третий порядок. При построении кинетических уравнений (3.75) и (3.81) рассматривались только линейные и квадратичные вклады плотности числа плазмонов, тогда в рамках заданной точности в последних двух уравнениях в (3.90) исключаем члены, содержащие функцию $A(t)$, а в первых двух уравнениях по этой же причине считаем

$$\mathfrak{q}_2(t) \simeq \mathfrak{q}_2(t_0) \equiv \mathfrak{q}_2^0.$$

Принимая во внимание все вышесказанное, вместо (3.90) будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1(t)}{dt} &= -\frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2^0 B\big(N_1W_2 - N_2W_1\big),\\
\frac{dN_2(t)}{dt} &= \frac{N_c}{d_A}\,\mathfrak{q}_2^0 B\big(N_1W_2 - N_2W_1\big),\\
\frac{dW_1(t)}{dt} &= B\,N_1N_2,\\
\frac{dW_2(t)}{dt} &= B\,N_1N_2,
\end{aligned}$$

отсюда следует

$$N_1(t) + N_2(t) = \mathcal{C}_1, \qquad W_1(t) - W_2(t) = \mathcal{C}_2, \tag{3.92}$$

где $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ – некоторые константы. Эти соотношения позволяют нам свести систему, состоящую из четырех уравнений, к системе из двух уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1(t)}{dt} &= \beta B\big[N_1(\mathcal{C}_2 - W_1) + W_1(\mathcal{C}_1 - N_1)\big],\\
\frac{dW_1(t)}{dt} &= B N_1(\mathcal{C}_1 - N_1),
\end{aligned} \tag{3.93}$$

здесь для удобства записи введено обозначение $\beta \equiv N_c\,\mathfrak{q}_2^0/d_A$. Система имеет два стационарных решения, одно из которых тривиально: $N_1 = W_1 = 0$, а второе имеет вид:

$$N_1 = \mathcal{C}_1, \qquad W_1 = \mathcal{C}_2.$$

Из (3.85) и первого соотношения в (3.92) вытекает равенство: $\mathbb{N}^l(t) = \text{const}$.

Для определенной связи между постоянными $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$

$$\mathcal{C}_2^2 = \frac{1}{2\beta}\,\mathcal{C}_1^2,$$

можно получить точное решение системы (3.93). Для этого, в силу автономности правых частей, приведем систему к одному уравнению вида

$$\frac{dN_1}{dW_1} = \beta\left(\frac{\mathcal{C}_2 - W_1}{\mathcal{C}_1 - N_1} + \frac{W_1}{N_1}\right)$$

или в иной форме к

$$\left[(2N_1 - \mathcal{C}_1)W_1 - \mathcal{C}_2 N_1\right]\frac{dW_1}{dN_1} = \frac{1}{\beta}\left(N_1^2 - \mathcal{C}_1 N_1\right). \tag{3.94}$$

Уравнение (3.94) определяет W_1 как функцию, зависящую от N_1. Построение решения уравнения (3.94), а затем и исходной системы (3.93) приведено в Приложении F. Здесь выпишем явный вид точного решения системы (3.93) в параметрической форме:

$$\begin{aligned}
N_1 &= N_1(\tau, C) = \frac{1}{2}\mathcal{C}_1 - \frac{1}{4a}\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2\frac{\tau}{f(\tau)},\\
W_1 &= W_1(\tau, C) = a\left[\frac{1+\tau}{\tau}f(\tau) - \frac{1}{2}\frac{\tau}{f(\tau)}\right] + \frac{\mathcal{C}_2 N_1}{2N_1 - \mathcal{C}_1},\\
t &= t(\tau, C, \widetilde{C}) = -\frac{2a}{B\mathcal{C}_1^2}\int\frac{d\tau}{(1+\tau)f(\tau)} + \widetilde{C},
\end{aligned} \tag{3.95}$$

где C и $\widetilde{C}$ - произвольные константы интегрирования и

$$a^2 = \frac{1}{4\beta}\mathcal{C}_1^2, \qquad f(\tau) \equiv \left(\tau - \ln|1+\tau| - C\right)^{1/2}.$$

В Приложении F интеграл по τ в представлении для времени t в (3.95) записан в терминах интеграла от известной функции Ламберта W [59].

Хотя рассмотренная выше задача, связанная с процессом рассеяния плазмонов на жёсткой частице, позволяет в частном случае получить точные аналитические решения соответствующей приведенной системы кинетических уравнений (3.75) и (3.81), эти решения не позволяют однозначно определить направления перекачки энергии плазмонных возбуждений как по спектру, так и между бесцветной и цветной составляющими плотности числа плазмонов. Это связано с тем, что решения получены в параметрической форме и с тем, что временная параметризация может быть представлена только в виде неопределенного интеграла.

3.11 Выводы

В этой главе было предложено построение классического гамильтонова формализма для описания нелинейного взаимодействия между мягкими и жёсткими возбуждениями в высокотемпературной КГП. С целью исключения гамильтониана взаимодействия $H^{(3)}$ (3.9) были выписаны канонические преобразования для бозонной нормальной переменной $a^a_{\mathbf{k}}$ (3.19) и цветного заряда Q^a жёсткой пробной частицы (3.20) в виде разложения в интегро-степенные ряды по новым переменной $c^a_{\mathbf{k}}$ и цветному заряду $\mathcal{Q}^a$. Такая процедура привела к нахождению нового эффективного гамильтониана взаимодействия $\mathcal{H}^{(4)}_{gG\to gG}$ (3.31) с калибровочно-ковариантной амплитудой рассеяния $\mathcal{T}^{(2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ (3.34) и (3.35), которая описывает процесс упругого рассеяния плазмона на жёсткой тестовой частице в древесном приближении. Использование условий каноничности вида (3.17) и (3.18) дало возможность выписать полную систему независимых соотношений, связывающих низшие и высшие коэффициентные функции в канонических преобразованиях (3.19) и (3.20).

В данной главе детально был рассмотрен простейший процесс нелинейного взаимодействия мягких чисто коллективных возбуждений в глюонной плазме, а именно, упругое рассеяние плазмона на жёсткой частице типа $2 \to 2$:

$$\mathrm{g}^*_1 + \mathrm{G} \rightleftharpoons \mathrm{g}^*_2 + \mathrm{G}', \tag{3.96}$$

где g^*_1, g^*_2 и G, G$'$ – плазмонные коллективные возбуждения и возбуждения с импульсами порядка температуры и выше, соответственно. Для слабовозбужденной системы, что соответствует уровню тепловых флуктуаций, изучаемый процесс является доминирующим. Разработанный подход оказался весьма плодотворным в связи с тем, что он позволяет рассматривать гораздо более сложные процессы, связанные, например, с “неупругим” рассеянием

$$\mathrm{g}^*_1 + \mathrm{g}^*_2 + \mathrm{G} \rightleftharpoons \mathrm{g}^*_3 + \mathrm{G}' \quad \text{или} \quad \mathrm{g}^*_1 + \mathrm{G} \rightleftharpoons \mathrm{g}^*_2 + \mathrm{g}^*_3 + \mathrm{G}',$$

гамильтониан для которого записан следующим образом:

$$\mathcal{H}^{(5)}_{2gG\to gG} = \int \frac{d\mathbf{x}_0}{(2\pi)^3} \int \prod_{i=1}^{3} d\mathbf{k}_i \, \mathcal{T}^{(3)\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3} c^{*\,a_1}_{\mathbf{k}_1} c^{*\,a_2}_{\mathbf{k}_2} c^{a_3}_{\mathbf{k}_3} \mathcal{Q}^{\,a_4} \; + \; (\text{компл. сопр.}).$$

Несмотря на тот факт, что вычисление эффективной амплитуды $\mathcal{T}^{(3)\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}$ при этом становится значительно более трудоемким, но всё же оно остается

вполне выполнимым. Для более сложных процессов рассеяния предложенный подход становится малоэффективным в вычислительном плане, и здесь необходимо развивать другие методы, используя, например, результаты, изложенные в работе [52], где предложена несколько иная процедура получения амплитуд рассеяния для процессов любой сложности.

Глава 4

Классическая матрица рассеяния для жёстких и мягких бозе-возбуждений

4.1 Классическая матрица рассеяния

Перейдём к получению классической матрицы рассеяния для процесса, связанного с рассеянием жёсткой цветозаряженной частицы на мягких бозе-возбуждениях кварк-глюонной плазмы. Предлагаемое в этом и следующем разделе изложение основано на статьях Захарова и Шульмана [60–62].

Выпишем исходную, при построении классической матрицы рассеяния, систему динамических уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c^a_{\mathbf{k}}}{\partial t} &= -i\left(\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}\right) c^a_{\mathbf{k}} - i\,\frac{\delta \mathcal{H}_{int}}{\delta c^{*a}_{\mathbf{k}}}, \\
\frac{\partial c^{*a}_{\mathbf{k}}}{\partial t} &= i\left(\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}\right) c^{*a}_{\mathbf{k}} + i\,\frac{\delta \mathcal{H}_{int}}{\delta c^{a}_{\mathbf{k}}}, \\
\frac{d\mathcal{Q}^a}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{int}}{\partial \mathcal{Q}^b}\, f^{abc}\mathcal{Q}^c.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $\mathcal{H}_{int}$ – некоторый гамильтониан взаимодействия. Система (4.1) является следствием уравнений Гамильтона (3.38) – (3.40), определения свободного гамильтониана (3.30) и скобки Ли-Пуассона

$$\{F,\, G\} = \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta F}{\delta c^a_{\mathbf{k}'}} \frac{\delta G}{\delta c^{*a}_{\mathbf{k}'}} - \frac{\delta F}{\delta c^{*a}_{\mathbf{k}'}} \frac{\delta G}{\delta c^a_{\mathbf{k}'}} \right\} + i\,\frac{\partial F}{\partial \mathcal{Q}^a} \frac{\partial G}{\partial \mathcal{Q}^b}\, f^{abc}\mathcal{Q}^c. \tag{4.2}$$

Согласно [6, 60, 62], в качестве первого шага рассмотрим систему с взаимодействием, которое при $t \to \pm\infty$ адиабатически выключается:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}\, \mathrm{e}^{-\epsilon|t|}, \quad \epsilon > 0.$$

Решение исходной системы уравнений (4.1) асимптотически переходит в решение уравнений свободного поля:

$$c^a_{\mathbf{k}}(t) \to c^{\pm\, a}_{\mathbf{k}}(t) \equiv c^{\pm\, a}_{\mathbf{k}}\, \mathrm{e}^{-i(\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})t}, \qquad \mathcal{Q}^a(t) \to \mathcal{Q}^{\pm a}, \tag{4.3}$$

где величины $c^{\pm\, a}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{Q}^{\pm a}$ являются некоторыми постоянными. Функции $(c^{-\, a}_{\mathbf{k}},\, \mathcal{Q}^{-a})$ и $(c^{+\, a}_{\mathbf{k}},\, \mathcal{Q}^{+a})$ не являются независимыми. Для связи in- и out-полей и асимптотических цветных зарядов[1] существует нелинейный оператор $\hat{S}_\epsilon$. Введенные обозначения для "in/out"-операторов связаны с состояниями, которым соответствуют знаки "$-/+$". Для дальнейшего анализа переходим к так называемому "представлению взаимодействия":

$$c^a_{\mathbf{k}}(t) = \tilde{c}^a_{\mathbf{k}}(t)\, \mathrm{e}^{-i(\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})t}, \qquad c^{*\, a}_{\mathbf{k}}(t) = \tilde{c}^{*\, a}_{\mathbf{k}}(t)\, \mathrm{e}^{\,i(\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})t}.$$

Уравнения движения (4.1) теперь принимают вид:

$$\frac{\partial \tilde{c}^a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -\, i\, \frac{\delta \widetilde{\mathcal{H}}_{int}}{\delta \tilde{c}^{*\, a}_{\mathbf{k}}}\, \mathrm{e}^{-\epsilon|t|},$$

$$\frac{\partial \tilde{c}^{*\, a}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = i\, \frac{\delta \widetilde{\mathcal{H}}_{int}}{\delta \tilde{c}^a_{\mathbf{k}}}\, \mathrm{e}^{-\epsilon|t|},$$

$$\frac{d\mathcal{Q}^a}{dt} = \frac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}_{int}}{\partial \mathcal{Q}^b}\, f^{abc}\, \mathcal{Q}^c\, \mathrm{e}^{-\epsilon|t|},$$

где $\widetilde{\mathcal{H}}_{int}$ является гамильтонианом взаимодействия в новых переменных $\tilde{c}^a_{\mathbf{k}}$ и $\tilde{c}^{*\, a}_{\mathbf{k}}$. Эти уравнения эквивалентны интегральным уравнениям, описывающим изменение рассматриваемой системы во времени:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}^a_{\mathbf{k}}(t) \;&=\; c^{-\, a}_{\mathbf{k}} \;-\; \frac{i}{2} \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau\, \frac{\delta \widetilde{\mathcal{H}}_{int}}{\delta \tilde{c}^{*\, a}_{\mathbf{k}}(\tau)}\, \mathrm{e}^{-\epsilon|\tau|}, \\
\tilde{c}^{*\, a}_{\mathbf{k}}(t) &= (c^{-\, a}_{\mathbf{k}})^* + \frac{i}{2} \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau\, \frac{\delta \widetilde{\mathcal{H}}_{int}}{\delta \tilde{c}^a_{\mathbf{k}}(\tau)}\, \mathrm{e}^{-\epsilon|\tau|}, \\
\mathcal{Q}^a(t) &= \mathcal{Q}^{-\, a} + \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau\, \frac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}_{int}}{\partial \mathcal{Q}^b(\tau)}\, f^{abc}\, \mathcal{Q}^c(\tau)\, \mathrm{e}^{-\epsilon|\tau|}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

[1] Иногда будем использовать эту удобную терминологию, общепринятую в квантовой теории поля с целью введения обозначений для асимптотических in- и out-полевых операторов в областях $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$, соответственно (см., например [63]). Эти операторы, в частности, удовлетворяют коммутационным соотношениям и уравнениям свободного поля.

Решения интегральных уравнений (4.4) могут быть формально представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}(t) &= S_\epsilon(-\infty,t)[c^{-\,a}_{\mathbf{k}},(c^{-\,a}_{\mathbf{k}})^*,\mathcal{Q}^{-a}],\\
\tilde{c}^{*\,a}_{\mathbf{k}}(t) &= S^*_\epsilon(-\infty,t)[c^{-\,a}_{\mathbf{k}},(c^{-\,a}_{\mathbf{k}})^*,\mathcal{Q}^{-a}],\\
\mathcal{Q}^a(t) &= S_\epsilon(-\infty,t)[c^{-\,a}_{\mathbf{k}},(c^{-\,a}_{\mathbf{k}})^*,\mathcal{Q}^{-a}].
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь в квадратных скобках указаны асимптотические in-состояния, которые преобразуются оператором $S_\varepsilon(-\infty,t)$ в новые переменные $\tilde{c}^{*\,a}_{\mathbf{k}}(t)$, $\tilde{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}(t)$ и $\mathcal{Q}^a(t)$, зависящие от времени t. В дальнейшем, с целью избежать введения дополнительных обозначений, интегральные операторы для решений $\tilde{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}(t)$ и $\mathcal{Q}^a(t)$ будут записываться с помощью одинакового символа $S_\epsilon(-\infty,t)[\,\dots\,]$, однако, отметим, что это не совсем корректно.

При конечном ϵ и достаточно малых $c^{-\,a}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{Q}^{-a}$, путем итерации интегральных уравнений (4.4) оператор $S_\epsilon(-\infty,t)$ можно получить в виде сходящегося ряда, который в работе [62] при $\epsilon\to+0$ назван *классической матрицей перехода*. Подчеркнем, что предел при $\epsilon\to+0$ определен для каждого члена ряда. Полученное выражение является конечным в смысле обобщенных функций.

Далее из (4.5) при $t\to+\infty$ получим

$$\begin{aligned}
c^{+\,a}_{\mathbf{k}} &= S_\epsilon[c^{-\,a}_{\mathbf{k}},(c^{-\,a}_{\mathbf{k}})^*,\mathcal{Q}^{-a}],\\
(c^{+\,a}_{\mathbf{k}})^* &= S^*_\epsilon[c^{-\,a}_{\mathbf{k}},(c^{-\,a}_{\mathbf{k}})^*,\mathcal{Q}^{-a}],\\
\mathcal{Q}^{+a} &= S_\epsilon[c^{-\,a}_{\mathbf{k}},(c^{-\,a}_{\mathbf{k}})^*,\mathcal{Q}^{-a}],
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где $S_\epsilon\equiv S_\epsilon(-\infty,+\infty)$. Предел интегрального оператора S_ϵ при $\epsilon\to+0$

$$\mathcal{S}=\lim_{\epsilon\to+0}S_\epsilon(-\infty,+\infty)$$

был назван *классической матрицей рассеяния*.

В заключение этого раздела отметим, что, поскольку взаимодействие адиабатически выключается при $t\to-\infty$, система, в общем, в асимптотическом прошлом может находиться в неравновесном состоянии (и даже в существенно неравновесном состоянии). Как будет показано в разделе 4.7, потери энергии энергичной частицы, распространяющейся в горячей КХД-среде, зависят от того, находится ли система при $t\to-\infty$ в тепловом равновесии или в сильно возбужденном состоянии.

4.2 Рассеяние плазмона на жёсткой цветозаряженной частице

Определим классическую матрицу рассеяния для простейшего гамильтониана взаимодействия $\mathcal{H}_{int} = \mathcal{H}^{(4)}_{gG\to gG}$ (3.31), квадратичного по $\tilde{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}$ и $\tilde{c}^{*\,a}_{\mathbf{k}}$ и линейным по $\mathcal{Q}^a$. Первое и третье интегральные уравнения в (4.4) в представлении взаимодействия принимают вид:

$$\tilde{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}(t) \;=\; c^{-\,a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int d\mathbf{k}_1\, \mathcal{T}^{(2)\,b\,a\,a_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}\, \tilde{c}^{\,a_1}_{\mathbf{k}_1}(\tau)\mathcal{Q}^{\,b}(\tau)\,\mathrm{e}^{\,i\,\Delta\omega_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}\tau\,-\,\epsilon|\tau|}, \tag{4.7}$$

$$\mathcal{Q}^a(t) = \mathcal{Q}^{-\,a} + \frac{i}{2}\,f^{abc}\int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, \mathcal{T}^{(2)\,b\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\, \tilde{c}^{\,*\,a_1}_{\mathbf{k}_1}(\tau)\, \tilde{c}^{\,a_2}_{\mathbf{k}_2}(\tau)\mathcal{Q}^{\,c}(\tau)\,\mathrm{e}^{\,i\,\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\tau\,-\,\epsilon|\tau|}, \tag{4.8}$$

где “резонансная разность частот” $\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}$ появляется в показателе экспоненты подинтегральных выражений:

$$\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} \equiv \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2} - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2).$$

Взаимосвязанные уравнения вида (4.7) и (4.8) можно представить графически, что показано на рис. 4.1. Пояснения к графическим элементам приведены в таблице 4.1. Диаграммное представление самосогласованной системы из двух интегральных уравнений в общем не имеет какого-либо конкретного физического содержания, а скорее служит просто ее графической иллюстрацией. Отметим, что данное представление дает возможность ассоциировать определенную графическую диаграмму с каждым членом ряда, возникающим в результате итерации интегральных уравнений (4.7) и (4.8).

Графическое представление интегрального уравнения для неизвестной величины (точнее, для переменной нормального поля) относится к ранним классическим работам, посвященным статистическому описанию слаботурбулентных волновых полей (см., например, Wyld [64], Захаров и Львов [65], Zakharov and Schulman [62] и т.д.). В нашем случае, благодаря учёту жёстких мод возбуждений в системе, получено дополнительное интегральное уравнение. Была сделана попытка дать графическую интерпретацию интегральных уравнений, используя идеи упомянутых выше работ с соответствующим обобщением на цветовую

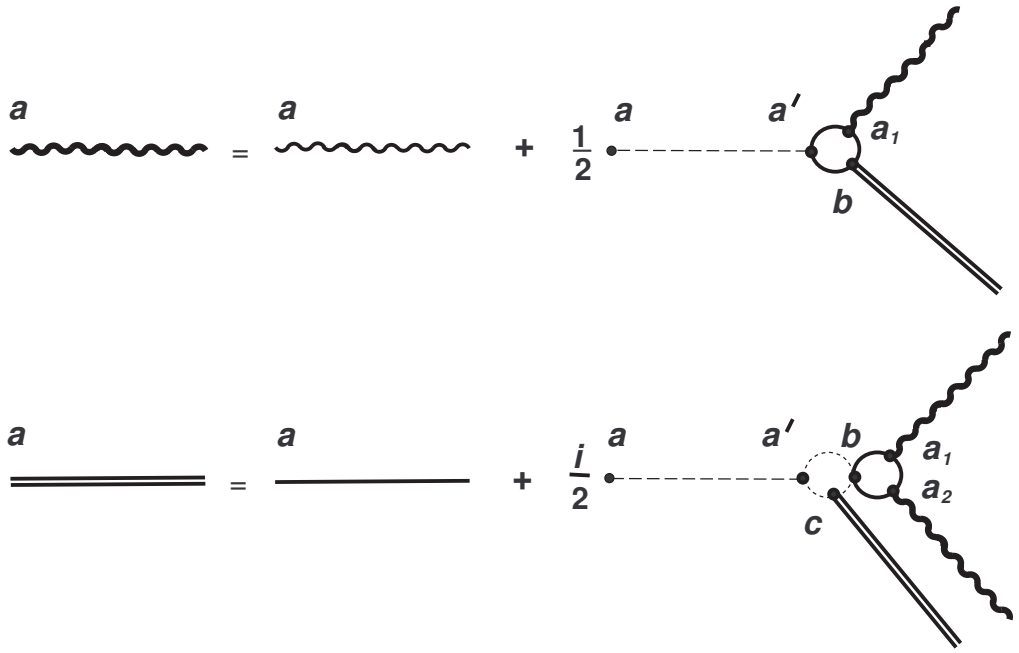


Рисунок 4.1 — Графическое представление уравнений (4.7) и (4.8)

степень свободы.

Для наших целей достаточно определить итерацию первого порядка уравнения (4.7), т.е. в правой части просто сделать замену: $\tilde{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}(\tau) \to c^{-\,a}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{Q}^{a}(\tau) \to \mathcal{Q}^{-\,a}$, тогда

$$\tilde{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}(t) \;=\; c^{-\,a}_{\mathbf{k}} \;+\; \frac{1}{2}\int d\mathbf{k}_1 \left(\int\limits_{-\infty}^{t} d\tau\, \mathrm{e}^{\,i\,\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau\,-\,\epsilon|\tau|} \right) \mathcal{T}^{(2)\,b\,a\,a_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} c^{-\,a_1}_{\mathbf{k}_1}\, \mathcal{Q}^{-\,b}. \tag{4.9}$$

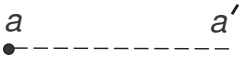
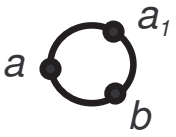
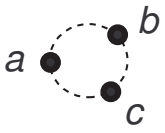
Здесь зависимость от t выделяется в виде отдельного фактора. При анализе интеграла по τ, будем полагать $t > 0$ и, следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{t} d\tau\, \mathrm{e}^{\,i\,\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau\,-\,\epsilon|\tau|} = \int\limits_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{e}^{\,i\,\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau\,+\,\epsilon\tau} + \int\limits_{0}^{t} d\tau\, \mathrm{e}^{\,i\,\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau\,-\,\epsilon\tau} =$$

$$= \frac{1}{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} + \epsilon} + \left(\frac{1}{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} - \epsilon}\, \mathrm{e}^{\,(i\,\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\,-\,\epsilon)t} \;-\; \frac{1}{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} - \epsilon} \right) =$$

$$= \frac{2\epsilon}{(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1})^2 + \epsilon^2} \;+\; \frac{1}{i}\,\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} + i\epsilon}\, \mathrm{e}^{\,(i\,\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\,-\,\epsilon)t}.$$

Таблица 4.1 — Диаграммные элементы для графической интерпретации интегральных уравнений (4.7) и (4.8)

Название	**Элемент диаграммы**	**Множитель в интегральных уравнениях**
неизвестная полевая переменная		$\tilde{c}^{\,a}_{\mathbf{k}}(t)$
неизвестный цветной заряд		$\mathcal{Q}^{a}(t)$
амплитуда асимптотического поля		$c^{-\,a}_{\mathbf{k}}$
асимптотический цветной заряд		$\mathcal{Q}^{-\,a}$
экспоненциальный фактор		$\delta^{aa'}\,\mathrm{e}^{\,i\tau\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}-\epsilon\lvert\tau\rvert}$
полная эффективная амплитуда		$\mathcal{T}^{(2)\,b\,a\,a_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}$
антисимметричные структурные константы		f^{abc}

Используя следующие пределы [66]:

$$\lim_{\epsilon\to+0}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}=\pi\delta(x),\qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\,ixt}}{x+i\epsilon}=0,$$

находим искомое выражение для рассматриваемого интеграла

$$\lim_{t\to+\infty}\lim_{\epsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{t}d\tau\,\mathrm{e}^{\,i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau-\epsilon|\tau|}=2\pi\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}).$$

Таким образом, при $\epsilon\to+0$ и $t\to+\infty$ из (4.9) следует

$$c^{+\,a}_{\mathbf{k}}\;=\;c^{-\,a}_{\mathbf{k}}+\frac{1}{2}\int d\mathbf{k}_1\,\mathcal{T}^{(2)\,b\,a\,a_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}c^{-\,a_1}_{\mathbf{k}_1}\,\mathcal{Q}^{-\,b}\,2\pi\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1})\equiv S[c^{-\,a}_{\mathbf{k}},(c^{-\,a}_{\mathbf{k}})^{*},\mathcal{Q}^{-\,a}].\quad(4.10)$$

Это выражение определяет классическую матрицу рассеяния в первом нетривиальном приближении. Аналогичное рассуждение для второго интегрального

уравнения (4.8) приводит к следующему соотношению в том же порядке итераций, что дополняет (4.10):

$$\mathcal{Q}^{+a} = \mathcal{Q}^{-a} + \frac{i}{2} f^{abc} \int d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, \mathcal{T}^{(2)\, b\, a_1\, a_2}_{\mathbf{k}_1,\, \mathbf{k}_2} \, (c^{-\, a_1}_{\mathbf{k}_1})^* \, c^{-\, a_2}_{\mathbf{k}_2} \mathcal{Q}^{-c}\, 2\pi\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}). \qquad (4.11)$$

4.3 Явный вид классической матрицы рассеяния

Классическая матрица рассеяния в выражениях (4.10) и (4.11) задана некоторым интегральным оператором, в то время как для определения эффективного классического тока необходимо знать её явный вид. В связи с этим, дальнейшей нашей задачей будет определение явной формы классической матрицы рассеяния по аналогии с квантовой теорией поля. Выпишем известное соотношение между асимптотическими состояниями любых in- и out-полевых операторов, которое задается квантово-полевой S-матрицей [63, 67, 68]:

$$\hat{\phi}^{\,out}(x) = \hat{S}^{\dagger} \hat{\phi}^{\,in}(x) \hat{S}.$$

Далее, для того чтобы учесть унитарность квантовой S-матрицы, представим её как экспоненту некоторой фазовой функции $\hat{T}$ (см., например, [69]):

$$\hat{S} = \mathrm{e}^{\,i\hat{T}}, \qquad (4.12)$$

где $\hat{T}$ – эрмитов оператор. Тогда соотношение, связывающее in- and out-полевые операторы, может быть разложено в ряд коммутаторов:

$$\hat{\phi}^{\,out}(x) = \mathrm{e}^{\,-i\hat{T}} \hat{\phi}^{\,in}(x) \mathrm{e}^{\,i\hat{T}} = \qquad (4.13)$$

$$= \hat{\phi}^{\,in}(x) + \frac{i}{1!}\,[\hat{\phi}^{\,in}, \hat{T}] \,+\, \frac{i^2}{2!}\,[[\hat{\phi}^{\,in}, \hat{T}], \hat{T}] \,+\, \frac{i^3}{3!}\,[[[\hat{\phi}^{\,in}, \hat{T}], \hat{T}], \hat{T}] \,+\, \ldots\,.$$

По аналогии с (4.12), классическую $\mathcal{S}$-матрицу определим как экспоненциальную функцию вида

$$\mathcal{S} = \mathrm{e}^{\,i\mathcal{T}}, \qquad (4.14)$$

где теперь $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$ и квантовые коммутаторы в (4.13) заменяются на скобку Ли-Пуассона $[\cdot, \cdot] \to \{\cdot, \cdot\}$ вида (4.2). Перепишем эту скобку в новых асимпто-

тических переменных[2] $c_{\mathbf{k}}^{-\,a}$, $(c_{\mathbf{k}}^{-\,a})^*$ и $\mathcal{Q}^{-a}$:

$$\{F,\,G\} = \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta F}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{-\,c}} \frac{\delta G}{\delta (c_{\mathbf{k}'}^{-\,c})^*} - \frac{\delta F}{\delta (c_{\mathbf{k}'}^{-\,c})^*} \frac{\delta G}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{-\,c}} \right\} + i \, \frac{\partial F}{\partial \mathcal{Q}^{-a}} \frac{\partial G}{\partial \mathcal{Q}^{-b}} \, f^{abc} \mathcal{Q}^{-c},$$

тогда правые части первого и последнего соотношений в (4.6) в пределе при $\epsilon \to +0$ могут быть формально представлены в виде следующих рядов:

$$c_{\mathbf{k}}^{+\,a} = c_{\mathbf{k}}^{-\,a} + \frac{i}{1!} \{ c_{\mathbf{k}}^{-\,a}, \mathcal{T} \} + \frac{i^2}{2!} \{ \{ c_{\mathbf{k}}^{-\,a}, \mathcal{T} \}, \mathcal{T} \} + \frac{i^3}{3!} \{ \{ \{ c_{\mathbf{k}}^{-\,a}, \mathcal{T} \}, \mathcal{T} \}, \mathcal{T} \} + \ldots , \tag{4.15}$$

$$\mathcal{Q}^{+a} = \mathcal{Q}^{-a} + \frac{i}{1!} \{ \mathcal{Q}^{-a}, \mathcal{T} \} + \frac{i^2}{2!} \{ \{ \mathcal{Q}^{-a}, \mathcal{T} \}, \mathcal{T} \} + \frac{i^3}{3!} \{ \{ \{ \mathcal{Q}^{-a}, \mathcal{T} \}, \mathcal{T} \}, \mathcal{T} \} + \ldots , \tag{4.16}$$

которые фактически представляют собой некоторое каноническое преобразование. Подобного рода канонические преобразования для аналитической механики обсуждаются в [70, 71]. Известно, что они связаны с однопараметрической подгруппой общих канонических преобразований, в которой для нашего случая функционал $\mathcal{T}$ играет роль генератора подгруппы. В частности, в работе [72] классическая величина $\mathcal{T}$ была названа "генератором рассеяния". Однако в примерах, рассмотренных в [70, 71], предполагается, что $\mathcal{T}$ является функцией с фиксированной функциональной формой. В данном случае функционал $\mathcal{T}$ сам является неизвестной величиной, подлежащей определению.

