

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”**

На правах рукописи

Растёгин Алексей Эдуардович

*ЭНТРОПИЙНЫЕ МЕРЫ РАЗЛИЧИМОСТИ КВАНТОВЫХ
СОСТОЯНИЙ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ*

1.3.3. – Теоретическая физика

**диссертация на соискание учёной степени доктора
физико-математических наук**

Иркутск 2021

Оглавление

Введение	3
1 Частичные следовые дистанции и частные точности воспроизведения	14
2 Непрерывность и устойчивость частичных энтропийных сумм	39
3 Общие свойства унифицированных энтропий	56
4 Неравенства типа Пинскера и Фанне для квантовой относительной энтропии Цаллиса	79
5 Квантификаторы квантовой когерентности на основе относительной энтропии Цаллиса	103
6 Энтропийные соотношения неопределённостей для экстремальных “распутываний” супероператоров	130
7 Энтропийные соотношения неопределённостей для равнонаклонённых базисов и симметричных информационно полных измерений	152
8 Энтропийный подход к соотношениям неопределённостей для энергии и времени	187
Заключение	206
Литература	213

Введение

Публичное обсуждение реальности квантовых вычислений началось в 80-ых годах XX века благодаря работам Р. Фейнмана [1] и П. Бениоффа [2]. Сходные идеи содержатся во вводном разделе книги Ю.И. Манина [3]. С тех пор в этой области был достигнут значительный прогресс как теоретического, так и экспериментального характера. Для некоторых алгоритмических задач, таких как факторизация целого числа и нахождение дискретного логарифма, уже известны квантовые алгоритмы, достигающие экспоненциального ускорения по сравнению с лучшими на сегодняшний день классическими алгоритмами. Одним из замечательных наблюдений, сделанных в статье [1], была явная недостаточность вычислительных ресурсов обычных компьютеров при моделировании эволюции квантовых систем. Как показали дальнейшие исследования, квантовые компьютеры смогли бы эффективно решать такие задачи, по крайней мере в нескольких практически важных ситуациях. Со времени первых экспериментальных реализаций, относящихся к концу 80-ых годов, было предложено множество различных квантовых криптосистем. В настоящее время квантовые криптосистемы уже предлагаются для коммерческого использования. Значительный интерес к использованию квантовых систем как информационного носителя стимулировал более глубокое изучение оснований квантовой механики, включая принцип неопределённости и ограничения типа неравенств Белла. В настоящее время концептуальные вопросы квантовой теории являются предметом неослабевающего интереса.

Ещё одним основанием для изучения квантовой теории в терминах теории информации являются тенденции в развитии микроэлектроники, отражённые в пресловутом законе Мура. Компьютерные методы обработки информации являются выдающимся технологическим достиже-

ем XX века, чья практическая реализация была бы невозможна без развития полупроводниковой электроники. С тех пор вычислительная мощь компьютерных систем увеличивалась исключительно быстрыми темпами. В настоящее время технологии выходят на новый уровень развития, где определяющими и неизбежными становятся квантовые закономерности. По-видимому, микроэлектроника в ближайшем будущем должна перейти к новой элементной базе, трансформируясь в “наноэлектронику” или что-либо подобное. Иначе дальнейший прогресс вычислительных ресурсов был бы крайне сомнительным. Анализ функционирования наноразмерных устройств сопряжён с учётом таких явлений, которые на макроскопическом уровне можно полностью игнорировать. Одно из имеющихся фундаментальных ограничений устанавливается принципом Ландауэра, согласно которому есть ненулевая нижняя граница на тепловыделение при потере 1 бита информации в произвольной вычислительной системе. В свете этого принципа нужно априори, особенно на микроуровне, стремиться к использованию обратимой логики вычислений, хотя реальные физические процессы будут неизбежно отклоняться от идеализированной модели.

Как выяснилось в результате примерно трёх десятилетий интенсивного развития, квантовые технологии способны дать нечто принципиально новое. Сегодня трудно спорить с тем, что на квантовом уровне можно создать качественно иные средства вычислений и коммуникаций, в ряде случаев гораздо более мощные, чем их классические аналоги. В сфере экспериментальных разработок также наблюдается постоянный, хотя и неспешный, прогресс. В целом наиболее впечатляющие результаты, особенно в области квантовых вычислений, всё ещё носят по большей части теоретический характер. Реализация этих амбициозных идей может потребовать нескольких десятилетий. Но даже безотносительно к этим надеждам квантовая теория информации заслуживает пристального изучения, поскольку является ключом к пониманию тех фундаментальных законов физики, которые до недавнего времени оставались вне поля зрения исследователей. Независимо от того, как скоро будут воплощаться на практике технологии, использующие квантовые состояния как информационный ресурс, кванто-

вая информатика обеспечивает оригинальное и неожиданное освещение как самих квантовомеханических закономерностей, так и сравнительно давно изучаемых проблем передачи и обработки информации. Вне всякого сомнения, открывающиеся на этом пути грандиозные перспективы будут и далее стимулировать развитие прецизионной экспериментальной техники.

При обсуждении того, насколько реалистичным окажется целенаправленное воздействие на квантовые суперпозиционные состояния, принципиально важным является представление о “декогеренции”. Этим термином характеризуются процессы трансформации чистого состояния в смесь, сопряжённые с быстрым затуханием интерференционных членов в матрице плотности. Учёт декогеренции совершенно необходим для понимания характерных особенностей квантовомеханического описания реальности, включая коллапс волновой функции и мысленный эксперимент Шрёдингера [4]. Та или иная трактовка проблемы декогеренции фигурирует в описании любого процесса передачи и обработки квантовой информации [5, 6]. Как оказалось, процесс декогеренции обладает некоторыми общими закономерностями, которые не зависят от конкретных деталей взаимодействия и объясняют, почему при переходе на макроуровень становятся труднодоступными те суперпозиционные состояния, которые легко наблюдаются на микроуровне [7, 8]. Следует отметить, что в научной литературе встречаются различные интерпретации термина “декогеренция” [9]. В одном случае имеется в виду неконтролируемая и практически необратимая декогеренция, вызываемая взаимодействием наблюдаемой системы с макроскопическим окружением. Более широкая трактовка подразумевает ситуацию, в которой наблюдаемая система находится под воздействием небольшого числа внешних степеней свободы.

В связи с началом исследований в области квантовой теории информации возник интерес к одному из нетривиальных с квантовой точки зрения процессов, а именно к *квантовому клонированию*. В 1982 г. Вуттерс и Зурек опубликовали известную теперь работу [10], где впервые применительно к состоянию квантового объекта и был использован термин “клонирование”. Основной вывод авторов состоял в том, что неизвестное

квантовое состояние не может быть клонировано. Под клонированием они подразумевали создание точной копии исходного объекта при сохранении его в том состоянии, в котором он был до операции клонирования и которое изначально неизвестно. Основные доводы работы [10] довольно просты и опираются на принцип суперпозиции состояний. Невозможность точного детерминированного клонирования квантовых состояний служит одним из оснований квантовой криптографии. Внедрение в канал квантового распределения секретного ключа неизбежно означает размножение ошибок. Превышение уровня ошибок над установленным пользователями уровнем конфиденциальности даёт им сигнал о прослушивании, в результате чего они отбрасывают все биты сеанса.

Общеизвестно, что мы не в состоянии манипулировать с квантовыми состояниями произвольным образом. Если от качественных обсуждений переходить к количественным формулировкам, то необходимы какие-то количественные меры для характеристики интересующих нас свойств. В конечном счёте, подобные количественные характеристики базируются на мерах близости или различимости квантовых состояний либо могут быть сведены к ним [4, 11]. В квантовой теории информации используются разные меры близости состояний, обладающие теми или иными преимуществами или особенностями. Как это обычно бывает в научных дисциплинах, одно понятие или количественная функция не в состоянии охватить все аспекты рассматриваемых проблем. В отношении некоторых специальных вопросов может даже потребоваться введение весьма непривычных функций. Так или иначе, исследование новых количественных мер в применении к основным вопросам заслуживает пристального внимания, даже если потенциально достижимые в рамках такого подхода результаты не вполне ясны. Концепция энтропии является одним из краеугольных камней как в теории информации, так и в статистической физике. Количество используемых энтропийных функций чрезвычайно велико. Они могут различаться по своему определяемому целями роду, такому как совместные, условные и относительные энтропии. Другим признаком является тип исходной энтропийной функции, на котором основываются генерируе-

мые ею производные величины. Помимо основанных на энтропии Шеннона стандартных функций известны энтропийные величины типа Рённи и Цаллиса. Изначально эти типы энтропий были введены по нескольким причинам. Одной из них стало изучение энтропий в рамках аксиоматического метода. С другой стороны, обобщённые энтропии применяются для описания нетипичных для статистической физики систем, таких как системы с долговременной памятью.

Среди мер различимости квантовых состояний важнейшую роль играют следовая метрика и точность воспроизведения. В квантовой теории информации эти величины используются практически повсеместно. Оказывается, что при исследовании некоторых вопросов целесообразно ввести частичные аналоги следовой метрики и точности воспроизведения. **Глава 1** посвящена построению такого рода величин и изучению их свойств. В известном смысле данные величины выражаются через унитарно инвариантные нормы Фань Цзы. Полученные результаты служат ещё одним подтверждением того, насколько плодотворными могут быть методы мажоризации конечномерных векторов. Дальнейшее развитие этого подхода представлено в **Главе 2**. Известные вопросы непрерывности и устойчивости энтропийных функционалов разрабатываются в отношении частичных сумм в выражении для соответствующей энтропии. При этом отдельные элементы энтропийной суммы располагаются в невозрастающем порядке. Соответствующие неравенства типа Фанне зависят не от размерности пространства, а от выбранного количества слагаемых в сумме. **Глава 3** посвящена основным свойствам так называемых унифицированных энтропий. Для целого ряда свойств можно дать единообразную трактовку как в классическом, так и в квантовом режиме. Унифицированные энтропии образуют семейство двухпараметрических обобщений стандартных энтропий Шеннона и фон Неймана. Разумеется, такие расширения наследуют не все из многочисленных замечательных свойств стандартных энтропийных функций. На первый взгляд может показаться, что изучение обобщённых энтропий представляет исключительно математический интерес. На самом деле использование зависящих от параметров энтропий иногда позволя-

ет найти более жёсткие связи на вероятностные распределения или собственные значения операторов. Даже если число таких примеров не очень велико, они заслуживают пристального изучения.

Понятие квантовой относительной энтропии лежит в основе многих принципиальных результатов квантовой теории информации, включая неравенство обработки данных [4]. Существуют несколько расширений стандартной относительной энтропии. Как было впервые продемонстрировано в известной работе [13], обобщённые квантовые относительные энтропии интересны по крайней мере в том отношении, что позволяют глубже понять природу стандартной относительной энтропии. Наиболее замечательным свойством последней является монотонность при действии сохраняющих след вполне положительных преобразований. Отсюда можно вывести свойство сильной субаддитивности энтропии фон Неймана. Для обобщённых относительных энтропий интересны также вопросы их непрерывности и поведения при стремлении к нулю элементов второго аргумента. В **Главе 4** эти вопросы исследуются для обобщённых относительных энтропий типа Цаллиса, включая новые неравенства типа Пинскера и Фанне. Хотя полная картина всё ещё не получена, ценность найденных результатов проиллюстрирована рядом приложений. Квантификаторы квантовой когерентности, индуцированные относительными энтропиями типа Цаллиса, рассмотрены в **Главе 5**. Оказывается, что такие квантификаторы обладают практически всеми свойствами, необходимыми для кандидата на роль меры когерентности. Исключением является монотонность при некогерентных селективных измерениях, которую приходится формулировать в видоизменённой формулировке, зависящей от параметра. По-видимому, требование монотонности при некогерентных селективных измерениях является решающим при выборе списка подходящих мер когерентности на квантовом уровне. Полученные результаты свидетельствуют о том, что данный список должен быть кратким.

В **Главе 6** получены энтропийные соотношения неопределённостей для экстремальных “распутываний” супероператора. По ряду причин представляют интерес формулировки двух видов, а именно зависящие от изме-

ряемого состояния и справедливые для всех возможных состояний. Формулировки принципа неопределённостей получены в терминах энтропий обоих типов Цаллиса и Рённи. Рассмотрен случай двух неортогональных разложений единицы, которые соответствуют обобщённым квантовым измерениям. В **Главе 7** энтропии Цаллиса и Рённи используются при формулировке соотношений неопределённостей для измерений, обладающих специальной структурой. А именно, рассмотрены измерения на основе набора равнонаклонённых базисов и симметричные информационно полные измерения. Соотношения неопределённостей выведены на основе оценок сверху на соответствующие индексы совпадения, а также в рамках подхода работы [14]. В последнем случае использованы симметризованные энтропии. При получении соотношений неопределённостей в терминах min-энтропий предложено одно новое неравенство для спектральной нормы конечномерного оператора. В **Главе 8** энтропийные соотношения неопределённостей для энергии и времени изучены в рамках интересной концепции, предложенной в работе [15].

В настоящее время обобщённые энтропийные функционалы являются предметом активных исследований. Единая точка зрения на статус таких энтропийных функций в прикладных науках вообще и в квантовой теории в частности всё ещё отсутствует. Чтобы такая точка зрения сформировалась, необходимо исследовать основные свойства обобщённых энтропий и опробовать их на возможно большем числе разнообразных и содержательных примеров. В связи с возможным использованием обобщённых информационных функций в прикладных дисциплинах следует избегать двух крайних точек зрения, встречающихся в литературе. В целом расширенные информационно-теоретические функции нередко подвергаются критике, причём не всегда обоснованной. Тем не менее хорошо известно, что обобщённые энтропии уже плодотворно использовались во многих важных вопросах. В будущем такие функции могут найти новые интересные приложения. Никто не утверждает, однако, что семейство стандартных функций теории информации предполагается заменить каким-либо другим набором. Вместе с тем, нужно подчеркнуть необходимость известной

осмотрительности в рамках приложения нестандартных информационных функций в новых областях. Естественно, что обобщённые энтропийные функции не наследуют всех без исключения свойств стандартных функций. Например, цепному правилу условные формы зависящих от параметров энтропий удовлетворяют лишь в обобщённой форме либо не удовлетворяют ему вовсе. Впрочем, ни одно из этих определений не является единственно принятым в научном сообществе. Изложенные в диссертации результаты отчасти проливают свет на целесообразность применения обобщённых энтропийных функционалов в вопросах квантовой теории информации. Но эти результаты не предлагаются в качестве окончательного разрешения всех относящихся сюда вопросов.

