

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Растёгина Алексея Эдуардовича «Энтропийные меры различимости квантовых состояний и смежные вопросы», представленную к защите на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности «1.3.3. – Теоретическая физика»

Диссертационная работа Растёгина А.Э. посвящена теоретическим аспектам квантовой информатики, которая в последние десятилетия переживает бурное развитие. Несмотря на довольно высокую степень разработанности математической теории квантовой информации, она по-прежнему активно исследуется, особенно в свете интенсификации работ по практической реализации квантовых вычислений и квантовой криптографии. Сложность и многогранность технологических проблем создания устройств квантовой обработки информации стимулирует дальнейшее развитие теоретических методов описания и анализа квантовых состояний как носителей информации. Эти методы неизбежно имеют дело с вопросами статистического характера, в которых традиционно и плодотворно используются энтропийные функционалы. В диссертационной работе автор применяет меры различимости, основанные преимущественно на энтропиях Реньи и Цаллиса. Хотя известны и другие обобщения стандартной энтропии, энтропии Реньи и Цаллиса составляют два наиболее распространённых семейства обобщённых энтропий.

В первой главе диссертации автор построил меры различимости квантовых состояний, которые базируются на нормах Фань Цзы. Эти матричные нормы, как и нормы Шаттена, образуют семейство унитарно инвариантных норм и широко используются в матричном анализе благодаря связи с принципом максимума Фань Цзы. Однако в исследованиях по квантовой теории информации чаще всего фигурируют нормы Шаттена. Автором диссертации продемонстрирована целесообразность использования норм Фань Цзы как основы для введения частичных версий следовой метрики и точности воспроизведения. Установлены ключевые свойства новых мер различимости, включая их поведение при квантовых измерениях и сохраняющих след вполне положительных преобразованиях. Обсуждается применение частичных мер различимости квантовых состояний для тестирования квантовых каналов, заданных как «чёрный ящик». Таким образом, наряду со следовой метрикой и точностью воспроизведения исследователь теперь располагает целым набором величин, расширяющим его возможности по анализу и интерпретации данных о функционировании устройств квантовой обработки информации.

Во второй главе диссертации автор предлагает исследовать непрерывность энтропийных функционалов путём анализа соответствующих частичных сумм. Частичные

суммы снова вводятся на основе унитарно инвариантных норм Фань Цзы. Неравенства типа Фанне получены для частичных энтропийных сумм Цаллиса с положительными значениями индекса, поэтому область применимости этих результатов охватывает и частичные суммы энтропии фон Неймана. Поскольку неравенство Фанне явным образом включает размерность пространства состояний, оно применимо только в конечномерном случае. Предложенный подход на основе частичных энтропийных сумм позволяет, по крайней мере в принципе, охарактеризовать изменения энтропии при вариациях матрицы плотности в бесконечномерном пространстве. Более того, фактические состояния системы, используемой в качестве информационного регистра, будут скорее лежать в некотором конечномерном подпространстве. Действительно, быстро распадающиеся состояния с высокой энергией являются малопригодными в качестве носителей информации. В этом смысле сфера применимости неравенств типа Фанне для частичных энтропийных сумм включает наиболее актуальные для информационных приложений случаи.

В третьей главе автор рассматривает так называемые унифицированные энтропии, которые являются зависящими от двух параметров обобщениями стандартных энтропийных функций. Оба семейства энтропий Реньи и Цаллиса включаются в класс унифицированных как частные случаи. Хотя некоторые свойства допускают параллельное рассмотрение в классическом и квантовом режимах, это не так в отношении субаддитивности и характера изменения энтропий при стохастических преобразованиях. В достаточно широких параметрических диапазонах автором доказаны свойства субаддитивности, неравенство Араки-Либа и неубывание квантовой унифицированной энтропии при проективных измерениях. Далее, построен явный пример того, что квантовая унифицированная энтропия может уменьшиться в результате обобщённых квантовых измерений. Таким образом, автор диссертационной работы описал, в каких отношениях унифицированные энтропии подобны энтропии фон Неймана. В третьей главе приведены также интересные обсуждения свойства устойчивости рассматриваемых энтропий в термодинамическом пределе.