Определим $\mathcal{T}$ в виде интегро-степенного ряда по степеням $c_{\mathbf{k}}^{-\,a}$, $(c_{\mathbf{k}}^{-\,a})^*$ и $\mathcal{Q}^{-a}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = {} & F^{\,a} \mathcal{Q}^{-a} + \\ & + \int d\mathbf{k}_1 \left[g_{\mathbf{k}_1}^{a_1} c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1} + g_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} (c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1})^* \right] + \int d\mathbf{k}_1 \left[f_{\mathbf{k}_1}^{a_1 b} c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1} + f_{\mathbf{k}_1}^{*a_1 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1})^* \right] \mathcal{Q}^{-b} + \\ & + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[g_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{(1)\,a_1 a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{-\,a_2} + g_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{(2)\,a_1 a_2} (c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-\,a_2} + g_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{*\,(1)\,a_1 a_2} (c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1})^* (c_{\mathbf{k}_2}^{-\,a_2})^* \right] + \\ & + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[G_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{(1)\,a_1 a_2 b} c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{-\,a_2} + G_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{(2)\,a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-\,a_2} + \right. \\ & \left. + G_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{*\,(1)\,a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1})^* (c_{\mathbf{k}_2}^{-\,a_2})^* \right] \mathcal{Q}^{-b} + \ldots . \end{aligned} \tag{4.17}$$

[2] Отображения (4.3) представляют собой каноническое преобразование, и полный гамильтониан $\mathcal{H}$ в новых переменных записывается как

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{k} \, (\omega_{\mathbf{k}}^{l} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \, (c_{\mathbf{k}}^{\pm\,a})^* c_{\mathbf{k}}^{\pm\,a}.$$

Здесь, в условиях принятого приближения, достаточным будет рассмотреть только вторые члены в правых частях (4.15) и (4.16), тогда получим

$$\{c_{\mathbf{k}}^{-\,a},\mathcal{T}\}=\frac{\delta\mathcal{T}}{\delta(c_{\mathbf{k}}^{-\,a})^{*}}=g_{\mathbf{k}}^{*\,a}+f_{\mathbf{k}}^{*ab}\,\mathcal{Q}^{-b}+$$

$$+\int d\mathbf{k}_1\Big[g_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}^{(2)\,a\,a_1}c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1}+2g_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}^{*\,(1)\,a\,a_1}(c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1})^{*}\Big]+$$

$$+\int d\mathbf{k}_1\Big[G_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}^{(2)\,a\,a_1b}c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1}+2G_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}^{*\,(1)\,a\,a_1b}(c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1})^{*}\Big]\mathcal{Q}^{-b}+\ldots$$

и

$$\{\mathcal{Q}^{-a},\mathcal{T}\}=\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\mathcal{Q}^{-b}}\,f^{abc}\mathcal{Q}^{-c}=f^{abc}F^{b}\mathcal{Q}^{-c}+f^{abc}\int d\mathbf{k}_1\big[f_{\mathbf{k}_1}^{a_1b}c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1}+f_{\mathbf{k}_1}^{*a_1b}(c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1})^{*}\big]\mathcal{Q}^{-c}$$

$$+f^{abc}\int d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2\Big[G_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{(1)\,a_1a_2b}c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1}c_{\mathbf{k}_2}^{-\,a_2}+G_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{(2)\,a_1a_2b}(c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1})^{*}c_{\mathbf{k}_2}^{-\,a_2}+$$

$$+G_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{*\,(1)\,a_1a_2b}(c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1})^{*}(c_{\mathbf{k}_2}^{-\,a_2})^{*}\Big]\mathcal{Q}^{-c}+\ldots.$$

Выражения, полученные выше, следует подставить в (4.15) и (4.16), соответственно, и сравнить с асимптотическими соотношениями (4.10) и (4.11). В результате определим первую ненулевую коэффициентную функцию в (4.17)

$$G_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{(2)\,a_1a_2b}=-\frac{i}{2}\,\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{(2)\,b\,a_1\,a_2}\,2\pi\,\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}),\tag{4.18}$$

поэтому теперь вместо (4.17) придем к

$$\mathcal{T}=\int d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2\,G_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{(2)\,a_1a_2b}(c_{\mathbf{k}_1}^{-\,a_1})^{*}c_{\mathbf{k}_2}^{-\,a_2}\mathcal{Q}^{-b}+\ldots.\tag{4.19}$$

В силу определения функции $G_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{(2)\,a_1a_2b}$ (4.18) и свойства

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{(2)\,a\,a_1\,a_2}=-\mathcal{T}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1}^{*(2)\,a\,a_2\,a_1}$$

для полной эффективной амплитуды (3.34), следует, что функция $\mathcal{T}$ является вещественной, как и должно быть.

Отметим также, что асимптотические амплитуды $c_{\mathbf{k}}^{\pm\,a}(t)$ (4.3) в лидирующем приближении можно выразить через исходные $c_{\mathbf{k}}^{a}(t)$, $c_{\mathbf{k}}^{*\,a}(t)$ и $\mathcal{Q}^{a}(t)$ следующим образом:

$$c_{\mathbf{k}}^{\pm\,a}(t)\;=\;c_{\mathbf{k}}^{a}(t)+\frac{i}{2}\int d\mathbf{k}_1\,\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\pm i0}\,\mathcal{T}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}^{(2)\,b\,a\,a_1}c_{\mathbf{k}_1}^{a_1}(t)\,\mathcal{Q}^{b}(t)\;+\;\ldots.$$

4.4 Потери энергии цветозаряженной частицы в КХД плазме

В качестве приложения теории, разработанной в главе 3 ([24]) и в предыдущих разделах данной главы, рассмотрим задачу вычисления потерь энергии за счет процесса рассеяния высокоэнергетической цветозаряженной частицы, проходящей через горячую КГП на мягких бозонных возбуждениях среды. Классическое выражение для потери энергии тестовой частицы на единицу длины, которое минимально обобщает на цветовую степень свободы стандартную формулу потерь энергии в обычной электромагнитной плазме [29]

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}\int d\mathbf{x}dt\int d\mathcal{Q}_0\,\mathrm{Re}\left\langle \mathbf{J}^a_{\mathcal{Q}}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{E}^a_{\mathcal{Q}}(\mathbf{x},t)\right\rangle = \tag{4.20}$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{v}|}\lim_{\tau\to\infty}\frac{(2\pi)^4}{\tau}\int d\mathbf{k}\,d\omega\int d\mathcal{Q}_0\,\mathrm{Re}\left\langle \mathbf{J}^{*a}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k},\omega)\cdot\mathbf{E}^a_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k},\omega)\right\rangle,$$

будет выбрана в качестве исходного выражения для потери энергии. Здесь хромоэлектрическое поле $\mathbf{E}^a_{\mathcal{Q}}(\mathbf{x},t)$ определено в месте расположения частицы. К усреднению по ансамблю в (4.20) добавлено интегрирование по исходному цветному заряду $\mathcal{Q}^a_0$ с мерой, сохраняющей групповые инварианты [73],

$$d\mathcal{Q}_0 \equiv \mu\prod_{e=1}^{d_A} d\mathcal{Q}^e_0\,\delta(\mathcal{Q}^a_0\mathcal{Q}^a_0 - q_2)\,\delta(d^{abc}\mathcal{Q}^a_0\mathcal{Q}^b_0\mathcal{Q}^c_0 - q_3)\,\delta(d^{abcd}\mathcal{Q}^a_0\mathcal{Q}^b_0\mathcal{Q}^c_0\mathcal{Q}^d_0 - q_4)\,\ldots, \tag{4.21}$$

где $d_A = N_c^2 - 1$ – размерность цветной алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$; d^{abc} – её симметричные структурные константы. Остальные симметричные структурные константы высших порядков выражаются посредством δ^{ab} и d^{abc} (см., например, [74–77]). Число произведений δ-функций в правой части (4.21) равно рангу алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$, т.е., $N_c - 1$. Таким образом, в случае алгебры $\mathfrak{su}(2_c)$ нам нужно сохранить только первую δ-функцию в правой части (4.21). Константы q_2, q_3, ... фиксируют зависящие от представления значения квадратичных, кубических и т.д. инвариантов Казимира[3]. Общий множитель μ в мере (4.21), зависящий от N_c, выбран таким образом, чтобы выполнялось нормировка

$$\int d\mathcal{Q}_0 = 1,$$

[3] В сопряженном представлении групповым инвариантом q_2 является глюонный Казимир $C_A = N_c$.

следствием чего, в частности, являются равенства

$$\int d\mathcal{Q}_0\, \mathcal{Q}_0^a \mathcal{Q}_0^b = \frac{q_2}{d_A}\,\delta^{ab}, \quad \int d\mathcal{Q}_0\, \mathcal{Q}_0^a \mathcal{Q}_0^b \mathcal{Q}_0^c = \frac{q_3}{d_A}\left(\frac{N_c^2-4}{N_c}\right)^{-1} d^{abc} \tag{4.22}$$

и т.д. Кроме того, полагаем

$$\int d\mathcal{Q}_0\, \mathcal{Q}_0^a = 0.$$

4.5 Эффективный ток

С целью определения эффективного тока жёсткой цветозаряженной частицы при её взаимодействии с окружающей средой, необходимого для вычисления потерь энергии, обратимся к квантовой теории поля. Ранее, в рамках S-матричного формализма, были введены в рассмотрение так называемые *радиационные операторы* ([67, 68]). Среди операторов излучения особую роль играет оператор излучения первого порядка. Этот (токовый) оператор определяется простой и унифицированной формулой:

$$\hat{J}^{(\kappa)l}(x) = -i\hat{S}^\dagger \frac{\delta \hat{S}}{\delta \hat{\phi}_l^{\,in(\kappa)}(x)} \quad \text{или} \quad \hat{J}^{(\kappa)l}(x) = i\,\frac{\delta \hat{S}}{\delta \hat{\phi}_l^{\,out(\kappa)}(x)}\,\hat{S}^\dagger, \tag{4.23}$$

где индекс κ определяет тип полей $\hat{\phi}^{(\kappa)}$, каждое из которых является тензорной или спин-тензорной величиной с конечным числом лоренцевых компонент $\hat{\phi}_l^{(\kappa)}$, $(l = 1, \ldots, r_\kappa)$. Для квантовой электродинамики, например $(\hat{\phi}_l(x) \equiv A_\mu(x))$, это выражение является, с точностью до знака, оператором электромагнитного тока, одетого радиационными поправками.

Связь между классической матрицей рассеяния $\mathcal{S}$ и эффективным током жёсткой цветозаряженной частицы, в духе квантовой теорией поля, можно определить в виде:

$$\mathcal{J}_{\mathcal{Q}}^{a\mu}(\mathbf{x}, t) = -i\mathcal{S}^* \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \mathcal{A}_\mu^{-a}(x)}. \tag{4.24}$$

Эффективный одетый ток (4.24) тестовой цветозаряженной частицы возникает ввиду экранирующего действия всех тепловых частиц и её взаимодействия с мягкими возбуждениями цветного поля плазмы. Ввиду того, что асимптотические in- и out-калибровочные поля $\mathcal{A}_\mu^{-a}(x)$ и $\mathcal{A}_\mu^{+a}(x)$ удовлетворяют уравнениям свободного поля, их можно разложить на положительную и отрицательную

частотные части инвариантным образом, справедливым для произвольного момента времени:

$$\mathcal{A}_\mu^{-a}(x) = \int d\mathbf{k} \left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_\mathbf{k}^l}\right)^{1/2} \left\{ \epsilon_\mu^l(\mathbf{k}) c_\mathbf{k}^{-a}\, \mathrm{e}^{-i\omega_\mathbf{k}^l t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \,+\, \epsilon_\mu^{*\,l}(\mathbf{k})\, (c_\mathbf{k}^{-a})^*\, \mathrm{e}^{i\omega_\mathbf{k}^l t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right\}. \tag{4.25}$$

Здесь функции $c_\mathbf{k}^{-a}$ и $(c_\mathbf{k}^{-a})^*$ – асимптотические in-амплитуды. Вектор поляризации продольной моды $\epsilon_\mu^l(\mathbf{k}) = (\epsilon_0^l(\mathbf{k}), \boldsymbol{\epsilon}^l(\mathbf{k}))$ в A_0-калибровке определяется следующим выражением:

$$\epsilon_\mu^l(\mathbf{k}) = \left.\frac{\tilde{u}_\mu(k)}{\sqrt{-\tilde{u}^2(k)}}\right|_{\mathrm{on-shell}} \tag{4.26}$$

так, что имеем очевидную нормировку

$$\epsilon_\mu^l(\mathbf{k}) \epsilon^{*\,l\mu}(\mathbf{k}) = -1.$$

Здесь продольный проектор $\tilde{u}_\mu(k)$ определяется первым выражением в (A.4). В частности, в системе покоя плазмы $\tilde{u}_0(k) = 0$, и как следствие определения (4.26) получаем $\epsilon_0^l(\mathbf{k}) = 0$. Очевидно, что

$$(\boldsymbol{\epsilon}^l(\mathbf{k}))^2 = 1 \quad \text{и} \quad (\boldsymbol{\epsilon}^l(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{k}}) = 1, \tag{4.27}$$

где $\hat{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ и учитывается вещественность вектора поляризации. В разложении (4.25) особенно важен тот факт, что амплитуды $c_\mathbf{k}^{-a}$ и $(c_\mathbf{k}^{-a})^*$ не зависят от времени, как будет показано чуть ниже.

Можно обратить (4.25), т.е. выразить $c_\mathbf{k}^{-a}$ и $(c_\mathbf{k}^{-a})^*$ в терминах функции поля в координатном представлении $\mathcal{A}_i^{-a}(x)$ и ее производной по времени $\dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(x)$, $i = 1, 2, 3$, [28, 78]. С учетом нормировки (4.27), получим

$$c_\mathbf{k}^{-a} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\omega_\mathbf{k}^l}{Z_l(\mathbf{k})}\right)^{1/2} \int \frac{d\mathbf{y}}{(2\pi)^3}\, e^{i\omega_\mathbf{k}^l t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}\, \epsilon_i^l(\mathbf{k}) \Big[\mathcal{A}_i^{-a}(\mathbf{y}, t) + \frac{i}{\omega_\mathbf{k}^l}\, \dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\mathbf{y}, t) \Big],$$

$$(c_\mathbf{k}^{-a})^* = \frac{1}{2}\left(\frac{2\omega_\mathbf{k}^l}{Z_l(\mathbf{k})}\right)^{1/2} \int \frac{d\mathbf{y}}{(2\pi)^3}\, e^{-i\omega_\mathbf{k}^l t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}\, \epsilon_i^l(\mathbf{k}) \Big[\mathcal{A}_i^{-a}(\mathbf{y}, t) - \frac{i}{\omega_\mathbf{k}^l}\, \dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\mathbf{y}, t) \Big].$$

Как было упомянуто выше, функции $c_\mathbf{k}^{-a}$ и $(c_\mathbf{k}^{-a})^*$ в левой части не зависят от времени, поэтому правые части этих выражений также должны не зависеть от t. В связи с этим, можно полагать t равным произвольной постоянной (в

частности, считать t равным нулю). В результате, вместо последних выражений будем иметь

$$
\begin{aligned}
c_{\mathbf{k}}^{-a} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\omega_{\mathbf{k}}^{l}}{Z_l(\mathbf{k})}\right)^{1/2}\int\frac{d\mathbf{y}}{(2\pi)^3}\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}\,\epsilon_i^l(\mathbf{k})\Big[\mathcal{A}_i^{-a}(\mathbf{y},0)+\frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}^{l}}\,\dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\mathbf{y},0)\Big],\\
(c_{\mathbf{k}}^{-a})^{*} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\omega_{\mathbf{k}}^{l}}{Z_l(\mathbf{k})}\right)^{1/2}\int\frac{d\mathbf{y}}{(2\pi)^3}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}\,\epsilon_i^l(\mathbf{k})\,\Big[\mathcal{A}_i^{-a}(\mathbf{y},0)-\frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}^{l}}\,\dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\mathbf{y},0)\Big].
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

С учетом (4.14), перепишем правую часть выражения (4.24) в виде:

$$
\mathcal{J}_{\mathcal{Q}}^{ai}(\mathbf{x},t)=\frac{\delta\mathcal{T}}{\delta\mathcal{A}_i^{-a}(x)}=\int d\mathbf{k}_1\left\{\frac{\delta\mathcal{T}}{\delta c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1}}\frac{\delta c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1}}{\delta\mathcal{A}_i^{-a}(x)}\;+\;\frac{\delta\mathcal{T}}{\delta(c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^{*}}\frac{\delta(c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^{*}}{\delta\mathcal{A}_i^{-a}(x)}\right\}. \tag{4.29}
$$

С учетом представления (4.28), находим соответствующие вариационные производные

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1}}{\delta\mathcal{A}_i^{-a}(x)} &= \delta^{aa_1}\frac{1}{2(2\pi)^3}\left(\frac{2\omega_{\mathbf{k}_1}^{l}}{Z_l(\mathbf{k}_1)}\right)^{1/2}e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}}\,\epsilon_i^l(\mathbf{k}_1)\delta(t),\\
\frac{\delta(c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^{*}}{\delta\mathcal{A}_i^{-a}(x)} &= \delta^{aa_1}\frac{1}{2(2\pi)^3}\left(\frac{2\omega_{\mathbf{k}_1}^{l}}{Z_l(\mathbf{k}_1)}\right)^{1/2}e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}}\,\epsilon_i^l(\mathbf{k}_1)\delta(t).
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

При выводе этих соотношений функциональную вариацию от производной по времени калибровочного потенциала $\dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\mathbf{y},0)$ по $\mathcal{A}_i^{-a}(x)$ полагаем равной нулю, т.е. $\delta\dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\mathbf{y},0)/\delta\mathcal{A}_i^{-a}(x)=0$, при условии, что эти функции являются независимыми. Используя (4.19) и (4.30), из (4.29) получим искомый эффективный ток в координатном представлении

$$
\boldsymbol{\mathcal{J}}_{\mathcal{Q}}^{a}(\mathbf{x},t)=
$$

$$
\int d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\Big\{G^{(2)\,a_1ab}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}F_{\mathbf{k}_2}\boldsymbol{\epsilon}^{l}(\mathbf{k}_2)\,e^{-i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{x}}\,(c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^{*}+G^{(2)\,aa_2b}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}F_{\mathbf{k}_1}\boldsymbol{\epsilon}^{l}(\mathbf{k}_1)\,e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}}\,c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2}\Big\}\delta(t)\mathcal{Q}^{-b}.
$$

Здесь для удобства ввели обозначение

$$
F_{\mathbf{k}}\equiv\frac{1}{2(2\pi)^3}\left(\frac{2\omega_{\mathbf{k}}^{l}}{Z_l(\mathbf{k})}\right)^{1/2}. \tag{4.31}
$$

Определим соответствующий ток в Фурье-представлении посредством выражения:

$$
\boldsymbol{\mathcal{J}}_{\mathcal{Q}}^{a}(\mathbf{k},\omega)=\int dt\,d\mathbf{x}\,\boldsymbol{\mathcal{J}}_{\mathcal{Q}}^{a}(\mathbf{x},t)\,e^{i\omega t-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\;= \tag{4.32}
$$

$$
(2\pi)^3\int d\mathbf{k}_1\,G^{(2)\,a_1ab}_{\mathbf{k}_1,\,-\mathbf{k}}F_{-\mathbf{k}}\boldsymbol{\epsilon}^{l}(-\mathbf{k})\,(c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^{*}\mathcal{Q}^{-b}+(2\pi)^3\int d\mathbf{k}_2\,G^{(2)\,aa_2b}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2}F_{\mathbf{k}}\boldsymbol{\epsilon}^{l}(\mathbf{k})\,c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2}\mathcal{Q}^{-b}.
$$

4.6 Выражение для потери энергии жёсткой частицы

Обратимся к выражению (4.20). Порожденное эффективным током (4.32) хромоэлектрическое поле в (4.20) определяется уравнением поля во временной калибровке:

$$E^{ai}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k},\omega) = -i\omega\, {}^{*}\widetilde{\mathcal{D}}^{ij}(k)\,\mathcal{J}^{aj}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k},\omega),$$

где $i,\, j = 1,2,3$. Ненулевые компоненты эффективного пропагатора глюонов, в силу определений (А.1) – (А.4), задаются следующим выражением:

$${}^{*}\widetilde{\mathcal{D}}^{ij}(k) = \left(\frac{k^2}{\omega^2}\right)\frac{\mathrm{k}^i\mathrm{k}^j}{\mathbf{k}^2}\,{}^{*}\Delta^{l}(k) + \left(\delta^{ij} - \frac{\mathrm{k}^i\mathrm{k}^j}{\mathbf{k}^2}\right){}^{*}\Delta^{t}(k). \tag{4.33}$$

Подстановка $E^{ai}_{\mathcal{Q}}(k)$ в (4.20) с учётом вида пропагатора (4.33) даёт следующее выражение для потерь энергии

$$-\frac{dE}{dx} = -\frac{1}{|\mathbf{v}|}\lim_{\tau\to\infty}\frac{(2\pi)^4}{\tau}\int d\mathbf{k}\,d\omega\int d\mathcal{Q}^{-}\,\frac{\omega}{\mathbf{k}^2}\left\{\frac{k^2}{\omega^2}\left\langle\left|(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}}^{a}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k},\omega))\right|^2\right\rangle\mathrm{Im}({}^{*}\Delta^{l}(k))\right.$$
$$\left. + \left\langle\left|(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\mathcal{J}}^{a}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k},\omega))\right|^2\right\rangle\mathrm{Im}({}^{*}\Delta^{t}(k))\right\}, \tag{4.34}$$

где мера интегрирования $d\mathcal{Q}^{-}$ определена посредством асимптотического значения цветного заряда $\mathcal{Q}^{-a}$. Рассмотрим вклад в потери энергии, связанный с рассеянием на продольных плазменных волнах, пропорциональный $\mathrm{Im}\,({}^{*}\Delta^{l}(p))$. Принимая во внимание (4.32) и последнее равенство в (4.27), приводим корреляционную функцию в (4.34) к следующему виду:

$$\left\langle\left|(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}}^{a}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k},\omega))\right|^2\right\rangle = \tag{4.35}$$

$$= (2\pi)^6\left\{F^2_{-\mathbf{k}}\mathbf{k}^2\int d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}'_1\,G^{(2)\,a_1 ab}_{\mathbf{k}_1,\,-\mathbf{k}}\,G^{*(2)\,a'_1 ab'}_{\mathbf{k}'_1,\,-\mathbf{k}}\left\langle(c^{-\,a_1}_{\mathbf{k}_1})^{*}c^{-\,a'_1}_{\mathbf{k}'_1}\right\rangle + \right.$$
$$\left. + F^2_{\mathbf{k}}\mathbf{k}^2\int d\mathbf{k}_2\,d\mathbf{k}'_2\,G^{(2)\,a a_2 b}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2}\,G^{*(2)\,a a'_2 b'}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}'_2}\left\langle(c^{-\,a'_2}_{\mathbf{k}'_2})^{*}c^{-\,a_2}_{\mathbf{k}_2}\right\rangle\right\}\mathcal{Q}^{-b}\mathcal{Q}^{-b'}.$$

Здесь сохраняем члены только с нетривиальными корреляторами:

$$\left\langle(c^{-\,a_1}_{\mathbf{k}_1})^{*}c^{-\,a'_1}_{\mathbf{k}'_1}\right\rangle = \mathcal{N}^{-a_1 a'_1}_{\mathbf{k}_1}\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}'_1),\quad \left\langle(c^{-\,a'_2}_{\mathbf{k}'_2})^{*}c^{-\,a_2}_{\mathbf{k}_2}\right\rangle = \mathcal{N}^{-a'_2 a_2}_{\mathbf{k}'_2}\delta(\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}_2). \tag{4.36}$$

Для матрицы плотности числа плазмонов $\mathcal{N}^{-aa'}_{\mathbf{k}}$ используем цветовую декомпозицию (3.53), предложенную в главе 3, записанную в терминах асимптотических in-переменных

$$\mathcal{N}^{-aa'}_{\mathbf{k}} = \delta^{aa'}N^{-l}_{\mathbf{k}} + \left(T^{c}\right)^{aa'}\mathcal{Q}^{-c}\,W^{-l}_{\mathbf{k}}, \tag{4.37}$$

где $N_{\mathbf{k}}^{-l}$ – бесцветная и $W_{\mathbf{k}}^{-l}$ – цветная части скалярной плотности числа плазмонов.