Цели и задачи диссертационной работы. В настоящей диссертационной работе предложены новые характеристики степени близости или различимости квантовых состояний, а также проанализированы свойства этих характеристик с точки зрения преобразований, востребованных на сегодня в инженерии квантовых состояний. Среди мер различимости квантовых состояний важнейшую роль играют следовая метрика и точность воспроизведения. В работе продемонстрирована целесообразность использования частичных аналогов этих величин. В этой связи довольно естественно возникает идея определить частичные энтропийные суммы и исследовать их свойства. Помимо тех свойств, которые являются особенно важными в теории информации, с физической точки зрения необходимо выяснить свойства непрерывности энтропийных функций и их устойчивости в термодинамическом пределе. Квантовую когерентность можно трактовать как потенциальный “ресурс” для использования в системах вычислений и коммуникаций, отличный от хорошо известного энтенглмента. В этой связи предпринято исследование квантификаторов квантовой когерентности, индуцированных относительными энтропиями типа Цаллиса. Известный интерес представляет формулировка соотношений неопределённостей в терминах энтропий, зависящих от параметра, таких как энтропии Рённи и Цаллиса. Как известно, в процессах обработки информации на квантовых носителях очень широко применяются измерения, обладающие

специальной “внутренней” структурой. Выяснение дополнительных характеристик некоторых измерений такого рода было одной из задач диссертационного исследования. Формулировка соотношений неопределённостей для энергии и времени интересовала исследователей с момента возникновения квантовой механики.

Научная новизна. Краткая характеристика новизны представленных в диссертационной работе результатов состоит в следующем.

- Впервые предложены и проанализированы частичные аналоги следовой метрики и точности воспроизведения.
- Впервые сформулированы неравенства Фанне для частичных энтропийных сумм типа Цаллиса, что, в частности, позволяет описывать свойство непрерывности энтропийных характеристик в бесконечномерном пространстве.
- Впервые определены области параметров, для которых квантовые унифицированные энтропии обладают свойствами устойчивости и субаддитивности.
- Сформулированы новые неравенства типа Пинскера и Фанне для квантовой относительной энтропии Цаллиса.
- Впервые предложены и исследованы квантификаторы квантовой когерентности, индуцированные относительными энтропиями Цаллиса.
- Впервые получены энтропийные соотношения неопределённостей для экстремальных “распутываний” супероператоров.
- Получены новые энтропийные соотношения неопределённостей для равнонаклонённых базисов и симметричных информационно полных измерений.
- Впервые получена энтропийная формулировка соотношений неопределённостей для энергии и “дополнения” гамильтониана как сопряжённой с ней переменной.

Методология и методы исследования. Исследования проводились на основе стандартной формулировки квантовой механики и теории сохраняющих след вполне положительных преобразований. Были использованы некоторые результаты выпуклого и функционального анализа, включая свойства норм Шаттена, а также известные факты о монотонных и выпуклых матричнозначных функциях от матриц и ряд следствий теоремы Либа.

Теоретическая и практическая значимость. Построенные меры различимости квантовых состояний и выведенные для них соотношения являются инструментами для тестирования и количественного описания каналов передачи информации на квантовых носителях, особенно в условиях неполноты данных. Предложенные квантификаторы квантовой когерентности и сопутствующие соотношения комплементарности характеризуют доступные возможности по использованию когерентности как потенциального ресурса. Наборы равнонаклонённых базисов используются в распространённых системах квантовой криптографии. Соотношения неопределённостей для этих и схожих измерений со специальной структурой дают новые возможности по анализу уязвимостей подобных криптосистем. Локальные соотношения неопределённостей в применении к составным системам используются для разработки практических схем обнаружения энтенглмента. Энтропийный подход к описанию уровня неопределённостей позволяет естественным путём учесть неэффективности детектирования, неизбежно присутствующие в реальных устройствах.

Положения, выносимые на защиту.

1. Построены семейство частичных энтропийных сумм и частичные аналоги следовой метрики и точности воспроизведения, свойства которых обосновывают целесообразность их применения в квантовой теории информации.
2. Для квантовых унифицированных энтропий сформулированы неравенства типа Фанне, установлены монотонность при проективных измерениях и параметрические области субаддитивности и устойчивости.

3. Получены новые неравенства типа Пинскера и Фанне, устанавливающие дополнительные связи квантовых относительных энтропий Цаллиса с другими теоретико-информационными характеристиками.
4. Введены квантификаторы квантовой когерентности с использованием относительной энтропии Цаллиса и раскрыты их основные свойства.
5. Сформулированы новые соотношения неопределённостей для супероператоров, равнонаклонённых базисов и симметричных информационно полных измерений.
6. Предложенные энтропийные меры различимости и установленные их свойства открывают новые возможности для построения квантовых каналов и схем детектирования неклассических корреляций.

Апробация результатов. Представленные в диссертационной работе результаты докладывались и обсуждались на 46-ом международном симпозиуме по математической физике “Information Theory & Quantum Physics” в 2014 г. (Университет Николая Коперника, Торунь, республика Польша), на семинарах в Центре теоретической физики ПАН (Варшава, республика Польша), Институте физики им. М. Смолуховского Ягеллонского университета (Краков, республика Польша), Национальном центре квантовой информации (Гданьск, республика Польша), в отделе математических методов квантовых технологий и в отделе математической физики МИАН им. В.А. Стеклова.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 15 работ в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК и индексируемых в наукометрических базах данных Web of Science и Scopus.

Личный вклад автора. Диссертационная работа излагает и обобщает результаты, полученные автором лично.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из вводного раздела, восьми глав, заключительного раздела и списка литературы из 209 наименований. Объём работы составляет 231 страницу, включая 4 рисунка.

Глава 1

Частичные следовые дистанции и частные точности воспроизведения

Эта глава посвящена частичным аналогам стандартной следовой метрики и точности воспроизведения. Представленные результаты основаны в работах [16, 17, 18]. Введение тех или иных аналогов понятия расстояния на множестве квантовых состояний является неизбежным в квантовой теории информации. С другой стороны, этот вопрос также весьма интересен в чисто математическом смысле. Сопоставление чистых состояний само по себе не требует введения новых понятий, поскольку скалярное, или внутреннее, произведение содержит практически все необходимые данные. Но все реальные устройства неизбежно подвержены воздействию шума. Таким образом, даже изначально чистые состояния будут в конечном счете эволюционировать в смешанные. Это не единственная причина для рассмотрения смешанных состояний. Существуют другие доводы в пользу необходимости анализа и сопоставления смешанных состояний.

Следовая метрика и точность степени воспроизведения используются в квантовой теории информации особенно широко. Эти меры расстояния можно охарактеризовать в терминах матричных норм. Пусть \mathcal{H} — d -мерное линейное пространство состояний. Для всякого оператора X , действующего в пространстве \mathcal{H} , оператор $X^\dagger X$ положителен, т.е.

$$\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H} : \langle \psi | X^\dagger X | \psi \rangle \geq 0 . \quad (1.1)$$

Оператор $|X|$ определяется как единственный положительный корень из $X^\dagger X$. Собственные значения $|X|$, взятые с учетом кратности, называются

сингулярными числами $s_j(\mathbf{X})$ оператора \mathbf{X} , причем $j = 1, \dots, d$. Унитарно инвариантные нормы имеют в квантовой теории информации важное значение. Норма $||| \cdot |||$ называется унитарно инвариантной, если для любого оператора \mathbf{X} и произвольных унитарных операторов \mathbf{U} и \mathbf{V} имеет место равенство

$$|||\mathbf{UXV}||| = |||\mathbf{X}||| . \quad (1.2)$$

Часто используемыми унитарно инвариантными нормами являются нормы Шаттена и нормы Фань Цзы. Для $q \in [1; \infty]$, q -норма Шаттена оператора \mathbf{X} определяется как

$$\|\mathbf{X}\|_q := \left(\sum_{j=1}^d s_j(\mathbf{X})^q \right)^{1/q} . \quad (1.3)$$

Выражение (1.3) дает следовую норму $\|\mathbf{X}\|_1 = \text{Tr}|\mathbf{X}|$ при $q = 1$, норму Гильберта–Шмидта, или Фробениуса,

$$\|\mathbf{X}\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X})} \quad (1.4)$$

при $q = 2$, и спектральную норму

$$\|\mathbf{X}\|_\infty = \max\{s_j(\mathbf{X}) : 1 \leq j \leq d\} \quad (1.5)$$

при $q = \infty$. Нормы Фань Цзы образуют еще одно полезное семейство унитарно инвариантных норм. Для $k = 1, \dots, d$, k -норма Фань Цзы определяется как

$$\|\mathbf{X}\|_{(k)} := \sum_{j=1}^k s_j(\mathbf{X})^\downarrow . \quad (1.6)$$

Направленные вниз стрелки обозначают, что сингулярные числа должны вводиться в невозрастающем порядке, а именно

$$s_1(\mathbf{X})^\downarrow \geq s_2(\mathbf{X})^\downarrow \geq \dots \geq s_d(\mathbf{X})^\downarrow . \quad (1.7)$$

Семейство норм Фань Цзы включает в себя спектральную норму (1.5) при $k = 1$ и следовую норму при $k = d$, то есть

$$\|\mathbf{X}\|_{(1)} \equiv \|\mathbf{X}\|_\infty , \quad \|\mathbf{X}\|_{(d)} \equiv \|\mathbf{X}\|_1 . \quad (1.8)$$

Далее мы используем нормы Фань Цзы для более детальной характеристики различия между двумя матрицами плотности.

Для пары матриц плотности ρ и ϱ с единичным следом, следовая метрика определяется как [4]

$$D(\rho, \varrho) := \frac{1}{2} \text{Tr}|\rho - \varrho| = \frac{1}{2} \|\rho - \varrho\|_1 . \quad (1.9)$$

Как известно, данная величина является естественным обобщением колмогоровской дистанции между распределениями вероятности $\mathbf{p} = \{p_j\}_{j=1}^r$ и $\mathbf{q} = \{q_j\}_{j=1}^r$:

$$\mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r |p_j - q_j| . \quad (1.10)$$

По аналогии с (1.9), для $k = 1, \dots, d$ мы далее определим частичные следовые дистанции [17]

$$D_k(\rho, \varrho) := \frac{1}{2} \|\rho - \varrho\|_{(k)} . \quad (1.11)$$

Частичной версией колмогоровской дистанции (1.10) между распределениями вероятности будет величина

$$\mathcal{D}_k(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k |p_j - q_j|^\downarrow , \quad (1.12)$$

где стрелочки обозначают, что числа $|p_j - q_j|$ должны вводиться в невозрастающем порядке. В соответствии с изложенной схемой, полная следовая метрика (1.9) обозначается далее через $D_d(\rho, \varrho)$. Подразумеваемая размерность вероятностных векторов равной n , колмогоровскую дистанцию (1.10) между распределениями вероятностей обозначим через $\mathcal{D}_n(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

Эти величины обладают следующими свойствами, непосредственно вытекающие из свойств унитарно инвариантных норм:

- (i) $0 \leq D_k(\rho, \varrho) \leq 1$, причем равенство нулю достигается, если и только если $\rho = \varrho$;
- (ii) симметричность, т.е. $D_k(\rho, \varrho) = D_k(\varrho, \rho)$;
- (iii) неравенство треугольника, т.е. $D_k(\rho, \varrho) \leq D_k(\rho, \omega) + D_k(\omega, \varrho)$;
- (iv) унитарная инвариантность, т.е. $D_k(\mathbf{U}\rho\mathbf{U}^\dagger, \mathbf{U}\varrho\mathbf{U}^\dagger) = D_k(\rho, \varrho)$ для любого унитарного преобразования \mathbf{U} .

Дальнейшее исследование свойств частичных следовых дистанций (1.11) будет опираться на принцип максимума Фань Цзы [19]. Пусть эрмитов оператор \mathbf{X} имеет собственные значения λ_j ($j = 1, \dots, d$). Для всех $k = 1, \dots, d$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j(\mathbf{X})^\downarrow = \max\{\text{Tr}(\mathbf{P}\mathbf{X}) : \mathbf{P}^\dagger = \mathbf{P}, \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}, \text{rank}(\mathbf{P}) = k\}, \quad (1.13)$$

где оптимизация проводится над всеми проекционными операторами ранга k . Данный принцип можно переформулировать в виде

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j(\mathbf{X})^\downarrow = \max\{\text{Tr}(\mathbf{Q}\mathbf{X}) : \mathbf{0} \leq \mathbf{Q} \leq \mathbf{1}, \text{Tr}(\mathbf{Q}) = k\}, \quad (1.14)$$

где оптимизация проводится над всеми положительно полуопределёнными операторами следа k .