Четвёртая глава диссертации посвящена неравенствам типа Пинскера и Фанне для относительных энтропий Цаллиса. Квантовая относительная энтропия является одним из ключевых понятий математической теории квантовой информации. Наряду со стандартной относительной энтропией в литературе рассматриваются и её параметрические обобщения. Характерной особенностью относительных энтропий является их неограниченность сверху. В этой связи важно уметь описывать диапазон возможных изменений этих дивергенций в терминах тех величин, которые проще

определить на практике, например следовой метрики. Полученные автором неравенства типа Пинскера используют монотонность относительных энтропий Цаллиса и выпуклость известной функции по отношению к энтропийному параметру. Этот интересный приём позволил в ряде случаев улучшить оценки, приведённые в существующей литературе. Автором получены также новые неравенства, характеризующие поведение относительных энтропий Цаллиса при стремлении к нулю минимальной вероятности или наименьшего собственного значения второго аргумента.

В пятой главе диссертации автор рассмотрел количественные меры квантовой когерентности на основе обобщённых относительных энтропий Цаллиса. Превосходство квантовых алгоритмов обработки информации над классическими связано с использованием так называемого «квантового параллелизма». Чтобы раскрыть фундаментальные ограничения на потенциальные возможности квантовых вычислений, необходимо также проанализировать роль неклассических корреляций как информационного ресурса. В текущей литературе довольно много внимания уделяется исследованиям количественных характеристик когерентности и их математических свойств. Сравнительно недавно был развит последовательный формальный подход к этой проблеме. В рамках этого подхода автор ввёл в рассмотрение квантификаторы когерентности на основе семейства параметризованных относительных энтропий Цаллиса. Получившиеся квантификаторы когерентности удовлетворяют всем наложенным требованиям, за исключением монотонности в среднем при некогерентных селективных измерениях. Последнее свойство нужно переформулировать с учетом явной зависимости величин от параметра. Автором получены замкнутые аналитические выражения для квантификаторов когерентности в терминах матричных элементов оператора плотности. Основные выводы пятой главы детально проиллюстрированы на примере кубита.

Шестая глава диссертации посвящена энтропийной формулировке соотношений неопределённостей для специфических наборов операторов Крауса сохраняющих след супероператоров. Показано, что указанные наборы обладают свойством экстремальности по отношению к ассоциированным с ними энтропиям Реньи и Цаллиса в описанных диапазонах параметра. Используя теорему Рисса о выпуклости билинейных форм, автор получает можно вывести энтропийные соотношения неопределённостей в терминах экстремальных «распутываний» супероператоров. Присутствие в этих соотношениях параметрической зависимости может привести в ряде случаев к более строгим оценкам на вероятностные распределения. Рассмотрены формулировки двух типов, первая из которых включает явную зависимость от состояние непосредственно перед измерением, а другая

справедлива для всех матриц плотности. Кратко обсуждаются некоторые примеры использования полученных автором соотношений неопределённостей для пары неортогональных разложений единицы. В этом отношении можно было бы пожелать более подробного рассмотрения.

В седьмой главе диссертации представлены новые энтропийные соотношения неопределённостей для равнонаклонённых базисов и симметричных информационно полных измерений. Такие измерения используются во многих протоколах квантовой информатики. Соответствующие дискретные наборы векторов порождают достаточно сложные математические проблемы. Например, если размерность пространства не является степенью простого числа, то максимальное количество в наборе равнонаклонённых базисов остаётся открытым вопросом. Поэтому целесообразно рассматривать произвольное количество базисов в наборе равнонаклонённых, что и делает автор. Для описания уровня неопределённостей применяются энтропии Реньи и Цаллиса с положительными значениями параметра. При выводе соотношений неопределённостей в терминах  $\min$ -энтропий автор предложил новое неравенство для спектральной нормы оператора в конечномерном пространстве. Следует отметить, что этот математический результат представляет самостоятельный интерес безотносительно к вопросам, рассмотренным в диссертации.

В восьмой главе диссертационной работы предложены энтропийные соотношения неопределённостей для энергии и её «дополнения». Полученные результаты дают один из возможных подходов сформулировать количественно принцип неопределённостей для энергии и времени. Концепция «дополнения» гамильтониана ассоциируется с конечным, но переполненным набором состояний, в котором гамильтониан действует как генератор сдвигов. Если энергетические уровни системы удовлетворяют условию соизмеримости, то из таких состояний можно сформировать своего рода замкнутое семейство с малым шагом по времени. В результате удаётся построить неортогональное разложение единичного оператора в пространстве состояний системы. После этого формулировка соотношений неопределённостей становится делом несложным. Соотношения неопределённостей для гамильтониана и его «дополнения» были рассмотрены в литературе на основе формулировки Робертсона. Автор диссертации впервые получена и проанализирована энтропийная формулировка. В ней на первый план выступают некоторые важные особенности, неочевидные при использовании среднеквадратичных отклонений. Отдельного внимания заслуживают соотношения неопределённостей при наличии неэффективных детекторов.