Сначала проведем анализ вклада бесцветной части асимптотической плотности числа плазмонов, пропорционального скалярной плотности $N_{\mathbf{k}}^{-l}$. Интегрирование (4.35) по $\mathcal{Q}^{-a}$ с учётом (4.22) приводит к

$$\int d\mathcal{Q}^{-}\,\mathcal{Q}^{-b}\,\mathcal{Q}^{-b'} = \frac{C_A}{d_A}\,\delta^{bb'}$$

и тогда

$$\int d\mathcal{Q}^{-}\big\langle|(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}}^{a}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{k},\omega))|^2\big\rangle = (2\pi)^6\,\frac{C_A}{d_A}\times \tag{4.38}$$

$$\times\left\{F^2_{-\mathbf{k}}\mathbf{k}^2\int d\mathbf{k}_1\,G^{(2)\,a_1ab}_{\mathbf{k}_1,-\mathbf{k}}\,G^{*(2)\,a_1ab}_{\mathbf{k}_1,-\mathbf{k}}N^{-l}_{\mathbf{k}_1}+\;F^2_{\mathbf{k}}\mathbf{k}^2\int d\mathbf{k}_1\,G^{(2)\,aa_1b}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\,G^{*(2)\,aa_1b}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}N^{-l}_{\mathbf{k}_1}\right\}.$$

Видно, что первый член в фигурных скобках удваивает второй если в (4.34) заменить $\mathbf{k}$ на $-\mathbf{k}$. С учетом вида коэффициентной функции $G^{(2)\,a_1a_2b}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ (4.18), находим

$$G^{(2)\,aa_1b}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\,G^{*(2)\,aa_1b}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} = \frac{1}{4}\,\mathcal{T}^{(2)\,baa_1}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\,\mathcal{T}^{*(2)\,baa_1}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}(2\pi)^2\,[\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1})]^2. \tag{4.39}$$

Цветовая и импульсная декомпозиции эффективной амплитуды

$$\mathcal{T}^{(2)\,aa_1a_2}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} = f^{aa_1a_2}\,\mathcal{T}^{(2)}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2},$$

приводят к

$$\mathcal{T}^{(2)\,baa_1}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\,\mathcal{T}^{*(2)\,baa_1}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} = f^{baa_1}\,f^{baa_1}\left|\mathcal{T}^{(2)}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2 = N_c d_A\left|\mathcal{T}^{(2)}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2.$$

Под $\big[\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1})\big]^2$ в (4.39) подразумеваем как обычно [78]

$$\big[\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1})\big]^2 = \frac{1}{2\pi}\,\tau\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}).$$

В результате, произведение (4.39) приводится к виду:

$$G^{(2)\,aa_1b}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\,G^{*(2)\,aa_1b}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} = \frac{1}{4}\,\tau\,N_c d_A\left|\mathcal{T}^{(2)}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2(2\pi)\,\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}). \tag{4.40}$$

Подставляя (4.40) в (4.38), а затем в (4.34), получим

$$-\frac{dE}{dx} = -\frac{1}{|\mathbf{v}|}\,\frac{(2\pi)^{10}}{2}\,N_c^2\times \tag{4.41}$$

$$\times\int d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}_1\,d\omega\left(\frac{k^2}{\omega}\right)F^2_{\mathbf{k}}\left|\mathcal{T}^{(2)}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2N^{-l}_{\mathbf{k}_1}\,(2\pi)\,\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1})\,\mathrm{Im}({}^{*}\Delta^{l}(k)).$$

В качестве завершающего этапа вычислений, в (4.41) следует заменить мнимую часть скалярного продольного пропагатора следующим представлением:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,({}^{*}\Delta^{l}(k)) &\simeq -\pi\,\mathrm{sign}(\omega)\,\delta(\mathrm{Re}\,{}^{*}\Delta^{-1\,l}(k)) \\ &= -\pi\,\mathrm{sign}(\omega)\left(\frac{\mathrm{Z}_l(\mathbf{k})}{2\omega^l_{\mathbf{k}}}\right)[\delta(\omega-\omega^l_{\mathbf{k}})+\delta(\omega+\omega^l_{\mathbf{k}})].\end{aligned}$$

Вклад второй δ-функции в квадратных скобках фактически просто удваивает вклад первой функции. Подставим приведенное выше представление в (4.41) и выполним интегрирование по ω. С учетом (4.31), находим искомое выражение для потерь энергии, порожденных бесцветной частью плотности числа плазмонов (4.37):

$$-\frac{dE}{dx}=\frac{1}{|\mathbf{v}|}\,\frac{(2\pi)^6}{8}\,N_c^2\int d\mathbf{k}d\mathbf{k}_1\left(\frac{k^2}{\omega^l_{\mathbf{k}}}\right)\left|\mathcal{T}^{(2)}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2 N^{-l}_{\mathbf{k}_1}\,\delta(\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)). \quad (4.42)$$

Аналогичный анализ проводим для определения вклада цветной части плотности числа плазмонов, пропорциональной скалярной плотности $W^{-l}_{\mathbf{k}}$. Для конкретности, в (4.35) рассмотрим выражение

$$G^{(2)\,a_1ab}_{\mathbf{k}_1,-\mathbf{k}}\,G^{*\,(2)\,a'_1ab'}_{\mathbf{k}'_1,-\mathbf{k}}\left\langle(c^{-\,a_1}_{\mathbf{k}_1})^{*}c^{-\,a'_1}_{\mathbf{k}'_1}\right\rangle\mathcal{Q}^{-b}\mathcal{Q}^{-b'}$$

или

$$G^{(2)\,a_1ab}_{\mathbf{k}_1,-\mathbf{k}}\,G^{*\,(2)\,a'_1ab'}_{\mathbf{k}'_1,-\mathbf{k}}\left(T^{\,c}\right)^{a_1a'_1}W^{-l}_{\mathbf{k}_1}\mathcal{Q}^{-c}\mathcal{Q}^{-b}\mathcal{Q}^{-b'}, \quad (4.43)$$

оставляя в корреляционной функции только неабелеву часть коррелятора $\left\langle(c^{-\,a_1}_{\mathbf{k}_1})^{*}c^{-\,a'_1}_{\mathbf{k}'_1}\right\rangle$. Выпишем цветовую зависимость функций $G^{\,(2)}$, полагая

$$G^{(2)\,a_1ab}_{\mathbf{k}_1,-\mathbf{k}}=f^{a_1ab}\,G^{(2)}_{\mathbf{k}_1,-\mathbf{k}},\qquad G^{*\,(2)\,a'_1ab'}_{\mathbf{k}'_1,-\mathbf{k}}=f^{a'_1ab'}\,G^{*\,(2)}_{\mathbf{k}'_1,-\mathbf{k}}$$

и выполним интегрирование симметричного по цветным индексам произведения трех асимптотических зарядов в (4.43) по $\mathcal{Q}^{-}$. В силу соотношений (4.22) получим оценку

$$\int d\mathcal{Q}^{-}\,\mathcal{Q}^{-c}\mathcal{Q}^{-b}\mathcal{Q}^{-b'}\sim\,d^{\,cbb'}.$$

Нетрудно заметить, что в результате цветовой коэффициент в выражении (4.43), пропорциональный следу произведения четырех генераторов, обратиться в ноль:

$$\mathrm{tr}\left(T^{\,a}T^{\,c}T^{\,a}D^{\,c}\right)=\frac{1}{2}\,N_c\,\mathrm{tr}\left(T^{\,c}D^{\,c}\right)=0.$$

Здесь введена матрица D^a с компонентами $\left(D^{\,a}\right)^{bc} \equiv d^{abc}$ и имеет место соотношение

$$T^{\,a}T^{\,b}T^{\,a} = \frac{1}{2}\,N_c T^{\,b}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что вклад в потери энергии, связанный с цветовой частью плотности числа плазмонов $W^{-l}_{\mathbf{k}}$, обращается в ноль. Это связано с тем, что цветовой фактор этого вклада, не связанный с динамикой системы, равен нулю.

4.7 Оценка потерь энергии

Используя явное выражение для потерь энергии (4.42), теперь можно приблизительно оценить $(-dE/dx)$ по порядку величин. Прежде всего, оценим порядок эффективной амплитуды $\mathfrak{T}^{(2)}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}$ (3.34) и (3.35). Основываясь на определениях (3.37), (3.14) и (A.5), в мягкой области импульсной шкалы, когда

$$|\mathbf{k}| \sim gT, \quad \omega^l_{\mathbf{k}} \sim gT,$$

для эйконального пропагатора $1/v\cdot k$, вершины взаимодействия плазмона с жёсткой частицей $\phi_{\mathbf{k}}$ и трёхплазмонной вершины $\mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ имеем следующие оценки:

$$\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}} \sim \frac{1}{gT}, \qquad \phi_{\mathbf{k}} \sim \frac{g}{(gT)^{1/2}}, \qquad \mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} \sim \frac{g}{(gT)^{1/2}}.$$

Принимая во внимание эти выражения, из (3.34) и (3.35) получим

$$\mathfrak{T}^{(2)}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} \sim \frac{1}{T^2}.$$

Далее, мера интегрирования в (4.42) имеет оценку:

$$d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}_1\,\delta(\omega^l_{\mathbf{k}} - \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)) \sim (gT)^5.$$

Окончательно можно получить грубую оценку потерь энергии (4.42):

$$-\frac{dE}{dx} \sim N_c^2 g^6 T^2 N^{-l}_{\mathbf{k}}.$$

Если рассматривать асимптотическую плотность числа плазмонов[4] $N^{-l}_{\mathbf{k}} \sim 1/g^{\rho}$, $\rho > 0$, тогда из последнего выражения следует

$$-\frac{dE}{dx} \sim N_c^2 g^{6-\rho} T^2. \tag{4.44}$$

[4] Эта оценка является следствием определений нормальных переменных бозонного поля $c^{-a}_{\mathbf{k}}$ и $(c^{-a}_{\mathbf{k}})^*$ (4.28), корреляционной функции (4.36) и оценки амплитуды колебаний асимптотического мягкого поля $\mathcal{A}^{-a}_i(x)$ для слабовозбуждённых и сильновозбуждённых состояний КГП (см. текст ниже).

Для слабовозбуждённого состояния кварк-глюонной плазмы, когда $\left|\mathcal{A}_i^{-a}(x)\right| \sim \sqrt{g}\,T$ (уровень тепловых флуктуаций на мягкой импульсной шкале [8, 79]), нужно полагать $\rho = 1$ и тогда

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{low}} \sim N_c^2 g^5 T^2. \tag{4.45}$$

Для более реалистичной оценки необходимо выполнить явный аналитический (или численный) расчет двойного интеграла по импульсам $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_1$ в правой части (4.42). Данная процедура сама по себе является предметом специального исследования и не обсуждается в данной работе. Здесь возможно появление логарифмического фактора в выражении для потерь энергии $(-dE/dx)_{\text{low}}$.

В случае сильного поля, когда $\left|\mathcal{A}_i^{-a}(x)\right| \sim T$, нужно полагать $\rho = 2$ и тогда из оценки (4.44) следует

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{high}} \sim N_c^2 (g^2 T)^2. \tag{4.46}$$

Когда рассматриваемая система сильно возбуждена, можно ожидать, что процессы рассеяния более высокого порядка (см. рис. 4.2) по сравнению с процесса-

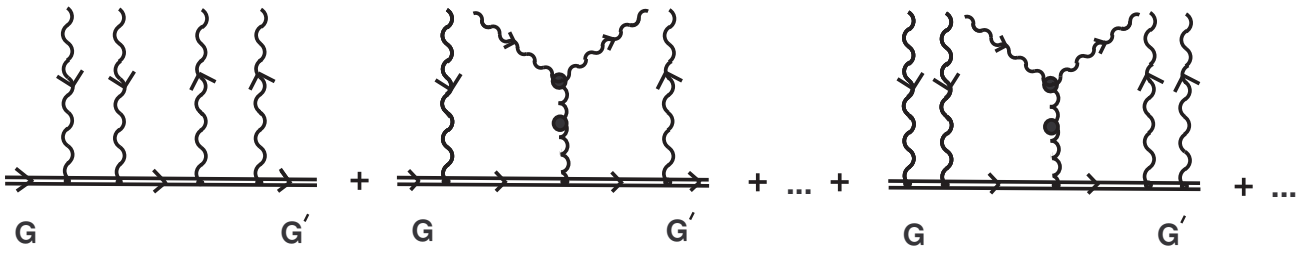


Рисунок 4.2 — Процессы упругого рассеяния в древесном приближении с четырьмя и более плазмонами

ми рассеяния, представленными на рис. 3.2, имеют тот же порядок по константе сильного взаимодействия g, и здесь необходимо суммировать все соответствующие вклады.

Как упоминалось во Введении, потери энергии (4.42), обусловленные процессами упругого рассеяния жёсткой частицы на мягких коллективных возбуждениях кварк-глюонной плазмы, представляют академический интерес в отличие от тормозных и столкновительных потерь. Это хорошо видно из оценки потерь энергии (4.45). Эта оценка подавляется константой сильной связи g по сравнению с аналогичными оценками, полученными ранее в рамках моделей переноса на основе пертурбативной КХД или полуклассических моделей потерь

энергии из-за индуцированного средой глюонного тормозного излучения (см., например, [80–88]) и упругих столкновений с жёсткими термальными частицами [83, 87, 89–93]. Однако это подавление происходит, когда состояние КГП близко к тепловому равновесию. В случае, когда состояние системы далеко от равновесия, согласно оценке (4.46), потери энергии сравнимы по величине с потерями, связанными с радиационным излучением и прямыми столкновениями с жёсткими частицами среды. Это является следствием больших значений чисел заполнения мягкого глюона.

4.8 Выводы

В этой главе, на основе подхода Захарова-Шульмана, предложенного для формализации описания гамильтоновых волновых систем различной физической природы, используя уравнения Гамильтона для переменной нормального бозонного поля и цветного заряда жёсткой частицы, определена классическая матрица рассеяния для упругого рассеяния жёсткой цветозаряженной частицы на мягких бозе-возбуждениях неабелевой плазмы. Применяемый подход является довольно универсальным, что дало возможность предложить метод построения классической $\mathcal{S}$-матрицы для достаточно сложного объекта, каким является неравновесная КГП, взаимодействующая с ультрарелятивистскими партонами с цветным зарядом, инжектируемыми извне в результате жёстких столкновений сильно взаимодействующих частиц. На основе найденной $\mathcal{S}$-матрицы был определен вид эффективного цветного тока, который порождает рассматриваемый процесс взаимодействия, и определено выражение для потери энергии быстрой цветозаряженной частицы с целым спином, движущейся в кварк-глюонной плазме.

Сделаем дополнительный комментарий к данной главе. Оставаясь в рамках чисто классического рассмотрения, можно учесть вклад в потери энергии, связанный с (классическим) спином частицы. В литературе имеются работы в данном направлении, но поправки, вносимые спином, действительно являются сублидирующими, как и поправки, связанные с учетом отклонения от используемого нами приближения прямолинейной траектории движения. Цветовая степень свободы жёсткой частицы является определяющим фактором в

нашем рассмотрении. Потери энергии, которые рассматривались в четвертой главе, мы связываем именно с жесткой бозонной частицей в силу того, что её цветовая степень свободы описывается вектором классического (т.е. коммутирующего) цветного заряда $\mathcal{Q}^a$, цветной индекс которого относится к присоединённому представлению, как это имеет место у глюона. Цветовая степень свободы жесткой фермионной частицы должна описываться вектором грассманова (т.е. антикоммутирующего) цветного заряда θ^i, цветной индекс которого относится к фундаментальному представлению, как это имеет место у кварка. Это приведет, вообще говоря, к другому выражению для потерь энергии. Именно в этом месте должно проявиться различие в типе статистики частицы.

Глава 5

Гамильтонов формализм для бозе-возбуждений в КГП: тормозное излучение плазмонов

5.1 Гамильтониан взаимодействия плазмонов и двух жёстких частиц

Рассмотрим потенциал калибровочного поля в виде разложения на плоские волны (2.1) и ограничимся анализом процессов, связанных с возбуждениями продольно поляризованных плазменных волн. Представим исходную нормальную переменную $a^a_{\mathbf{k}}$ в виде суммы двух независимых переменных:

$$a^a_{\mathbf{k}} = \sum_{\alpha=1,2} a^{(\alpha)a}_{\mathbf{k}}. \tag{5.1}$$

Это первое из основных предположений в построении классической теории тормозного излучения в рамках гамильтонового формализма. Далее потребуем, чтобы компоненты $a^{(\alpha)a}_{\mathbf{k}}$ и $a^{*(\alpha)a}_{\mathbf{k}}$ удовлетворяли соотношениям:

$$\left\{a^{(\alpha)a}_{\mathbf{k}},\, a^{(\beta)b}_{\mathbf{k}'}\right\}_{\mathrm{LPB}} = 0,\;\; \left\{a^{*(\alpha)a}_{\mathbf{k}},\, a^{*(\beta)b}_{\mathbf{k}'}\right\}_{\mathrm{LPB}} = 0,\;\; \left\{a^{(\alpha)a}_{\mathbf{k}},\, a^{*(\beta)b}_{\mathbf{k}'}\right\}_{\mathrm{LPB}} = \delta^{\alpha\beta}\delta^{ab}\delta(\mathbf{k}{-}\mathbf{k}'). \tag{5.2}$$

С другой стороны, при рассмотрении цветных зарядов Q^a_1 и Q^a_2, та же скобка Ли-Пуассона должна иметь вид:

$$\left\{Q^a_\alpha, Q^b_\beta\right\}_{\mathrm{LPB}} = \delta^{\alpha\beta} f^{abc} Q^c_\beta, \quad \text{(нет суммирования по } \beta\text{!)}. \tag{5.3}$$

Скобку Ли-Пуассона для непрерывной среды запишем как

$$\{F,\,G\}_{\rm LPB}=\sum_{\rho=1,2}\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta F}{\delta a^{(\rho)c}_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta G}{\delta a^{*(\rho)c}_{\mathbf{k}'}}-\frac{\delta F}{\delta a^{*(\rho)c}_{\mathbf{k}'}}\frac{\delta G}{\delta a^{(\rho)c}_{\mathbf{k}'}}\right\}+i\sum_{\rho=1,2}\frac{\partial F}{\partial Q^a_\rho}\frac{\partial G}{\partial Q^b_\rho}\,f^{abc}Q^c_\rho.$$

Здесь первый член – это стандартная каноническая скобка Пуассона. Выпишем далее гамильтоновы уравнения для функций $a^{(\alpha)a}_{\mathbf{k}}$, $a^{*(\alpha)a}_{\mathbf{k}}$ и цветных зарядов Q^a_α:

$$\frac{\partial a^{(\alpha)a}_{\mathbf{k}}}{\partial t}=-i\big\{a^{(\alpha)a}_{\mathbf{k}},H\big\}\equiv-i\,\frac{\delta H}{\delta a^{*(\alpha)a}_{\mathbf{k}}}\,,\;\frac{\partial a^{*(\alpha)a}_{\mathbf{k}}}{\partial t}=-i\big\{a^{*(\alpha)a}_{\mathbf{k}},H\big\}\equiv i\,\frac{\delta H}{\delta a^{(\alpha)a}_{\mathbf{k}}}\,, \quad (5.4)$$

$$\frac{dQ^a_\alpha}{dt}=-i\,\{Q^a_\alpha,H\}=\frac{\partial H}{\partial Q^b_\alpha}\,f^{abc}Q^c_\alpha,\quad Q^a_\alpha|_{t=t_0}=Q^a_{0\alpha}. \quad (5.5)$$

Здесь $H=H^{(0)}+H_{int}$ – гамильтониан для системы плазмонов и жёсткой тестовой частицы, где H_{int} представляет собой гамильтониан взаимодействия плазмонов и двух тестовых частиц, движущихся в КГП с постоянными скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, соответственно. Сделаем еще одно основное предположение, в данном случае касающееся структуры свободного гамильтониана $H^{(0)}$, а именно полагаем

$$H^{(0)}=\sum_{\alpha=1,2}\int d\mathbf{k}\,(\omega^l_{\mathbf{k}}-\mathbf{v}_\alpha\cdot\mathbf{k})\,a^{*(\alpha)a}_{\mathbf{k}}a^{(\alpha)a}_{\mathbf{k}}. \quad (5.6)$$

Специфика дисперсионного соотношения $\omega^l_{\mathbf{k}}$ для продольных бозонных возбуждений в горячей кварк-глюонной плазме накладывает ограничение на множитель $(\omega^l_{\mathbf{k}}-\mathbf{v}_\alpha\cdot\mathbf{k})$ в (5.6), а именно, он никогда не обращается в ноль:

$$\omega^l_{\mathbf{k}}-\mathbf{v}_\alpha\cdot\mathbf{k}\neq0 \quad (5.7)$$

для произвольных волнового вектора $\mathbf{k}$. С физической точки зрения, это говорит о том, что в неабелевой плазме линейное затухание Ландау (излучение Черенкова) кинематически запрещено.

В приближении малых амплитуд гамильтониан H_{int} можно разложить в виде формального интегро-степенного ряда по $a^a_{\mathbf{k}}$, $a^{*a}_{\mathbf{k}}$ и Q^a_1, Q^a_2:

$$H_{int}=H^{(3)}+H^{(4)}+\,\ldots\,,$$

где

$$H^{(3)}=\sum_\alpha\int d\mathbf{k}\Big[\,\phi^{(\alpha)}_{\mathbf{k}}(t)Q^a_\alpha\,a^a_{\mathbf{k}}+\phi^{*(\alpha)}_{\mathbf{k}}(t)Q^a_\alpha\,a^{*a}_{\mathbf{k}}\,\Big]+ \quad (5.8)$$

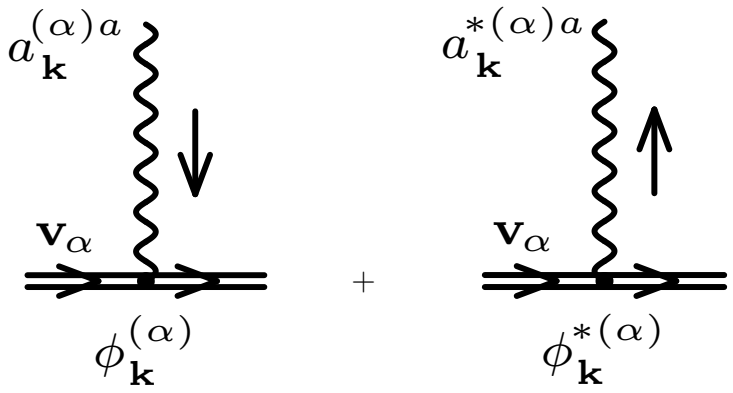


Рисунок 5.1 — Элементарные вершины взаимодействия мягких бозонных возбуждений с жёсткой тестовой цветозаряженной частицей с меткой α

$$+\int d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \Big\{ \mathcal{V}^{a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}(t)\, a^{*a}_{\mathbf{k}}\, a^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\, a^{a_2}_{\mathbf{k}_2} \,+\, \mathcal{V}^{*\,a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}(t)\, a^{a}_{\mathbf{k}}\, a^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}\, a^{*a_2}_{\mathbf{k}_2} \Big\} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) +$$

$$+\,\frac{1}{3}\int d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \Big\{ \mathcal{U}^{a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}(t)\, a^{a}_{\mathbf{k}}\, a^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\, a^{a_2}_{\mathbf{k}_2} \,+\, \mathcal{U}^{*\,a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}(t)\, a^{*a}_{\mathbf{k}}\, a^{*a_1}_{\mathbf{k}_1}\, a^{*a_2}_{\mathbf{k}_2} \Big\} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2).$$

Вещественность гамильтониана (5.8) очевидна. Следует сразу отметить, что в отличие от свободного гамильтониана (5.6), при написании гамильтониана взаимодействия использованы полные амплитуды $a^{a}_{\mathbf{k}}$ и $a^{*a}_{\mathbf{k}}$ (5.8), а не их отдельные компоненты[1]. Два члена в квадратных скобках в первой строке в (5.8) описывают взаимодействие мягких глюонных возбуждений с жёсткой цветозаряженной частицей, помеченной меткой α, как показано на рис. 5.1. Двойная линия обозначает жёсткую частицу, несущую цветной заряд Q^{a}_{α}. Вершины взаимодействия для входящих и исходящих волновых линий (плазмонов) определяются функциями $\phi^{(\alpha)}_{\mathbf{k}}$ и $\phi^{*(\alpha)}_{\mathbf{k}}$ в гамильтониане $H^{(3)}$. Вершинные функции $\mathcal{V}^{a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}(t)$ и $\mathcal{U}^{a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}(t)$ в остальных вкладах в (5.8) связаны с процессами трёхплазмонного взаимодействия.

В вершинных функциях $\phi^{(\alpha)}_{\mathbf{k}}(t)$, $\mathcal{V}^{a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}(t)$ и $\mathcal{U}^{a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}(t)$ явно присутствует зависимость от времени t. В дальнейших построениях, связанных с многовременным формализмом (см. раздел 5.4), будем называть это время “быстрым”. Для трёхплазмонных вершин $\mathcal{V}^{a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}(t)$ и $\mathcal{U}^{a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}(t)$ зависимость от t определяется тривиально в следующем виде:

$$\mathcal{V}^{a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}(t) = \mathcal{V}^{a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\, \mathrm{e}^{\,i(\omega^{l}_{\mathbf{k}}-\omega^{l}_{\mathbf{k}_1}-\omega^{l}_{\mathbf{k}_2})t},\;\; \mathcal{U}^{a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}(t) = \mathcal{U}^{a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}\, \mathrm{e}^{\,-i(\omega^{l}_{\mathbf{k}}+\omega^{l}_{\mathbf{k}_1}+\omega^{l}_{\mathbf{k}_2})t}. \quad (5.9)$$

[1]Можно предположить, что это обстоятельство будет справедливо и для гамильтонианов взаимодействия $H^{(n)}$ более высокого порядка $n \geq 4$.

Зависимость $\phi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}(t)$ от "быстрого" времени приведена ниже.

В рамках HTL-приближения явный вид трёхточечных амплитуд $\mathcal{V}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{a\,a_1 a_2}$ и $\mathcal{U}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}^{a\,a_1 a_2}$ в определен в первой главе. Их цветовая и импульсная структуры задаются равенствами (3.12), а свойства симметрии – соотношениями (1.40).

В качестве определения вершинной функции $\phi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}(t)$ используем выражение, приведенное в работе [24] для случая одной жёсткой тестовой частицы с соответствующим обобщением на рассматриваемый случай:

$$\phi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}(t) = \phi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}\, \mathrm{e}^{-i(\omega_{\mathbf{k}}^{l} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\alpha)t} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_{0\alpha}}, \;\; \alpha = 1, 2, \tag{5.10}$$

где $\mathbf{x}_{0\alpha}$ – начальное положение жёстких частиц и

$$\phi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} \equiv g \left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^{l}} \right)^{1/2} (v_\alpha \cdot \epsilon^{l}(\mathbf{k})), \quad v_\alpha^{\mu} = (1, \mathbf{v}_\alpha).$$

5.2 Канонические преобразования

Далее будем рассматривать преобразования от компонент $a_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}$ и цветного заряда Q_α^a к новым $c_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}$ и $\mathcal{Q}_\alpha^a$:

$$a_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a} = a_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}(c_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}, c_{\mathbf{k}}^{*(\alpha)a}, \mathcal{Q}_\alpha^a), \qquad Q_\alpha^a = Q_\alpha^a(c_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a},\, c_{\mathbf{k}}^{*(\alpha)a},\, \mathcal{Q}_\alpha^a). \tag{5.11}$$

Как обычно требуем, чтобы уравнения Гамильтона в терминах новых переменных имели вид (5.4) и (5.5) с тем же гамильтонианом H. Несложные, но довольно громоздкие в вычислительном плане выкладки приводят к двум системам интегральных соотношений. Здесь выписываем вид только первой из них:

$$\sum_\rho \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{(\rho)c}} \frac{\delta a_{\mathbf{k}''}^{*(\beta)b}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*(\rho)c}} - \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*(\rho)c}} \frac{\delta a_{\mathbf{k}''}^{*(\beta)b}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{(\rho)c}} \right\} + i \sum_\rho \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}}{\partial \mathcal{Q}_\rho^c} \frac{\partial a_{\mathbf{k}''}^{*(\beta)b}}{\partial \mathcal{Q}_\rho^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}_\rho^d =$$

$$= \delta^{ab}\delta^{\alpha\beta}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}''), \tag{5.12a}$$

$$\sum_\rho \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{(\rho)c}} \frac{\delta a_{\mathbf{k}''}^{(\beta)b}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*(\rho)c}} - \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*(\rho)c}} \frac{\delta a_{\mathbf{k}''}^{(\beta)b}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{(\rho)c}} \right\} + i \sum_\rho \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}}{\partial \mathcal{Q}_\rho^c} \frac{\partial a_{\mathbf{k}''}^{(\beta)b}}{\partial \mathcal{Q}_\rho^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}_\rho^d = 0, \tag{5.12b}$$

$$\sum_\rho \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{(\rho)c}} \frac{\delta Q_\beta^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*(\rho)c}} - \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*(\rho)c}} \frac{\delta Q_\beta^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{(\rho)c}} \right\} + i \sum_\rho \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}}{\partial \mathcal{Q}_\rho^c} \frac{\partial Q_\beta^b}{\partial \mathcal{Q}_\rho^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}_\rho^d = 0. \tag{5.12c}$$

Вторую систему здесь не выписываем. Канонические преобразования (5.11) представим в виде разложения в интегро-степенные ряды по $c_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}$ и по $\mathcal{Q}_{\alpha}^{a}$. Выпишем первое преобразование в (5.11), оставляя лишь члены до четвертого порядка включительно

$$a_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a} = c_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a} + \sum_{\beta} F_{\mathbf{k}}^{(\alpha,\beta)}\,\mathcal{Q}_{\beta}^{a} + \tag{5.13}$$

$$+ \sum_{\alpha_1,\alpha_2} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \Big[V^{(1|\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} c_{\mathbf{k}_1}^{(\alpha_1)a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{(\alpha_2)a_2} + V^{(2|\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*\,(\alpha_1)a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{(\alpha_2)a_2} +$$

$$+ V^{(3|\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*\,(\alpha_1)a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{*\,(\alpha_2)a_2} \Big] +$$

$$+ \sum_{\alpha_1,\alpha_2} \int d\mathbf{k}_1 \Big[\widetilde{V}^{(1|\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} c_{\mathbf{k}_1}^{*\,(\alpha_1)a_1}\,\mathcal{Q}_{\alpha_2}^{a_2} + \widetilde{V}^{(2|\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} c_{\mathbf{k}_1}^{(\alpha_1)a_1}\,\mathcal{Q}_{\alpha_2}^{a_2} \Big] + \ldots .$$

Напомним, что степень нелинейности цветного заряда равна двум. Аналогично, можно выписать искомое разложение вплоть до членов четвертого порядка для второго преобразования в (5.11):

$$Q_{\alpha}^{a} = \mathcal{Q}_{\alpha}^{a} + \sum_{\alpha_1,\alpha_2} \int d\mathbf{k}_1 \Big[M^{(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k}_1} c_{\mathbf{k}_1}^{(\alpha_1)a_1}\,\mathcal{Q}_{\alpha_2}^{a_2} + M^{*(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k}_1} c_{\mathbf{k}_1}^{*\,(\alpha_1)a_1}\,\mathcal{Q}_{\alpha_2}^{a_2} \Big] + \tag{5.14}$$

$$+ \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \Big[M^{(1|\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\,a\,a_1\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} c_{\mathbf{k}_1}^{(\alpha_1)a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{(\alpha_2)a_2}\,\mathcal{Q}_{\alpha_3}^{a_3} +$$

$$M^{(2|\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\,a\,a_1\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*\,(\alpha_1)a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{(\alpha_2)a_2}\,\mathcal{Q}_{\alpha_3}^{a_3} + M^{*\,(1|\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\,a\,a_1\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*\,(\alpha_1)a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{*\,(\alpha_2)a_2}\,\mathcal{Q}_{\alpha_3}^{a_3} \Big] +$$

$$+ \ldots .$$

Отметим, что коэффициентные функции в (5.13) и (5.14) построены с использованием компонент $c_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}$ амплитуды нового бозонного поля, и поэтому эти функции теперь могут довольно нетривиальным образом зависеть от нового “индекса” α. Это принципиально отличает их от вершинных функций, входящих в исходный гамильтониан взаимодействия, например, $H^{(3)}$ (5.8), поскольку этот гамильтониан включает только полную амплитуду (5.1). Эта нетривиальная зависимость, как увидим ниже, порождается исключительно выбранной структурой свободного гамильтониана $H^{(0)}$ (5.6).