Рассматривая спектральное разложение эрмитова оператора $\rho - \varrho$, запишем

$$\rho - \varrho = \mathbf{R} - \mathbf{T}, \quad (1.15)$$

где \mathbf{R} и \mathbf{T} — положительно полуопределённые операторы с непересекающимися носителями. Спектральные разложения этих операторов представляются как

$$\mathbf{R} = \sum_r \varkappa_r |r\rangle\langle r|, \quad (1.16)$$

$$\mathbf{T} = \sum_t \tau_t |t\rangle\langle t|, \quad (1.17)$$

где собственные векторы нормированы и суммирование ограничено значениями $\varkappa_r > 0$ и $\tau_t > 0$. Нетрудно проверить, что имеет место равенство

$$|\rho - \varrho| = \mathbf{R} + \mathbf{T}. \quad (1.18)$$

Отсюда следует следующий результат. Размещая числа $\{\varkappa_r\}$ и $\{\tau_t\}$ в одну последовательность в невозрастающем порядке, мы получаем ненулевую часть последовательности $\{s_j(\rho - \varrho)^\downarrow\}$. В соответствии с принципом максимума Фань Цзы, имеем

$$2D_k(\rho, \varrho) = \max\{\text{Tr}(\mathbf{P}|\rho - \varrho|) : \mathbf{P}^\dagger = \mathbf{P}, \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}, \text{rank}(\mathbf{P}) \leq k\}. \quad (1.19)$$

Аналогично связи между (1.13) и (1.14), мы можем переформулировать (1.19) в виде

$$2D_k(\rho, \varrho) = \max\{\text{Tr}(\mathbf{Q}|\rho - \varrho|) : \mathbf{0} \leq \mathbf{Q} \leq \mathbf{1}, \text{Tr}(\mathbf{Q}) \leq k\}. \quad (1.20)$$

Введём следующие два подпространства в \mathcal{H} . Подпространство \mathcal{K}_R является линейной оболочкой векторов $|r\rangle$ таких, что $\varkappa_r \in \{s_1, \dots, s_k\}$, то есть

$$\mathcal{K}_R := \text{span} \left\{ |r\rangle : \varkappa_r \in \{s_1(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho}), \dots, s_k(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho})\} \right\} . \quad (1.21)$$

Аналогично, подпространство \mathcal{K}_T определяется формулой

$$\mathcal{K}_T := \text{span} \left\{ |t\rangle : \tau_t \in \{s_1(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho}), \dots, s_k(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho})\} \right\} . \quad (1.22)$$

Максимизирующим проекционным оператором ранга не выше k будет оператор $\mathbf{P} = \mathbf{P}_R + \mathbf{P}_T$, где \mathbf{P}_R есть проектор на \mathcal{K}_R и \mathbf{P}_T есть проектор на \mathcal{K}_T . Для данного проекционного оператора справедливо

$$(\mathbf{P}_R - \mathbf{P}_T)(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho}) = \mathbf{P}_R \mathbf{R} + \mathbf{P}_T \mathbf{T} = \mathbf{P} |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho}| . \quad (1.23)$$

Используя данное представление, докажем следующий результат.

Предложение 1 Пусть $\mathbf{p} = \{p_i\}$ и $\mathbf{q} = \{q_i\}$ — вероятностные распределения над заданным множеством индексов, и пусть $\{\boldsymbol{\rho}_i\}$ и $\{\boldsymbol{\varrho}_i\}$ — два набора матриц плотности, пронумерованных тем же индексом. Для всех $k = 1, \dots, d$ выполняется неравенство

$$D_k \left(\sum_i p_i \boldsymbol{\rho}_i, \sum_i q_i \boldsymbol{\varrho}_i \right) \leq \sum_i p_i D_k(\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\varrho}_i) + \mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) . \quad (1.24)$$

Доказательство. Отметим вначале два факта. По аналогии с (1.15), запишем $\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\varrho}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{T}_i$, откуда

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{P} |\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\varrho}_i|) &= \text{Tr}[(\mathbf{P}_R + \mathbf{P}_T)(\mathbf{R}_i + \mathbf{T}_i)] \\ &\geq |\text{Tr}(\mathbf{P}_R \mathbf{R}_i + \mathbf{P}_T \mathbf{T}_i) - \text{Tr}(\mathbf{P}_R \mathbf{T}_i + \mathbf{P}_T \mathbf{R}_i)| \\ &= |\text{Tr}[(\mathbf{P}_R - \mathbf{P}_T)(\mathbf{R}_i - \mathbf{T}_i)]| . \end{aligned} \quad (1.25)$$

Далее, каждая из величин $\text{Tr}(\mathbf{P}_R \boldsymbol{\varrho}_i)$ и $\text{Tr}(\mathbf{P}_T \boldsymbol{\varrho}_i)$ не превосходит $\text{Tr}(\boldsymbol{\varrho}_i) = 1$, поэтому

$$|\text{Tr}[(\mathbf{P}_R - \mathbf{P}_T) \boldsymbol{\varrho}_i]| \leq 1 . \quad (1.26)$$

Теперь применим (1.23), полагая

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_i p_i \boldsymbol{\rho}_i , \quad \boldsymbol{\varrho} = \sum_i q_i \boldsymbol{\varrho}_i , \quad (1.27)$$

и вычисляя след получившегося оператора. Соответственно по состояниям (1.27) для заданного k определяются операторы \mathbf{P}_R и \mathbf{P}_T . Удвоенная левая часть (1.24) равна следу оператора (1.23), который ввиду его положительности запишем как

$$\begin{aligned} & \left| \sum_i p_i \text{Tr}((\mathbf{P}_R - \mathbf{P}_T)(\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\varrho}_i)) + \sum_i (p_i - q_i) \text{Tr}((\mathbf{P}_R - \mathbf{P}_T)\boldsymbol{\varrho}_i) \right| \\ & \leq \sum_i p_i \text{Tr}(\mathbf{P} |\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\varrho}_i|) + \sum_i |p_i - q_i| . \end{aligned} \quad (1.28)$$

Здесь использовано числовое неравенство треугольника и факты (1.25) и (1.26) для оценки слагаемых. В силу принципа максимума Фань Цзы, имеем

$$\text{Tr}(\mathbf{P} |\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\varrho}_i|) \leq 2 D_k(\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\varrho}_i) . \quad (1.29)$$

Применяя (1.10) и (1.29) к (1.28), после деления на 2 получаем (1.24). ■

По аналогии со следовой метрикой, свойство (1.24) назовем сильной “выпуклостью”. Как следствие, при $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ получаем обычное свойство выпуклости

$$D_k\left(\sum_i p_i \boldsymbol{\rho}_i, \sum_i p_i \boldsymbol{\varrho}_i\right) \leq \sum_i p_i D_k(\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\varrho}_i) . \quad (1.30)$$

Как правило, свойства выпуклости или вогнутости имеют принципиальное значение для мер различимости квантовых состояний.

Аналогично стандартной следовой метрике, частичные следовые дистанции тесно связаны с соответствующими классическими дистанциями между вероятностными распределениями. Проще всего данная связь прослеживается в случае коммутирующих матриц плотности. Пусть матрицы плотности $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\varrho}$ диагональны в одном и том же ортонормированном базисе $\{|e_j\rangle\}$, то есть

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_j \mu_j |e_j\rangle\langle e_j| , \quad (1.31)$$

$$\boldsymbol{\varrho} = \sum_j \nu_j |e_j\rangle\langle e_j| . \quad (1.32)$$

Разность этих операторов имеет вид $\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho} = \sum_j (\mu_j - \nu_j) |e_j\rangle\langle e_j|$, откуда

$$|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho}| = \sum_j |\mu_j - \nu_j| |e_j\rangle\langle e_j| . \quad (1.33)$$

Таким образом, расположенными в невозрастающем порядке сингулярными числами оператора $\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho}$ служат числа $|\mu_j - \nu_j|^\downarrow$. В соответствии с

уравнениями (1.11) и (1.12), получаем

$$D_k(\rho, \varrho) = \mathcal{D}_k(\mu, \nu) . \quad (1.34)$$

Для формулировки данной связи в общем случае рассмотрим “положительную операторно-значную меру” (ПОЗМ), т.е. набор положительных операторов, удовлетворяющих соотношению полноты. Имеет место следующий результат.

Предложение 2 Пусть ρ и ϱ — две произвольные матрицы плотности; для всех $k = 1, \dots, d$ справедливо равенство

$$D_k(\rho, \varrho) = \max\{\mathcal{D}_k(\rho, \varrho) : \text{Tr}(\mathbf{M}_m) \leq 1\} , \quad (1.35)$$

где максимум берется над всеми ПОЗМ-измерениями такими, что каждый его элемент имеет след не больше 1.

Доказательство. Для упрощения записи последующих формул, далее k считаем фиксированным. Согласно выражению для вероятности результатов измерения, получаем

$$2 \mathcal{D}_k(\rho, \varrho) = \sum_{m=1}^k |p_m - q_m|^\downarrow = \sum_{m=1}^k |\text{Tr}[\mathbf{M}_m(\mathbf{R} - \mathbf{T})]|^\downarrow . \quad (1.36)$$

Ввиду $\text{Tr}(\mathbf{M}_m \mathbf{R}) \geq 0$ и $\text{Tr}(\mathbf{M}_m \mathbf{T}) \geq 0$, для любого m имеем

$$|\text{Tr}[\mathbf{M}_m(\mathbf{R} - \mathbf{T})]| \leq \text{Tr}[\mathbf{M}_m(\mathbf{R} + \mathbf{T})] = \text{Tr}(\mathbf{M}_m |\rho - \varrho|) . \quad (1.37)$$

Из (1.36) и (1.37) следует, что

$$2 \mathcal{D}_k(\rho, \varrho) \leq \text{Tr}(\Theta |\rho - \varrho|) . \quad (1.38)$$

Здесь введен оператор

$$\Theta := \sum_{m=1}^k \mathbf{M}_m^\downarrow , \quad (1.39)$$

причем элементы ПОЗМ-измерения упорядочены в соответствии с невозрастающей последовательностью чисел $|p_m - q_m|^\downarrow$. Из соотношения полноты следует $\Theta \leq \mathbf{1}$, из условия $\text{Tr}(\mathbf{M}_m) \leq 1$ следует $\text{Tr}(\Theta) \leq k$. Согласно (1.14), правая часть (1.38) не превосходит тогда суммы k наибольших собственных значений оператора $|\rho - \varrho|$. Иными словами, для любого ПОЗМ-измерения справедливо

$$\mathcal{D}_k(\rho, \varrho) \leq D_k(\rho, \varrho) . \quad (1.40)$$

Это доказывает, что правая часть (1.35) не может быть меньше левой части. Теперь покажем, что равенство в соотношении (1.35) действительно достигается. Учитывая соотношения (1.15) и (1.18), рассмотрим проекционное измерение в ортонормированном базисе $\{|r\rangle\} \cup \{|t\rangle\}$. Здесь каждый элемент \mathbf{M}_m есть либо $|r\rangle\langle r|$, либо $|t\rangle\langle t|$. Из (1.15) и ортогональности проекторов \mathbf{R} и \mathbf{T} следует, что

$$p_r - q_r = \text{Tr}[(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho})|r\rangle\langle r|] = \langle r|\mathbf{R}|r\rangle = \varkappa_r, \quad (1.41)$$

$$p_t - q_t = \text{Tr}[(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho})|t\rangle\langle t|] = -\langle t|\mathbf{T}|t\rangle = -\tau_t. \quad (1.42)$$

Иными словами, для такого измерения величинами $|p_m - q_m|$ будут в точности собственные значения оператора $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho}|$. Согласно (1.12), величина $2\mathcal{D}_k(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ равна тогда сумме k наибольших сингулярных чисел разности $\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho}$. Тем самым знак равенства в формуле (1.35) обеспечен. ■

Следует подчеркнуть, что в Предложении 2 рассматриваются ПОЗМ-измерения такие, что для их элементов $\text{Tr}(\mathbf{M}_m) \leq 1$. Для полной следовой метрики указанное условие в формулировке может быть опущено. Как было доказано Дэвисом, при решении многих задач оптимальные ПОЗМ-измерения можно построить из элементов ранга один. Предложение 2 можно переформулировать с максимизацией по отношению к именно таким измерениям. Действительно, если $\text{rank}(\mathbf{M}_m) = 1$, то единственное ненулевое собственное значение элемента \mathbf{M}_m не превосходит 1 в силу соотношения полноты, поэтому $\text{Tr}(\mathbf{M}_m) \leq 1$. Так что наше ограничение вряд ли существенно с операционной точки зрения. Результат (1.35) можно использовать в контексте обработки квантовой информации.

Полученные выше результаты можно переформулировать на языке теории мажоризации. Основные понятия и методы этой теории плодотворно используются при исследовании информационно-теоретических свойств квантовых систем. Рассмотрим n -мерные векторы $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ пространства \mathbb{R}^n , т.е. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через \mathbf{x}^\downarrow вектор, полученный расстановкой координат вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ в невозрастающем порядке, а именно

$$x_1^\downarrow \geq x_2^\downarrow \geq \dots \geq x_n^\downarrow. \quad (1.43)$$

Вектор \mathbf{x} *слабо мажорируется* вектором \mathbf{y} , в символьной записи $\mathbf{x} \prec_w \mathbf{y}$, если $\forall k = 1, \dots, n$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^k x_j^\downarrow \leq \sum_{j=1}^k y_j^\downarrow . \quad (1.44)$$

Если, кроме того, при $k = n$ мы имеем равенство в (1.44), т.е.

$$\sum_{j=1}^n x_j^\downarrow = \sum_{j=1}^n y_j^\downarrow , \quad (1.45)$$

то \mathbf{x} *мажорируется* вектором \mathbf{y} , кратко $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$.

В нашем дальнейшем анализе компоненты вещественных векторов являются положительными. Пусть целое число n обозначает мощность множества $\{\mathbf{M}_m\}$, так что n равно количеству возможных исходов опыта. В формуле (1.35), абсолютные значения $|p_m - q_m|^\downarrow = |\text{Tr}(\mathbf{M}_m \boldsymbol{\rho}) - \text{Tr}(\mathbf{M}_m \boldsymbol{\varrho})|^\downarrow$ являются слагаемыми при получении $\mathcal{D}_k(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Упорядоченные сингулярные числа $s_j(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho})^\downarrow$ в сумме составляют $D_k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varrho})$. Рассматривая эти неотрицательные числа в качестве элементов двух вещественных векторов, мы обеспечим им одинаковую размерность $\max\{n, d\}$ добавлением нулей. Тогда результат (1.35) может быть записан следующим образом.