В качестве замечаний можно отметить следующее.

### Замечания редакционного характера

1) В главе 1 на с.20 вводится аббревиатура ПОЗМ (положительная операторно-значная мера), и как определено в работе, это - положительные меры, удовлетворяющие соотношению полноты. В предложении 2 и ниже используется термин «ПОЗМ-измерения». Для удобства читателя было бы разумно дать определение этого термина.

2) Глава 1 носит предварительный характер, в ней вводится большое количество обозначений, объясняется терминология и получены некоторые технические оценки, которые применяются в других главах. Но при этом нигде не используется слово «определение» (как и в остальном тексте работы). Возможно, что для удобства чтения было бы лучше вынести все обозначения и определения в отдельный параграф.

3) В главе 1 даны оценки в частичной следовой метрике в Предложениях 1–6.

Возникает вопрос – какое из этих Предложений является основным результатом главы 1, или они все носят технический вспомогательный характер для доказательства остальных результатов работы.

4) На с.17 в формуле (1.14) вводится термин «положительно полуопределенные операторы». Было бы лучше дать ему определение.

5) На с.7 (9 строка сверху) автореферата вводится обозначение  $X$  как «квадратный оператор в  $d$ -мерном пространстве». Этот термин существует в литературе или здесь имеется ввиду квадратные матрицы? Замечу, что далее вместо  $X$  подставляется разность двух матриц плотности.

6) С.25, 11 строка сверху. В формуле  $X_C \otimes Z_C$  думаю, что опечатка – нижний индекс  $C$  у оператора  $X$  надо заменить на  $A$ .

7) Похоже имеется некоторое несоответствие понятий используемых в автореферате и диссертации. В автореферате матрицы  $\rho$  называются состояниями системы. А в диссертации на с.14 вводится  $N$  –  $d$ -мерное пространство состояний. Пространство состояний - это все же матрицы или векторы? И второе. В диссертации в формулах (1.16) и (1.17) о спектральном разложении имеет место некорректность в обозначениях. С одной стороны, в этих формулах  $r$  и  $t$  играют роль собственных векторов, а с другой – это номера собственных значений, по которым введется суммирование. Эти обозначения используются и ниже, в формулах (1.41), (1.42) и т.д. В то же время обозначения базиса вида  $\{|e_j\rangle\}$  тоже встречается, например, в формулах (1.31) и (1.32).

Указанные недочёты не являются принципиальными и не снижают ценность оппонируемой диссертационной работы.

Автореферат полностью отражает содержание диссертации. Диссертационная работа содержит умеренное количество опечаток. Результаты диссертации опубликованы в ведущих научных журналах и представлены на конференциях и семинарах.

Подытоживая отметим, что тема представленной диссертации в высокой степени актуальна и связана с планами цифровизации народного хозяйства и развития информационных технологий. Результаты и выводы диссертации могут быть использованы и внедрены в разработках Сколтеха, Яндекса и Сбера, а также развиты в исследованиях институтов РАН: МИАН им. В.А. Стеклова и ИПМ им. М.В. Келдыша.

Научная новизна и значимость представленных результатов дают основание утверждать, что диссертационная работа Растёгина Алексея Эдуардовича «Энтропийные меры различимости квантовых состояний и смежные вопросы» удовлетворяет требованиям, предъявляемым ВАК к докторским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности «1.3.3. – Теоретическая физика».

На обработку персональных данных согласен.

Аптекарев Александр Иванович,

доктор физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ, профессор, член-корреспондент РАН, директор Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук», Москва 125047, Миусская Пл.4, тел. +7 499 220-7919, e-mail: [aptekaa@keldysh.ru](mailto:aptekaa@keldysh.ru)

Подпись Аптекарева Александра Ивановича заверяю:

Ученый секретарь ИПМ им. М.В. Келдыша, кандидат физико-математических наук Давыдов А.А.



21.12.2022.