Подстановка (5.13) и (5.14) в (5.12), приводит к нетривиальным связям между коэффициентными функциями, для примера приведем. Здесь только

алгебраические соотношения для низших коэффициентных функций второго порядка:

$$V^{(2|\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = -2V^{*(1|\alpha_2,\alpha_1,\alpha)\,a_2\,a_1\,a}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}},\ V^{(3|\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2} = V^{(3|\alpha_1,\alpha,\alpha_2)\,a_1\,a\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2}, \quad (5.15)$$

$$M^{(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k}_1} + if^{\,a\,a_1\,a_2}\delta^{\alpha\alpha_2}F^{*(\alpha_1,\alpha)}_{\mathbf{k}_1} = 0, \quad (5.16)$$

$$\widetilde{V}^{(1|\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} - \widetilde{V}^{(1|\alpha_1,\alpha,\alpha_2)\,a_1\,a\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}} - if^{\,a\,a_1\,a_2}F^{(\alpha,\alpha_2)}_{\mathbf{k}}F^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{\mathbf{k}_1} = 0, \quad (5.17)$$

$$\widetilde{V}^{(2|\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1} + \widetilde{V}^{*(2|\alpha_1,\alpha,\alpha_2)\,a_1\,a\,a_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}} + if^{\,a\,a_1\,a_2}F^{(\alpha,\alpha_2)}_{\mathbf{k}}F^{*(\alpha_1,\alpha_2)}_{\mathbf{k}_1} = 0. \quad (5.18)$$

Особо подчеркнем, что в (5.16) – (5.18) отсутствует суммирование по α и α_2, и в (5.16) оставили импульс $\mathbf{k}_1$ с меткой 1 для того, чтобы показать, что он связан с индексами α_1 и a_1 в $M^{(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k}_1}$.

5.3 Эффективный гамильтониан пятого порядка $\mathcal{H}^{(5)}$

Приступим теперь к процедуре исключения гамильтониана взаимодействия третьего порядка $H^{(3)}$ (5.8) при переходе от переменных $a^{(\alpha)a}_{\mathbf{k}}$ и Q^a_α к новым $c^{(\alpha)a}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{Q}^a_\alpha$ в результате канонических преобразований (5.13) и (5.14). В главе 3 такая процедура была использована при рассмотрении взаимодействия мягких бозонных возбуждений с одной жёсткой тестовой частицей. В данной главе новым моментом, на котором остановимся подробно, будет рассмотрение взаимодействия мягких бозонных возбуждений с двумя жёсткими тестовыми частицами.

Для того, чтобы исключить гамильтониан взаимодействия $H^{(3)}$, подставим (5.13) и (5.14) в гамильтониан $H^{(0)}$ (5.6), оставляя в новых переменных $c^{(\alpha)a}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{Q}^a_\alpha$ члены, имеющие степень нелинейности два или три. Далее в гамильтониане третьего порядка $H^{(3)}$ (5.8) заменим $a^{(\alpha)a}_{\mathbf{k}}$ на $c^{(\alpha)a}_{\mathbf{k}}$ и Q^a_α на $\mathcal{Q}^a_\alpha$. Добавление полученного таким образом выражения к выражению, которое следует из гамильтониана $H^{(0)}$ приводит в итоге к

$$H^{(0)} + H^{(3)} = \sum_\alpha \int d\mathbf{k}\,(\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}_\alpha\cdot\mathbf{k})\,c^{*(\alpha)a}_{\mathbf{k}}c^{(\alpha)a}_{\mathbf{k}} + \quad (5.19)$$

$$+\sum_{\alpha,\beta}\int d\mathbf{k}\Big\{\Big[(\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}_\alpha\cdot\mathbf{k})\,F^{*(\alpha,\beta)}_{\mathbf{k}} + \phi^{(\beta)}_{\mathbf{k}}\Big]c^{(\alpha)a}_{\mathbf{k}}\mathcal{Q}^a_\beta +$$

$$+\Big[(\omega^l_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}_\alpha\cdot\mathbf{k})\,F^{(\alpha,\beta)}_{\mathbf{k}} + \phi^{*(\beta)}_{\mathbf{k}}\Big]c^{*(\alpha)a}_{\mathbf{k}}\mathcal{Q}^a_\beta\Big\}.$$

Явный вид коэффициентной функции $F_{\mathbf{k}}^{(\alpha,\beta)}$ в (5.13) в терминах вершинных функций $\phi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}$ следует из требования обращения в ноль выражения в фигурных скобках в (5.19):

$$F_{\mathbf{k}}^{(\alpha,\beta)} = -\frac{\phi_{\mathbf{k}}^{*(\beta)}}{\omega_{\mathbf{k}}^{l} - \mathbf{v}_{\alpha}\cdot\mathbf{k}}\,. \tag{5.20}$$

Отношение (5.20) имеет смысл в силу условия (5.7). С учетом (5.20), из (5.16) определим коэффициентную функцию $M_{\mathbf{k}_1}^{(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2}$, входящую в каноническое преобразование цветных зарядов Q_{α}^{a} (5.14):

$$M_{\mathbf{k}_1}^{(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2} = if^{\,a\,a_1\,a_2}\delta^{\alpha\alpha_2}\,\frac{\phi_{\mathbf{k}_1}^{(\alpha)}}{\omega_{\mathbf{k}_1}^{l} - \mathbf{v}_{\alpha_1}\cdot\mathbf{k}_1}\,. \tag{5.21}$$

Из требования исключения членов третьего порядка в гамильтониане $H^{(3)}$ (5.8), содержащем вершинные функции $\mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{\,a\,a_1\,a_2}$ и $\mathcal{U}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{\,a\,a_1\,a_2}$, следуют выражения для коэффициентных функций $V_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{(1,3|\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2}$ в (5.13):

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{(1|\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2} = -\frac{\mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{\,a\,a_1\,a_2}}{\left(\omega_{\mathbf{k}}^{l} - \mathbf{v}_{\alpha}\cdot\mathbf{k}\right) - \left(\omega_{\mathbf{k}_1}^{l} - \mathbf{v}_{\alpha_1}\cdot\mathbf{k}_1\right) - \left(\omega_{\mathbf{k}_2}^{l} - \mathbf{v}_{\alpha_2}\cdot\mathbf{k}_2\right)}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2),$$

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{(3|\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2} = -\frac{\mathcal{U}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{*\,a\,a_1\,a_2}}{\left(\omega_{\mathbf{k}}^{l} - \mathbf{v}_{\alpha}\cdot\mathbf{k}\right) + \left(\omega_{\mathbf{k}_1}^{l} - \mathbf{v}_{\alpha_1}\cdot\mathbf{k}_1\right) + \left(\omega_{\mathbf{k}_2}^{l} - \mathbf{v}_{\alpha_2}\cdot\mathbf{k}_2\right)}\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2). \tag{5.22}$$

Заметим, что знаменатели этих выражений для произвольных значений α, α_1 и α_2 явно содержат волновые векторы, в отличие, например, от аналогичных выражений в [24, 43, 45]. Коэффициент $V_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{(2|\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\,a\,a_1\,a_2}$ находится из (5.15).

Таким образом, теперь вместо (5.19) получаем новый гамильтониан $\mathcal{H}^{(0)}$ в терминах новых нормальных переменных $c_{\mathbf{k}}^{*(\alpha)a}$ и $c_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}$:

$$\mathcal{H}^{(0)} = \sum_{\alpha}\int d\mathbf{k}\,\left(\omega_{\mathbf{k}}^{l} - \mathbf{v}_{\alpha}\cdot\mathbf{k}\right)c_{\mathbf{k}}^{*(\alpha)a}c_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}. \tag{5.23}$$

В дальнейшем для обозначения таких гамильтонианов будем использовать каллиграфическую букву $\mathcal{H}$.

Далее построим эффективный гамильтониан пятого порядка, описывающий тормозное излучение, возникающее при взаимодействии двух жёстких цветозаряженных частиц[2]. Для этого в гамильтонианах $H^{(0)}$ (5.6) и $H^{(3)}$ (5.8)

[2]В рамках принятого нами формального правила подсчета степеней этот гамильтониан обладает более высокой степенью нелинейности, чем все гамильтонианы, которые рассматривались до сих пор в [24, 43–45], и описывает качественно новый физический процесс.

собираем все члены, пропорциональные $c_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}\mathcal{Q}_1^{a_1}\mathcal{Q}_2^{a_2}$ и $c_{\mathbf{k}}^{*(\alpha)a}\mathcal{Q}_1^{a_1}\mathcal{Q}_2^{a_2}$, которые порождаются каноническими преобразованиями (5.13) и (5.14). Эффективный гамильтониан пятого порядка $\mathcal{H}^{(5)}$, описывающий тормозное излучение плазмонов, таким образом примет вид:

$$\mathcal{H}^{(5)} = \sum_{\rho}\int d\mathbf{k}\, T_{\mathbf{k}}^{(\rho)a\,a_1a_2}\, c_{\mathbf{k}}^{(\rho)a}\mathcal{Q}_1^{a_1}\mathcal{Q}_2^{a_2} + \sum_{\rho}\int d\mathbf{k}\, T_{\mathbf{k}}^{*(\rho)a\,a_1a_2}\, c_{\mathbf{k}}^{*(\rho)a}\mathcal{Q}_1^{a_1}\mathcal{Q}_2^{a_2}. \quad (5.24)$$

Здесь эффективная амплитуда $T_{\mathbf{k}}^{(\rho)a\,a_1a_2}(t)$ имеет следующую структуру:

$$T_{\mathbf{k}}^{(\rho)a\,a_1a_2}(t) = \int d\mathbf{q}\, T_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^{(\rho)a\,a_1a_2}(t), \quad (5.25)$$

где "плотность" амплитуды $T_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^{(\rho)a\,a_1a_2}$ представлена суммой двух различных по физическому содержанию слагаемых:

$$T_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^{(\rho)a\,a_1a_2}(t) = T_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^{\mathrm{I}\,(\rho)a\,a_1a_2}(t) + T_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^{\mathrm{II}\,(\rho)a\,a_1a_2}(t). \quad (5.26)$$

Первая часть имеет следующую структуру:

$$T_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^{\mathrm{I}\,(\rho)a\,a_1a_2}(t) = -if^{a\,a_1a_2}\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v}_\rho\cdot\mathbf{k}}\left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{q}}^l - \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{q}} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{q}}^l - \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{q}}\right)\times \quad (5.27)$$

$$\times\Big[\phi_{\mathbf{q}}^{(1)}(t)\phi_{\mathbf{q}}^{*(2)}(t)\phi_{\mathbf{k}}^{(1)}(t) + \phi_{\mathbf{q}}^{*(1)}(t)\phi_{\mathbf{q}}^{(2)}(t)\phi_{\mathbf{k}}^{(1)}(t) -$$

$$-\phi_{\mathbf{q}}^{(2)}(t)\phi_{\mathbf{q}}^{*(1)}(t)\phi_{\mathbf{k}}^{(2)}(t) - \phi_{\mathbf{q}}^{*(2)}(t)\phi_{\mathbf{q}}^{(1)}(t)\phi_{\mathbf{k}}^{(2)}(t)\Big],$$

в то время как вторая часть может быть представлена в виде:

$$T_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^{\mathrm{II}\,(\rho)a\,a_1a_2}(t) = \mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{*\,a\,a_1a_2}(t)\left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{q}}^l - \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{q}} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{q}}^l - \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{q}}\right)\times \quad (5.28)$$

$$\left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^l - \mathbf{v}_1\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^l - \mathbf{v}_2\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})}\right)\Big[\phi_{\mathbf{q}}^{(1)}(t)\phi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{(2)}(t) - \phi_{\mathbf{q}}^{(2)}(t)\phi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{(1)}(t)\Big] +$$

$$+2\mathcal{V}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}-\mathbf{k},\,\mathbf{k}}^{a_1a_2\,a}(t)\left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{q}}^l - \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{q}} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{q}}^l - \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{q}}\right)\times$$

$$\left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^l - \mathbf{v}_1\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{k})} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^l - \mathbf{v}_2\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{k})}\right)\Big[\phi_{\mathbf{q}}^{(1)}(t)\phi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^{*(2)}(t) - \phi_{\mathbf{q}}^{(2)}(t)\phi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^{*(1)}(t)\Big] +$$

$$+\mathcal{U}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q},\,-\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{a\,a_1a_2}(t)\left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{q}}^l - \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{q}} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{q}}^l - \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{q}}\right)\times$$

$$\left(\frac{1}{\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}^l + \mathbf{v}_1\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{q})} + \frac{1}{\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}^l + \mathbf{v}_2\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{q})}\right)\Big[\phi_{\mathbf{q}}^{*(1)}(t)\phi_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{*(2)}(t) - \phi_{\mathbf{q}}^{*(2)}(t)\phi_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{*(1)}(t)\Big].$$

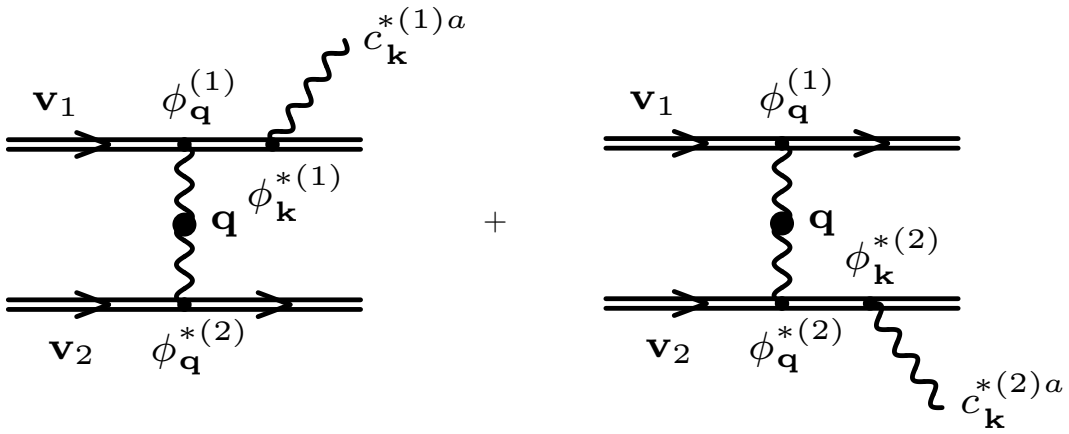


Рисунок 5.2 — Диаграммное представление первого и последнего членов в квадратных скобках в комплексно-сопряженном выражении эффективной амплитуды $T^{\mathrm{I}\,(\rho)a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$ (5.27)

Видно, что только первая часть общей амплитуды $T^{(\rho)a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$, а именно $T^{\mathrm{I}\,(\rho)a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$ фактически зависит от индекса ρ. Эффективная амплитуда $T^{\mathrm{I}\,(\rho)a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$ описывает комптоноподобное тормозное излучение плазмона. Рисунок 5.2 представляет диаграммную интерпретацию различных членов в (5.27) (точнее, в сопряженном выражении $T^{*\mathrm{I}\,(\rho)a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$). Черная точка обозначает HTL-ресуммирование, а двойная линия – жёсткую частицу. Тормозное излучение плазмонов в данном случае порождается жёсткой частицей 1 или частицей 2. В (5.27) это отражено в множителе с индексом $\rho = 1, 2$. Выходящие волновые линии на рис. 5.2 соответствуют компонентам $c^{(\rho)a}_{\mathbf{k}}$ переменной $c^{a}_{\mathbf{k}}$, двойная горизонтальная линия между двумя вершинами взаимодействия – “пропагатору” жёстких частиц

$$\frac{1}{\omega^{l}_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}_{\rho}\cdot\mathbf{k}}, \tag{5.29}$$

а вершины взаимодействия, определяющие тормозное излучение плазмонов, соответствуют вершинным функциям $\boldsymbol{\phi}^{*(1)}_{\mathbf{k}}(t)$ или $\boldsymbol{\phi}^{*(2)}_{\mathbf{k}}(t)$. Вершинные функции $\boldsymbol{\phi}^{(1)}_{\mathbf{q}}(t)$ и $\boldsymbol{\phi}^{(2)}_{\mathbf{q}}(t)$ связаны с обменом промежуточными “виртуальными” колебаниями, которым соответствует сумма в круглых скобках в (5.27).

Эффективная амплитуда $T^{\mathrm{II}\,(\rho)a\,a_1a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$ (5.28) определяет процессы, показанные на рис. 5.3, Именно они представляют собой переходное тормозное излучение, которое обсуждалось во Введении. Графики на рис. 5.3 соответствуют

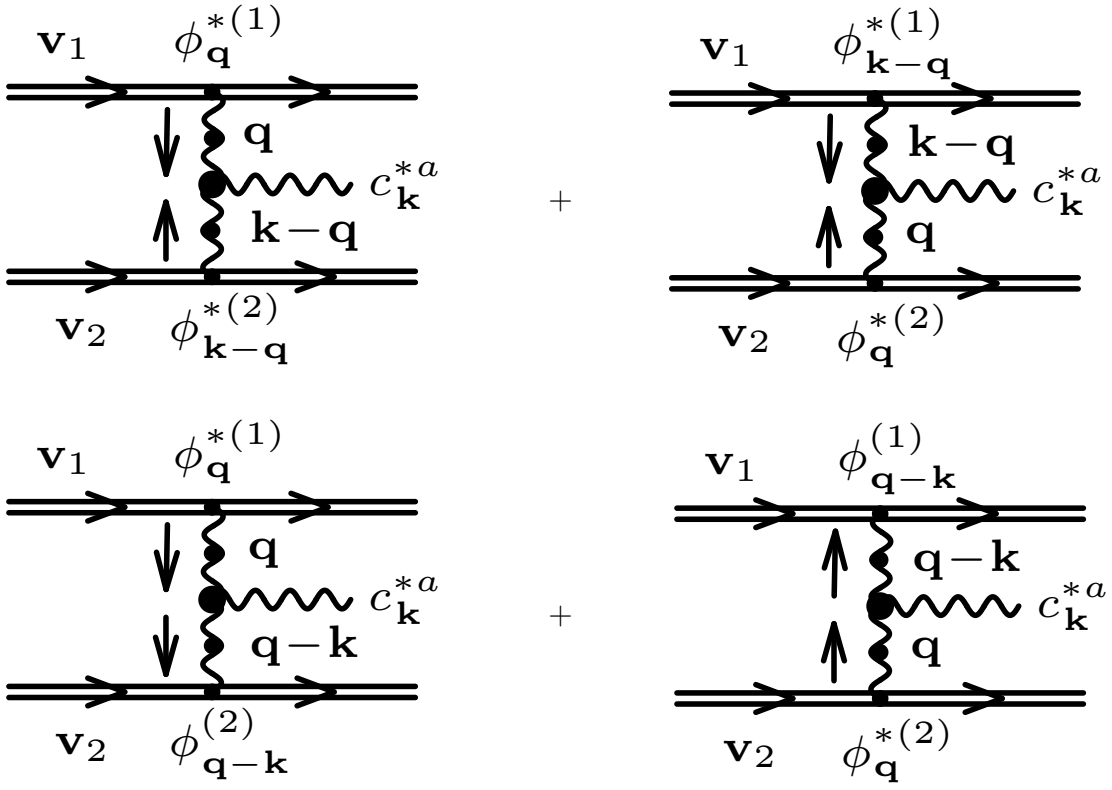


Рисунок 5.3 — Диаграммное представление вкладов, связанных с трехплазмонной вершинной функцией $\mathcal{V}^{a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ в комплексно-сопряженном выражении эффективной амплитуды $T^{\mathrm{II}\,(\rho)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$, Eq. (5.28). Существует также вклад, связанный с другой трехплазмонной вершинной функцией $\mathcal{U}^{a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$

процессу взаимодействия жёстких частиц с плазмонами через трёхплазмонные вершинные функции $\mathcal{V}^{a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ и $\mathcal{V}^{*\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ с промежуточными “виртуальными” колебаниями, которым соответствуют множители в круглых скобках в (5.28). На рис. 5.3 изображены также вклады некоторых членов в (5.28) с разными направлениями импульса во внутренних линиях. В отличие от предыдущей амплитуды $T^{\mathrm{I}\,(\rho)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$, здесь выходящие волновые линии соответствуют общей нормальной переменной $c^{\,a}_{\mathbf{k}} = c^{(1)\,a}_{\mathbf{k}} + c^{(2)\,a}_{\mathbf{k}}$. Из диаграмм видно, почему вторая эффективная амплитуда $T^{\mathrm{II}\,(\rho)\,a\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$ не зависит от индекса ρ: частицы 1 и 2 входят в этот процесс излучения симметричным образом. Наконец, вершины взаимодействия $\phi^{(1)}_{\mathbf{q}}(t)$, $\phi^{(1)}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}(t)$ и т.д. соответствуют взаимодействию “виртуальных” плазмонов с жёсткими частицами.

5.4 Многовременная теория возмущений

Далее переходим к построению кинетического уравнения, описывающего плазмонное тормозное излучение, возникающее при вращении цветного заряда жёстких частиц, проходящих через горячую КХД-материю. В качестве свободного гамильтониана здесь выбираем новый гамильтониан $\mathcal{H}^{(0)}$ (5.23), а в качестве гамильтониана взаимодействия – эффективный гамильтониан $\mathcal{H}^{(5)}$ (5.24). Для мягких бозонных возбуждений $c_{\mathbf{k}}^{a}$ и $c_{\mathbf{k}}^{*a}$ и классических цветных зарядов $\mathcal{Q}_{\alpha}^{a}$ уравнения движения имеют вид:

$$\frac{\partial c_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}}{\partial t} = -i\left\{c_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(5)}\right\} = -i(\omega_{\mathbf{k}}^{l} - \mathbf{v}_{\alpha}\cdot\mathbf{k})\, c_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a} - i\, T_{\mathbf{k}}^{*(\alpha)a\,a_1 a_2}(t)\, \mathcal{Q}_{1}^{a_1}\mathcal{Q}_{2}^{a_2}, \tag{5.30}$$

$$\frac{\partial c_{\mathbf{k}}^{*(\alpha)a}}{\partial t} = -i\left\{c_{\mathbf{k}}^{*(\alpha)a}, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(5)}\right\} = i\left(\omega_{\mathbf{k}}^{l} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}\right) c_{\mathbf{k}}^{*(\alpha)a} + i\, T_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a\,a_1 a_2}(t)\, \mathcal{Q}_{1}^{a_1}\mathcal{Q}_{2}^{a_2}, \tag{5.31}$$

и

$$\frac{d\mathcal{Q}_{\alpha}^{d}}{dt} = -i\left\{\mathcal{Q}_{\alpha}^{d}, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(5)}\right\} = \frac{\partial\left(\mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(5)}\right)}{\partial \mathcal{Q}_{\alpha}^{d'}}\, f^{dd'e}\, \mathcal{Q}_{\alpha}^{e}$$

или

$$\frac{d\mathcal{Q}_{1}^{a_1}}{dt} = f^{a_1 c' e_1} \sum_{\rho}\left[\int d\mathbf{k}\, T_{\mathbf{k}}^{(\rho)a\,c'a_2}(t)\, c_{\mathbf{k}}^{(\rho)a}\, \mathcal{Q}_{1}^{e_1}\mathcal{Q}_{2}^{a_2} + \int d\mathbf{k}\, T_{\mathbf{k}}^{*(\rho)a\,c'a_2}(t)\, c_{\mathbf{k}}^{*(\rho)a}\, \mathcal{Q}_{1}^{e_1}\mathcal{Q}_{2}^{a_2}\right], \tag{5.32}$$

$$\frac{d\mathcal{Q}_{2}^{a_2}}{dt} = f^{a_2 c' e_2} \sum_{\rho}\left[\int d\mathbf{k}\, T_{\mathbf{k}}^{(\rho)a\,a_1 c'}(t)\, c_{\mathbf{k}}^{(\rho)a}\, \mathcal{Q}_{1}^{a_1}\mathcal{Q}_{2}^{e_2} + \int d\mathbf{k}\, T_{\mathbf{k}}^{*(\rho)a\,a_1 c'}(t)\, c_{\mathbf{k}}^{*(\rho)a}\, \mathcal{Q}_{1}^{a_1}\mathcal{Q}_{2}^{e_2}\right], \tag{5.33}$$

соответственно. Для построения требуемых кинетических уравнений удобно использовать метод многовременных последовательных приближений [94–105]. Этот подход, являющийся модификацией общего метода Боголюбова-Крылова, применяемого в нелинейной механике [106], нашел широкое применение при построении кинетических уравнений как для газов, так и для плазменных сред. Он основан на методе, который позволяет полностью разделить различные временные масштабы, проявляющиеся в процессе эволюции кварк-глюонной плазмы при малых значениях соответствующего параметра. Для рассматриваемой

задачи данный подход оказался более эффективным.

Волновое поле $c_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}(t)$ при таком подходе может быть разложено на медленно изменяющиеся (во времени) компоненты $C_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}(\tau)$ с характерным временем изменения, много большим, чем $1/\omega_{\rm pl}$ и малые, быстро меняющиеся компоненты $\widehat{C}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}(t')$ (величина $\widehat{C}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}(t')$ заметно меняется в течение времени порядка $1/\omega_{\rm pl}$). Большая часть энергии волнового поля содержится в медленной составляющей $C_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}(\tau)$. Предположим, что аналогичное разделение на медленную и быструю компоненты справедливо и для цветных зарядов жёстких частиц. $\mathcal{Q}_{\alpha}^{a}(t)$. Эти предположения позволяют записать разложения следующего вида:

$$c_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}(t) = \varepsilon\, C_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}(\tau) \,+\, \varepsilon^4 \widehat{C}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}(t'), \tag{5.34a}$$

$$\mathcal{Q}_{\alpha}^{a}(t) = \varepsilon^2\, \mathcal{Q}_{\alpha}^{a}(\tau) \,+\, \varepsilon^5\, \widehat{\mathcal{Q}}_{\alpha}^{a}(t'), \tag{5.34b}$$

$$\partial/\partial t = (\partial/\partial t') \,+\, \varepsilon^6 (\partial/\partial \tau). \tag{5.34c}$$

Здесь ε является безразмерным малым параметром, описывающим величину нелинейности. Быстрая временная шкала равна t', а медленная временная шкала равна τ. Эти временные шкалы рассматриваются как независимые переменные.