Предложение 3 *Если $\text{Tr}(\mathbf{M}_m) \leq 1$ для всех элементов ПОЗМ-измерения, то $|\mathbf{p} - \mathbf{q}|$ слабо мажорируется вектором $s(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho})$, а именно*

$$|\mathbf{p} - \mathbf{q}| \prec_w s(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho}) . \quad (1.46)$$

Если, кроме того, для данного ПОЗМ-измерения $\{\mathbf{M}_m\}$ достигается равенство $\mathcal{D}_n(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = D_d(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varrho})$, то $|\mathbf{p} - \mathbf{q}|$ мажорируется вектором $s(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho})$:

$$|\mathbf{p} - \mathbf{q}| \prec s(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho}) . \quad (1.47)$$

Соотношения (1.46) и (1.47) дают операционную интерпретацию сингулярных чисел $s_j(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho})$ в терминах вероятностей получения тех или иных результатов при определённых ПОЗМ-измерениях. Соответствующее равенство для полной следовой метрики является хорошо известным результатом со множеством приложений. А именно, имеет место равенство

$$D_d(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varrho}) = \max \left\{ \mathcal{D}_n(\mathbf{p}, \mathbf{q}) : \mathbf{0} \leq \mathbf{M}_m \leq \mathbf{1}, \sum_{m=1}^n \mathbf{M}_m = \mathbf{1} \right\} , \quad (1.48)$$

где максимум берется над всеми ПОЗМ-измерениями с n исходами.

Таким образом, если две матрицы плотности близки с точки зрения стандартной следовой метрики, то произвольное измерение, выполненное с каждым из этих двух состояний, даст близкие распределения вероятностей. Но пока степень близости состояний характеризуется только одной величиной. Вместо этого, мы можем теперь использовать коллекцию d мер близости двух квантовых состояний совместно с коллекцией n величин для сопоставления n -мерных вероятностных векторов. Таким образом, частичные следовые дистанции обеспечивают чувствительный и гибкий инструмент для того, чтобы охарактеризовать различие между смешанными квантовыми состояниями. Вместо одного соотношения, степень близости двух состояний описывается системой уравнений d вида (1.35) или, что то же самое, системой мажорирующих формул (1.47). Несмотря на неоспоримую важность результата (1.48), он не обеспечивает столь же подробное сопоставление квантовых состояний, как система соотношений вида (1.47).

Для каждой пары состояний ρ и ϱ существует ПОЗМ-измерение с $n = d$ исходами такое, что максимум в (1.35) достигается для всех $k = 1, \dots, d$. Как следует из доказательства Предложения 2, этим измерением является проекционное измерение $\{|r\rangle\} \cup \{|t\rangle\}$, где кет-векторы $|r\rangle$ и $|t\rangle$ определены в (1.16) и (1.17). Простые вычисления показывают, что это проекционное измерение обладает свойством

$$|p_j - q_j|^\downarrow = s_j(\rho - \varrho) \quad (1.49)$$

для всех $j = 1, \dots, d$. Таким образом, если два распределения вероятностей $\{p_j\}$ и $\{q_j\}$ известны, то сингулярные значения $s_j(\rho - \varrho)$ могут быть найдены согласно (1.49). Здесь мы видим возможность оценки частичных следовых дистанций в физических экспериментах. Следует отметить, однако, что для каждой пары сопоставляемых квантовых состояний имеется свое проекционное измерение с указанным свойством. Можно попытаться найти какое-либо измерение, которое удовлетворяет равенству (1.49) лишь приближенно, с ограниченной ошибкой, но уже для любой пары состояний из некоторого известного класса. В принципе, данная проблема могла бы составить предмет отдельного исследования.

Важное значение имеют свойства мер различимости по отношению к преобразованиям квантовых состояний. Стандартная следовая метрика и точность воспроизведения монотонны при действии сохраняющих след квантовых операций. Оказывается, что частичные следовые дистанции также демонстрируют монотонность под действием квантовых операций определённого вида. Формализм квантовых операций обеспечивает унифицированное описание того, какие в принципе преобразования состояний допустимы в квантовой теории. Пусть $\mathcal{L}_+(\mathcal{H}_A)$ и $\mathcal{L}_+(\mathcal{H}_B)$ — множества положительно полуопределённых операторов на конечномерных пространствах \mathcal{H}_A и \mathcal{H}_B соответственно. Рассмотрим отображение Φ такое, что

$$\rho_A \mapsto \Phi(\rho_A) , \quad (1.50)$$

где $\rho_A \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H}_A)$ и $\Phi(\rho_A) \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H}_B)$. Таким образом, мы сразу ограничиваем рассмотрение сохраняющими положительность преобразованиями.

Одним из фундаментальных постулатов квантовой теории является линейность эволюционного оператора. Даже если это свойство и не формулируется явно, линейность преобразования состояний молчаливо используется в стандартных трактовках нерелятивистской квантовой механики и квантовой теории поля. Линейные уравнения используются в том числе и для динамического описания условно “малой” системы, взаимодействующей с окружающей средой. Разумеется, линейность или нелинейность редуцированной динамики является дискуссионным вопросом, особенно важным в квантовой статистической механике неравновесных систем. Поскольку окончательное мнение по этому вопросу отсутствует, далее мы будем рассматривать только линейные преобразования. Во всяком случае, линейность динамики настолько тесно связана с принципом суперпозиции, что отход от нее потребует довольно радикального пересмотра других положений квантовой теории. Кроме того, формализм квантовых операций согласуется с используемыми в настоящее время методами явного построения эволюционных уравнений, в том числе для открытых систем при наличии шума.

Как уже было отмечено выше, помимо линейности требуется, чтобы преобразования сохраняли положительность операторов. Иными словами,

результатом преобразования матриц плотности могут быть только положительные операторы. Оказывается, однако, что требовать просто положительности недостаточно. Включая в рассмотрение вспомогательную систему с пространством состояний \mathcal{H}_C , исходную квантовую систему можно рассматривать как часть бóльшей квантовой системы. Пусть id_C обозначает тождественное преобразование вспомогательной системы, формально

$$\text{id}_C(Z_C) = Z_C \quad (1.51)$$

для всех $Z_C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_C)$. Вместо преобразования Φ , мы теперь рассматриваем отображение

$$\Phi \otimes \text{id}_C : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_C) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C) . \quad (1.52)$$

Для преобразов вида $X_C \otimes Z_C$, результат преобразования вычисляется по формуле

$$\Phi \otimes \text{id}_C(X_A \otimes Z_C) = \Phi(X_A) \otimes Z_C . \quad (1.53)$$

В силу линейности отображения (1.52) мы распространяем определение (1.53) на все элементы линейного пространства операторов $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_C)$. Трактруя положительные операторы вида $\rho_A \otimes \rho_C$ как матрицы плотности, мы требуем положительности преобразования (1.52). Вспомогательная система может иметь произвольную размерность, так что отображение $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ должно обеспечивать положительность операции (1.52) для всякой размерности $\dim(\mathcal{H}_C) \geq 1$. Отображение Φ с таким свойством называется *вполне положительным*.

Всякое вполне положительное линейное отображение можно представить с помощью операторной суммы, а именно

$$\Phi(X_A) = \sum_m K_m X_A K_m^\dagger , \quad (1.54)$$

где операторы Крауса $K_m : \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_B$ отображают элементы \mathcal{H}_A в элементы \mathcal{H}_B . Совокупность операторов $\{K_m\}$, приводящих к (1.54), можно выбрать многими способами. Если рассматриваемый физический процесс является замкнутым, т.е. если мы не проводим селекцию отдельных возможностей при осуществлении процесса, то отображение Φ сохраняет след, а именно

$\text{Tr}(\Phi(\mathbf{X}_A)) = \text{Tr}(\mathbf{X}_A)$ для всех вводов \mathbf{X}_A . В этом случае операторы Крауса удовлетворяют соотношению замкнутости

$$\sum_m \mathbf{K}_m^\dagger \mathbf{K}_m = \mathbf{1}_A . \quad (1.55)$$

Сохраняющие след квантовые операции принято называть *квантовыми каналами*. Они являются квантовым аналогом стохастических матриц перехода, действующих на классические вероятностные векторы.

Скалярное произведение Гильберта–Шмидта вводится формулой

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{\text{HS}} := \text{Tr}(\mathbf{X}^\dagger \mathbf{Y}) . \quad (1.56)$$

В терминах скалярного произведения Гильберта–Шмидта определим сопряженное к $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ преобразование $\Phi^\dagger : \mathcal{L}(\mathcal{H}_B) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$, так что

$$\langle \Phi(\mathbf{X}_A), \mathbf{Y}_B \rangle_{\text{HS}} = \langle \mathbf{X}_A, \Phi^\dagger(\mathbf{Y}_B) \rangle_{\text{HS}} . \quad (1.57)$$

Если Φ задано в виде (1.54), то сопряжённое преобразование

$$\Phi^\dagger(\mathbf{Y}_B) = \sum_m \mathbf{K}_m^\dagger \mathbf{Y}_B \mathbf{K}_m . \quad (1.58)$$

Если сопряжённое преобразование (1.58) сохраняет след, то операторы Крауса исходного отображения удовлетворяют соотношению

$$\sum_m \mathbf{K}_m \mathbf{K}_m^\dagger = \mathbf{1}_B , \quad (1.59)$$

или кратко $\Phi(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_B$. Иными словами, отображение Φ является *унитальным*. Унитарные квантовые каналы называют *бистохастическими*, трактуя их как квантовый аналог двояко стохастических матриц перехода. Среди модельных однокубитовых преобразований деполаризующий канал и канал затухания фазы являются унитарными, тогда как канал затухания амплитуды — нет.

В работе [16] было показано, что полная следовая метрика может быть введена альтернативным путём, а именно

$$D_d(\rho, \varrho) = \max_{\Phi} \left| \text{Tr}(\Phi(\rho)) - \text{Tr}(\Phi(\varrho)) \right| , \quad (1.60)$$

где максимум берётся над всеми сохраняющими след вполне положительными преобразованиями. Существует достаточное количество мер различности, которые монотонны под действием таких преобразований. Свойство

(1.60) имеет место только для стандартной следовой метрики. Частичные следовые дистанции являются монотонными по отношению к квантовым каналам определённого вида, включая бистохастические. Данное свойство формулируется следующим образом.

Предложение 4 Пусть операторы Крауса квантового канала Φ удовлетворяют соотношению

$$\sum_m \mathbf{K}_m \mathbf{K}_m^\dagger \leq \mathbf{1}_B . \quad (1.61)$$

Для всех $k = 1, \dots, d$ выполняется неравенство

$$D_k(\Phi(\rho_A), \Phi(\varrho_A)) \leq D_k(\rho_A, \varrho_A) . \quad (1.62)$$

Доказательство. Обозначим $\rho_B \equiv \Phi(\rho_A)$ и $\varrho_B \equiv \Phi(\varrho_A)$. Так как мы имеем дело с квантовым каналом, выводимые матрицы плотности нормированы на единичный след. Как видно из формулы (1.23), существуют два взаимно ортогональных проектора \mathbf{P}_R и \mathbf{P}_T , для которых справедливо $\text{rank}(\mathbf{P}_R + \mathbf{P}_T) = k$ и

$$\begin{aligned} 2 D_k(\rho_B, \varrho_B) &= \text{Tr}[(\mathbf{P}_R - \mathbf{P}_T)(\rho_B - \varrho_B)] \\ &= \text{Tr}[(\Theta_R - \Theta_T)(\rho_A - \varrho_A)] \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\leq \text{Tr}[(\Theta_R + \Theta_T)|\rho_A - \varrho_A|] . \quad (1.64)$$

Шаг (1.63) следует из линейности канала и представления операторной суммой; шаг (1.64) по сути аналогичен (1.25). Мы также ввели два положительных оператора на \mathcal{H}_A , определяемые как

$$\Theta_R := \Phi^\dagger(\mathbf{P}_R) , \quad \Theta_T := \Phi^\dagger(\mathbf{P}_T) . \quad (1.65)$$

Ввиду предусловия (1.61), отображение Φ^\dagger не увеличивает след. Комбинируя это с $\text{rank}(\mathbf{P}_R + \mathbf{P}_T) = k$, мы видим, что положительный оператор $\Theta = \Theta_R + \Theta_T$ имеет след $\text{Tr}(\Theta) \leq k$. Для любого $|\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$, мы далее запишем

$$\begin{aligned} \langle \psi_A | \Theta | \psi_A \rangle &= \sum_m \langle \psi_A | \mathbf{K}_m^\dagger (\mathbf{P}_R + \mathbf{P}_T) \mathbf{K}_m | \psi_A \rangle \\ &\leq \sum_m \langle \psi_A | \mathbf{K}_m^\dagger \mathbf{K}_m | \psi_A \rangle = \langle \psi_A | \psi_A \rangle , \end{aligned} \quad (1.66)$$

где учтены соотношения $\mathbf{P}_R + \mathbf{P}_T = \mathbf{1}_B$ и (1.55). Таким образом, положительный оператор Θ удовлетворяет $\Theta \leq \mathbf{1}_A$. Принимая во внимание (1.13), величина (1.64) не превосходит $2D_k(\rho_A, \varrho_A)$. ■

Таким образом, если квантовый канал удовлетворяет условию (1.61), то он является сжимающим по отношению ко всем частичным следовым дистанциям. В частности, бистохастические квантовые каналы будут сжимающими. Если мы исключим условие нормировки состояний, то можно не требовать и сохранения следа. Однако нормировка существенна с точки зрения связи с классическими дистанциями, что было описано в Предложении 2. Утверждение Предложения 4 можно переформулировать как соотношение мажорирования. А именно, если квантовый канал является сжимающим в смысле (1.61), то

$$s(\rho_B - \varrho_B) \prec_w s(\rho_A - \varrho_A) . \quad (1.67)$$

Совместно соотношения мажорирования (1.46) и (1.67) позволяют делать определённые выводы о статистике измерений на выходе квантовых каналов, если априори имеются некоторые данные о квантовых состояниях на их входе.

