

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук
(МИАН)

ул. Губкина, д. 8, Москва, 119991 Тел.: +7(495) 984 81 41 Факс: +7(495) 984 81 39
<http://www.mi-ras.ru> E-mail: steklov@mi-ras.ru
ОКПО 02699547 ОГРН 1027739665436 ИНН/КПП 7736029594/773601001

«__» _____ 202_ № _____ - _____
на № _____ от «__» _____ 202_

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор Федерального государственного
бюджетного учреждения науки
Математического института им. В.А. Стеклова
Российской академии наук
академик РАН _____ Д.В. Трещев
«23» декабря 2021 г.



ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертацию Растёгина Алексея Эдуардовича «Энтропийные меры различимости квантовых состояний и смежные вопросы», представленную к защите на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности «1.3.3. – Теоретическая физика»

В настоящее время наблюдается огромный прогресс в области квантовых технологий: квантовых вычислений, квантовых коммуникаций и квантовой метрологии. Возрастающие экспериментальные возможности в области манипулирования индивидуальными квантовыми системами (отдельными атомами, фотонами и т.д.) требуют развития соответствующих теоретических методов и математического формализма. Соответствующая междисциплинарная область исследований носит название квантовой теории информации или квантовой информатики. Она находится на стыке теоретической физики, математической физики, теории вероятностей и теории алгоритмов. Потребности практики ставят перед этой наукой сложные теоретические вопросы и задачи.

Одним из центральных понятий квантовой информатики является понятие информационной энтропии. В разных контекстах энтропия может характеризовать степень

беспорядка и шума в системе, количество информации, содержащееся в состоянии системы, степень различимости различных состояний и т.д. В связи с большим количеством контекстов, постановок задач и приложений не удастся обойтись каким-то одним определением энтропии – например, наиболее широко известной энтропией фон Неймана. В квантовой теории информации используется множество различных семейств энтропий – энтропии Реньи, Цаллиса, сглаженные энтропии Реньи и т.д. Большое разнообразие квантовых энтропий по сравнению с классическими связано с некоммутативностью квантовых наблюдаемых. Для того чтобы иметь математические инструменты решения задач, возникающих в квантовой теории информации, очень важно знать свойства и особенности всех этих семейств энтропийных характеристик. Этому и посвящена диссертация А. Э. Растёгина. Таким образом, тематика диссертационной работы очень актуальна.

Диссертация содержит восемь глав и очень широка по охвату различных тем и полученных результатов, связанных с квантовыми энтропиями Реньи и Цаллиса, что, несомненно, относится к ее достоинствам.

Первая глава посвящена частичным следовым расстояниям и частным точностям воспроизведения. Следовое расстояние между двумя квантовыми состояниями и точность воспроизведения одного состояния другим широко используются в квантовой теории информации и выражаются через суммы сингулярных значения определенных операторов. Частичные следовые расстояния и частные точности воспроизведения получаются, если сложить не все сингулярные значения, а только первые несколько самых больших сингулярных значений. В главе делается попытка доказать для них некоторые свойства «полных» следового расстояния и точности воспроизведения. Прежде всего, это свойство выпуклости и свойство монотонности. Оказывается, что в той же степени общности эти свойства не имеют место для частичных величин, но имеют место при некоторых дополнительных предположениях. Эти результаты, несомненно, представляют интерес.

Во второй главе доказываются свойства непрерывности и устойчивости частичных энтропийных сумм, которые выражаются неравенствами типа Фанне. В этой главе выясняется важное преимущество частичных энтропийных сумм по сравнению с полными. Автор обсуждает непрерывность устойчивости энтропийных сумм при переходе к термодинамическому пределу (пределу бесконечного числа измерений в гильбертовом пространстве). Неравенства типа Фанне для полных энтропийных сумм оказываются существенно конечномерными, тогда как для частичных энтропийных сумм свойства непрерывности и устойчивости сохраняются и в термодинамическом пределе. Вероятностный смысл состоит в отбрасывании «хвостов» распределений вероятностей. В

связи с этим глава представляется очень важной и во многом объясняет интерес к частичным энтропийным суммам.

В третьей главе изучается интересное семейство энтропий, которое называется унифицированным, поскольку оно включает как частные случаи два известных семейства энтропий – Реньи и Цаллиса. Доказан ряд их свойств, связанных с выпуклостью, субаддитивностью, непрерывностью и устойчивостью – иными словами, ряд важнейших свойств, которые мы ожидаем от энтропийных характеристик. Те свойства, для которых это возможно, доказаны совместно в классическом и квантовом режимах. Однако вопросы субаддитивности и характера изменения энтропий при сохраняющих след вполне положительных преобразованиях становятся значительно сложнее в некоммутативном случае. Некоммутативность закономерно приводит к сложностям чисто математического характера. Свойство субаддитивности, неравенство Араки–Либа и неубывание квантовой унифицированной энтропии при проективных измерениях установлены для достаточно широкого параметрического диапазона. Предложен конкретный пример убывания квантовой унифицированной энтропии в результате обобщенного квантового измерения. В результате показано, что по своим свойствам квантовые унифицированные энтропии напоминают энтропию фон Неймана.