Подставляя разложения (5.34a) – (5.34c) в (5.30) и (5.32), "расщепим" уравнения Гамильтона на уравнения для быстрой и медленной переменных следующим образом:

$$\frac{\partial \hat{C}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}(t')}{\partial t'} = (-i)(\omega_{\mathbf{k}}^{l} - \mathbf{v}_{\alpha}\cdot\mathbf{k})\, \widehat{C}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}(t') \,+\, (-i)\, T_{\mathbf{k}}^{*(\alpha)a\,a_1 a_2}(t')\, \mathcal{Q}_1^{a_1}(\tau)\mathcal{Q}_2^{a_2}(\tau), \tag{5.35}$$

$$\frac{\partial C_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}(\tau)}{\partial \tau} \;=\; (-i)\, T_{\mathbf{k}}^{*(\alpha)a\,a_1 a_2}(t') \left[\mathcal{Q}_1^{a_1}(\tau)\, \widehat{\mathcal{Q}}_2^{a_2}(t') + \widehat{\mathcal{Q}}_1^{a_1}(t')\, \mathcal{Q}_2^{a_2}(\tau)\right], \tag{5.36}$$

$$\frac{d\widehat{\mathcal{Q}}_1^{a_1}(t')}{dt'} = f^{a_1 c' e_1} \sum_{\rho} \Bigg[\int d\mathbf{k}\, T_{\mathbf{k}}^{(\rho)a\,c'a_2}(t')\, C_{\mathbf{k}}^{(\rho)a}(\tau)\, \mathcal{Q}_1^{e_1}(\tau)\, \mathcal{Q}_2^{a_2}(\tau) + \tag{5.37}$$

$$+ \int d\mathbf{k}\, T_{\mathbf{k}}^{*(\rho)a\,c'a_2}(t')\, C_{\mathbf{k}}^{*(\rho)a}(\tau)\, \mathcal{Q}_1^{e_1}(\tau)\, \mathcal{Q}_2^{a_2}(\tau) \Bigg],$$

$$\frac{d\mathcal{Q}_1^{a_1}(\tau)}{d\tau} = f^{a_1 c' e_1} \sum_\rho \Big[\int d\mathbf{k}\, T_{\mathbf{k}}^{(\rho) a\, c' a_2}(t')\, \widehat{C}_{\mathbf{k}}^{(\rho) a}(t')\, \mathcal{Q}_1^{e_1}(\tau)\, \mathcal{Q}_2^{a_2}(\tau) + \tag{5.38}$$

$$+ \int d\mathbf{k}\, T_{\mathbf{k}}^{*(\rho) a\, c' a_2}(t')\, \widehat{C}_{\mathbf{k}}^{*(\rho) a}(t')\, \mathcal{Q}_1^{e_1}(\tau)\, \mathcal{Q}_2^{a_2}(\tau) \Big] +$$

$$+ f^{a_1 c' e_1} \sum_\rho \Big[\int d\mathbf{k}\, T_{\mathbf{k}}^{(\rho) a\, c' a_2}(t')\, C_{\mathbf{k}}^{(\rho) a}(\tau) \Big(\mathcal{Q}_2^{a_2}(\tau)\, \widehat{\mathcal{Q}}_1^{e_1}(t') + \widehat{\mathcal{Q}}_2^{a_2}(t')\, \mathcal{Q}_1^{e_1}(\tau) \Big) +$$

$$+ \int d\mathbf{k}\, T_{\mathbf{k}}^{*(\rho) a\, c' a_2}(t')\, C_{\mathbf{k}}^{*(\rho) a}(\tau) \Big(\mathcal{Q}_2^{a_2}(\tau)\, \widehat{\mathcal{Q}}_1^{e_1}(t') + \widehat{\mathcal{Q}}_2^{a_2}(t')\, \mathcal{Q}_1^{e_1}(\tau) \Big) \Big].$$

Эффективная амплитуда $T_{\mathbf{k}}^{(\rho) a\, a_1 a_2}$, которая входит в исходные динамические уравнения (5.30) – (5.33), сама по себе является функцией времени. Отнесем эту зависимость к "быстрому" времени t'. Наиболее проблематичным в данной декомпозиции является первый член в правой части (5.30) и, соответственно, в сопряженном уравнении (5.31). Такой член не встречался в ранних работах по применению многовременного формализма в построении кинетических уравнений. Этот вклад отнесем к уравнению для быстро меняющейся компоненты $\widehat{C}_{\mathbf{k}}^{(\alpha) a}(t')$. Как будет показано ниже, это приводит к правильным окончательным выражениям.

Поскольку члены, включающие $C_{\mathbf{k}}^{(\rho) a}(\tau)$ и $\mathcal{Q}_\alpha^a(\tau)$, в правой части уравнения (5.37) не зависят от t', можно проинтегрировать по t', что в лидирующем порядке дает

$$\widehat{\mathcal{Q}}_1^{a_1}(t') = f^{a_1 c' e_1} \sum_\rho \Big[\int d\mathbf{k} \left(\int T_{\mathbf{k}}^{(\rho) a\, c' a_2'}(t') dt' \right) C_{\mathbf{k}}^{(\rho) a}(\tau)\, \mathcal{Q}_1^{e_1}(\tau)\, \mathcal{Q}_2^{a_2'}(\tau) + \tag{5.39}$$

$$+ \int d\mathbf{k} \left(\int T_{\mathbf{k}}^{*(\rho) a\, c' a_2'}(t') dt' \right) C_{\mathbf{k}}^{*(\rho) a}(\tau)\, \mathcal{Q}_1^{e_1}(\tau)\, \mathcal{Q}_2^{a_2'}(\tau) \Big]$$

и аналогично

$$\widehat{\mathcal{Q}}_2^{a_2}(t') = f^{a_2 c' e_2} \sum_\rho \Big[\int d\mathbf{k} \left(\int T_{\mathbf{k}}^{(\rho) a\, a_1' c'}(t') dt' \right) C_{\mathbf{k}}^{(\rho) a}(\tau)\, \mathcal{Q}_2^{e_2}(\tau)\, \mathcal{Q}_1^{a_1'}(\tau) + \tag{5.40}$$

$$+ \int d\mathbf{k} \left(\int T_{\mathbf{k}}^{*(\rho) a\, a_1' c'}(t') dt' \right) C_{\mathbf{k}}^{*(\rho) a}(\tau)\, \mathcal{Q}_2^{e_2}(\tau)\, \mathcal{Q}_1^{a_1'}(\tau) \Big].$$

Интеграл по t' понимается как неопределенный. Будем считать, без потери общности, что постоянная интегрирования равна нулю. Интегрирование уравнения (5.35) относительно t' приводит к следующему представлению для быстро ме-

няющихся компонент $\widehat{C}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}(t')$:

$$\widehat{C}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}(t') = -i\mathrm{e}^{-i(\omega_{\mathbf{k}}^{l}-\mathbf{v}_{\alpha}\cdot\mathbf{k})t'}\left(\int \mathrm{e}^{i(\omega_{\mathbf{k}}^{l}-\mathbf{v}_{\alpha}\cdot\mathbf{k})t'}T_{\mathbf{k}}^{*(\alpha)a\,a_1a_2}(t')dt'\right)\mathcal{Q}_1^{a_1}(\tau)\mathcal{Q}_2^{a_2}(\tau). \quad (5.41)$$

5.5 Матричное кинетическое уравнение для мягких глюонных возбуждений

Подставляя найденные решения (5.39) и (5.40) в (5.36), получим уравнение для медленной компоненты поля $C_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}(\tau)$:

$$\frac{\partial C_{\mathbf{k}}^{(\alpha)a}(\tau)}{\partial\tau} = (-i)\,T_{\mathbf{k}}^{*(\alpha)a\,a_1a_2}(t')\times \quad (5.42)$$

$$\Bigg\{\mathcal{Q}_1^{a_1}(\tau)f^{a_2c'e_2}\sum_{\rho}\Bigg[\int d\mathbf{k}'\left(\int T_{\mathbf{k}'}^{(\rho)a'a_1'c'}(t')dt'\right)C_{\mathbf{k}'}^{(\rho)a'}(\tau)\mathcal{Q}_2^{e_2}(\tau)\mathcal{Q}_1^{a_1'}(\tau)+$$

$$+\int d\mathbf{k}'\left(\int T_{\mathbf{k}'}^{*(\rho)a'a_1'c'}(t')dt'\right)C_{\mathbf{k}'}^{*(\rho)a'}(\tau)\mathcal{Q}_2^{e_2}(\tau)\mathcal{Q}_1^{a_1'}(\tau)\Bigg]+$$

$$+f^{a_1c'e_1}\sum_{\rho}\Bigg[\int d\mathbf{k}'\left(\int T_{\mathbf{k}'}^{(\rho)a'c'a_2'}(t')dt'\right)C_{\mathbf{k}'}^{(\rho)a'}(\tau)\mathcal{Q}_1^{e_1}(\tau)\mathcal{Q}_2^{a_2'}(\tau)+$$

$$+\int d\mathbf{k}'\left(\int T_{\mathbf{k}'}^{*(\rho)a'c'a_2'}(t')dt'\right)C_{\mathbf{k}'}^{*(\rho)a'}(\tau)\mathcal{Q}_1^{e_1}(\tau)\mathcal{Q}_2^{a_2'}(\tau)\Bigg]\mathcal{Q}_2^{a_2}(\tau)\Bigg\}.$$

Аналогичное уравнение справедливо также и для медленной комплексно-сопряженной компоненты глюонного поля $C_{\mathbf{k}}^{*(\alpha)a}(\tau)$. Ансамбль взаимодействующих бозе-возбуждений со слабым уровнем нелинейности, имеющий случайные фазы, можно описать статистически, путем введения одновременной двухкомпонентной корреляционной функции для медленных компонент бозонного поля

$$\left\langle C_{\mathbf{k}}^{*(\alpha)a}(\tau)C_{\mathbf{k}'}^{(\alpha')a'}(\tau)\right\rangle = \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{(\alpha,\alpha')aa'}(\tau)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \quad (5.43)$$

где символ $\langle\cdot\rangle$ выбран для обозначения усреднения по ансамблю, а матричная функция $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{(\alpha,\alpha')aa'}(\tau)$ рассматривается в качестве плотности числа плазмонов.

Будем использовать (5.42) и (5.43) для определения кинетического уравнения на плотность числа плазмонов. Матричное кинетическое уравнение на $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{(\alpha,\alpha')aa'}(\tau)$ получается умножением (5.42) на $C_{\mathbf{k}}^{*(\alpha)a}(\tau)$, усреднением по ансамблю и добавлением эрмитово-сопряженной части:

$$\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\frac{\partial\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{(\alpha,\alpha')aa'}(\tau)}{\partial\tau} = \quad (5.44)$$

$$T_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}(t')\sum_{\rho}\left(\int T_{\mathbf{k}'}^{*(\rho)}(t')dt'\right)\left(T^{a_2}T^{e_1}T^{a'_2}\mathcal{N}_{\mathbf{k}'}^{(\rho,\alpha')}\right)^{aa'}\left\langle\mathcal{Q}_2^{a'_2}(\tau)\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}_1^{e_1}(\tau)\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}_2^{a_2}(\tau)\right\rangle -$$

$$T_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}(t')\sum_{\rho}\left(\int T_{\mathbf{k}'}^{*(\rho)}(t')dt'\right)\left(T^{a_1}T^{e_2}T^{a'_1}\mathcal{N}_{\mathbf{k}'}^{(\rho,\alpha')}\right)^{aa'}\left\langle\mathcal{Q}_1^{a'_1}(\tau)\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}_2^{e_2}(\tau)\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}_1^{a_1}(\tau)\right\rangle -$$

$$T_{\mathbf{k}'}^{*(\alpha')}(t')\sum_{\rho}\left(\int T_{\mathbf{k}}^{(\rho)}(t')dt'\right)\left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{(\alpha,\rho)}T^{a'_2}T^{e_1}T^{a_2}\right)^{aa'}\left\langle\mathcal{Q}_2^{a'_2}(\tau)\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}_1^{e_1}(\tau)\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}_2^{a_2}(\tau)\right\rangle -$$

$$T_{\mathbf{k}'}^{*(\alpha')}(t')\sum_{\rho}\left(\int T_{\mathbf{k}}^{(\rho)}(t')dt'\right)\left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{(\alpha,\rho)}T^{a'_1}T^{e_2}T^{a_1}\right)^{aa'}\left\langle\mathcal{Q}_1^{a'_1}(\tau)\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}_2^{e_2}(\tau)\right\rangle\left\langle\mathcal{Q}_1^{a_1}(\tau)\right\rangle.$$

Здесь введено обозначение для плотности числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{(\alpha,\alpha')} = \left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{(\alpha,\alpha')aa'}\right)$ относительно цветных индексов. Напомним, что плотность числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{(\alpha,\alpha')aa'}(\tau)$ является матричной функцией относительно двух пар "индексов" α и α', нумерующих две жёсткие частицы как таковые, а также цветных индексов a и a'. Рассмотрим следующую декомпозицию матричной функции относительно индексов α и α':

$$\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{(\alpha,\alpha')aa'} = \frac{1}{2}\,\delta^{\alpha\alpha'}\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'} + \frac{1}{2}\,(\sigma_3)^{\alpha\alpha'}\mathcal{W}_{\mathbf{k}}^{aa'}, \tag{5.45}$$

где σ_3 – матрица Паули. Данная декомпозиция справедлива при выборе направления разности скоростей $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ двух сталкивающихся жёстких частиц вдоль оси OZ.

Вначале найдём уравнение для "тривиальной" части плотности числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}(\tau)$. Вычисляем след левой и правой частей (5.44) по индексам α и α', считая при этом $\alpha = \alpha'$, и выполняем суммирование по индексу α. Полагая далее $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, вместо (5.44) приходим к следующему кинетическому уравнению для плотности числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}(\tau)$:

$$\frac{\partial\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}(\tau)}{\partial\tau} = \tag{5.46}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\rho} T_{\mathbf{k}}^{(\rho)}(t')\left(\int T_{\mathbf{k}}^{*(\rho)}(t')dt'\right)\Big\{\left(T^{a_2}T^{e_1}T^{a_2'}\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\right)^{aa'}\big\langle\mathcal{Q}_2^{a_2'}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}_1^{e_1}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}_2^{a_2}\big\rangle +$$

$$+\left(T^{a_1}T^{e_2}T^{a_1'}\mathcal{N}_{\mathbf{k}}\right)^{aa'}\big\langle\mathcal{Q}_1^{a_1'}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}_2^{e_2}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}_1^{a_1}\big\rangle\Big\} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\rho} T_{\mathbf{k}}^{*(\rho)}(t')\left(\int T_{\mathbf{k}}^{(\rho)}(t')dt'\right)\Big\{\left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^{a_2'}T^{e_1}T^{a_2}\right)^{aa'}\big\langle\mathcal{Q}_2^{a_2'}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}_1^{e_1}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}_2^{a_2}\big\rangle +$$

$$+\left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}T^{a_1'}T^{e_2}T^{a_1}\right)^{aa'}\big\langle\mathcal{Q}_1^{a_1'}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}_2^{e_2}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}_1^{a_1}\big\rangle\Big\} -$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\rho}(-1)^{\rho+1} T_{\mathbf{k}}^{(\rho)}(t')\left(\int T_{\mathbf{k}}^{*(\rho)}(t')dt'\right)\Big\{\left(T^{a_2}T^{e_1}T^{a_2'}\mathcal{W}_{\mathbf{k}}\right)^{aa'}\big\langle\mathcal{Q}_2^{a_2'}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}_1^{e_1}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}_2^{a_2}\big\rangle +$$

$$+\left(T^{a_1}T^{e_2}T^{a_1'}\mathcal{W}_{\mathbf{k}}\right)^{aa'}\big\langle\mathcal{Q}_1^{a_1'}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}_2^{e_2}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}_1^{a_1}\big\rangle\Big\} -$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\rho}(-1)^{\rho+1} T_{\mathbf{k}}^{*(\rho)}(t')\left(\int T_{\mathbf{k}}^{(\rho)}(t')dt'\right)\Big\{\left(\mathcal{W}_{\mathbf{k}}T^{a_2'}T^{e_1}T^{a_2}\right)^{aa'}\big\langle\mathcal{Q}_2^{a_2'}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}_1^{e_1}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}_2^{a_2}\big\rangle +$$

$$+\left(\mathcal{W}_{\mathbf{k}}T^{a_1'}T^{e_2}T^{a_1}\right)^{aa'}\big\langle\mathcal{Q}_1^{a_1'}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}_2^{e_2}\big\rangle\big\langle\mathcal{Q}_1^{a_1}\big\rangle\Big\}.$$

Здесь в правой части ввели матричные обозначения $\mathcal{N}_{\mathbf{k}} = \left(\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa_1}\right)$ и $\mathcal{W}_{\mathbf{k}} = \left(\mathcal{W}_{\mathbf{k}}^{aa_1}\right)$ и для удобства записи не указали зависимость этих функций от медленного времени τ, а также средних значений медленно изменяющихся компонент цветных зарядов $\big\langle\mathcal{Q}_\alpha^d(\tau)\big\rangle$, $\alpha = 1, 2$.

Для того чтобы получить кинетическое уравнение для второй части плотности числа плазмонов, т.е. для $\mathcal{W}_{\mathbf{k}}^{aa'}(\tau)$ нужно теперь свернуть левую и правую части уравнения (5.44) с матрицей Паули $(\sigma_3)^{\alpha'\alpha}$, принимая во внимание равенство $\mathrm{tr}(\sigma_3)^2 = 2$. Явный вид искомого уравнения для цветовой матричной функции $\mathcal{W}_{\mathbf{k}}^{aa'}(\tau)$ здесь не приводится, т.к. он аналогичен по структуре уравнению (5.46).

5.6 Первый и второй моменты по цвету матричного кинетического уравнения

В дополнение к (5.45) рассмотрим декомпозицию, связанную с разложением по цветовым генераторам цветовых матричных функций $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'} &= \delta^{aa'} N_{\mathbf{k}}^{(1)} + \left(T^{c_1}\right)^{aa'} \left\langle\, \mathcal{Q}_1^{c_1} \,\right\rangle N_{\mathbf{k}}^{(2)}, \\ \mathcal{W}_{\mathbf{k}}^{aa'} &= \delta^{aa'} W_{\mathbf{k}}^{(1)} + \left(T^{c_2}\right)^{aa'} \left\langle\, \mathcal{Q}_2^{c_2} \,\right\rangle W_{\mathbf{k}}^{(2)},\end{aligned} \tag{5.47}$$

где $N_{\mathbf{k}}^{(i)}$ и $W_{\mathbf{k}}^{(i)}$, $i = 1, 2$, являются обычными числовыми функциями переменных τ и $\mathbf{k}$. Следующим шагом определим кинетические уравнения для скалярных бесцветной $(N_{\mathbf{k}}^{(1)}, W_{\mathbf{k}}^{(1)})$ и цветной $(N_{\mathbf{k}}^{(2)}, W_{\mathbf{k}}^{(2)})$ частей плотности числа плазмонов. Принимая во внимание (5.47) и полученные формулы для вычисления следов произведения двух, трех, четырех и пяти цветных матриц в присоединенном представлении [115], определим первый и второй моменты по цвету для уравнения (5.45) и соответствующего уравнения для матричной функции $\mathcal{W}_{\mathbf{k}}^{aa'}(\tau)$ в частном случае цветовой группы $SU(3_c)$. Весьма удобно представить полученную систему четырех кинетических уравнений в матричной форме. Для этой цели введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}A(\mathbf{k}) &\equiv \frac{(2\pi)^3}{2|\Delta\mathbf{v}|} \sum_{\rho=1,2} \int d\mathbf{q} \left|T_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^{(\rho)}\right|^2 2\pi\delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\rho - (-1)^\rho \Delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}), \\ B(\mathbf{k}) &\equiv \frac{(2\pi)^3}{2|\Delta\mathbf{v}|} \sum_{\rho=1,2} (-1)^{\rho+1} \int d\mathbf{q} \left|T_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^{(\rho)}\right|^2 2\pi\delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\rho - (-1)^\rho \Delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}), \\ \kappa_1(\tau) &\equiv \frac{3}{2}\,\mathfrak{q}_{12}^2 + \frac{3}{4}\,\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 + \frac{9}{4}\,\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_{12} - \Lambda^2,\ \kappa_2(\tau) \equiv \frac{3}{2}\,\mathfrak{q}_{12}^2 + \frac{3}{4}\,\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 + \frac{9}{4}\,\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_{12} - \Lambda^2.\end{aligned} \tag{5.48}$$

Здесь в последней строке введены обозначения для бесцветных комбинаций двух усредненных цветных зарядов

$$\mathfrak{q}_1 \equiv \left\langle\, \mathcal{Q}_1^e \,\right\rangle \left\langle\, \mathcal{Q}_1^e \,\right\rangle, \quad \mathfrak{q}_2 \equiv \left\langle\, \mathcal{Q}_2^e \,\right\rangle \left\langle\, \mathcal{Q}_2^e \,\right\rangle, \quad \mathfrak{q}_{12} \equiv \left\langle\, \mathcal{Q}_1^e \,\right\rangle \left\langle\, \mathcal{Q}_2^e \,\right\rangle, \quad \Lambda^2 = \Lambda^e \Lambda^e, \tag{5.49}$$

где $\Lambda^e \equiv f^{e\,b_1 b_2} \left\langle\, \mathcal{Q}_1^{b_1} \,\right\rangle \left\langle\, \mathcal{Q}_2^{b_2} \,\right\rangle$. Данные комбинации как функции медленного времени τ сами подчиняются определенным нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. В терминах этих обозначений искомая система ки-

нетических уравнений может быть представлена в блочном виде:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\begin{pmatrix}\mathbf{N_k}\\ \mathbf{W_k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12}\\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{N_k}\\ \mathbf{W_k}\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\widetilde{\mathcal{M}}_{11} & 0\\ 0 & \widetilde{\mathcal{M}}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{N_k}\\ \mathbf{W_k}\end{pmatrix}, \quad (5.50)$$

где

$$\mathbf{N_k}\equiv\begin{pmatrix}N_{\mathbf{k}}^{(1)}\\ N_{\mathbf{k}}^{(2)}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{W_k}\equiv\begin{pmatrix}W_{\mathbf{k}}^{(1)}\\ W_{\mathbf{k}}^{(2)}\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{11}\equiv\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \dfrac{\partial\ln\mathfrak{q}_1(\tau)}{\partial\tau}\end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{22}\equiv\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \dfrac{\partial\ln\mathfrak{q}_2(\tau)}{\partial\tau}\end{pmatrix}$$

и

$$\mathcal{M}_{11}\equiv\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{d_A}\kappa_1 A(\mathbf{k})\\ \dfrac{1}{N_c}\dfrac{\kappa_1}{\mathfrak{q}_1}A(\mathbf{k}) & 0\end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{12}\equiv\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{d_A}\kappa_2 B(\mathbf{k})\\ \dfrac{1}{N_c}\dfrac{\kappa_1}{\mathfrak{q}_1}B(\mathbf{k}) & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{M}_{21}\equiv\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{d_A}\kappa_1 B(\mathbf{k})\\ \dfrac{1}{N_c}\dfrac{\kappa_2}{\mathfrak{q}_2}B(\mathbf{k}) & 0\end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{22}\equiv\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{d_A}\kappa_2 A(\mathbf{k})\\ \dfrac{1}{N_c}\dfrac{\kappa_2}{\mathfrak{q}_2}A(\mathbf{k}) & 0\end{pmatrix}. \quad (5.51)$$

Эволюционное уравнение (5.50) очень сложное, поскольку комбинации с цветными зарядами $\kappa_1(\tau)$, $\kappa_2(\tau)$, $\mathfrak{q}_1(\tau)$ и $\mathfrak{q}_2(\tau)$ сами по себе подчиняются нелинейным (квадратичным) дифференциальным уравнениям, которые вытекают из уравнения (5.38) для медленной компоненты цветного заряда $\mathcal{Q}_1^{a_1}(\tau)$ и аналогичного уравнения для заряда $\mathcal{Q}_2^{a_2}(\tau)$ при учете решений (5.39) – (5.41). В целях максимального упрощения задачи, для качественного анализа можно считать, что цветные заряды являются фиксированными, т.е. полагать

$$\begin{aligned}&\kappa_1(\tau)=\kappa_1(\tau_0)\equiv\kappa_1^0, \quad \kappa_2(\tau)=\kappa_2(\tau_0)\equiv\kappa_2^0,\\ &\mathfrak{q}_1(\tau)=\mathfrak{q}_1(\tau_0)\equiv\mathfrak{q}_1^0, \quad \mathfrak{q}_2(\tau)=\mathfrak{q}_2(\tau_0)\equiv\mathfrak{q}_2^0.\end{aligned} \quad (5.52)$$

В этом случае система уравнений (5.50) заметно упрощается, так как она переходит в систему из четырех дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Последний член в правой части (5.50) обращается в ноль.

Однако даже в этом случае точное решение удается построить только при выполнении условия

$$\frac{(\kappa_2^0)^2}{\mathfrak{q}_2^0} = \frac{(\kappa_1^0)^2}{\mathfrak{q}_1^0}. \tag{5.53}$$

Только для такого весьма частного случая удается получить простые аналитические выражения для корней соответствующего характеристического уравнения для блочной матрицы в (5.50). Первые два корня имеют вид:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{(d_A N_c)^{1/2}} \left(\frac{(\kappa_1^0)^2}{\mathfrak{q}_1^0} \right)^{1/2} \big[A(\mathbf{k}) + B(\mathbf{k}) \big], \\
\lambda_2 &= \frac{1}{(d_A N_c)^{1/2}} \left(\frac{(\kappa_1^0)^2}{\mathfrak{q}_1^0} \right)^{1/2} \big[A(\mathbf{k}) - B(\mathbf{k}) \big],
\end{aligned} \tag{5.54}$$

остальные находятся из соотношений

$$\lambda_3 = -\lambda_2, \quad \lambda_4 = -\lambda_1. \tag{5.55}$$

В силу определения функций $A(\mathbf{k})$ и $B(\mathbf{k})$ (5.48), имеем

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0.$$

Приведем явный вид первой пары решений $N_{\mathbf{k}}^{(1)}(\tau)$ и $N_{\mathbf{k}}^{(2)}(\tau)$ уравнения (5.50) при фиксированных зарядах (5.52) и при условии (5.53). Решение в терминах начальных значений плотностей числа плазмонов

$$\mathbf{N}_{\mathbf{k}}(0) = \begin{pmatrix} N_{\mathbf{k}}^{(1)}(0) \\ N_{\mathbf{k}}^{(2)}(0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_{\mathbf{k}}(0) = \begin{pmatrix} W_{\mathbf{k}}^{(1)}(0) \\ W_{\mathbf{k}}^{(2)}(0) \end{pmatrix}$$

имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&N_{\mathbf{k}}^{(1)}(\tau) = \\
&\cosh(\lambda_+\tau)\cosh(\lambda_-\tau) N_{\mathbf{k}}^{(1)}(0) + \sinh(\lambda_+\tau)\cosh(\lambda_-\tau) N_{\mathbf{k}}^{(2)}(0) \left(\frac{N_c}{d_A} \right)^{1/2} \big(\mathfrak{q}_1^0 \big)^{1/2} + \\
&\sinh(\lambda_+\tau)\sinh(\lambda_-\tau) W_{\mathbf{k}}^{(1)}(0) + \cosh(\lambda_+\tau)\sinh(\lambda_-\tau) W_{\mathbf{k}}^{(2)}(0) \left(\frac{N_c}{d_A} \right)^{1/2} \big(\mathfrak{q}_1^0 \big)^{1/2},
\end{aligned} \tag{5.56}$$

$$N_{\mathbf{k}}^{(2)}(\tau) \; =$$

$$\sinh(\lambda_+\tau)\cosh(\lambda_-\tau)\,N_{\mathbf{k}}^{(1)}(0)\left(\frac{d_A}{N_c}\right)^{1/2}\frac{1}{\left(\mathfrak{q}_1^0\right)^{1/2}} \; + \; \cosh(\lambda_+\tau)\cosh(\lambda_-\tau)\,N_{\mathbf{k}}^{(2)}(0) \; +$$

$$\cosh(\lambda_+\tau)\sinh(\lambda_-\tau)\,W_{\mathbf{k}}^{(1)}(0)\left(\frac{d_A}{N_c}\right)^{1/2}\frac{1}{\left(\mathfrak{q}_1^0\right)^{1/2}} \; + \; \sinh(\lambda_+\tau)\sinh(\lambda_-\tau)\,W_{\mathbf{k}}^{(2)}(0),$$

где $\lambda_\pm \equiv \frac{1}{2}\,(\lambda_1 \pm \lambda_2)$. Вторая пара решений $W_{\mathbf{k}}^{(1)}(\tau)$ и $W_{\mathbf{k}}^{(2)}(\tau)$ имеет аналогичную структуру. В качестве начальных значений скалярных плотностей числа плазмонов наиболее естественно выбрать

$$N_{\mathbf{k}}^{(2)}(0) = W_{\mathbf{k}}^{(2)}(0) = 0,$$

то есть предполагаем, что "цветовая" часть равна нулю в начальный момент времени, а в качестве $N_{\mathbf{k}}^{(1)}(0)$ и $W_{\mathbf{k}}^{(1)}(0)$ возьмём равновесное значение в виде функции распределения Планка

$$N_{\mathbf{k}}^{(1)}(0) = W_{\mathbf{k}}^{(1)}(0) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\omega_{\mathbf{k}}^l/k_BT^*}-1},$$

где T^* – "температура" плазмонного газа в статистическом равновесии. Из полученных решений (5.56) видно, что даже если в начальный момент нет "цветных" возбуждений плазмы, они неизбежно генерируются во время тормозного излучения при рассеянии жёстких цветных частиц друг на друге.

Точные решения (5.56), полученные при фиксированных значениях комбинаций цветных зарядов в (5.50), имеют достаточно простую структуру. Учёт эволюции этих комбинаций может качественно изменить найденные решения. Для этого необходимо решить систему нелинейных (квадратичных) обыкновенных дифференциальных уравнений для бесцветных комбинаций (5.49), в которой сами коэффициентные функции интегрально зависят от скалярных плотностей числа плазмонов $N_{\mathbf{k}}^{(1)}$, $N_{\mathbf{k}}^{(2)}$, $W_{\mathbf{k}}^{(1)}$ и $W_{\mathbf{k}}^{(2)}$.