Следет отметить, что полная следовая метрика между состояниями не может возрасти при действии произвольных квантовых каналов. В общем, это не имеет места для частичных следовых дистанций. Данное наблюдение открывает возможность тестировать бистохастичность квантового канала, заданного как *черный ящик*. В принципе, метрика Гильберта–Шмидта также не является всегда сжимающей. Однако частичные следовые дистанции образуют целый набор, позволяющий в некоторых случаях проверять бистохастичность. С другой стороны, мы имеем сравнительно широкий класс квантовых каналов, действующих как сжимающие в смысле монотонности частичных следовых дистанций. В частности, этот класс включает в себя два базовых типа преобразований: унитарную эволюцию и квантовые измерения. Мы видели, что частичные следовые дистанции инвариантны при унитарных преобразованиях. В случае ПОЗМ-измерений, мы пишем $\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_A$ и

$$\rho_B = \sum_m \mathbf{M}_m^{1/2} \rho_A \mathbf{M}_m^{1/2} . \quad (1.68)$$

Здесь соотношение полноты обеспечивает как сохранение следа, так и унитарность. Таким образом, фундаментальные типы изменения состояний в квантовой механике не могут привести к увеличению частичных следовых дистанций.

Концепция точности воспроизведения была предложена как естественное обобщение понятия вероятности перехода с чистых на смешанные квантовые состояния [20, 21]. Используя нормы Фань Цзы, можно ввести частные точности воспроизведения. Некоторые интересные свойства этих мер различимости были исследованы в [18]. Для пары матриц плотности ρ и ϱ с единичным следом, стандартная точность воспроизведения определяется как

$$F(\rho, \varrho) := \text{Tr}|\sqrt{\rho}\sqrt{\varrho}| = \|\sqrt{\rho}\sqrt{\varrho}\|_1. \quad (1.69)$$

В силу хорошо известного выражения $|\sqrt{P}\sqrt{Q}| = (\sqrt{Q}P\sqrt{Q})^{1/2}$, в котором $P, Q \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$, определение (1.69) можно переписать в виде

$$F(\rho, \varrho) := \text{Tr}\left(\sqrt{\sqrt{\varrho}\rho\sqrt{\varrho}}\right). \quad (1.70)$$

Для целого $k \geq 0$, k -тая частная точность воспроизведения определяется формулой

$$F_k(\rho, \varrho) := \sum_{j>k} s_j(\sqrt{\rho}\sqrt{\varrho})^\downarrow. \quad (1.71)$$

Соответственно этому, стандартная точность воспроизведения является величиной $F_0(\rho, \varrho)$. В случае d измерений, правая часть (1.71) заведомо равна нулю при $k \geq d$. Ульман показал, что частные точности воспроизведения симметричны, унитарно инвариантны и совместно вогнуты [22]. Доказательство совместной вогнутости основано на следующем представлении. Рассмотрим все пары операторов $\{X, Y\}$ положительных операторов такие, что

$$XYX = X, \quad YXY = Y. \quad (1.72)$$

Можно показать, что $\text{rank}(X) = \text{rank}(Y) = \text{rank}(XY)$ [22]. Тогда k -тая частная точность воспроизведения может быть представлена в виде

$$F_k(\rho, \varrho) = \frac{1}{2} \min \left\{ \text{Tr}(\rho X) + \text{Tr}(\varrho Y) \right\}, \quad (1.73)$$

где минимум берётся над всеми парами вида (1.72) ранга $(d - k)$.

Меры различимости квантовых состояний тесно связаны с мерами различимости классических вероятностных распределений. Пусть $\mathbf{p} = \{p_j\}$ и $\mathbf{q} = \{q_j\}$ — два вероятностных распределения, помеченных одним и тем же индексом. Точность воспроизведения между этими распределениями равна

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \sum_j \sqrt{p_j q_j} . \quad (1.74)$$

Имеется определённое сходство между правой частью (1.70) и правой частью (1.74). Пусть целое число r обозначает размерность векторов \mathbf{p} и \mathbf{q} . По аналогии с (1.71), классическую k -тую частную точность воспроизведения определим как сумму $(r - k)$ наименьших чисел $\sqrt{p_j q_j}$. Именно, положим

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \sum_{j>k} \sqrt{p_j q_j}^\downarrow . \quad (1.75)$$

где значения $\sqrt{p_j q_j}^\downarrow$ располагаются в невозрастающем порядке.

Связь квантовых мер различимости с классическими наиболее очевидна для коммутирующих состояний. Если $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\varrho}$ диагональны в одном и том же базисе $\{|e_j\rangle\}$, т.е. имеют вид (1.31) и (1.32), то сингулярные числа оператора $\sqrt{\boldsymbol{\rho}} \sqrt{\boldsymbol{\varrho}} = \sum_j \sqrt{\mu_j \nu_j} |e_j\rangle \langle e_j|$, расположенные в невозрастающем порядке, равны $\sqrt{\mu_j \nu_j}^\downarrow$. В соответствии с определениями (1.71) и (1.75), получаем

$$F_k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varrho}) = \mathcal{F}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) \quad (1.76)$$

для всех k . Формула (1.76) мотивирует данное выше определение (1.73) в рамках классической аналогии.

Перечислим некоторые очевидные и интуитивно понятные свойства частных точностей воспроизведения. Они основаны на следующем наблюдении. Пусть $\{a_i\}$ — совокупность r положительных чисел, расположенных в невозрастающем порядке. Рассмотрим две суммы

$$A_k := \sum_{1 \leq i \leq k} a_i , \quad (1.77)$$

$$B_k := \sum_{k+1 \leq i \leq r} a_i . \quad (1.78)$$

Если индекс суммирования i пробегает пустое множество значений, каждая из сумм принимается равной нулю. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 5 Для каждого $k = 0, 1, \dots, r$, справедливы неравенства

$$(k + 1)A_k \geq kA_{k+1} , \quad (1.79)$$

$$(r - k - 1)B_k \geq (r - k)B_{k+1} . \quad (1.80)$$

Доказательство. Согласно определению (1.77), разность между левой и правой частями (1.79) составляет

$$(k + 1)A_k - k(A_k + a_{k+1}) = A_k - ka_{k+1} = \sum_{1 \leq i \leq k} (a_i - a_{k+1}) \geq 0 , \quad (1.81)$$

поскольку $a_i \geq a_{k+1}$ для $i = 1, \dots, k$ для невозрастающей последовательности. Аналогичным образом разность между левой и правой частями (1.80) запишем в виде

$$\begin{aligned} (r - k - 1)(a_{k+1} + B_{k+1}) - (r - k)B_{k+1} &= (r - k - 1)a_{k+1} - B_{k+1} \\ &= \sum_{k+2 \leq i \leq r} (a_{k+1} - a_i) \geq 0 , \end{aligned} \quad (1.82)$$

поскольку $a_{k+1} \geq a_i$ для $i = k + 2, \dots, r$. ■

Применяя (1.80), мы видим, что классические и квантовые частные точности воспроизведения удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{F}_k(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \leq \frac{r - k}{r} \mathcal{F}_0(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) , \quad (1.83)$$

$$F_k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\omega}) \leq \frac{d - k}{d} F_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\omega}) . \quad (1.84)$$

Так как для $k = 0$ точность воспроизведения не превосходит 1, имеем

$$\mathcal{F}_k(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \leq \frac{r - k}{r} , \quad F_k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\omega}) \leq \frac{d - k}{d} .$$

Разумеется, все используемые здесь величины неотрицательны. Применяя (1.79), мы также запишем

$$\frac{k}{r} \mathcal{D}_r(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \leq \mathcal{D}_k(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) , \quad \frac{k}{d} D_d(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varrho}) \leq D_k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varrho}) . \quad (1.85)$$

Рассматривая квантовые протоколы обработки и передачи информации, нам неизбежно приходится иметь дело с составными системами. Одним из очень удобных свойств стандартной точности воспроизведения является ее мультипликативность. Пусть $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\omega}$ являются операторами плотности на \mathcal{H}_A , и пусть $\boldsymbol{\Theta}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ являются операторами плотности на \mathcal{H}_E . Тогда справедливо соотношение

$$F_0(\boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\Omega}) = F_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\omega}) F_0(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Omega}) . \quad (1.86)$$

Авторы работы [23] ввели две меры различимости, названные ими суб-точность и супер-точность воспроизведения. В некоторых случаях эти величины легче оценить в экспериментах. Суб-точность воспроизведения суб-мультипликативна, тогда как супер-точность воспроизведения супер-мультипликативна [23].

Сингулярные числа обладают одним простым свойством относительно операции тензорного произведения. А именно, всякое сингулярное число тензорного произведения двух операторов являются произведениями каких-то двух сингулярных чисел первого и второго сомножителей. Обоснование заключается в следующем. Напомним, что для произвольных четырех операторов соответствующих размерностей выполняется равенство

$$(\mathbf{X} \otimes \Theta)(\mathbf{Y} \otimes \Omega) = (\mathbf{X}\mathbf{Y}) \otimes (\Theta\Omega) . \quad (1.87)$$

используя данное равенство вместе с $\sqrt{\mathbf{X} \otimes \Theta} = \sqrt{\mathbf{X}} \otimes \sqrt{\Theta}$, мы находим

$$|\mathbf{X} \otimes \Theta| = \sqrt{(\mathbf{X} \otimes \Theta)^\dagger (\mathbf{X} \otimes \Theta)} = \sqrt{(\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X}) \otimes (\Theta^\dagger \Theta)} = |\mathbf{X}| \otimes |\Theta| . \quad (1.88)$$

Аналогичным образом, справедливо соотношение

$$\sqrt{\rho \otimes \Theta} \sqrt{\omega \otimes \Omega} = \sqrt{\rho} \sqrt{\omega} \otimes \sqrt{\Theta} \sqrt{\Omega} . \quad (1.89)$$

Пусть $|x\rangle$ и $|\theta\rangle$ — собственные векторы $|\mathbf{X}|$ и $|\Theta|$, соответственно. Используя формулу (1.88), мы видим, что произведение $|x\rangle \otimes |\theta\rangle$ служит собственным вектором оператора $|\mathbf{X} \otimes \Theta|$. Отсюда следует, что если d чисел $s_i(\mathbf{X})$ являются сингулярными числами оператора \mathbf{X} , а N чисел $s_j(\Theta)$ являются сингулярными числами оператора Θ , то dN произведений

$$s_{ij}(\mathbf{X} \otimes \Theta) = s_i(\mathbf{X}) s_j(\Theta) \quad (1.90)$$

будут сингулярными числами тензорного произведения $\mathbf{X} \otimes \Theta$.

В соответствии с определением (1.73), мы можем записать

$$F_{(d-k)}(\rho, \omega) F_{(N-L)}(\Theta, \Omega) = \sum_{i=d-k+1}^d s_i^\dagger(\sqrt{\rho} \sqrt{\omega}) \sum_{j=N-L+1}^N s_j^\dagger(\sqrt{\Theta} \sqrt{\Omega}) . \quad (1.91)$$

Благодаря формулам (1.88), (1.89) и (1.90), правая часть (1.91) содержит сумму kL сингулярных чисел матрицы $\sqrt{\rho \otimes \Theta} \sqrt{\omega \otimes \Omega}$. Частная точность

воспроизведения порядка $(dN - kL)$ между $\rho \otimes \Theta$ и $\omega \otimes \Omega$ не превышает эту сумму. Итак, справедливо неравенство

$$F_{(dN-kL)}(\rho \otimes \Theta, \omega \otimes \Omega) \leq F_{(d-k)}(\rho, \omega) F_{(N-L)}(\Theta, \Omega) . \quad (1.92)$$

Поэтому частные точности воспроизведения суб-мультипликативны в смысле формулы (1.92). В случае $k = d$ и $L = N$, правая часть уравнения (1.91) суммирует все сингулярные числа оператора $\sqrt{\rho \otimes \Theta} \sqrt{\omega \otimes \Omega}$. Здесь неравенство (1.92) заменяется равенством (1.86). Таким образом, мультипликативное свойство частных точностей воспроизведения формулируется более сложным образом, что не является неожиданным.

Как правило, взаимосвязи между различными мерами различимости квантовых состояний представляют значительный интерес. Хорошо известно, что стандартные точность воспроизведения и следовое расстояние связаны неравенствами [24]

$$1 - F_0(\rho, \varrho) \leq D_d(\rho, \varrho) \leq \sqrt{1 - F_0(\rho, \varrho)^2} . \quad (1.93)$$

Поэтому данные меры различимости могут рассматриваться совместно во многих приложениях [4, 25]. Отметим, что существует альтернативное определение точности воспроизведения в терминах экстремальных свойств квантовых каналов [16]. Полезно исследовать поведение частных точностей воспроизведения относительно квантовых операций.

Одним из основных свойств точности воспроизведения является то, что эта мера не может уменьшаться под действием сохраняющих след квантовых операций. Это свойство обычно называется *монотонностью* по отношению к действию квантовых каналов [4]. Мы покажем, что частные точности воспроизведения обладают подобной монотонностью применительно к унистохастическим операциям. С физической точки зрения, общий тип преобразования исследуемой системы A состоит в её унитарном взаимодействии с окружением E , изначально находящемся в некотором стандартном состоянии. Тогда финальный оператор плотности системы A получается взятием частичного следа. Пусть Θ обозначает начальное стандартное состояние окружающей среды. Линейное отображение Φ можно

определить формулой

$$\Phi(\rho) := \text{Tr}_E \left\{ \tilde{U}(\rho \otimes \Theta) \tilde{U}^\dagger \right\} , \quad (1.94)$$

где унитарный оператор \tilde{U} действует на пространстве $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E$ и частичный след берётся над пространством \mathcal{H}_E окружения. Формула (1.94) даёт представление квантовой операции через взаимодействие со средой [4]. Легко проверить, что такое отображение линейно и вполне положительно. В силу унитарности \mathbf{U} и свойства $\text{Tr}_E(\Theta) = 1$, мы имеем

$$\text{Tr}_A(\Phi(\rho)) = \text{Tr}_A(\rho) \text{Tr}_E(\Theta) = \text{Tr}_A(\rho) . \quad (1.95)$$

Для ясности в формуле явно указано, над каким пространством берётся тот или иной след. Таким образом, отображение Φ сохраняет след: для каждого нормированного ввода ρ выполняется $\text{Tr}(\Phi(\rho)) = 1$.