В четвертой главе автор получает новые неравенства типа Пинскера и Фанне для относительных энтропий Цаллиса. Квантовая относительная энтропия является в определенном смысле «родительской» по отношению к энтропии фон Неймана, соответствующей условной энтропии и взаимной информации, поскольку все эти величины выражаются через квантовую относительную энтропию. Поэтому она играет очень важную роль, также в ряде случаев важна и сама по себе как мера различия между двумя квантовыми состояниями. Точно так же, как и с энтропией фон Неймана, в связи с разными постановками задач не удастся обойтись стандартным определением квантовой относительной энтропии, поэтому вводятся ее параметрические обобщения. Характерной особенностью величин этого типа является их неограниченность сверху. Поэтому желательно располагать математическими соотношениями, связывающими возможные изменения относительных энтропий с теми же характеристиками, которые проще определить на практике. В этой главе удалось улучшить некоторые оценки, приведённые в существующей литературе, и получить новые соотношения.

Пятая глава посвящена такой актуальной сейчас теме, как численная характеристика квантовой когерентности. В настоящее время развивается теория когерентности как ресурса (необходимого в квантовых вычислениях, квантовой коммуникации, квантовой термодинамике и других приложениях). Для интерпретации когерентности как количественного ресурса нужно иметь численную меру когерентности, которая должна

удовлетворять определенным свойствам. Автор предлагает рассмотреть энтропии типа Цаллиса в качестве таких мер («квантификаторов») когерентности и доказывает все необходимые для них свойства, хоть и с некоторой модификацией. Очень важно то, что автору удалось получить замкнутые аналитические выражения для этих квантификаторов. В этом заключается их важное преимущество в ряду других квантификаторов, которые включают операцию минимизации по квантовым состояниям. Здесь же удастся решить задачу минимизации аналитически.

Последние три главы посвящены энтропийным соотношениям неопределенностей. Энтропийная форма соотношений неопределенностей является наиболее удобной для дискретных наблюдаемых, обычно рассматриваемых в квантовой теории информации. Автор сосредотачивается на соотношениях неопределенностей, сформулированных через энтропии Реньи и Цаллиса. В шестой главе выводятся энтропийные соотношения неопределенностей для экстремальных представлений Крауса квантовых каналов (автор не вполне удачно называет такие представления «распутываниями»), в седьмой главе – для наблюдаемых, чьи собственные векторы составляют равнонаклоненные базисы. Такие наблюдаемые играют фундаментальную роль как в квантовой теории в целом, так и, например, в квантовой криптографии. Можно сказать, что в конечномерной квантовой теории они играют ту же роль, что и канонически сопряженные переменные в «обычной» квантовой механике. Квантовые соотношения неопределенностей принимают наиболее сильную форму именно для таких наблюдаемых.

Заключительная восьмая глава посвящена соотношениям неопределенностей между энергией и временем. В литературе в качестве таковых предлагаются различные соотношения. В диссертации принимается подход, связанный с построением наблюдаемой, являющейся «дополнительной» для гамильтониана, которую в некотором смысле можно сопоставить со временем. Автором диссертации впервые получены энтропийные соотношения неопределенностей для этой пары наблюдаемых. Важно, что энтропийные соотношения неопределенностей в заключительных двух главах обобщены и на случай детекторов с неидеальной эффективностью (т.е. когда детектор с некоторой вероятностью не срабатывает).

На основании проведенного обзора содержания глав диссертации можно заключить, что получено большое количество разнообразных важных результатов, которые существенно продвигают вперед теорию квантовых энтропий Реньи и Цаллиса. Ряд важнейших свойств этих энтропий, установленных и доказанных в диссертации, позволяет более широко использовать эти энтропии в задачах квантовой теории информации, применять для решения этих задач более сложные математические инструменты. Диссертацию можно также

использовать как своего рода пособие по математическим методам, с помощью которых можно доказывать аналогичные свойства в похожих ситуациях.

Текст диссертации написан хорошим русским языком, доказательства утверждений полны и понятны, обзоры и комментарии автора по обсуждаемым темам интересно читать.

Нельзя не отметить очень хорошее владение автором литературой по исследуемой теме, причем это касается как старых работ, ставших классическими, так и современных. Фактически, с учетом широкого охвата различных вопросов, связанных с энтропиями, диссертацию можно использовать в качестве хорошего обзора имеющихся результатов по квантовым энтропиям Реньи и Цаллиса, среди которых достойное место занимают результаты автора.

В качестве замечаний можно отметить следующее:

1. Все утверждения, доказанные автором, названы «предложениями». Поскольку их количество велико, то трудно быстро разобраться, какие утверждения основные, а какие – вспомогательные. Для того чтобы читателю было проще в этом ориентироваться, более удачным было бы назвать основные утверждения «теоремами», как обычно делается в математических текстах.