Для полноты описания, в конце данного раздела без вывода приведем полную систему уравнений на бесцветные структуры (5.49). Введем следующее обозначение:

$$\mathcal{A}(\tau) \equiv \frac{(2\pi)^3}{|\Delta\mathbf{v}|}\sum_\rho \int d\mathbf{q}\,\left|T_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^{(\rho)}\right|^2 N_{\mathbf{k}}^{(1)}(\tau)\,2\pi\,\delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\rho - (-1)^\rho\,\Delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}) +$$

$$+ \; \frac{(2\pi)^3}{|\Delta\mathbf{v}|}\sum_\rho (-1)^{\rho+1}\int d\mathbf{q}\,\left|T_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^{(\rho)}\right|^2 W_{\mathbf{k}}^{(1)}(\tau)\,2\pi\,\delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\rho - (-1)^\rho\,\Delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{q})$$

и определим новое время по формуле

$$\tau' = \tau'(\tau) = \int \mathcal{A}(\tau) d\tau + C_1,$$

где C_1 – произвольная константа интегрирования. Учитывая данное представление и связь между функциями $\mathfrak{q}_1$ и $\mathfrak{q}_2$:

$$\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}_1 + C,$$

уравнения на $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_{12}$ и Λ^2 можно записать в виде следующей системы нелинейных (квадратичных) обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию данных цветовых структур для группы $SU(3_c)$:

$$\frac{d\mathfrak{q}_1(\tau')}{d\tau'} = \frac{3}{4}(\mathfrak{q}_1 + C)\mathfrak{q}_1 + \frac{3}{2}\mathfrak{q}_{12}^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2, \quad \frac{d\mathfrak{q}_{12}(\tau')}{d\tau'} = \frac{9}{4}(2\mathfrak{q}_1 + C)\mathfrak{q}_{12} - 3\Lambda^2,$$

$$\frac{d\Lambda^2(\tau')}{d\tau'} = \frac{3}{4}(2\mathfrak{q}_1 + C)\Lambda^2 - 3\big(f^{e\,a_1 a_2}\Lambda^e \big\langle \mathcal{Q}_1^{a_1} \big\rangle\big)\big(f^{e'\,e_2 a_2}\Lambda^{e'} \big\langle \mathcal{Q}_2^{e_2} \big\rangle\big) +$$

$$+ \frac{1}{2}\big(f^{e\,a_1 a_2}\Lambda^e \big\langle \mathcal{Q}_2^{a_2} \big\rangle\big)\big(f^{e'\,a_1 a_2'}\Lambda^{e'} \big\langle \mathcal{Q}_2^{a_2'} \big\rangle\big) + \frac{1}{2}\big(f^{e\,a_1 a_2}\Lambda^e \big\langle \mathcal{Q}_1^{a_1} \big\rangle\big)\big(f^{e'\,a_2 a_1'}\Lambda^{e'} \big\langle \mathcal{Q}_1^{a_1'} \big\rangle\big).$$

Данная система не является замкнутой, так как в последнем уравнении появились три новые цветовые структуры. Для того чтобы получить аналитическое решение, здесь также необходимо сделать какие-либо упрощающие предположения.

5.7 Выводы

В этой главе, в рамках общей классической гамильтоновой теории разработана процедура вычисления эффективной амплитуды $T^{(\rho)\,a\,a_1 a_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q}}(t)$, описывающей тормозное излучение плазмонов при столкновении высокоэнергетической цветозаряженной частицы с тепловыми партонами неабелевой плазмы. Предложенный подход основан фактически на трех предположениях. Первое из них связано с представлением исходной нормальной переменной бозонного поля $a^a_{\mathbf{k}}$ в "расщепленном" виде, т.е. в виде суммы двух независимых компонент $a^{(1)\,a}_{\mathbf{k}}$ и $a^{(2)\,a}_{\mathbf{k}}$. Интуитивно это можно понять как сумму двух вкладов в поле излучения от излучения двух независимых жёстких частиц. Другое основное, более нетривиальное, предположение касается структуры свободного гамильтониана $H^{(0)}$ (5.6). Этот гамильтониан определен не в терминах исходной переменной поля

$a^a_{\mathbf{k}}$, как это обычно делается [24,43,45], а в терминах её независимых компонент $a^{(1)a}_{\mathbf{k}}$ и $a^{(2)a}_{\mathbf{k}}$. Наконец, третье и последнее предположение связано с двумя правилами разложения общего выражения для матричнозначной плотности числа плазмонов $\mathcal{N}^{(\alpha,\alpha')aa'}_{\mathbf{k}}(\tau)$ (5.43). Эти разложения были определены в эффективных двухчастичных и цветовых пространствах и представлены выражениями (5.45) и (5.47), соответственно. Этих трех допущений, первые два из которых весьма просты и естественны, оказалось вполне достаточно для построения классического гамильтонова формализма для рассматриваемого процесса излучения.

В конце главы для замкнутости изложения без вывода приведена полная система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию бесцветных комбинаций усреднённых цветных зарядов жёстких частиц, входящих в кинетические уравнения для плотности числа плазмонов.

Заключение

Общий формализм построения теории волн в нелинейных средах с дисперсией, основанный на (псевдо)классической гамильтоновой теории систем с распределенными параметрами, является эффективным способом исследования различных кинетических и радиационных свойств высокотемпературной кварк-глюонной плазмы. На основании проделанной работы в диссертации получены следующие основные результаты:

1. С использованием формализма, применяемого для построения теории волн в нелинейных средах, построен гамильтонов подход к исследованию коллективных продольно-поляризованных возбуждений (плазмонов) в высокотемпературной кварк-глюонной плазме. Посредством построенных канонических преобразований, которые позволяют упростить гамильтониан взаимодействия плазмонов, определён новый эффективный гамильтониан и тем самым найден матричный элемент плазмон-плазмонного взаимодействия. Разработанный метод был использован для вывода кинетического уравнения типа Больцмана, описывающего упругое рассеяние коллективных продольно-поляризованных возбуждений в глюонной плазме и эффект нелинейного затухания Ландау.

2. На основе подхода, предложенного В.Е. Захаровым и др. для построения волновой теории в нелинейных средах с дисперсией, разработана гамильтонова теория для коллективных продольно-поляризованных бесцветных глюонных возбуждений и кварк-антикварковых возбуждений с аномальным соотношением между киральностью и спиральностью (плазминов) в высокотемпературной неабелевой плазме. В диссертационной работе было выполнено обобщение на случай непрерывной среды суперскобок Пуассона с коммутирующими и антикоммутирующими переменными и выписаны уравнения Гамильтона. Проанализированы канонические преобра-

зования, включающие степени свободы коллективных как бозе-, так и ферми-возбуждений кварк-глюонной плазмы, для которых выписана система условий каноничности. Получен явный вид эффективных гамильтонианов четвертого порядка, описывающих процессы упругого рассеяния плазмина на плазмине и плазмина на плазмоне. Выписаны соответствующие кинетические уравнения типа Больцмана.

3. С помощью предложенного эвристического подхода определён эффективный гамильтониан четвертого порядка, который описывает процесс упругого рассеяния плазмона на жёсткой тестовой частице, и получена замкнутая система кинетических уравнений, учитывающая изменение среднего значения цветного заряда жёсткой тестовой частицы по времени. Для достаточно высокого уровня энергии мягких плазменных возбуждений, процессы рассеяния плазмона на жёсткой частице будут вносить вклады в правую часть соответствующих уравнений Больцмана, сопоставимые по величине с вкладами от процессов плазмон-плазмонного, плазмин-плазмонного и плазмин-плазминного рассеяния.

4. На основе метода Захарова-Шульмана, по аналогии с методами квантовой теории поля, определен вид классической матрицы рассеяния для процесса взаимодействия жёстких и мягких возбуждений в КГП, которая представлена интегро-степенным рядом по асимптотическим значениям нормальных бозонных переменных, используемых для описания мягких глюонных возбуждений системы, и цветному заряду жёсткой частицы при $t \to \infty$. При этом вместо квантового коммутатора от квантово-полевых операторов используется скобка Ли-Пуассона для классических асимптотических переменных.

5. С использованием разработанного метода, в рамках классического гамильтонова формализма, получена общая формула для потери энергии при рассеянии быстрой цветозаряженной частицы на мягких бозонных возбуждениях кварк-глюонной плазмы. Для этого в рассмотрение был введён эффективный ток, характеризующий рассматриваемый процесс рассеяния, и проанализирована его связь с классической $\mathcal{S}$-матрицей, использование известного вида которой дало возможность восстановить искомый эффек-

тивный ток и тем самым определить формулу для потерь энергии высокоэнергичной тестовой частицы.

6. Построена гамильтонова теория для коллективных продольно поляризованных мягких глюонных возбуждений кварк-глюонной плазмы, взаимодействующих с двумя высокоэнергетическими цветозаряженными частицами. Проведено обобщение скобки Ли-Пуассона на случай сплошной среды с двумя компонентами бозонных $a_{\mathbf{k}}^{(1)a}$ и $a_{\mathbf{k}}^{(2)a}$ нормальных полевых переменных и двумя неабелевыми цветными зарядами Q_1^a и Q_2^a, определены соответствующие уравнения Гамильтона. Найден явный вид эффективного гамильтониана пятого порядка, описывающего процесс тормозного излучения цветного плазмона при рассеянии двух жёстких цветных частиц друг на друге. В рамках многовременного формализма построена самосогласованная система четырех кинетических уравнений больцмановского типа и для частного случая фиксированных цветных зарядов получено её точное решение.

Приложение А

Эффективные трёх- и четырёхглюонные вершины и глюонный пропагатор

В данном приложении, в рамках HTL-приближения ([8,9,40]), определим вершинные функции и глюонный пропагатор.

Приведем явный вид эффективной трёхглюонной вершины:

$$^*\Gamma^{\mu\nu\rho}(k,k_1,k_2) \equiv \Gamma^{\mu\nu\rho}(k,k_1,k_2) + \delta\Gamma^{\mu\nu\rho}(k,k_1,k_2), \tag{A.1}$$

где голая трёхглюонная вершина $\Gamma^{\mu\nu\rho}(k,k_1,k_2)$ и соответствующая ей HTL-поправка $\delta\Gamma^{\mu\nu\rho}(k,k_1,k_2)$ выписаны ниже:

$$\Gamma^{\mu\nu\rho}(k,k_1,k_2) = g^{\mu\nu}(k-k_1)^\rho + g^{\nu\rho}(k_1-k_2)^\mu + g^{\mu\rho}(k_2-k)^\nu, \tag{A.2}$$

$$\delta\Gamma^{\mu\nu\rho}(k,k_1,k_2) = 3\omega_{\rm pl}^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi}\, \frac{v^\mu v^\nu v^\rho}{v\cdot k + i\epsilon} \left(\frac{\omega_2}{v\cdot k_2 - i\epsilon} - \frac{\omega_1}{v\cdot k_1 - i\epsilon} \right), \quad \epsilon \to +0. \tag{A.3}$$

Здесь $v^\mu = (1,\mathbf{v})$, $k^\mu = (\omega,\mathbf{k})$ – глюонный 4-импульс, $d\Omega$ – дифференциал телесного угла и $\omega_{\rm pl}^2 = g^2(2N_c+N_f)T^2/18$ – квадрат плазменной частоты глюонного сектора плазменных возбуждений. При этом считаем, что выполняется соотношение $k+k_1+k_2=0$. Приведем также некоторые свойства трехглюонной HTL-ресуммированной вершинной функции, которые были использованы в данной работе:

$$(^*\Gamma_{\mu\mu_1\mu_2}(-k_1-k_2,k_1,k_2))^* = -^*\Gamma_{\mu\mu_1\mu_2}(k_1+k_2,-k_1,-k_2) = \tag{A.4}$$

$$= {}^*\Gamma_{\mu\mu_2\mu_1}(k_1+k_2,-k_2,-k_1).$$

Эффективная четырёхглюонная вершина имеет вид:

$$^*\Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma}(k,k_1,k_2,k_3) \equiv \Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma}(k,k_1,k_2,k_3) + \delta\Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma}(k,k_1,k_2,k_3), \tag{A.5}$$

где

$$\Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma} = 2g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda}g^{\sigma\nu} \tag{A.6}$$

и

$$\delta\Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma}(k,k_1,k_2,k_3) = 3\omega_{\rm pl}^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi}\, \frac{v^\mu v^\nu v^\lambda v^\sigma}{v\cdot k + i\epsilon} \tag{A.7}$$

$$\times\left[\frac{1}{v\cdot(k+k_1)+i\epsilon}\left(\frac{\omega_2}{v\cdot k_2-i\epsilon}-\frac{\omega_3}{v\cdot k_3-i\epsilon}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{v\cdot(k+k_3)+i\epsilon}\left(\frac{\omega_1}{v\cdot k_1-i\epsilon}-\frac{\omega_2}{v\cdot k_2-i\epsilon}\right)\right].$$

Глюонный (запаздывающий) пропагатор в A_0-калибровке, модифицирующейся под воздействием окружающей среды, определен следующим образом:

$$^*\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}(k)=-P_{\mu\nu}(k)\,{}^*\Delta^t(k)-\widetilde{Q}_{\mu\nu}(k)\,{}^*\Delta^l(k)-\xi_0\,\frac{k^2}{(k\cdot u)^2}\,D_{\mu\nu}(k). \tag{A.8}$$

"Скалярные" поперечный и продольный пропагаторы заданы видом:

$$^*\Delta^t(k)=\frac{1}{k^2-\Pi^t(k)},\qquad {}^*\Delta^l(k)=\frac{1}{k^2-\Pi^l(k)}, \tag{A.9}$$

где

$$\Pi^t(k)=\frac{1}{2}\,\Pi^{\mu\nu}(k)P_{\mu\nu}(k),\qquad \Pi^l(k)=\Pi^{\mu\nu}(k)\widetilde{Q}_{\mu\nu}(k).$$

Тензор поляризации $\Pi_{\mu\nu}(k)$, продольный $\widetilde{Q}_{\mu\nu}(k)$ и поперечный $P_{\mu\nu}(k)$ проекторы в приближении жёстких температурных петель определены ниже:

$$\Pi^{\mu\nu}(k)=3\omega_{\rm pl}^2\left(u^\mu u^\nu-\omega\int\frac{d\Omega}{4\pi}\,\frac{v^\mu v^\nu}{v\cdot k+i\epsilon}\right),$$

$$\widetilde{Q}_{\mu\nu}(k)=\frac{\tilde{u}_\mu(k)\tilde{u}_\nu(k)}{\tilde{u}^2(k)},\quad P_{\mu\nu}(k)=g_{\mu\nu}-u_\mu u_\nu-\widetilde{Q}_{\mu\nu}(k)\,\frac{(k\cdot u)^2}{k^2}\,. \tag{A.10}$$

Векторы $\tilde{u}_\mu(k)$ и $\bar{u}_\mu(k)$, являющиеся проекторами на продольное направление волнового вектора $\mathbf{k}$, записаны в лоренц-инвариантной форме в гамильтоновой и лоренцовой калибровках:

$$\tilde{u}_\mu(k)=\frac{k^2}{(k\cdot u)}\Big(k_\mu-u_\mu(k\cdot u)\Big)\quad\text{и}\quad \bar{u}_\mu(k)=k^2u_\mu-k_\mu(k\cdot u), \tag{A.11}$$

u^μ – четырехмерная скорость среды. В системе покоя $u^\mu=(1,0,0,0)$. Правило комплексного сопряжения для глюонного пропагатора (A.8) имеет следующий вид:

$$\big({}^*\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}(k)\big)^*={}^*\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}(-k). \tag{A.12}$$

Приложение B

Эффективные кварк-глюонные вершины и кварковый пропагатор

В данном Приложении, в рамках HTL-приближения, приведены спиноры $u^{(\pm)}$ и $v^{(\pm)}$, эффективные кварк-глюонные вершинные функции и кварковый пропагатор. Спинорные решения свободного безмассового уравнения Дирака (2.4a) имеют следующую структуру [107, 108]:

$$u^{(+)}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \lambda\end{pmatrix}\chi(\hat{\mathbf{q}},\lambda),\quad u^{(-)}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\lambda\\ 1\end{pmatrix}\chi(\hat{\mathbf{q}},\lambda). \tag{B.1}$$

Аналогично, собственные векторы с отрицательной энергией (2.4b) имеют вид:

$$v^{(+)}(-\hat{\mathbf{q}},\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\lambda\\ 1\end{pmatrix}\chi(\hat{\mathbf{q}},\lambda),\quad v^{(-)}(-\hat{\mathbf{q}},\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \lambda\end{pmatrix}\chi(\hat{\mathbf{q}},\lambda), \tag{B.2}$$

где $\lambda=\pm1$. Двухкомпонентные спиноры $\chi(\hat{\mathbf{q}},\lambda)$ являются собственными состояниями спиральности:

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{q}})\chi(\hat{\mathbf{q}},\lambda)=\lambda\chi(\hat{\mathbf{q}},\lambda).$$

Эти спиноры нормированы таким образом

$$\chi^{\dagger}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)\chi(\hat{\mathbf{q}},\lambda)=1,\quad \chi(\hat{\mathbf{q}},\lambda)\chi^{\dagger}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{I}+\lambda\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{q}}\right),$$

что

$$\sum_{\lambda}\chi(\hat{\mathbf{q}},\lambda)\chi^{\dagger}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)=\mathrm{I}.$$

Здесь I является 2×2 единичной матрицей, $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ – матрицы Паули. Множители в (B.1) и (B.2) выбраны так, что $(u^{(\pm)})^{\dagger}u^{(\pm)}=(v^{(\pm)})^{\dagger}v^{(\pm)}=1$. Легко видеть, что спиноры (B.1) и (B.2) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=\pm1}u_{\alpha}^{(\pm)}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)\,\bar{u}_{\beta}^{(\pm)}(\hat{\mathbf{q}},\lambda)&=\frac{1}{2}\left(\gamma^0\mp\hat{\mathbf{q}}\cdot\boldsymbol{\gamma}\right)_{\alpha\beta}\equiv(h_{\pm}(\hat{\mathbf{q}}))_{\alpha\beta},\\ \sum_{\lambda=\pm1}v_{\alpha}^{(\pm)}(-\hat{\mathbf{q}},\lambda)\bar{v}_{\beta}^{(\pm)}(-\hat{\mathbf{q}},\lambda)&=\frac{1}{2}\left(\gamma^0\pm\hat{\mathbf{q}}\cdot\boldsymbol{\gamma}\right)_{\alpha\beta}\equiv(h_{\mp}(\hat{\mathbf{q}}))_{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{B.3}$$

Эффективная (т.е. HTL-ресуммированная) вершина между парой кварков и глюоном

$$ {}^{*}\Gamma^{(Q)\,a}_{\mu}(k;q_1,q_2) = t^a\,{}^{*}\Gamma^{(Q)}_{\mu}(k;q_1,q_2) \equiv t^a(\gamma_\mu + \delta\Gamma^{(Q)}_{\mu}(k;q_1,q_2)) \qquad \text{(B.4)} $$

представляет собой сумму голой вершины γ_μ и соответствующей HTL-поправки [9, 109, 110]

$$ \delta\Gamma^{(Q)}_{\mu}(k;q_1,q_2) = -\,\omega_0^2 \int \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\, \frac{v_\mu \not{v}}{(v\cdot q_1 + i\epsilon)(v\cdot q_2 - i\epsilon)}, \quad \epsilon \to +0, \qquad \text{(B.5)} $$

где $\omega_0^2 = g^2 C_F T^2/8$ – квадрат плазменной частоты кварк-антикваркового сектора плазменных возбуждений; $\not{v} = \gamma_\mu v^\mu$ и $k + q_1 + q_2 = 0$. Верхний индекс (Q) введён для того, чтобы показать, что вершина $\delta\Gamma_\mu(x;y_1,y_2)$ соответствует функции (B.5) в координатном представлении, в котором граничные условия для временных аргументов определены как $y_1^0 \geq x^0 \geq y_2^0$.

Эффективная вершинная функция, содержащая два кварка и один глюон, имеет следующую структуру [110]:

$$ {}^{*}\Gamma^{(G)}_{\mu}(k;q_1,q_2) = \gamma_\mu + \delta\Gamma^{(G)}_{\mu}(k;q_1,q_2), \qquad \text{(B.6)} $$

$$ \delta\Gamma^{(G)}_{\mu}(k;q_1,q_2) = -\,\omega_0^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi}\, \frac{v_\mu \not{v}}{(v\cdot q_1 - i\epsilon)(v\cdot q_2 - i\epsilon)}, $$

где теперь (в координатном представлении) временные аргументы удовлетворяют условию $x^0 \geq \max(y_1^0, y_2^0)$, а хронологический порядок y_1 и y_2 является произвольным. Иначе говоря, временной аргумент внешней глюонной линии, входящей в вершину, является наибольшим (на это указывает верхний индекс (G)).

Выражение для HTL-индуцированной вершины, включающей в себя два кварка и два глюона, определяется следующим образом:

$$ \delta\Gamma^{(Q)ab}_{\mu\nu}(k_1,k_2;q_1,q_2) = -\,\omega_0^2 \int \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\, \frac{v_\mu v_\nu \not{v}}{(v\cdot q_1 + i\epsilon)(v\cdot q_2 - i\epsilon)} \times \qquad \text{(B.7)} $$

$$ \times \left(\frac{t^a t^b}{v\cdot(q_1+k_1)+i\epsilon} + \frac{t^b t^a}{v\cdot(q_1+k_2)+i\epsilon} \right). $$

Эта вершина не существует на древесном уровне и в лидирующем порядке она полностью возникает из HTL-поправки [9, 109, 110]. Верхний индекс (Q) акцентирует внимание на том, что вершине $\delta\Gamma_\mu(x_1,x_2;y_1,y_2)$ соответствует функция, заданная видом (B.7) в координатном представлении, где для временных аргументов граничными условиями будут: $y_1^0 \geq x_1^0 \geq x_2^0 \geq y_2^0$ для первого члена в круглых скобках в (B.7) и $y_1^0 \geq x_2^0 \geq x_1^0 \geq y_2^0$ для второго члена, т.е. временной

аргумент внешней кварковой линии, входящей в вершинную функцию (B.7), является наибольшим.

Ниже перечислим свойства HTL-ресуммированных двухкварковых – одноглюонных и двухкварковых – двухглюонных вершинных функций:

$$\gamma^0({}^*\Gamma^{(Q)}_\mu(k;q_1,q_2))^\dagger\gamma^0 = {}^*\Gamma^{(Q)}_\mu(-k;-q_1,-q_2) = {}^*\Gamma^{(Q)}_\mu(k;q_2,q_1), \tag{B.8}$$

$$\gamma^0({}^*\Gamma^{(G)}_\mu(k;q_1,q_2))^\dagger\gamma^0 = {}^*\Gamma^{(G)}_\mu(-k;-q_1,-q_2) = {}^*\Gamma^{(G)}_\mu(-k;-q_2,-q_1), \tag{B.9}$$

$$\delta\Gamma^{(Q)ab}_{\mu\nu}(k_1,k_2;q_1,q_2) = \delta\Gamma^{(Q)ab}_{\mu\nu}(-k_2,-k_1;-q_2,-q_1) = \delta\Gamma^{(Q)ba}_{\mu\nu}(k_2,k_1;q_1,q_2), \tag{B.10}$$

$$\gamma^0(\delta\Gamma^{(Q)ab}_{\mu\nu}(k_1,k_2;q_1,q_2))^\dagger\gamma^0 = -\,\delta\Gamma^{(Q)ab}_{\mu\nu}(k_1,k_2;q_2,q_1) = \\ = -\,\delta\Gamma^{(Q)ba}_{\mu\nu}(-k_1,-k_2;-q_1,-q_2),$$

$$\gamma^0(\delta\Gamma^{(G)ab}_{\mu\nu}(k_1,k_2;q_1,q_2))^\dagger\gamma^0 = -\,\delta\Gamma^{(G)ba}_{\mu\nu}(-k_1,-k_2;-q_1,-q_2).$$

Выражение

$${}^*S(q) = h_+(\hat{\mathbf{q}})\,{}^*\triangle_+(q) + h_-(\hat{\mathbf{q}})\,{}^*\triangle_-(q) \tag{B.11}$$

представляет собой кварковый (запаздывающий) пропагатор, модифицированный эффектами среды. Матричные функции $h_\pm(\hat{\mathbf{q}}) = (\gamma^0 \mp \hat{\mathbf{q}}\cdot\boldsymbol{\gamma})/2$ с $\hat{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{q}/|\mathbf{q}|$ являются спинорными проекторами на собственные состояния спиральности и

$${}^*\triangle_\pm(q) = -\,\frac{1}{q^0 \mp [\,|\mathbf{q}| + \delta\Sigma_\pm(q)]} \tag{B.12}$$

являются скалярными собственно-энергетическими функциями кварков для нормальной $(+)$ и плазминной $(-)$ мод, где

$$\delta\Sigma_\pm(q) = \frac{\omega_0^2}{|\mathbf{q}|}\left[1 - \left(1 \mp \frac{|\mathbf{q}|}{q^0}\right)F\left(\frac{q^0}{|\mathbf{q}|}\right)\right], \quad F(x) \equiv \frac{x}{2}\left[\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - i\pi\theta(1-|x|)\right]. \tag{B.13}$$

Правило эрмитова сопряжения для эффективного кваркового пропагатора имеет вид:

$$\left({}^*S(q)\right)^\dagger = -\gamma^0\,{}^*S(-q)\gamma^0. \tag{B.14}$$

Приложение C

Первая система условий каноничности

Здесь представим две системы условий каноничности, которые вытекают из суперскобки Пуассона (2.23a) – (2.23d), связывающие коэффициентные функции второго и третьего порядков в подинтегральных выражениях канонических преобразований (2.25) и (2.26) между собой:

$$3W^{(1)\,a\,a_1\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3} + W^{*(3)\,a_3\,a_1\,a_2\,a}_{\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}} - 2\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\Big[V^{(1)\,a\,a_1\,a'}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}'}\,V^{(1)\,a'\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3} - V^{*(1)\,a_1\,a'\,a}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}',\,\mathbf{k}}\,V^{*(3)\,a_3\,a_2\,a'}_{\mathbf{k}_3,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}'}$$
$$+\,V^{(1)\,a\,a_2\,a'}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}'}\,V^{(1)\,a'\,a_1\,a_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_3} - V^{*(1)\,a_2\,a'\,a}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}',\,\mathbf{k}}\,V^{*(3)\,a_3\,a_1\,a'}_{\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}'}\Big] = 0,$$

$$W^{(2)\,a\,a_1\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3} + W^{*(2)\,a_3\,a_2\,a_1\,a}_{\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}} + 2\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\Big[V^{(1)\,a'\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}\,V^{*(1)\,a'\,a_1\,a}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}} + V^{(1)\,a\,a_2\,a'}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}'}\,V^{*(1)\,a_3\,a_1\,a'}_{\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}'}$$
$$-\,V^{(3)\,a\,a_1\,a'}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}'}\,V^{*(3)\,a_3\,a_2\,a'}_{\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}'} - V^{(1)\,a_1\,a'\,a_3}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}',\,\mathbf{k}_3}\,V^{*(1)\,a_2\,a'\,a}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}',\,\mathbf{k}}\Big] = 0$$

и

$$J^{(1)\,a\,a_1\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2} - J^{*(3)\,a_1\,a\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2} + \int\frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\Big[F^{(1)\,a\,i_1\,i'}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}'}\,F^{*(2)\,a_1\,i_2\,i'}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}'} - F^{(1)\,a\,i_2\,i'}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}'}\,F^{*(2)\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}'} +$$
$$+\,F^{(2)\,a\,i'\,i_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_2}\,F^{*(3)\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}'} - F^{(2)\,a\,i'\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1}\,F^{*(3)\,a_1\,i_2\,i'}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}'}\Big] = 0, \qquad \text{(C.1a)}$$

$$J^{(2)\,a\,a_1\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2} + J^{*(2)\,a_1\,a\,i_2\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}_1} + \int\frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\Big[4F^{(1)\,a\,i_2\,i'}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}'}\,F^{*(1)\,a_1\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1} + F^{(2)\,a\,i_1\,i'}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}'}\,F^{*(2)\,a_1\,i_2\,i'}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}'} -$$
$$-\,F^{(2)\,a\,i'\,i_2}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_2}\,F^{*(2)\,a_1\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1} - 4F^{(3)\,a\,i'\,i_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1}\,F^{*(3)\,a_1\,i_2\,i'}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{q}_2,\,\mathbf{q}'}\Big] = 0. \qquad \text{(C.1b)}$$

Первая система для чисто бозонного случая уже была получена в первой главе. Здесь она приведена для полноты описания. Подставляя преобразование (2.25) в (2.23b), находим еще две независимые системы условий каноничности:

$$W^{(2)\,a\,a_1\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3} - W^{(2)\,a_1\,a\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k},\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3} - 2\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\Big[V^{(1)\,a_1\,a_2\,a'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}'}\,V^{*(1)\,a_3\,a'\,a}_{\mathbf{k}_3,\mathbf{k}',\mathbf{k}} - V^{(1)\,a\,a_3\,a'}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_3,\mathbf{k}'}\,V^{*(1)\,a_2\,a'\,a_1}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}',\mathbf{k}_1}$$
$$+ V^{(1)\,a_1\,a_3\,a'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}'}\,V^{*(1)\,a_2\,a'\,a}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}',\mathbf{k}} - V^{(1)\,a\,a_2\,a'}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_2,\mathbf{k}'}\,V^{*(1)\,a_3\,a'\,a_1}_{\mathbf{k}_3,\mathbf{k}',\mathbf{k}_1}\Big] = 0,$$

$$W^{(3)\,a\,a_1\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3} - W^{(3)\,a_2\,a_1\,a\,a_3}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{k},\mathbf{k}_3} + 2\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\Big[V^{*(1)\,a'\,a_1\,a_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}\,V^{*(1)\,a_3\,a'\,a}_{\mathbf{k}_3,\mathbf{k}',\mathbf{k}} + V^{(1)\,a_2\,a_3\,a'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}'}\,V^{(3)\,a\,a_1\,a'}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'}$$
$$- V^{*(1)\,a'\,a_1\,a}_{\mathbf{k}',\mathbf{k}_1,\mathbf{k}}\,V^{*(1)\,a_3\,a'\,a_2}_{\mathbf{k}_3,\mathbf{k}',\mathbf{k}_2} - V^{(1)\,a\,a_3\,a'}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_3,\mathbf{k}'}\,V^{(3)\,a_2\,a_1\,a'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'}\Big] = 0,$$

$$3W^{(4)\,a\,a_1\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3} - 3W^{(4)\,a_3\,a_1\,a_2\,a}_{\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}} - 2\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\Big[V^{*(1)\,a'\,a_1\,a_3}_{\mathbf{k}',\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_3}\,V^{(3)\,a\,a_2\,a'}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_2,\mathbf{k}'} - V^{*(1)\,a'\,a_2\,a}_{\mathbf{k}',\mathbf{k}_2,\mathbf{k}}\,V^{(3)\,a_3\,a_1\,a'}_{\mathbf{k_3},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'}$$
$$+ V^{*(1)\,a'\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k}',\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}\,V^{(3)\,a\,a_1\,a'}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'} - V^{*(1)\,a'\,a_1\,a}_{\mathbf{k}',\mathbf{k}_1,\mathbf{k}}\,V^{(3)\,a_3\,a_2\,a'}_{\mathbf{k_3},\mathbf{k}_2,\mathbf{k}'}\Big] = 0$$

и

$$J^{(4)\,a\,a_1\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} - J^{(4)\,a_1\,a\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k_1},\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} - \int\frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\Big[F^{(1)\,a\,i_1\,i'}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}\,F^{(2)\,a_1\,i'\,i_2}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}_2} - F^{(1)\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}\,F^{(2)\,a\,i'\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{q}_2} \quad \text{(C.2a)}$$
$$+ F^{(2)\,a\,i'\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}\,F^{(1)\,a_1\,i_2\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q_2},\mathbf{q}'} - F^{(2)\,a_1\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}\,F^{(1)\,a\,i_2\,i'}_{\mathbf{k},\mathbf{q_2},\mathbf{q}'}\Big] = 0,$$

$$J^{(5)\,a\,a_1\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} - J^{(5)\,a_1\,a\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k_1},\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} - \int\frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\Big[F^{(2)\,a\,i_1\,i'}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}\,F^{(2)\,a_1\,i'\,i_2}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}_2} - F^{(2)\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}\,F^{(2)\,a\,i'\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{q}_2} \quad \text{(C.2b)}$$
$$+ 4F^{(3)\,a\,i'\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}\,F^{(1)\,a_1\,i_2\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q_2},\mathbf{q}'} - 4F^{(3)\,a_1\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}\,F^{(1)\,a\,i_2\,i'}_{\mathbf{k},\mathbf{q_2},\mathbf{q}'}\Big] = 0,$$

$$J^{(6)\,a\,a_1\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} - J^{(6)\,a_1\,a\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k_1},\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} - \int\frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\Big[F^{(2)\,a\,i_1\,i'}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}\,F^{(3)\,a_1\,i'\,i_2}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}_2} - F^{(2)\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}\,F^{(3)\,a\,i'\,i_2}_{\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{q}_2} \quad \text{(C.2c)}$$
$$+ F^{(3)\,a\,i'\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}\,F^{(2)\,a_1\,i_2\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q_2},\mathbf{q}'} - F^{(3)\,a_1\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}\,F^{(2)\,a\,i_2\,i'}_{\mathbf{k},\mathbf{q_2},\mathbf{q}'}\Big] = 0.$$

Первая система впервые была получена в [43]. Система (C.2) определяет правило перестановки для цветных индексов a и a_1 и соответствующих аргументов импульсов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_1$ коэффициентных функций третьего порядка $J^{(4)}$, $J^{(5)}$, и $J^{(6)}$.