Выбор $\Theta = \mathbf{1}_E/N$ с $\dim(\mathcal{H}_E) = N$ в формуле (1.94) приводит к важному классу квантовых операций — семейству *унистохастических* каналов [26]. В этом случае начальное состояние окружающей среды является полностью смешанным. Не располагая какими-либо знаниями о состоянии окружения, мы берём его в такой статистической смеси, в которой все возможные состояния среды имеют равные веса. Унистохастические квантовые каналы является аналогом классических вероятностных преобразований, заданных унистохастическими матрицами перехода [26]. Понятно, что унистохастические каналы оставляют инвариантным состояние $\mathbf{1}_A/d$. В случае одного кубита примеры унистохастических каналов дают деполяризующий канал и канал затухания амплитуды.

Подобно стандартной точности воспроизведения [27], монотонность частных точностей воспроизведения основана на их поведении относительно операции частичного следа. Пусть ρ_A и ϱ_A — операторы плотности, полученные в виде

$$\rho_A = \text{Tr}_E(\tilde{\rho}) , \quad (1.96)$$

$$\varrho_A = \text{Tr}_E(\tilde{\varrho}) , \quad (1.97)$$

где $\tilde{\rho}$ и $\tilde{\varrho}$ являются операторами плотности на пространстве $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E$. Чтобы сформулировать необходимое свойство, рассмотрим величину

$$G_r(\rho_A, \varrho_A | X, Y) = \text{Tr}(\rho_A X) + \text{Tr}(\varrho_A Y) , \quad (1.98)$$

где положительные операторы \mathbf{X} и \mathbf{Y} подчиняются уравнениям (1.72), так что $\text{rank}(\mathbf{X}) = \text{rank}(\mathbf{Y}) = d - k$. Далее, введём два оператора

$$\tilde{\mathbf{X}} := \mathbf{X} \otimes \mathbf{1}_E , \quad (1.99)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}} := \mathbf{Y} \otimes \mathbf{1}_E , \quad (1.100)$$

где $\mathbf{1}_E$ обозначает единичный оператор на \mathcal{H}_E . В соответствии с (1.72), эти операторы удовлетворяют равенствам

$$\tilde{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{X}} , \quad \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{Y}} . \quad (1.101)$$

Используя свойства частичного следа [4], получаем

$$\text{Tr}(\tilde{\rho}(\mathbf{X} \otimes \mathbf{1}_E)) = \text{Tr}_A(\text{Tr}_E(\tilde{\rho}) \mathbf{X}) , \quad (1.102)$$

$$\text{Tr}(\tilde{\varrho}(\mathbf{Y} \otimes \mathbf{1}_E)) = \text{Tr}_A(\text{Tr}_E(\tilde{\varrho}) \mathbf{Y}) . \quad (1.103)$$

В силу этих соотношений, величина $G_k(\rho_A, \varrho_A | \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ равна

$$G_{(kN)}(\tilde{\rho}, \tilde{\varrho} | \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) = \text{Tr}(\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{X}}) + \text{Tr}(\tilde{\varrho} \tilde{\mathbf{Y}}) . \quad (1.104)$$

Следовательно, выполнено равенство

$$\inf\{G_k(\rho_A, \varrho_A | \mathbf{X}, \mathbf{Y})\} = \inf\left\{G_{(kN)}(\tilde{\rho}, \tilde{\varrho} | \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) : \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \otimes \mathbf{1}_E, \tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} \otimes \mathbf{1}_E\right\} . \quad (1.105)$$

Заметим также, что $\text{rank}(\tilde{\mathbf{X}}) = \text{rank}(\tilde{\mathbf{Y}}) = (d - k)N$. Таким образом, мы можем применить результат Ульмана (1.73) к обеим сторонам уравнения (1.105). Левая часть (1.105) есть умноженная на 2 величина $F_k(\rho_A, \varrho_A)$. Правая сторона (1.105) — это условная нижняя грань, которая не меньше, чем $2 F_{(kN)}(\tilde{\rho}, \tilde{\varrho})$, так что

$$F_k(\rho_A, \varrho_A) \geq F_{(kN)}(\tilde{\rho}, \tilde{\varrho}) \quad (1.106)$$

при связях (1.96) и (1.97). Отсюда мы получаем следующий результат.

Предложение 6 Пусть Φ — унистохастический квантовый канал. Для всех $k = 0, 1, \dots, d - 1$ и матриц плотности ρ и ϱ , справедливо соотношение

$$F_k(\Phi(\rho), \Phi(\varrho)) \geq F_k(\rho, \varrho) . \quad (1.107)$$

Доказательство. Каждый унистохастический канал можно представить в виде (1.94) с некоторым $\tilde{\mathbf{U}}$ и $\Theta = \mathbf{1}_E/N$. Ввиду мультипликативных свойств сингулярных чисел запишем

$$s_{ji}(\sqrt{\rho \otimes \Theta} \sqrt{\varrho \otimes \Theta}) = s_j(\sqrt{\rho} \sqrt{\varrho}) s_i(\Theta) = \frac{1}{N} s_j(\sqrt{\rho} \sqrt{\varrho}) . \quad (1.108)$$

Последнее означает, что сумма $(d - k)N$ наименьших среди набора чисел $s_{ji}(\sqrt{\rho \otimes \Theta} \sqrt{\varrho \otimes \Theta})$ совпадает с суммой $(d - k)$ наименьших среди набора чисел $s_j(\sqrt{\rho} \sqrt{\varrho})$. Иными словами, имеет место равенство

$$F_{(kN)}(\rho \otimes \Theta, \varrho \otimes \Theta) = F_k(\rho, \varrho) . \quad (1.109)$$

В силу унитарной инвариантности имеем

$$F_{(kN)}(\rho \otimes \Theta, \varrho \otimes \Theta) = F_{(kN)}(\tilde{\mathbf{U}}(\rho \otimes \Theta)\tilde{\mathbf{U}}^\dagger, \tilde{\mathbf{U}}(\varrho \otimes \Theta)\tilde{\mathbf{U}}^\dagger) . \quad (1.110)$$

Применяя операцию взятия частичного следа и комбинируя (1.106) с (1.110), мы получаем (1.107). ■

Заметим, что выбор $\Theta = \mathbf{1}_E/N$ необходим для справедливости уравнения (1.109) для всех входов. Действительно, нет оснований полагать, что частные точности воспроизведения наследуют все свойства стандартной точности воспроизведения. Покажем теперь, что монотонность частных точностей воспроизведения не имеет места при действии канала затухания амплитуды с параметром $\gamma \in (0; 1)$. В представлении векторов Блоха действие данного канала записывается в виде [4]

$$(u_x, u_y, u_z) \mapsto (u_x \sqrt{1 - \gamma}, u_y \sqrt{1 - \gamma}, \gamma + u_z(1 - \gamma)) . \quad (1.111)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ обозначает вектор Блоха кубитовой матрицы плотности на входе. Рассмотрим две матрицы плотности

$$\rho = \frac{1}{2} (\mathbf{1}_2 + v \sigma_z) , \quad (1.112)$$

$$\varrho = \frac{1}{2} (\mathbf{1}_2 + w \sigma_z) , \quad (1.113)$$

где σ_z есть одна из матриц Паули и $v, w \in (0; 1)$. Легко проверить, что наименьшее собственное значение оператора $|\sqrt{\rho} \sqrt{\varrho}|$ равно

$\sqrt{1-v}\sqrt{1-w}/2 = F_1(\rho, \varrho)$. В результате действия канала затухания амплитуды мы получаем матрицы плотности ρ' и ϱ' с векторами Блоха соответственно $(0, 0, v')$ и $(0, 0, w')$, причём

$$v' = \gamma + v(1 - \gamma) , \quad w' = \gamma + w(1 - \gamma) . \quad (1.114)$$

Таким образом, здесь имеет место $F_1(\rho', \varrho') = \sqrt{(1-v')(1-w')}/2$. Можно проверить, что, за исключением случая $v = 1$ и $w = 1$, справедливо неравенство

$$(1 - v')(1 - w') < (1 - v)(1 - w) , \quad (1.115)$$

откуда $F_1(\rho', \varrho') < F_1(\rho, \varrho)$.

Нарушение неравенства (1.107) связано с тем, что канал затухания амплитуды не является унистохастическим. С другой стороны, в некоторых случаях частная точность воспроизведения F_1 может возрасти под действием канала затухания амплитуды. Полностью смешанное состояние $\rho_* = \mathbf{1}_2/2$ переходит в состояние

$$\rho'' = \frac{1}{2} (\mathbf{1}_2 + \gamma \sigma_z) .$$

Возьмём также матрицу плотности

$$\omega = \frac{1}{2} (\mathbf{1}_2 - \alpha \sigma_z)$$

с параметром $\alpha = \gamma/(1 - \gamma)$, так что оно переходит в $\omega'' = \mathbf{1}_2/2 = \rho_*$. Разумеется, мы предполагаем здесь $\gamma \leq 1/2$ для обеспечения условия $\alpha \leq 1$. Простые вычисления показывают, что $F_1(\rho_*, \omega) = \sqrt{1-\alpha}/2$ и $F_1(\rho'', \rho_*) = \sqrt{1-\gamma}/2$. Ввиду неравенства $\gamma < \alpha$, справедливого при $0 < \gamma < 1/2$, мы получаем

$$F_1(\rho'', \omega'') > F_1(\rho_*, \omega) ,$$

как и было указано. Так что для $k = 1$ частная точность воспроизведения на некоторых парах кубитовых состояний возрастает и на некоторых убывает.

Резюмируя, мы видим, что монотонность частных точностей воспроизведения нарушается при действии некоторых квантовых каналов. В этой

главе уже было показано, что частичные следовые дистанции не возрастают под действием квантовых операций определённого типа, включающего бистохастические каналы. Подобное поведение демонстрируют и частные точности воспроизведения. Они монотонны в смысле неубывания по отношению к унистохастическим квантовым каналам. Совместно частичные следовые дистанции и частные точности воспроизведения расширяют наши возможности по анализу и сопоставлению смешанных квантовых состояний в контексте их использования для изучения каналов передачи и обработки информации.

Глава 2

Непрерывность и устойчивость частичных энтропийных сумм

В данной главе будут рассмотрены свойства непрерывности и устойчивости применительно к частичным энтропийным суммам [28]. Исследование свойств энтропии Шеннона и энтропии фон Неймана составляют самостоятельные разделы математической физики. В частности, изменения величины энтропийных функционалов и устойчивость при вариациях вероятностных распределений или матриц плотности исключительно важны с точки зрения физических приложений. Функциональные свойства могут анализироваться не только для энтропии в целом, но и в отношении отдельных её компонент. Изучение частичных энтропийных величин может быть полезным в различных аспектах. Например, эквивалентность пар матриц плотности может быть установлена с использованием понятия частной точности воспроизведения, введённого Ульманом [22]. С учетом значения свойств непрерывности и стабильности мы намерены исследовать их применительно к частичным энтропийным суммам. Непрерывность различных энтропийных функционалов характеризуется неравенствами типа Фанне. Оригинальное неравенство Фанне ограничивает сверху возможное изменение энтропии фон Неймана при вариации матрицы плотности [29]. Свойство устойчивости рассматривается на основе подхода статьи [30].

Начнём с определения калибровочных функций. Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ — элемент вещественного пространства \mathbb{R}^m . Для $k = 1, \dots, m$

мы введём функцию

$$G_{(k)}(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^k |x_i|^{\downarrow}, \quad (2.1)$$

где стрелки вниз обозначают, что величины вводятся в невозрастающем порядке. Заметим, что $G_{(m)}(\mathbf{x})$ задаёт ℓ_1 -норму, тогда как $G_{(1)}(\mathbf{x})$ задаёт ℓ_∞ -норму на \mathbb{C}^m [31]. В терминах этих симметричных калибровочных функций определяются нормы Фань Цзы. Пусть $\xi \mapsto f(\xi)$ — функция вещественной переменной. Для любой функции $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty)$, мы введём отображение $\mathbf{x} \mapsto G_{(k)}[f(\mathbf{x})]$ посредством

$$G_{(k)}[f(\mathbf{x})] := \sum_{i=1}^k |f(x_i)|^{\downarrow}.$$

Здесь предполагается, что вектор \mathbf{x} лежит в симплексе Δ_m вероятностных векторов, таких что $G_{(m)}(\mathbf{x}) = 1$ и $x_i \geq 0$ для всех $i = 1, \dots, m$. Введём зависящую от параметра $\alpha > 0$ функцию

$$\eta_\alpha(\xi) := \begin{cases} \frac{\xi^\alpha - \xi}{1 - \alpha}, & \text{для } 0 < \alpha \neq 1, \\ -\xi \ln \xi, & \text{для } \alpha = 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

В дальнейшем мы не рассматриваем случай $\alpha = 0$, в котором $\eta_\alpha(0) \neq 0$. Введём следующее определение [28].

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ — m -мерный вероятностный вектор. Для $k = 1, \dots, m$, k -ая частичная энтропийная сумма определяется выражением

$$H_\alpha^{(k)}(\mathbf{p}) := G_{(k)}[\eta_\alpha(\mathbf{p})]. \quad (2.3)$$

В случае $k = m$ мы получаем саму энтропию, обычно называемую α -энтропией Цаллиса [32], хотя она была также изучена в статье [33]. Данная энтропия имеет множество применений в неэкстенсивной статистической механике. В отличие от энтропии Шеннона, энтропия Цаллиса не является аддитивной [34, 35]. Частичные суммы вида (2.3) обладают несколькими очевидными свойствами.

(1С) *Положительность*: $H_\alpha^{(k)}(\mathbf{p}) \geq 0$, причём $H_\alpha^{(k)}(\mathbf{p}) = 0$ только в углах симплекса Δ_m .

(2С) *Неубывание по отношению к порядку суммы*: если $k < k'$, то $H_\alpha^{(k)}(\mathbf{p}) \leq H_\alpha^{(k')}(\mathbf{p})$.

(3С) *Симметрия*: если \mathbf{q} получен перестановкой элементов \mathbf{p} , то $H_\alpha^{(k)}(\mathbf{q}) = H_\alpha^{(k)}(\mathbf{p})$.

(4С) *Расширяемость*: $H_\alpha^{(k)}(p_1, \dots, p_m, 0) = H_\alpha^{(k)}(p_1, \dots, p_m)$.