2. В разных главах диссертации повторяются одни и те же базовые определения (например, квантового измерения или квантового канала) – как будто главы представляют собой независимые тексты.

3. В первой главе, а также в некоторых других местах диссертации вместо принятых в математике терминов «расстояние» или «метрика» используется термин «дистанция», что в данном контексте, по-видимому, является неудачным переводом.

4. Можно отметить некоторые неточности текста. Несколько неудачно сформулировано условие расширяемости на с. 45 (вторая глава). Там написано, что если гильбертово пространство расширяется до прямой суммы данного пространства и некоторого другого пространства, то частичная энтропийная сумма остается неизменной на всех состояниях исходного пространства. Во-первых, здесь непонятно слово «если»: для любого гильбертова пространства можно рассмотреть прямую сумму с каким-то другим пространством, здесь нет никакого условия. Во-вторых, следствие можно понять так, как будто энтропийная частичная сумма не зависит от состояния. На самом же деле, сравнение с соответствующим свойством классической частичной энтропийной суммы позволяет понять, что имеется в виду то, что частичная энтропийная сумма произвольного квантового состояния равна частичной энтропийной сумме вложения этого состояния в гильбертово пространство большей размерности.

5. Не очень понятно, откуда следуют энтропийные соотношения неопределенностей (8.11)–(8.12): не приводится ссылка на источник или предыдущие формулы диссертации, откуда бы следовали данные формулы.

6. Чтение главы 5 (про квантификаторы квантовой когерентности) несколько затрудняет то, что требования, накладываемые на квантификаторы, не сформулированы в виде списка в одном месте.

7. В главе 7 на с. 160 написано: «...Эффективность детекторов считается одинаковой по отношению ко всем из выбранных равнонаклоненных базисов. С физической точки зрения такое предположение представляется наиболее естественным». Данное предположение действительно сильно упрощает ситуацию, но с утверждением про его естественность нельзя согласиться. Так, в квантовой криптографии для измерения, например, поляризации фотона в одном из двух базисов используются обычно два или даже четыре однофотонных детектора, и у каждого может быть своя эффективность, т.к. невозможно изготовить два абсолютно одинаковых однофотонных детектора. Поэтому эффективность не только зависит от базиса, но зависит и от результата измерения, что создает большие трудности для анализа. Это замечание, конечно, не снижает ценность полученных в диссертации результатов, но хотелось бы обратить на это внимание, чтобы упрощающее предположение воспринималось именно как упрощающее, а не как физически обоснованное. Ввиду важности этого вопроса для квантовой криптографии представляет интерес обобщение результатов на описанный здесь более общий случай.

8. В главе 9 при обсуждении соотношений неопределенностей для энергии и времени не упоминается так называемый квантовый предел скорости (quantum speed limit), которому посвящено большое число классических и современных работ и который как раз считается правильной формулировкой этих соотношений неопределенности.

Данные замечания несколько не снижают ни ценность диссертационной работы, ни значимость и важность ее результатов, ни высокое качество текста диссертации.

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно, снабжены полными и подробными доказательствами. Результаты опубликованы в ведущих международных научных изданиях, индексируемых базами данных “Web of Science” и “Scopus”, и имеют десятки и сотни цитирований, что говорит о высокой востребованности полученных результатов в международном научном сообществе. Результаты докладывались на международной научных конференций по квантовой теории информации и на ряде семинаров в ведущих российских и зарубежных центрах по квантовой теории информации. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Научная новизна и значимость представленных результатов дают основание утверждать, что диссертационная работа Растёгина Алексея Эдуардовича «Энтропийные

меры различимости квантовых состояний и смежные вопросы» удовлетворяет требованиям, предъявляемым ВАК к докторским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности «1.3.3. – Теоретическая физика».

Материалы диссертации заслушаны на заседании научного семинара отдела математической физики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук 24 июня 2021 г. Отзыв был заслушан, обсужден и единогласно утвержден на заседании отдела математической физики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук 23 декабря 2021 года, протокол №1.

Подписавшие отзыв согласны на обработку персональных данных.

Заведующий Отделом математической
физики Математического института
им. В.А. Стеклова РАН,
член-корреспондент РАН,
главный научный сотрудник,
доктор физико-математических наук
Волович Игорь Васильевич



Отзыв составил:

Трушечкин Антон Сергеевич,
ведущий научный сотрудник
Отдела математической физики
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН,
доктор физико-математических наук по
специальности 01.01.03 – Математическая физика
e-mail: trushechkin@mi-ras.ru



Сведения о ведущей организации:

Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Математический институт

им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Адрес организации:

119991, Российская Федерация, Москва, ул. Губкина, д. 8

Тел.: +7(495) 984 81 41

e-mail: steklov@mi-ras.ru