Подставляя далее (2.25) и (2.26) в третье уравнение в (2.23), получим более нетривиальные соотношения, смешивающие фермионную и бозонную степени свободы системы:

$$R^{(2)\,i\,a\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1} - J^{(2)\,a\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}_1} + 2\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\Big[V^{(1)\,a\,a_1\,a'}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'}\,F^{(2)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_1} - V^{*(1)\,a_1\,a'\,a}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}',\mathbf{k}}\,F^{*(2)\,a'\,i_1\,i}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}}\Big] +$$
$$+\int\frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\Big[4F^{(1)\,a\,i_1\,i'}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}\,F^{*(1)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'} + F^{(2)\,a\,i'\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}\,F^{*(2)\,a_1\,i'\,i}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}}\Big] = 0, \quad \text{(C.3a)}$$

$$2R^{(3)\,i\,a\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1} - J^{(5)\,a\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}_1} + 2\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\left[V^{(3)\,a\,a_1\,a'}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'}F^{*(2)\,a'\,i_1\,i}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}} - V^{*(1)\,a'\,a_1\,a}_{\mathbf{k}',\mathbf{k}_1,\mathbf{k}}F^{(2)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\right] +$$

$$+\int\frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\left[4F^{(1)\,a\,i_1\,i'}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}F^{(3)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'} - F^{(2)\,a\,i'\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}F^{(2)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\right] = 0, \quad \text{(C.3b)}$$

$$R^{(5)\,i\,a\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1} - 2J^{(3)\,a\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}_1} + 4\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\left[V^{(1)\,a\,a_1\,a'}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'}F^{(3)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_1} + V^{*(1)\,a_1\,a'\,a}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}',\mathbf{k}}F^{*(1)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\right] +$$

$$+2\int\frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\left[F^{(2)\,a\,i_1\,i'}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}F^{*(1)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'} + F^{(3)\,a\,i'\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}F^{*(2)\,a_1\,i'\,i}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}}\right] = 0, \quad \text{(C.3c)}$$

$$R^{(6)\,i\,a\,a_1\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1} - J^{(6)\,a\,a_1\,i\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}_1} - 2\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\left[V^{*(1)\,a'\,a_1\,a}_{\mathbf{k}',\mathbf{k}_1,\mathbf{k}}F^{(3)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_1} + V^{(3)\,a\,a_1\,a'}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'}F^{*(1)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\right] +$$

$$+\int\frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\left[F^{(2)\,a\,i_1\,i'}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}F^{(3)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'} - F^{(3)\,a\,i'\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}F^{(2)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\right] = 0. \quad \text{(C.3d)}$$

Наконец, подстановка (2.25) и (2.26) в четвертое уравнение (2.23d) приводит к соотношениям:

$$2R^{*(1)\,i\,a_1\,a\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k},\mathbf{q}_1} + J^{(5)\,a\,a_1\,i_1\,i}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}} + 2\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\left[V^{*(1)\,a'\,a_1\,a}_{\mathbf{k}',\mathbf{k}_1,\mathbf{k}}F^{(2)\,a'\,i_1\,i}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}} - V^{(3)\,a\,a_1\,a'}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'}F^{*(2)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\right] -$$

$$-\int\frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\left[F^{(2)\,a\,i_1\,i'}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}F^{(2)\,a_1\,i'\,i}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}} - 4F^{(3)\,a\,i'\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}F^{(1)\,a_1\,i'\,i}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}}\right] = 0, \quad \text{(C.4a)}$$

$$R^{*(2)\,i\,a_1\,a\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k},\mathbf{q}_1} + J^{(2)\,a\,a_1\,i_1\,i}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}} - 2\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\left[V^{(1)\,a\,a_1\,a'}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'}F^{(2)\,a'\,i_1\,i}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}} - V^{*(1)\,a_1\,a'\,a}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}',\mathbf{k}}F^{*(2)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\right] +$$

$$+\int\frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\left[F^{(2)\,a\,i_1\,i'}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}F^{*(2)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'} - 4F^{(3)\,a\,i'\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}F^{*(3)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\right] = 0, \quad \text{(C.4b)}$$

$$R^{*(4)\,i\,a_1\,a\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k},\mathbf{q}_1} + J^{(4)\,a\,a_1\,i_1\,i}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}} + 2\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\left[V^{*(1)\,a'\,a_1\,a}_{\mathbf{k}',\mathbf{k}_1,\mathbf{k}}F^{(1)\,a'\,i_1\,i}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}} - V^{(3)\,a\,a_1\,a'}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'}F^{*(3)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\right] -$$

$$-\int\frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\left[F^{(1)\,a\,i_1\,i'}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}F^{(2)\,a_1\,i'\,i}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}} - F^{(2)\,a\,i'\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}F^{(1)\,a_1\,i'\,i}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}}\right] = 0, \quad \text{(C.4c)}$$

$$R^{*(5)\,i\,a_1\,a\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k},\mathbf{q}_1} + 2J^{(1)\,a\,a_1\,i_1\,i}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}} - 4\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\left[V^{(1)\,a\,a_1\,a'}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'}F^{(1)\,a'\,i_1\,i}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}} - V^{*(1)\,a_1\,a'\,a}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}',\mathbf{k}}F^{*(3)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\right] +$$

$$+\ 2\int\frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\left[F^{(1)\,a\,i_1\,i'}_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}F^{*(2)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'} - F^{(2)\,a\,i'\,i_1}_{\mathbf{k},\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}F^{*(3)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\right] = 0. \quad \text{(C.4d)}$$

Приложение D

Вторая система условий каноничности

Здесь приведем вторую систему условий каноничности, которая следует из уравнений (2.24a) – (2.24d). Подставляя (2.25) и (2.26) в уравнение (2.24a) и принимая во внимание (2.30), получаем четыре независимых соотношения для коэффициентных функций. Первая пара условий каноничности имеет следующий вид:

$$R^{*(1)\,i_1\,a_1\,a_2\,i}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}} + R^{(3)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1} - \frac{1}{2}\int\frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\Big[F^{(2)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\,F^{(2)\,a_2\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}',\mathbf{q}_1} + F^{(2)\,a_2\,i\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\,F^{(2)\,a_1\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}_1} -$$

$$- 4F^{(3)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\,F^{(1)\,a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q_1},\mathbf{q}'} - 4F^{(3)\,a_2\,i\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\,F^{(1)\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q_1},\mathbf{q}'}\Big] = 0, \qquad \text{(D.1a)}$$

$$R^{*(2)\,i_1\,a_2\,a_1\,i}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{q}} + R^{(2)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1} + \int\frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\Big[F^{(2)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\,F^{*(2)\,a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'} + F^{(2)\,a_1\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}\,F^{*(2)\,a_2\,i'\,i}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}',\mathbf{q}} +$$

$$+ 4F^{(3)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\,F^{*(3)\,a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'} + 4F^{(1)\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}\,F^{*(1)\,a_2\,i\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\Big] = 0 \qquad \text{(D.1b)}$$

и, соответственно, вторая пара записывается как

$$3S^{(1)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} + S^{*(3)\,i_3\,i_2\,i_1\,i}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}} - \int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\Big[F^{(1)\,a'\,i_3\,i_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_2}\,F^{*(2)\,a'\,i_1\,i}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}} + F^{(2)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\,F^{*(3)\,a'\,i_3\,i_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_2} -$$

$$- F^{(1)\,a'\,i_3\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_1}\,F^{*(2)\,a'\,i_2\,i}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_2,\mathbf{q}} - F^{(2)\,a'\,i\,i_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_2}\,F^{*(3)\,a'\,i_3\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_1}\Big] = 0, \qquad \text{(D.2a)}$$

$$S^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} + S^{*(2)\,i_3\,i_2\,i_1\,i}_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\int\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\Big[F^{(2)\,a'\,i_1\,i_3}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3}\,F^{*(2)\,a'\,i_2\,i}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_2,\mathbf{q}} - F^{(2)\,a'\,i\,i_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_2}\,F^{*(2)\,a'\,i_3\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_1} +$$

$$+ 4F^{(3)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\,F^{*(3)\,a'\,i_3\,i_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_2} - 4F^{(1)\,a'\,i_3\,i_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_2}\,F^{*(1)\,a'\,i\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_1}\Big] = 0. \qquad \text{(D.2b)}$$

Далее, из второго уравнения в (2.24b) следуют две системы соотношений, каждая из которых содержит три условия каноничности. Первая система имеет вид:

$$R^{(4)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1} + R^{(4)\,i_1\,a_1\,a_2\,i}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}} - \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\Big[F^{*(2)\,a_1\,i'\,i}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}}\,F^{*(1)\,a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'} + F^{*(2)\,a_1\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}\,F^{*(1)\,a_2\,i\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q},\mathbf{q}'} + + F^{*(2)\,a_2\,i'\,i}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}',\mathbf{q}}\,F^{*(1)\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'} + F^{*(2)\,a_2\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}\,F^{*(1)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\Big] = 0, \quad \text{(D.3a)}$$

$$R^{(5)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1} + R^{(5)\,i_1\,a_1\,a_2\,i}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}} + 2\int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\Big[F^{(2)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\,F^{*(1)\,a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'} + F^{(2)\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}\,F^{*(1)\,a_2\,i\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q},\mathbf{q}'} - - F^{(3)\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}\,F^{*(2)\,a_2\,i'\,i}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}',\mathbf{q}} - F^{(3)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\,F^{*(2)\,a_2\,i'\,i_1}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}',\mathbf{q}_1}\Big] = 0, \quad \text{(D.3b)}$$

$$R^{(6)\,i\,a_1\,a_2\,i_1}_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1} + R^{(6)\,i_1\,a_1\,a_2\,i}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}} + \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}\Big[F^{(2)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\,F^{(3)\,a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'} + F^{(2)\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}\,F^{(3)\,a_2\,i\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q},\mathbf{q}'} + + F^{(2)\,a_2\,i\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\,F^{(3)\,a_1\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'} + F^{(2)\,a_2\,i_1\,i'}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}'}\,F^{(3)\,a_1\,i\,i'}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}'}\Big] = 0. \quad \text{(D.3c)}$$

Вторая система может быть записана в аналогичной форме:

$$S^{(2)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} + S^{(2)\,i_1\,i\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} - \frac{1}{2}\int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\Big[F^{(2)\,a'\,i_1\,i_3}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3}\,F^{*(2)\,a'\,i_2\,i}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_2,\mathbf{q}} + F^{(2)\,a'\,i\,i_3}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_3}\,F^{*(2)\,a'\,i_2\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1} - - F^{(2)\,a'\,i\,i_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_2}\,F^{*(2)\,a'\,i_3\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_1} - F^{(2)\,a'\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\,F^{*(2)\,a'\,i_3\,i}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_3,\mathbf{q}}\Big] = 0, \quad \text{(D.4a)}$$

$$S^{(3)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} + S^{(3)\,i_1\,i\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} + \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\Big[F^{(2)\,a'\,i_1\,i_3}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3}\,F^{*(1)\,a'\,i\,i_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_2} + F^{(3)\,a'\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\,F^{*(2)\,a'\,i_3\,i}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_3,\mathbf{q}} + + F^{(3)\,a'\,i\,i_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_2}\,F^{*(2)\,a'\,i_3\,i_1}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_1} + F^{(2)\,a'\,i\,i_3}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_3}\,F^{*(1)\,a'\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\Big] = 0, \quad \text{(D.4b)}$$

$$3S^{(4)\,i\,i_1\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} + 3S^{(4)\,i_1\,i\,i_2\,i_3}_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q},\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} + 2\int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\Big[F^{(3)\,a'\,i_1\,i_3}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3}\,F^{*(1)\,a'\,i\,i_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_2} + F^{(3)\,a'\,i\,i_3}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_3}\,F^{*(1)\,a'\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} - - F^{(3)\,a'\,i\,i_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_2}\,F^{*(1)\,a'\,i_1\,i_3}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3} - F^{(3)\,a'\,i_1\,i_2}_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2}\,F^{*(1)\,a'\,i\,i_3}_{\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}_3}\Big] = 0. \quad \text{(D.4c)}$$

Системы (D.3) и (D.4) определяют правило перестановки для цветных индексов i и i_1 и для соответствующих аргументов импульса $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}_1$ коэффициентных функций третьего порядка $R^{(4)}, R^{(5)}$, $R^{(6)}$, $S^{(2)}, S^{(3)}$ и $S^{(4)}$.

Подстановка (2.25) и (2.26) в третье уравнение системы (2.24) приводит к четырем соотношениям (C.3), выписанным выше. Наконец, подстановка (2.25) и (2.26) в (2.24d) дает систему из четырех условий каноничности, комплексно сопряженных к условиям каноничности системы (C.4).

Приложение E

Следы произведений генераторов в присоединённом представлении

В этом Приложении выпишем следы для генераторов в сопряженном представлении, которые используются в тексте диссертационной работы. Необходимые выражения для следов и соотношения для цветных матриц в фундаментальном представлении можно найти в статьях [77, 111–115]. Генератор T^a задан видом:

$$\left(T^a\right)^{bc} \equiv -if^{abc},$$

f^{abc} представляют собой антисимметричные структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$. Генератор T^a является бесследовым:

$$\operatorname{tr} T^a = 0$$

и удовлетворяют равенству:

$$\left[T^a, T^b\right] = if^{abc}T^c.$$

Следы произведения двух и трех генераторов имеют вид:

$$\operatorname{tr}\left(T^aT^b\right) = N_c\delta^{ab}, \tag{E.1}$$

$$\operatorname{tr}\left(T^aT^bT^c\right) = \frac{i}{2}N_cf^{abc}. \tag{E.2}$$

Нам понадобятся два следа произведения четырех генераторов

$$\operatorname{tr}\left(T^aT^bT^cT^d\right) = \delta^{ad}\delta^{bc} + \frac{1}{2}\left(\delta^{ab}\delta^{cd} + \delta^{ac}\delta^{bd}\right) + \frac{1}{4}N_c\left(f^{ade}f^{bce} + d^{ade}d^{bce}\right), \tag{E.3}$$

$$\operatorname{tr}\left(T^aT^bD^cD^d\right) = \frac{1}{2}\left(\delta^{ab}\delta^{cd} - \delta^{ac}\delta^{bd}\right) + \left(\frac{N_c^2-8}{4N_c}\right)f^{ade}f^{bce} + \frac{1}{4}N_cd^{ade}d^{bce}, \tag{E.4}$$

где d^{abc} – полностью симметричные структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$ и $\left(D^a\right)^{bc} \equiv d^{abc}$. Если использовать соотношение

$$f^{abe}f^{cde} = \frac{2}{N_c}\left(\delta^{ac}\delta^{bd} - \delta^{ad}\delta^{bc}\right) + \left(d^{ace}d^{bde} - d^{bce}d^{ade}\right),$$

то след (E.3) можно представить иначе:

$$\mathrm{tr}\big(T^a T^b T^c T^d\big) = \delta^{ab}\delta^{cd} + \delta^{ad}\delta^{bc} + \frac{1}{4}\,N_c\big(d^{abe}d^{cde} + d^{ade}d^{bce} - d^{ace}d^{bde}\big). \quad \text{(E.5)}$$

След (E.5) записан в таком виде, который явно показывает его симметричность относительно перестановки индексов a и c (b и d, соответственно), т.е.

$$\mathrm{tr}\big(T^a T^b T^c T^d\big) = \mathrm{tr}\big(T^c T^b T^a T^d\big) = \mathrm{tr}\big(T^a T^d T^c T^b\big). \quad \text{(E.6)}$$

След пяти генераторов T^a может быть представлен в виде линейной комбинации следов четырех генераторов [116][1]:

$$\mathrm{tr}\big(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4}T^{a_5}\big) = \quad \text{(E.7)}$$

$$= -\frac{i}{2}\Big\{f^{a_4a_3b}\mathrm{tr}\big(T^{a_1}T^{a_2}T^{b}T^{a_5}\big) + f^{a_5a_3b}\mathrm{tr}\big(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_4}T^{b}\big) +$$

$$+ f^{a_5a_4b}\mathrm{tr}\big(T^{a_1}T^{a_2}T^{b}T^{a_3}\big) + f^{a_2a_1b}\mathrm{tr}\big(T^{b}T^{a_5}T^{a_4}T^{a_3}\big)\Big\}.$$

Это выражение является следствием свойства изменения знака при перестановке матриц T^a под знаком следа в обратном порядке:

$$\mathrm{tr}\big(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4}T^{a_5}\big) = -\mathrm{tr}\big(T^{a_5}T^{a_4}T^{a_3}T^{a_2}T^{a_1}\big),$$

которое, в свою очередь, тривиально следует из тождества

$$\mathrm{tr}\big(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4}T^{a_5}\big) = -2\mathrm{tr}\big(t^b\big[t^{a_1},\big[t^{a_2},\big[t^{a_3},\big[t^{a_4},\big[t^{a_5},t^b\big]\big]\big]\big]\big]\big),$$

где t^a – генераторы в фундаментальном представлении алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$.

Основываясь на представлении (E.7) и учитывая свойство симметрии (E.6), легко увидеть, что для следа пятого порядка существует следующее полезное соотношение при перестановке индексов a_3 и a_5:

$$\mathrm{tr}\big(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4}T^{a_5}\big) + \mathrm{tr}\big(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_5}T^{a_4}T^{a_3}\big) = -if^{a_2a_1b}\mathrm{tr}\big(T^{b}T^{a_5}T^{a_4}T^{a_3}\big). \quad \text{(E.8)}$$

Это соотношение используется в разделе 3.7 для вычисления следа пятого порядка.

Кроме того, имеются также два дополнительных тождества для специального случая $N_c = 3$ [112, 115]. Нам понадобится только одно из них:

$$d^{abe}d^{cde} + d^{ace}d^{bde} + d^{ade}d^{bce} = \frac{1}{3}\left(\delta^{ab}\delta^{cd} + \delta^{ac}\delta^{bd} + \delta^{ad}\delta^{bc}\right). \quad \text{(E.9)}$$

[1] В цитируемой статье в формуле (45) для следа пяти генераторов в одном из слагаемых справа неправильно размещены два индекса.

Приложение F

Построение точного решения системы (3.93)

Для удобства перепишем (3.93) и (3.94) с учетом обозначений, принятых в теории дифференциальных уравнений, полагая

$$y \equiv W_1, \qquad x \equiv N_1, \tag{F.1}$$

тогда (3.93) перепишется следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = x(\mathcal{C}_1 - x), \\ \dfrac{dx(t)}{dt} = \beta\big[x(\mathcal{C}_2 - y) + y(\mathcal{C}_1 - x)\big], \end{cases} \tag{F.2}$$

а вместо (3.94), в свою очередь, имеем

$$\big[(2x - \mathcal{C}_1)y - \mathcal{C}_2 x\big]\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\beta}\,x(x - \mathcal{C}_1) \tag{F.3}$$

или, в обозначениях [117]

$$\big[g_1(x)y + g_0(x)\big]\frac{dy}{dx} = f_0(x), \tag{F.4}$$

$$g_0(x) \equiv -\mathcal{C}_2 x, \qquad g_1(x) \equiv 2x - \mathcal{C}_1, \qquad f_0(x) \equiv \frac{1}{\beta}\,x(x - \mathcal{C}_1).$$

В системе (F.2) исключили параметр B, делая замену

$$t \to t/B. \tag{F.5}$$

В силу (3.89), параметр B является обобщенной функцией волновых векторов $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}_0'$. Уравнение (F.4) является уравнением Абеля второго рода. Замена неизвестной функции

$$w = y + \frac{g_0(x)}{g_1(x)}$$

приводит (F.3) к виду

$$w\frac{dw}{dx} = F_1(x)w + F_0(x), \tag{F.6}$$

$$F_1(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{g_0(x)}{g_1(x)}\right) = \frac{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}{(2x - \mathcal{C}_1)^2}, \qquad F_0(x) = \frac{f_0(x)}{g_1(x)} = \frac{1}{\beta}\,\frac{x(x - \mathcal{C}_1)}{2x - \mathcal{C}_1}.$$

Далее, после замены аргумента функции

$$\xi = \int F_1(x)\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}{2x-\mathcal{C}_1}, \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{2}\,\mathcal{C}_1 - \frac{1}{4\xi}\,\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2,$$

уравнение (F.6) принимает окончательный "нормальный"вид:

$$w\frac{dw}{d\xi} = w + F(\xi), \tag{F.7}$$

где

$$F(\xi) = \frac{F_0(x)}{F_1(x)} = \frac{\mathcal{C}_1^2}{8\beta}\left(\frac{1}{\xi} - \frac{\mathcal{C}_2^2}{4\xi^3}\right).$$

Уравнение (F.7) при заданной связи между параметрами $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$:

$$\mathcal{C}_2^2 = \frac{1}{2\beta}\,\mathcal{C}_1^2, \tag{F.8}$$

имеет точное решение в параметрической форме (уравнение 7 в 1.3.1. в справочнике [117]):

$$\xi = \frac{a}{\tau}\left(\tau - \ln|1+\tau| - C\right)^{1/2},$$

$$w = a\left[\frac{1+\tau}{\tau}\left(\tau - \ln|1+\tau| - C\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\,\tau\left(\tau - \ln|1+\tau| - C\right)^{-1/2}\right],$$

где τ – параметр, C – произвольная константа, а

$$a^2 = \frac{1}{4\beta}\,\mathcal{C}_1^2. \tag{F.9}$$

Возвращаясь к исходной функции y и к ее аргументу x, найдём точное решение уравнения (F.3):

$$x = x(\tau, C) = \frac{1}{2}\,\mathcal{C}_1 - \frac{1}{4a}\,\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2\frac{\tau}{f(\tau)}, \tag{F.10a}$$

$$y = y(\tau, C) = a\left[\frac{1+\tau}{\tau}\,f(\tau) - \frac{1}{2}\,\frac{\tau}{f(\tau)}\right] + \frac{\mathcal{C}_2 x}{2x-\mathcal{C}_1}. \tag{F.10b}$$

Здесь

$$f(\tau) \equiv \left(\tau - \ln|1+\tau| - C\right)^{1/2}. \tag{F.11}$$

Выпишем вид решения для (F.2):

$$x = x(\tau, C), \quad y = y(\tau, C), \quad t = \frac{1}{\beta}\int \frac{\dot{x}_\tau\,d\tau}{[\mathcal{C}_1 - 2x(\tau,C)]\,y(\tau,C) + \mathcal{C}_2 x(\tau,C)} + \widetilde{C}, \tag{F.12}$$

$\dot{x}_\tau \equiv dx(\tau, C)/d\tau$ и $\widetilde{C}$ – произвольная константа. Последнее соотношение определяет неявную зависимость τ от t: $\tau = \tau(t, C, \widetilde{C})$. Зависимость x и y от t можно найти, принимая во внимание (F.10a) и (F.10b). Акцентируем внимание на том, что вместо последнего выражения в (F.12) можно использовать

$$t = \int \frac{\dot{y}_\tau d\tau}{x(\tau, C)(\mathcal{C}_1 - x(\tau, C))} + \widetilde{C}.$$

Ввиду того, что использование соотношений для определения времени $t = t(\tau, C, \widetilde{C})$ в параметрической форме приводит к сложным вычислениям, здесь будем использовать другой подход.

Практически, мы пришли к задаче определения функции $\mathcal{F}(\tau)$, удовлетворяющей системе вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dy(\tau, C)}{d\tau} = \mathcal{F}(\tau) x (\mathcal{C}_1 - x), \\ \dfrac{dx(\tau, C)}{d\tau} = \beta \mathcal{F}(\tau) \big[(\mathcal{C}_1 - 2x) y + \mathcal{C}_2 x \big]. \end{cases} \tag{F.13}$$

В правой части (F.13) для краткости опустили зависимость функций x и y от τ (и C). Связь с исходным временем в этом случае имеет вид:

$$t = \int \mathcal{F}(\tau) d\tau + \widetilde{C}. \tag{F.14}$$

Затем выражаем $f(\tau)$ как функцию от x из параметрического решения (F.10a), подставляем ее в y (F.10b) и дифференцируем относительно τ. В результате имеем

$$\dot{y}_\tau = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2}{\mathcal{C}_1 - 2x} + \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2 \frac{\tau \dot{x}_\tau}{(\mathcal{C}_1 - 2x)^2} + \frac{2a^2}{\mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2} \dot{x}_\tau.$$

Здесь коэффициент a^2 определен соотношением (F.9). В последнем выражении отсутствует производная $\dot{x}_\tau$. Далее подставляем соответствующие правые части из (F.13) в предыдущее выражение вместо $\dot{y}_\tau$ и $\dot{x}_\tau$, а точные решения (F.10) – вместо y и x. Принимая во внимание (F.8) и (F.9), после достаточно трудоёмких алгебраических преобразований получим

$$\mathcal{F}(\tau) = -\frac{2a}{\mathcal{C}_1^2} \frac{1}{(1+\tau) f(\tau)}. \tag{F.15}$$

Преимуществом предложенного подхода является то, что большая часть членов взаимно сокращается, что приводит в результате к относительно простому

выражению. Искомую параметризацию времени можно найти, подставляя $\mathcal{F}(\tau)$ в (F.14) и учитывая (F.11):

$$t = t(\tau, C, \widetilde{C}) = -\frac{2a}{\mathcal{C}_1^2} \int \frac{d\tau}{(1+\tau)\big(\tau - \ln|1+\tau| - C\big)^{1/2}} + \widetilde{C}. \tag{F.16}$$

Прямой подстановкой (F.15) и точных решений (F.10) в систему уравнений (F.13) убеждаемся, что они обратились в тождество. Возвращаясь к N_1 и W_1, с учётом (F.1), восстанавливая параметр B (F.5), найдём точное решение системы (3.93), определенное выражением (3.95).