(5С) *Монотонность по отношению к произведению векторов*: $H_\alpha^{(k)}(\mathbf{p}) \leq H_\alpha^{(kn)}(\mathbf{p} \times \mathbf{q})$, где $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ обозначает совместное распределение с элементами $p_i q_j$ (причём $j = 1, \dots, n$).

Эти свойства прямо следуют из определения (2.3). Только свойство (5С) требует некоторых комментариев. По сути, имеет место более сильное утверждение.

Предложение 7 Пусть $\mathbf{r} = \{r_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ – распределение вероятностей. Справедливо неравенство

$$H_\alpha^{(k)}(\mathbf{p}) \leq H_\alpha^{(kn)}(\mathbf{r}), \quad (2.4)$$

где $p_i = \sum_{j=1}^n r_{ij}$ являются элементами маргинального распределения.

Доказательство. Пусть \mathcal{A} – k -подмножество множества $\{1, \dots, m\}$ такое, что

$$H_\alpha^{(k)}(\mathbf{p}) = \sum_{i \in \mathcal{A}} \eta_\alpha(p_i).$$

Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} H_\alpha^{(k)}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i \in \mathcal{A}} \left(\sum_{j=1}^n r_{ij} \right)^\alpha - \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^n r_{ij} \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^n r_{ij}^\alpha - \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^n r_{ij} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^n \eta_\alpha(r_{ij}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

поскольку $\left(\sum_{j=1}^n r_{ij} \right)^\alpha \leq \sum_{j=1}^n r_{ij}^\alpha$ для $\alpha < 1$ и $\left(\sum_{j=1}^n r_{ij} \right)^\alpha \geq \sum_{j=1}^n r_{ij}^\alpha$ для $\alpha > 1$. В выражении (2.5) сумма берётся для пар (i, j) таких, что $i \in \mathcal{A}$ и $1 \leq j \leq n$. Число этих пар равно kn , откуда сумма не превосходит $H_\alpha^{(kn)}(\mathbf{r})$.

■

Удобно ввести понятие α -логарифма. Для переменной $\xi > 0$ записываем

$$\ln_\alpha(\xi) := \begin{cases} \frac{\xi^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, & \text{для } 0 < \alpha \neq 1, \\ \ln \xi, & \text{для } \alpha = 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

В пределе $\alpha \rightarrow 1$, очевидно, имеем $\ln_\alpha(\xi) \rightarrow \ln \xi$. При заданных m и α максимум энтропии Цаллиса равен [36, 37]

$$\max \left\{ H_\alpha^{(m)}(\mathbf{p}) : \mathbf{p} \in \Delta_m \right\} = \ln_\alpha(m) \quad (2.7)$$

и достигается тогда и только тогда, когда $p_i = 1/m$ для всех $i = 1, \dots, m$. Отметим, что для самой энтропии максимизирующий вектор не зависит от α . Для k -ой частичной энтропийной суммы $H_\alpha^{(k)}(\mathbf{p})$ максимизирующий вероятностный вектор будет зависеть в общем как от k , так и от α .

Чтобы явно найти максимум k -ой частичной суммы, нужно максимизировать функцию $G_{(k)}[\eta_\alpha(\mathbf{x})]$ вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ при наложенных ограничениях $x_i \geq 0$ и $G_{(k)}(\mathbf{x}) \leq 1$. В отсутствие равенства $G_{(k)}(\mathbf{x}) = 1$ задача становится трудной, поскольку функция $\eta_\alpha(x)$ не является масштабно-инвариантной. Тем не менее, мы можем дать простые нижние и верхние границы

$$\ln_\alpha(k) \leq \max \left\{ H_\alpha^{(k)}(\mathbf{p}) : \mathbf{p} \in \Delta_m \right\} \leq \ln_\alpha(k+1), \quad (2.8)$$

имеющие неплохую точность для достаточно больших k . Точнее, относительная погрешность оценивания по этим формулам не превышает $(k^\alpha \ln_\alpha(k+1))^{-1}$. Когда $p_i = 1/k$ для $1 \leq i \leq k$ и $p_i = 0$ для $k+1 \leq i \leq m$, k -ая частичная сумма равна $\ln_\alpha(k)$, откуда следует нижняя оценка. Далее, для каждого вектора вероятности \mathbf{p} , имеющего $G_{(k)}(\mathbf{p}) < 1$, введём вектор \mathbf{p}' такой, что $p'_i = p_i$ для $i = 1, \dots, k$ и $p'_{k+1} = 1 - G_{(k)}(\mathbf{p})$. По построению, имеем $G_{(k)}(\mathbf{p}') = 1$ и

$$H_\alpha^{(k)}(\mathbf{p}) \leq H_\alpha^{(k+1)}(\mathbf{p}') \leq \ln_\alpha(k+1), \quad (2.9)$$

откуда следует правая часть (2.8).

При $k = 1$ нижняя оценка в (2.8) становится тривиальной. В этом случае используем точное выражение для максимума, а именно $\eta_\alpha(\alpha^{1/(1-\alpha)})$. Это даёт верхнюю границу на $H_\alpha^{(1)}$. Так как $\alpha^{1/(1-\alpha)} \rightarrow e^{-1}$

при $\alpha \rightarrow 1$, максимум второй частичной суммы $H_1^{(2)}$ равен $2\eta_1(1/e) = 2/e \approx 0.74$. Это больше максимального значения $\ln 2 \approx 0.69$ бинарной энтропии Шеннона. Итак, в этом конкретном примере левая часть неравенства (2.8) насыщается. Для частичной суммы энтропии Шеннона относительная погрешность оценивания по формуле (2.8) составляет около 0.1 для $k = 5$ и строго меньше 0.1 для $k > 5$.

Перечислим несколько доводов в пользу исследования непрерывности и устойчивости частичных энтропийных сумм. Рассмотрим двумерные векторы вероятности $\mathbf{p} = ((1 - \varepsilon)/2, (1 + \varepsilon)/2)$ со строго положительным $\varepsilon \ll 1$ и $\mathbf{q} = (1/2, 1/2)$. Функция $\eta_1(x) = -x \ln x$ максимальна для $x = 1/e$, откуда

$$\eta_1((1 - \varepsilon)/2) > \eta_1((1 + \varepsilon)/2) .$$

Вводя величину $\Delta^{(k)} = |H_1^{(k)}(\mathbf{p}) - H_1^{(k)}(\mathbf{q})|$, мы запишем

$$\Delta^{(1)} = \eta_1((1 - \varepsilon)/2) - \eta_1(1/2) = \frac{1}{2} (-(1 - \varepsilon) \ln(1 - \varepsilon) - \varepsilon \ln 2) , \quad (2.10)$$

$$\Delta^{(2)} = H_1^{(2)}(\mathbf{p}) - H_1^{(2)}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} ((1 + \varepsilon) \ln(1 + \varepsilon) + (1 - \varepsilon) \ln(1 - \varepsilon)) . \quad (2.11)$$

Отношение $\Delta^{(1)}$ к $\Delta^{(2)}$ равно $(1 - \ln 2) \varepsilon^{-1} + O(1)$ и не ограничено при $\varepsilon \rightarrow +0$. Таким образом, разность между частичными энтропийными суммами может быть сколь угодно большой по сравнению с разностью между самими энтропиями. Мы наблюдали это для векторов в непосредственной близости от равномерного распределения. Так что непрерывность и устойчивость некоторого энтропийного функционала сами по себе не означают того же самого для соответствующих частичных сумм. Оказывается, однако, что эти свойства по-прежнему имеют место для частичных энтропийных сумм Цаллиса. Поэтому мы будем рассматривать различия между k -ми частичными суммами двух m -мерных вероятностных векторов \mathbf{p} и \mathbf{q} . Представляется естественным оценить эту разницу с точки зрения частичной классической дистанции $G_{(k)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$. Эти расстояния и их квантовые аналоги на основе норм Фань Цзы были исследованы в предыдущей главе. Как показано ниже, классический и квантовый случаи допускают единообразное рассмотрение.

Пусть \mathcal{H} — d -мерное гильбертово пространство, и пусть \mathbf{X} — линейный оператор на \mathcal{H} . Для $k = 1, \dots, d$, k -норма Фань Цзы определяется формулой (1.6). Последнюю можно переписать в виде [31]

$$\|\mathbf{X}\|_{(k)} := G_{(k)}(\mathbf{s}(\mathbf{X})) \equiv \sum_{j=1}^k s_j(\mathbf{X})^\downarrow, \quad (2.12)$$

где вектор $\mathbf{s}(\mathbf{X})$ составлен из сингулярных чисел \mathbf{X} . Для функции $\xi \mapsto f(\xi)$ скалярной переменной введём функцию нормального оператора

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|,$$

собственные векторы $|e_i\rangle$ которого образуют ортонормированный базис. Она определяется выражением

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^d f(\lambda_i) |e_i\rangle\langle e_i|. \quad (2.13)$$

Мы также имеем $\|\mathbf{X}\|_{(k)} = G_{(k)}(\lambda(\mathbf{X}))$ для каждого нормального оператора \mathbf{X} .

Рассмотрим оператор плотности ρ на \mathcal{H} . Для $k = 1, \dots, d$, k -ая частичная энтропийная сумма квантового состояния ρ определяется формулой

$$S_\alpha^{(k)}(\rho) := \|\eta_\alpha(\rho)\|_{(k)}. \quad (2.14)$$

Собственные значения $\{p_i\}$ оператора плотности ρ можно рассматривать как вероятности в силу их положительности и нормировки $\text{Tr}(\rho) = 1$. Поскольку функция $\eta_\alpha(x)$ неотрицательна для $x \in [0; 1]$, приведённое выше определение и (2.13) приводят к равенству

$$S_\alpha^{(k)}(\rho) = H_\alpha^{(k)}(\mathbf{p}), \quad (2.15)$$

где \mathbf{p} обозначает вектор собственных значений ρ . В случае $k = d$ получаем саму квантовую α -энтропию Цаллиса. Некоторые свойства квантовых частичных энтропийных сумм аналогичны свойствам классических сумм.

(1Q) *Положительность*: $S_\alpha^{(k)}(\rho) \geq 0$, причём $S_\alpha^{(k)}(\rho) = 0$, если и только если ρ идемпотентен.

(2Q) *Неубывание по отношению к порядку суммы*: если $k < k'$, то $S_\alpha^{(k)}(\rho) \leq S_\alpha^{(k')}(\rho)$.

(3Q) *Симметрия*: если $\text{spec}(\varrho) = \text{spec}(\rho)$, то $S_\alpha^{(k)}(\varrho) = S_\alpha^{(k)}(\rho)$.

(4Q) *Расширяемость*: если гильбертово пространство \mathcal{H} расширяется до $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$, то $S_\alpha^{(k)}(\rho)$ остаётся неизменной для всех матриц плотности ρ на \mathcal{H} .

(5Q) *Монотонность по отношению к произведению векторов*: справедливо неравенство $S_\alpha^{(k)}(\rho) \leq S_\alpha^{(kN)}(\rho \otimes \omega)$, где ω — матрица плотности на N -мерном пространстве.

Свойство (3Q) содержит унитарную инвариантность как частный случай. Подобно (5C), свойство (5Q) можно распространить на операторы плотности специального вида. Допустим, что комбинированная система AB из подсистем A и B описывается оператором плотности $\tilde{\rho}$ на тензорном произведении $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Редуцированные плотности систем A и B задаются как

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\tilde{\rho}), \quad \rho_B = \text{Tr}_A(\tilde{\rho}). \quad (2.16)$$

Входя в спектральные разложения

$$\rho_A = \sum_{i=1}^d a_i |i\rangle\langle i|, \quad \rho_B = \sum_{\mu=1}^N b_\mu |\mu\rangle\langle \mu|, \quad (2.17)$$

векторы $|i\rangle$ образуют ортонормированный базис в \mathcal{H}_A , векторы $|\mu\rangle$ образуют ортонормированный базис в \mathcal{H}_B , $\text{spec}(\rho_A) = \{a_i\}$ и $\text{spec}(\rho_B) = \{b_\mu\}$. Тогда векторы $|i\mu\rangle \equiv |i\rangle \otimes |\mu\rangle$ формируют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 8 *Если операторы $\tilde{\rho}$ и $\rho_A \otimes \rho_B$ коммутируют и выполняется эквивалентность*

$$(a_i b_\mu = a_j b_\nu) \iff (i = j \wedge \mu = \nu), \quad (2.18)$$

то мы имеем

$$S_\alpha^{(k)}(\rho_A) \leq S_\alpha^{(kN)}(\tilde{\rho}), \quad S_\alpha^{(k)}(\rho_B) \leq S_\alpha^{(kd)}(\tilde{\rho}). \quad (2.19)$$

Доказательство. В заданном базисе $\{|\mu\rangle\}$ оператор $\tilde{\rho}$ может быть представлен как

$$\tilde{\rho} = \sum_{i\mu} \sum_{j\nu} c(i\mu|j\nu) |i\mu\rangle\langle j\nu|, \quad (2.20)$$

где коэффициенты $c(i\mu|j\nu) = \langle i\mu|\tilde{\rho}|j\nu\rangle$. Далее, произведение $\rho_A \otimes \rho_B$ записывается как

$$\rho_A \otimes \rho_B = \sum_{i\mu} a_i b_\mu |i\mu\rangle\langle i\mu| , \quad (2.21)$$

т.е. в виде диагональной матрицы. Используя эти факты, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\rho_A \otimes \rho_B) &= \sum_{i\mu} \sum_{j\nu} c(i\mu|j\nu) a_j b_\nu |i\mu\rangle\langle j\nu| , \\ (\rho_A \otimes \rho_B)\tilde{\rho} &= \sum_{i\mu} \sum_{j\nu} a_i b_\mu c(i\mu|j\nu) |i\mu\rangle\langle j\nu| . \end{aligned}$$

Коммутатор операторов $\tilde{\rho}$ и $\rho_A \otimes \rho_B$ имеет нулевые матричные элементы, откуда

$$(a_j b_\nu - a_i b_\mu) c(i\mu|j\nu) = 0 \quad (2.22)$$

для всех значений меток. Объединяя (2.18) и (2.22), мы видим, что недиагональные элементы $c(i\mu|j\nu)$ равны нулю. Обозначения диагональных элементов можно упростить до $c_{i\mu} \equiv c(i\mu|i\mu)$, так что

$$\tilde{\rho} = \sum_{i\mu} \sum_{j\nu} c_{i\mu} |i\mu\rangle\langle i\mu| . \quad (2.23)$$