Проведём анализ структуры интеграла в (F.16). Замена переменной интегрирования

$$\ln|1+\tau| = \zeta,$$

приводит к

$$\int \frac{d\tau}{(1+\tau)\big(\tau - \ln|1+\tau| - C\big)^{1/2}} = \int \frac{d\zeta}{\big[\pm \mathrm{e}^{\zeta} - \zeta - \big(1+C\big)\big]^{1/2}}, \tag{F.17}$$

где в правой части имеем

$$\begin{cases} +\mathrm{e}^{\zeta}, \text{ for } \tau > -1, \\ -\mathrm{e}^{\zeta}, \text{ for } \tau < -1. \end{cases}$$

Ещё одна замена

$$\pm \mathrm{e}^{\zeta} - \zeta - \big(1+C\big) = \lambda. \tag{F.18}$$

представляет собой уравнение, решение которого относительно λ представим в виде:

$$\zeta = \zeta(\lambda) = -\lambda - \big(1+C\big) - W\big(\mp \mathrm{e}^{-(1+C)}\mathrm{e}^{-\lambda}\big),$$

где $W(x)$ – функция Ламберта W [59]. Используя правило дифференцирования для этой функции [59, 118], находим далее

$$d\zeta = -d\lambda + \frac{W\big(\mp \mathrm{e}^{-(1+C)}\mathrm{e}^{-\lambda}\big)}{1 + W\big(\mp \mathrm{e}^{-(1+C)}\mathrm{e}^{-\lambda}\big)}\, d\lambda \equiv -\frac{1}{1 + W\big(\mp \mathrm{e}^{-(1+C)}\mathrm{e}^{-\lambda}\big)}\, d\lambda.$$

Подставляя переменную (F.18) и дифференциал $d\zeta$ в (F.17), вместо последнего интеграла в (F.17) находим

$$-\int \frac{d\lambda}{\lambda^{1/2}\big[1 + W\big(\mp \mathrm{e}^{-(1+C)}\mathrm{e}^{-\lambda}\big)\big]}$$

или

$$-2\int \frac{d\xi}{1+W\left(\mp \mathrm{e}^{-(1+C)}\mathrm{e}^{-\xi^2}\right)}, \quad \xi \equiv \lambda^{1/2}. \tag{F.19}$$

Таким образом, интеграл, содержащий трансцендентную функцию в (F.16), можно свести к интегралу от функции Ламберта W, но, к сожалению, его нельзя вычислить непосредственно. Сложность состоит в том, что функция W зависит от переменной ξ как $\mathrm{e}^{-\xi^2}$. Следуя работе [119] (уравнение (45)), можно использовать частное интегральное представление для функции Ламберта W:

$$\int \frac{d\xi}{1+W\left(\mp \mathrm{e}^{-(1+C)}\mathrm{e}^{-\xi^2}\right)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi dv \int \frac{d\xi}{1 \mp \mathrm{e}^{-(1+C)}\mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{e}^{v\cot v}\sin v/v}. \tag{F.20}$$

Далее представим подинтегральное выражение в виде разложения в ряд

$$\frac{1}{1 \mp \mathrm{e}^{-(1+C)}\mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{e}^{v\cot v}\sin v/v} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\pm 1)^\nu \mathrm{e}^{-\nu(1+C)}\mathrm{e}^{-\nu\xi^2}\left\{\mathrm{e}^{v\cot v}\,\frac{\sin v}{v}\right\}^\nu.$$

Запишем интеграл по ξ через гауссовскую функцию ошибок

$$\int\limits_0^\xi \mathrm{e}^{-\nu\xi^2}d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\,\mathrm{erf}(\sqrt{\nu}\xi),$$

а для интегрирования по v используем следствие 3.4. из [119]

$$\int\limits_0^\pi \left\{\mathrm{e}^{v\cot v}\,\frac{\sin v}{v}\right\}^\nu dv = \frac{\pi\nu^\nu}{\nu!}.$$

В результате для интеграла (F.20) находим представление в виде ряда:

$$\int \frac{d\xi}{1+W\left(\mp \mathrm{e}^{-(1+C)}\mathrm{e}^{-\xi^2}\right)} = \xi + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^\nu}{\nu!\sqrt{\nu}}\left(\mathrm{e}^{-(1+C)}\nu\right)^\nu \mathrm{erf}(\sqrt{\nu}\xi).$$

Подставляя это представление в (F.19) и возвращаясь к исходной переменной τ (просто заменяя ξ на $f(\tau)$), получим следующее представление для параметризации времени (F.16):

$$t = \frac{4a}{\mathcal{C}_1^2}\left\{f(\tau) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^\nu}{\nu!\sqrt{\nu}}\left(\mathrm{e}^{-(1+C)}\nu\right)^\nu \mathrm{erf}\left(\sqrt{\nu}f(\tau)\right)\right\} + \widetilde{C}.$$

Напомним, что здесь использовали соглашение: $(+1)^\nu \equiv 1$, если $\tau > -1$ и $(-1)^\nu$, если $\tau < -1$. Более удобно использовать такое представление, например, для приближенного выражения для t как функции параметра τ, если учесть несколько первых членов ряда или, наоборот, рассматривать их асимптотическую аппроксимацию при условии $\nu \to \infty$.

Список литературы

[1] Кадомцев Б.Б. Турбулентность плазмы / Б.Б. Кадомцев // Вопросы теории плазмы. Вып. 4: сб. науч. тр. / ред. М.А. Леонтович – М. : Атомиздат, 1964. – 188–339 с.

[2] Коврижных Л. Об эффектах взаимодействия плазмонов / Л. Коврижных // Журнал эксперим. и теоретической физики. – 1965. – Т. 49. – С. 237–247.

[3] Захаров В.Е. О спектре слабой турбулентности в плазме без магнитного поля / В.Е. Захаров // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1966. – Т. 51. – С. 688–696.

[4] Липеровский В.А. О взаимодействии ленгмюровских плазмонов / В.А. Липеровский, В.Н. Цытович // Известия Вузов. Радиофизика. – 1969. – Т. XVI. – С. 823–829.

[5] Захаров В.Е. Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией / В. Е. Захаров // Известия Вузов. Радиофизика. – 1974. – Т. XVII. – С. 431–453.

[6] Zakharov V.E. Hamiltonian approach to the description of nonlinear plasma phenomena / V.E. Zakharov, S.L. Musher, A.M. Rubenchik // Physical Reports. – 1985. – V. 129. – P. 285–366.

[7] А.М. Балк, В.Е. Захаров, *Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов*, сб. науч. тр. / ред. В.Г. Барьяхтар, В.Е. Захаров, В.М. Черноусенко - Киев: Наукова Думка, 1990. – 417–472 с.

[8] Blaizot J.-P. The quark-gluon plasma: collective dynamics and hard thermal loops / J.-P. Blaizot, E. Iancu // Physics Reports. – 2002. – V. 359. – P. 355–528.

[9] Braaten E. Soft amplitudes in hot gauge theories: a general analysis / E. Braaten, R.D. Pisarski // Nuclear Physics B. – 1990. – V. 337. – P. 569–634.

[10] Blaizot J.-P. Soft collective excitations in hot gauge theories / J.-P. Blaizot, E. Iancu // Nuclear Physics B. – 1994. – V. 417. – P. 608–673.

[11] Klimov V.V. Spectrum of elementary Fermi excitations in a quark-gluon plasma / V.V. Klimov // Sov. J. Nucl. Phys. – 1981. – V. 33. – P. 934–935.

[12] Климов В.В. Коллективные возбуждения в горячей кварк-глюонной плазме / В.В. Климов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1982. – Т. 82. – С. 336–345.

[13] Weldon H.A. Effective fermion masses of order gT in high-temperature gauge theories with exact chiral invariance / H.A. Weldon // Physical Review D. – 1982. – V. 26. – P. 2789–2796.

[14] Pisarski R.D. Renormalized fermion propagator in hot gauge theories / R.D. Pisarski // Nuclear Physics A. – 1989. – V. 498. – P. 423c–428c.

[15] Braaten E. Neutrino emissivity of an ultrarelativistic plasma from positron and plasmino annihilation / E. Braaten // The Astrophysical Journal. – 1992. – V. 392. – P. 70–73.

[16] Markov Yu.A. Nonlinear dynamics of soft fermion excitations in hot QCD plasma I: Soft-quark–soft-gluon scattering / Yu.A. Markov, M.A. Markova // Nuclear Physics A. – 2006. – V. 770. – P. 162–209.

[17] Захаров В.Е. Гамильтоновский формализм для гидродинамических плазменных волн / В. Е. Захаров // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1971. – Т. 60. – С. 1714–1726.

[18] Красицкий В.П. О каноническом преобразовании в теории слабонелинейных волн с нераспадным законом дисперсии / В.П. Красицкий // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1990. – Т. 98. – С. 1644–1655.

[19] Захаров В.Е. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн / В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов, // Успехи физических наук. – 1997. – Т. 167. – С. 1137–1167.

[20] Zakharov V.E., Kolmogorov Spectra of Turbulence I. Wave Turbulence / V.E. Zakharov, V.S. L'vov, G. Falkovich – Springer-Verlag: 1992. – 265 p.

[21] Nair V.P. Hard thermal loops, gauged WZNW – action and the energy of hot quark-gluon plasma / V. P. Nair // Physical Review D. – 1993. – V. 48. – P. 3432–3435.

[22] Nair V. P. Hamiltonian of the effective action for hard thermal loops QCD / V. P. Nair // Physical Review D. – 1994. – V. 50. – P. 4201–4208.

[23] Blaizot J.-P. Gauge structure and semi-classical aspects of hard thermal loops / J.-P. Blaizot, E. Iancu // Nuclear Physics B. – 1995. – V. 434. – P. 662–674.

[24] Markov Yu.A. Hamiltonian formalism for Bose excitations in a plasma with a non-Abelian interaction I: Plasmon - hard particle scattering / Yu.A. Markov, M.A. Markova, and N.Yu. Markov // Nuclear Physics A. – 2024. – V. 1048 – P. 122903.

[25] Калашников О.К. Поляризационный оператор в КХД при конечных температурах и плотностях / О.К. Калашников, В.В. Климов // Ядерная физика. – 1980. – Т. 31. – С. 1357–1371.

[26] Pisarski R.D. Scattering Amplitudes in Hot Gauge Theories / R.D. Pisarski // Phys. Rev. Lett. – 1989. – V. 63. – P. 1129–1132.

[27] Шварц А.С. Математические основы квантовой теории поля / А.С. Шварц. – Москва: Атомиздат, 1975. – 368 с.

[28] Боголюбов Н.Н. Введение в теорию квантованных полей / Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. – Москва: Наука, 1976. – 480 с.

[29] Ахиезер А.И. Электродинамика плазмы / А.И. Ахиезер, И.А. Ахиезер, Р.В. Половин, А.Г. Ситенко, К.Н. Степанов. – Москва: Наука, 1974. – 719 с.

[30] Markov Yu.A. Nonlinear dynamics of soft boson excitations in hot QCD plasma. I Plasmon-plasmon scattering / Yu.A. Markov, M.A. Markova // Annals of Physics. – 2002. – V. 302. – P. 172–205.

[31] Weldon H.A. Branch cuts due to finite-temperature quasiparticles / H.A. Weldon // Physical Review D. – 1998. – V. 58. – P. 105002(13).

[32] Blaizot J.-P. Energy-momentum tensors for the quark-gluon plasma / J.-P. Blaizot, E. Iancu // Nuclear Physics B. – 1994. – V. 417. – P. 565–592.

[33] Hakim R. Introduction to relativistic statistical mechanics: classical and quantum / R. Hakim. – World Scientific Publishing Co., 2011 – 538 p.

[34] Markov Yu.A. Nonlinear Landau damping of a plasmino in the quark-gluon plasma / Yu.A. Markov, M.A. Markova // Physical Review D. – 2001. – V. 64. – P. 105009(27).

[35] Blaizot J.-P. Approximately self-consistent resummations for the thermodynamics of the quark-gluon plasma: Entropy and density / J.-P. Blaizot, E. Iancu, A. Rebhan // Physical Review D. – 2001. – V. 63. – P. 065003.

[36] Casalbuoni R. On the quantization of systems with anticommuting variables / R. Casalbuoni // Il Nuovo Cimento A. – 1976. – V. 33. – P. 115–125.

[37] Casalbuoni R. The classical mechanics for Bose-Fermi systems / R. Casalbuoni // Il Nuovo Cimento A. – 1976. – V. 33. – P. 389–431.

[38] Berezin F.A. Introduction in superanalysis / F.A. Berezin, Edited by A.A. Kirillov – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands, 1987 – 424 p.

[39] Kraemmer U. Advances in perturbative thermal field theory / U. Kraemmer, A. Rebhan // Reports on Progress in Physics. – 2004. – V. 67. – P. 351–431.

[40] J. Ghiglieri, A. Kurkela, M. Strickland, A. Vuorinen, Perturbative thermal QCD: Formalism and applications / J. Ghiglieri, A. Kurkela, M. Strickland, A. Vuorinen // Physics Reports. – 2020. – V. 880. – P. 1–73.

[41] Weldon H.A. Structure of the quark propagator at high temperatures / H.A. Weldon // Physical Review D. – 2000. – V. 61. – P. 036003.

[42] Цытович В.Н. Нелинейные эффекты в плазме / В.Н. Цытович. – Москва: Наука, 1967. – 287 с.

[43] Марков Ю.А. Гамильтонов формализм для бозе-возбуждений в плазме с неабелевым типом взаимодействия / Ю.А. Марков, М.А. Маркова, Н.Ю.

Марков, Д.М. Гитман // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2020. – Т. 157. – С. 327–341.

[44] Markov Yu.A. Hamiltonian formalism for Fermi excitations in a plasma with a non-Abelian interaction / Yu.A. Markov, M.A. Markova, N.Yu. Markov // International Journal of Modern Physics A. – 2023. – V. 38. – P. 2350015(77).

[45] Марков Ю.А. Гамильтонов формализм для коллективных бозонных волн в кварк-глюонной плазме: рассеяние плазмонов на жесткой цветной частице / Ю.А. Марков, М.А. Маркова, Н.Ю. Марков // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2023. – Т. 66, № 12. – С. 151–165.

[46] Brown L.M. Two-component fermion theory / L.M. Brown // Physics Review. – 1958. – V. 111. – P. 957–964.

[47] Morgan A.G. Second order fermions in gauge theories / A.G. Morgan // Physics Letter B. – 1995. – V. 351. – P. 249–256.

[48] Ángeles-Martínez René Renormalization of the QED of second-order spin $\frac{1}{2}$ fermions / René Ángeles-Martínez and Mauro Napsuciale // Physics Review D. – 2012. – V. 85. – P. 076004(85).

[49] Delgado Acosta E.G. Bosonic and fermionic Weinberg-Joos $(j,0)\bigoplus(0,j)$ states of arbitrary spins as Lorentz tensors or tensor-spinors and second-order theory / E.G. Delgado Acosta, V.M. Banda Guzmán, and M. Kirchbach // The European Physics Journal A. – 2015. – V. 51. – P. 35(13).

[50] Peskin M.E. An introduction to quantum field theory / M.E. Peskin, D.V. Schroeder – Perseus Books, 1995 – 842 p.

[51] Volkov M.K. σ meson in hot and dense matter / M.K. Volkov, A.E. Radzhabov, and N.L. Russakovich // Physics of Atomic Nuclei. – 2003. – V. 66. – P. 997–1004.

[52] Markov Yu.A. Nonlinear dynamics of soft boson collective excitations in hot QCD plasma II: plasmon-hard-particle scattering and energy losses / Yu.A. Markov, M.A. Markova A.N. Vall // Annals of Physics. – 2004. – V. 309. – P. 93–150.

[53] Balescu R. Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics / R. Balescu – Wiley, New York, 1975 – 756 p.

[54] Lüscher M. Asymptotic behavior of classical Yang-Mills fields in Minkowski space / M. Lüscher // Nuclear Physics B. – 1978. – V. 140. – P. 429–448.

[55] Reinhardt H. Variational approach to Yang-Mills theory at finite temperatures / H.Reinhard, D.R. Campagnari, A.P. Szczepaniak // Physisc Review D. – 2011. – V. 84. – P. 045006.

[56] de la Cruz L. Classical Yang-Mills observables from amplitudes / L. de la Cruz, B. Maybee, D. O'Connell and A.Ross // Journal of High Energy Physics. // – 2020. – V.12. – P. 076.

[57] Gonzo R. Asymptotic charges and coherent states in QCD / R. Gonzo, T. Mc Loughlin, A. Spiering // Physics Review D. – 2021. – V. 104. – P. 025019.

[58] Markov Yu.A. Nonlinear plasmon damping in the quark-gluon plasma / Yu.A. Markov, M.A. Markova // Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics. – 2000. – V. 26. – P. 1581–1619.

[59] Corless R.M. On the Lambert W function / R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare *et al.* // Advances in Computational Mathematics. – 1996. – V. 5. – P. 329–359.

[60] Zakharov V.E. Integrable systems in multidimensional spaces / V.E. Zakharov // Lecture Notes in Physics. – 1983. – V. 153. – P. 190–216.

[61] Захаров В.Е. О матрице рассеяния и интегрируемости волновых систем, обладающих дополнительным интегралом движения / В.Е. Захаров, Е.И. Шульман // Доклады Академии наук СССР. – 1985. – Т. 283. – С. 1325–1328.

[62] Zakharov V.E. On additional motion invariants of classical Hamiltonian wave systems / V.E. Zakharov and E.I. Schulman // Physica D. – 1988. – V. 29. – P. 283–320.

[63] Schweber S.S. An introduction to relativistic quantum field theory / S.S. Schweber – Row, Peterson and Company, New York, 1961 – 905 p.

[64] Wyld H.W. Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid / H.W. Wyld // Annals of Physics. – 1961. – V. 14. – P. 143–165.

[65] Захаров В.Е. О статистическом описании нелинейных волновых полей / В.Е. Захаров, В.С. Львов // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 1975. – Т. XVIII. – С. 1470–1487.

[66] Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров – Наука, Москва, 1981. – 512 с.

[67] Боголюбов Н.Н. Введение в аксиоматическую квантовую теорию поля / Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, И.Т. Тодоров – Наука, Москва, 1969. – 424 с.

[68] Боголюбов Н.Н. Общие принципы квантовой теории поля / Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, А.И. Оксак, И.Т. Тодоров – Наука, Москва, 1987. – 616 с.

[69] Lehmann H. On the formulation of quantized field theories - II / H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann // Nuovo Cimento. – 1957. – V. 6. – P. 319–333.

[70] Sudarshan E.C.G. Classical Dynamics: A Modern Perspective / E.C.G. Sudarshan, N. Mukunda – John Wiley & Sons, New York, 1974. – 615 p.

[71] Медведев Б.В. Начала теоретической физики / Б.В. Медведев – Наука, Москва, 1977. – 496 с.

[72] Kim J.-H. Massive twistor worldline in electromagnetic fields / J.-H. Kim, J.-W. Kim, S. Lee // Journal of high energy physics. – 2024. – V. 8. – P. 080.

[73] Kelly P.F. Classical transport theory and hard thermal loops in the quark-gluon plasma / P.F. Kelly, Q. Liu, C. Lucchesi, C. Manuel // Physics Review D. – 1994. – V. 50. – P. 4209–4218.

[74] Biedenharn L.C. On the representations of the semisimple Lie groups: I: the explicit construction of invariants for the unimodular unitary group in N dimensions / L.C. Biedenharn // Journal Mathematical Physics. – 1963. – V. 4. – P. 436–445.

[75] Klein A. Invariant operators of the unitary unimodular group in n dimensions / A. Klein // Journal of Mathematical Physics. – 1963. – V. 4. – P. 1283–1284.

[76] Sudbery A. Computer-friendly d-tensor identities for $SU(n)$ / A. Sudbery // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1990. – V. 23. – P. 705–790.

[77] de Azcárraga J.A. Invariant tensors for simple groups / J.A. de Azcárraga, A.J. Macfarlane, A.J. Mountain, J.C. Pérez Bueno // Nuclear Physics B. – 1998. – V. 510. – P. 657–687.

[78] Бьёркен Дж.Д. Релятивистская квантовая теория. Том 2. Релятивистские квантовые поля / Дж.Д. Бьёркен, С.Д. Дрелл – Наука, Москва, 1978. – 408 с.

[79] Nauta B.J. Effective classical theory for real-time SU(N) gauge theories at high temperature / B.J. Nauta, C.G. van Weert // Nuclear Physics B. – 2000. – V. 571(1). P. 151–168.

[80] Gyulassy M. Multiple collisions and induced gluon bremsstrahlung in QCD / M. Gyulassy, X.-N. Wang // Nuclear Physics B. – 1994. – V. 420. – P. 583–614.

[81] Wang X.-N. Landau-Pomeranchuk-Migdal effect in QCD and radiative energy loss in a quark-gluon plasma / X.-N. Wang, M. Gyulassy, M. Plümer // Physics Review D. – 1995. – V. 51. – P. 3436–3446.

[82] Baier R. Radiative energy loss of high energy quarks and gluons in a finite-volume quark-gluon plasma / R. Baier, Y.L. Dokshitzer, A.H. Mueller, S. Peigné, D. Schiff // Nuclear Physics B. – 1997. – V. 483. – P. 291–320.

[83] Baier R. Energy loss in perturbative QCD / R. Baier, D. Schiff, B.G. Zakharov // Annual Review of Nuclear and Particle Science. – 2000. – V. 50. – P. 37–69.

[84] Gyulassy M. Reaction operator approach to non-Abelian energy loss / M. Gyulassy, P. Levai, I. Vitev // Nuclear Physics B. – 2001. – V. 594. – P. 371–419.

[85] Zakharov B.G. On the energy loss of high energy quarks in a finite-size quark-gluon plasma / B.G. Zakharov // Письма в ЖЖурнал экспериментальной и теоретической физики. – 2001. – Т. 73. – С. 55–58.

[86] Zakharov B.G. Parton energy loss in an expanding quark-gluon plasma: radiative vs. collisional / B.G. Zakharov // Письма в ЖЖурнал экспериментальной и теоретической физики. – 2007. – Т. 86. – С. 509–516.

[87] Qin G.-Y. Radiative and collisional jet energy loss in the quark-gluon plasma at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider / G.-Y. Qin, J. Ruppert, C. Gale, S. Jeon, G.D. Moore, M.G. Mustaf // Physics Review Letter. – 2008. – V. 100. – P. 072301.

[88] Djordjevic M. Theoretical formalism of radiative jet energy loss in a finite size dynamical QCD medium / M. Djordjevic // Physical Review C. – 2009. – V. 80. – P. 064909.

[89] Bjorken J.D. Energy loss of energetic partons in quark-gluon plasma: possible extinction of high pT jets in hadron-hadron collisions / J.D. Bjorken // FERMILABPub-82/59-THY – 1982.

[90] Thoma M.H. Quark damping and energy loss in the high temperature QCD / M.H. Thoma, M. Gyulassy // Nuclear Physics B. – 1991. – V. 351. – P. 491–506.

[91] Braaten E. Energy loss of a heavy quark in the quark-gluon plasma / E. Braaten, M.H. Thoma // Physics Review D. – 1991. – V. 44. – P. 2625–2630.

[92] Adil A. Collisional energy loss of nonasymptotic jets in a quark-gluon plasma / A. Adil A., M. Gyulassy, W. Horowitz, S. Wicks // Physics Review C. – 2007. – V. 75. – P. 044906.

[93] Wang X.-N. Interference effect in elastic parton energy loss in a finite medium / X.-N.Wang // Physics Letter B. – 2007. – V. 650. – P. 213–218.

[94] Sandri G. The foundations of nonequilibrium statistical mechanics I. / G. Sandri // Annals of Physics. – 1963. – V. 24. – P. 332–379.

[95] Sandri G. The foundations of nonequilibrium statistical mechanics II. / G. Sandri // Annals of Physics. – 1963. – V. 24. – P. 380–418.

[96] Sandri G. A new method of expansion in mathematical physics - I / G. Sandri // Nuovo Cimento. – 1965. – V. 36. – P. 67–93.

[97] Frieman E.A. On a new method in the theory of irreversible processes / E.A. Frieman // J. Math. Phys. – 1963. – V. 4. – P. 410–418.

[98] Klimontovich V.E. Nonlinear interaction of waves in a plasma / V.E. Klimontovich // Sov. Phys. JETP. – 1965. – V. 21. – P. 326–332.

[99] Benney D.J. Nonlinear interactions of random waves in a dispersive medium / D.J. Benney, P.G. Saffman // Proc. Royal Soc. London. Series A. – 1966. – V. 289. – P. 301–320.

[100] Zakharov V.E. Weak-turbulence spectrum in a plasma without a magnetic field / V.E. Zakharov // Sov. Phys. JETP. – 1967. – V. 24 – P. 455–459.

[101] Zakharov V.E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid/V.E. Zakharov //J.Appl.Mech. Tech. Phys. -1968. -V. 9. -P. 190-194.

[102] Davidson R.C. Methods in Nonlinear Plasma Theory / R.C. Davidson – Academic Press, Inc., New York and London, 1972. – 356 p.

[103] Sitenko A.G. Nonlinear wave interaction and fluctuations in plasma / A.G. Sitenko // Physica Scripta. – 1973. – V. 7. – P. 193–197.

[104] Crawford D.R. Evolution of a random inhomogeneous field of nonlinear deep-water gravity waves / D.R. Crawford, Ph.G. Saffman, H.C. Yuen // Wave Motion. – 1980. – V. 2. – P. 1–16.

[105] Oberman C.R. Basic Plasma Physics. Volume I of Handbook of Plasma Physics. Chapter 2 / C.R. Oberman, E.A. Williams – North-Holland Publishing Company, 1983. – pp. 279–333.

[106] Krylov N.M. Introduction to Non-Linear Mechanics / N.M. Krylov and N.N. Bogoliubov – Princeton University Press, Princeton, NJ, 1950. – 106 p.

[107] Weldon H.A. Particles and holes / H.A. Weldon // Physica A. – 1989. – V. 158. – P. 169–177.

[108] Weldon H.A. Dynamical holes in the quark-gluon plasma / H.A. Weldon // Physical Review D. – 1989. – V. 40. – P. 2410–2420.

[109] Frenkel J. High-temperature limit of thermal QCD /J. Frenkel, J.C. Taylor // Nuclear Physics B. – 1990. – V. 334. – P. 199–216.

[110] Blaizot J.-P. Soft collective excitations in hot gauge theories / J.-P. Blaizot, E. Iancu // Nuclear Physics B. – 1994. – V. 417. – P. 608–673.

[111] Kaplan L.M. Matrix Products and the Explicit 3, 6, 9, and $12j$ Coefficients of the Regular Representation of $SU(n)$ / L.M Kaplan , M. Resnikoff // Journal of Mathematical Physics. – 1967. – V. 8. – P. 2194–2205.

[112] MacFarlane A.J. On Gell-Mann's λ-matrices, d- and f-tensors, octets, and parametrizations of $SU(3)$ / A.J. MacFarlane, A. Sudbery, P.H. Weisz // Communication in Mathematical Physics. – 1968. – V. 11. – P. 77–90.

[113] Fadin V.S. Nonforward NLO Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov kernel / V.S. Fadin, R. Fiore // Physical Review D. – 2005. – V. 72. – P. 014018.

[114] Nikolaev N.N. Nonlinear $\mathbf{k}_\perp$ factorization for gluon-gluon dijets produced off nuclear targets / N.N. Nikolaev, W. Schäfer, and B.G. Zakharov // Physical Review D. – 2005. – V. 72. – P. 114018.

[115] Haber H.E. Useful relations among the generators in the defining and adjoint representations of $SU(N)$ / H.E. Haber // SciPost Physical Lecture Notes. – 2021. – V. 21. – P. 1–11.

[116] van Ritbergen T. Group theory factors for Feynman diagrams / T. van Ritbergen, A.N. Schellekens, J.A.M. Vermaseren // International Journal of Modern Physics A. – 1999. – V. 14. – P. 41–96.

[117] Зайцев В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин – Физматлит, Москва, 1978. —576 с.

[118] Corless R.M. A Sequence Series for the Lambert W Function / R.M. Corless, D.J. Jeffrey, D.E. Knuth // International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, 1997. – P. 197–204.

[119] Kalugin G.A. Poisson and other integral representations for functions of Lambert W / G.A. Kalugin, D.J. Jeffrey, R.M. Corless // arXiv:1103.5640v1 [math .CV].