Согласно (2.16), взятие парциальных следов матрицы (2.23) приводит к матрицам плотности подсистем в виде (2.17), где

$$a_i = \sum_{\mu} c_{i\mu} , \quad b_\mu = \sum_i c_{i\mu} .$$

Таким образом, множества $\{a_i\}$ и $\{b_\mu\}$, трактуемые как вероятностные векторы, являются маргинальными распределениями вектора $\{c_{i\mu}\}$. Теперь утверждение Предложения 7 завершает доказательство (2.19). ■

В качестве примера рассмотрим пару кубитов A и B в параметризованном сцепленном состоянии

$$|\Psi(\theta)\rangle = \cos \theta |00\rangle + \sin \theta |11\rangle ,$$

где θ — вещественный угол. Тогда оператор $\tilde{\rho} = |\Psi(\theta)\rangle\langle\Psi(\theta)|$ идемпотентен, так что все частичные энтропийные суммы равны нулю. Мы также имеем

$$\rho_A = a_0 |0\rangle\langle 0| + a_1 |1\rangle\langle 1| , \quad \rho_B = b_0 |0\rangle\langle 0| + b_1 |1\rangle\langle 1| ,$$

где $a_0 = b_0 = \cos^2 \theta$ и $a_1 = b_1 = \sin^2 \theta$. Простые вычисления показывают, что, за исключением двух вариантов $\cos 2\theta = 0$ или $\sin 2\theta = 0$, операторы

$\tilde{\rho}$ и $\rho_A \otimes \rho_B$ не коммутируют. В таком случае собственные значения обеих редуцированных плотностей ρ_A и ρ_B строго положительны, откуда имеем $S_\alpha^{(k)}(\rho_A) > 0$ и $S_\alpha^{(k)}(\rho_B) > 0$. Напротив, $S_\alpha^{(\ell)}(\tilde{\rho}) = 0$ для всех значений ℓ .

Когда $\cos 2\theta = 0$, матрицы плотности $\tilde{\rho}$ и $\rho_A \otimes \rho_B$ коммутируют, но неравенства (2.19) по-прежнему не выполнены. В самом деле, мы имеем $a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 1/2$, откуда $S_\alpha^{(k)}(\rho_A) > 0$ и $S_\alpha^{(k)}(\rho_B) > 0$, тогда как $S_\alpha^{(\ell)}(\tilde{\rho}) = 0$ для всех ℓ , как и ранее. Здесь предусловие (2.18) предложения 8 явно нарушена. Этот пример показывает недостаточность просто условия коммутативности $\tilde{\rho}$ и $\rho_A \otimes \rho_B$. Формулировка предпосылки (2.18) включает только спектры редуцированных матриц плотности, а эти спектры могут быть известны из спецификации.

Другое применение (2.4) связано с квантовыми измерениями. Обобщённое измерение описывается неортогональным разложением единицы $\{\mathbf{M}_j\}$, где положительные операторы \mathbf{M}_j удовлетворяют соотношению полноты

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{M}_j = \mathbf{1} . \quad (2.24)$$

Следуя работе [38], рассмотрим операторы ранга один, т.е. $\mathbf{M}_j = |\omega_j\rangle\langle\omega_j|$. Пусть ансамбль $\{q_i, |\psi_i\rangle\}$ генерирует оператор плотности ρ . Как правило, векторы $|\omega_j\rangle$ и $|\psi_i\rangle$ не являются ни нормированными, ни ортогональными. Через $P(\psi_i; \omega_j)$ обозначим совместную вероятность того, что при вводе вектора $|\psi_i\rangle$ в измерительный аппарат был получен j -ый результат. В случае нормированного $|\omega_j\rangle$ величина $|\langle\omega_j|\psi_i\rangle|^2$ — вероятность того, что $|\psi_i\rangle$ проходит тест “да-нет” по нахождению в состоянии $|\omega_j\rangle$. Тогда мы получаем

$$P(\psi_i; \omega_j) = q_i |\langle\omega_j|\psi_i\rangle|^2 , \quad (2.25)$$

$$H_\alpha^{(k)}(\rho) \leq H_\alpha^{(kN)}(P(\psi_i; \omega_j)) , \quad (2.26)$$

где использовано (2.4) с $r_{ij} = P(\psi_i; \omega_j)$ и $j = 1, \dots, N$. Если в качестве ансамбля $\{q_i, |\psi_i\rangle\}$ берутся собственные значения и нормированные собственные векторы ρ , то (2.26) принимает вид

$$S_\alpha^{(k)}(\rho) \leq H_\alpha^{(kN)}(P(\psi_i; \omega_j)) . \quad (2.27)$$

Вышеупомянутые тесты типа “да-нет” с чистыми состояниями легко реализуются в физических экспериментах. Во многих задачах квантовой об-

работки информации некоторые характеристики спектра и носителя неизвестного смешанного состояния могут быть известны априори. Соотношения (2.26) и (2.27) дают возможность оценить энтропийные суммы в практических спецификациях такого рода. В принципе, этот вопрос заслуживает отдельного исследования.

Приступим к установлению верхних границ на разность между двумя k -ми энтропийными суммами. Начнём со случая $\alpha \in (0; 2]$. Удобно переформулировать вопрос следующим образом. Для двух k -мерных вещественных векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} определим функцию

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^k \eta_\alpha(x_i) - \sum_{i=1}^k \eta_\alpha(y_i) . \quad (2.28)$$

Чтобы показать свойства непрерывности и устойчивости частичных энтропийных сумм, получим верхнюю оценку на модуль функции (2.28) в области $\mathfrak{D}_\epsilon \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, определённой формулой

$$\mathfrak{D}_\epsilon := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : x_i \geq 0, y_i \geq 0, G_{(k)}(\mathbf{x}) \leq 1, G_{(k)}(\mathbf{y}) \leq 1, G_{(k)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq \epsilon\} . \quad (2.29)$$

Прямая оптимизация $|F(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$ в области \mathfrak{D}_ϵ выглядит трудновыполнимой. Даже в случае, когда максимизация выполняется для $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta_k \times \Delta_k$ и каждый из наборов элементов $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ суммируется к 1, задача оказывается сложной. Например, указанная функция не является ни выпуклой, ни вогнутой. Любые дополнительные ограничения допустимой области переменных усложняют поиск решения. В случае $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta_k \times \Delta_k$ известны два взаимодополняющих подхода.

Первый метод оценки с ограничением $\alpha \in [0; 2]$ был представлен в [36]. Этот метод получен обобщением подхода, предложенного для энтропии фон Неймана в предложении 1.8 книги [39]. Адаптируя его к нашему случаю, получаем следующий результат.

Предложение 9 Если $\epsilon \leq \alpha^{1/(1-\alpha)}$ и $\alpha \in (0; 2]$, то в области \mathfrak{D}_ϵ имеет место неравенство

$$|F(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \epsilon^\alpha \ln_\alpha(k + 1) + \eta_\alpha(\epsilon) . \quad (2.30)$$

Доказательство. Если $x, y \in [0; 1]$ и $|x - y| = t < 1$, то максимум величины $|\eta_\alpha(x) - \eta_\alpha(y)|$ равен либо $\eta_\alpha(t)$, либо $\eta_\alpha(1 - t)$. Когда $\alpha \in (0; 2]$,

величина $h(t) \equiv \eta_\alpha(t) - \eta_\alpha(1-t)$ положительна для $t \in [0; 1/2]$, так как $h(0) = h(1/2) = 0$ и $h''(t) \leq 0$ для $t \leq 1-t$. Итак, запишем

$$|\eta_\alpha(x) - \eta_\alpha(y)| \leq \eta_\alpha(t) . \quad (2.31)$$

В силу монотонности, при $t \leq \alpha^{1/(1-\alpha)}$ эта оценка выполняется для тех точек, для которых $|x - y| \leq t$. С учётом (2.31) величина $|F(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$ не превосходит

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k |\eta_\alpha(x_i) - \eta_\alpha(y_i)| &\leq \sum_{i=1}^k \eta_\alpha(\epsilon_i) = -\epsilon^\alpha \sum_{i=1}^k \frac{\epsilon_i^\alpha}{\epsilon^\alpha} \ln_\alpha\left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon}\right) \quad (2.32) \\ &= -\epsilon^\alpha \sum_{i=1}^k \left\{ \left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon}\right)^\alpha \ln_\alpha\left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon}\right) + \frac{\epsilon_i}{\epsilon} \ln_\alpha(\epsilon) \right\} = \epsilon^\alpha \sum_{i=1}^k \eta_\alpha\left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon}\right) + \eta_\alpha(\epsilon) \sum_{i=1}^k \frac{\epsilon_i}{\epsilon} , \end{aligned}$$

где мы обозначили $\epsilon_i \equiv |x_i - y_i|$ и использовали тождество

$$\ln_\alpha(xy) = \ln_\alpha(x) + x^{1-\alpha} \ln_\alpha(y) . \quad (2.33)$$

Соотношения (2.32) выполняются при условиях $\alpha \in (0; 2]$ и $\sum_{i=1}^k \epsilon_i \leq \epsilon \leq \alpha^{1/(1-\alpha)}$. Используя верхнюю границу (2.8) и $\sum_{i=1}^k (\epsilon_i/\epsilon) \leq 1$, мы получаем (2.30). ■

Когда $G_{(k)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \epsilon$, т.е. когда $\sum_{i=1}^k (\epsilon_i/\epsilon) = 1$, множество $\{\epsilon_i/\epsilon\}$ является распределением вероятностей на k точках. Тогда множитель члена ϵ^α в правой части (2.32) является самой энтропией Цаллиса, откуда

$$\sum_{i=1}^k \eta_\alpha(\epsilon_i/\epsilon) \leq \ln_\alpha(k) , \quad |F(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \epsilon^\alpha \ln_\alpha(k) + \eta_\alpha(\epsilon) . \quad (2.34)$$

Фактически последнее неравенство было доказано в [36]. Но мы должны разрешить вопрос с $G_{(k)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) < \epsilon$ в смысле частичных сумм. Действительно, в трёх величинах $G_{(k)}[\eta_\alpha(\mathbf{p})]$, $G_{(k)}[\eta_\alpha(\mathbf{q})]$ и $G_{(k)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ индекс суммирования может пробегать три различных k -подмножествами множества $\{1, \dots, m\}$. Если $\alpha > 2$, то имеем $h''(t) > 0$ и $h(t) < 0$ для $0 < t < 1/2$. Именно по этой причине случай $\alpha > 2$ не может быть проанализирован в рамках рассматриваемого метода.

Хотя полученная оценка не является особенно точной, она устанавливает непрерывность частичных сумм. Мы сформулируем результат только для квантового случая, поскольку случай классических распределений рассматривается совершенно аналогично. Это становится возможным в силу (2.15) и следующей леммы.

Предложение 10 Пусть функция $x \mapsto f(x)$ положительна. Для всех $p, q \in \mathbb{R}^m$ выполняется

$$\left| G_{(k)}[f(p)] - G_{(k)}[f(q)] + Q \right| \leq \left| \sum_{i \in \mathcal{C}} (f(p_i) - f(q_i)) + Q \right|, \quad (2.35)$$

где Q не зависит от этих сумм и \mathcal{C} есть k -подмножество множества $\{1, \dots, m\}$.

Доказательство. Сначала введём два k -подмножества \mathcal{A} и \mathcal{B} множества $\{1, \dots, m\}$ такие, что

$$G_{(k)}[f(p)] = \sum_{i \in \mathcal{A}} f(p_i), \quad G_{(k)}[f(q)] = \sum_{j \in \mathcal{B}} f(q_j). \quad (2.36)$$

Используя пересечение $\mathcal{I} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, мы можем переписать слагаемое $(G_{(k)}[f(p)] - G_{(k)}[f(q)] + Q)$ в виде

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} (f(p_i) - f(q_i)) + \sum_{i \in (\mathcal{A} \setminus \mathcal{I})} f(p_i) - \sum_{j \in (\mathcal{B} \setminus \mathcal{I})} f(q_j) + Q. \quad (2.37)$$

Разности $(\mathcal{A} \setminus \mathcal{I})$ и $(\mathcal{B} \setminus \mathcal{I})$ являются множествами с равным числом элементов. Без ограничения общности значение (2.37) можно считать положительным. В силу определения \mathcal{B} имеем $f(q_j) \geq f(q_i)$ для всех $j \in \mathcal{B}$ и $i \notin \mathcal{B}$, включая $j \in (\mathcal{B} \setminus \mathcal{I})$ и $i \in (\mathcal{A} \setminus \mathcal{I})$. Отсюда следует соотношение

$$-\sum_{j \in (\mathcal{B} \setminus \mathcal{I})} f(q_j) \leq -\sum_{i \in (\mathcal{A} \setminus \mathcal{I})} f(q_i), \quad (2.38)$$

так что заявленное неравенство (2.35) получается путем замены левой части (2.38) на правую с подстановкой в (2.37). Тем самым мы полагаем $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ в формуле (2.35). ■

Теперь мы готовы доказать основной результат в случае $\alpha \in (0; 2]$. Для матриц плотности ρ и ϱ на d -мерном гильбертовом пространстве \mathcal{H} введём обозначения

$$P_i = \lambda_i(\rho)^\downarrow, \quad Q_j = \lambda_j(\varrho)^\downarrow, \quad (2.39)$$

где $i, j \in \{1, \dots, d\}$. В этих обозначениях запишем

$$G_{(k)}[p - q] = G_{(k)}[\lambda(\rho)^\downarrow - \lambda(\varrho)^\downarrow] \leq G_{(k)}[\lambda(\rho - \varrho)] = \|\rho - \varrho\|_{(k)}, \quad (2.40)$$

причём промежуточное неравенство является частным случаем теоремы III.4.4 книги [31]. В силу Предложения 10 получаем

$$\left| S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) - S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\varrho}) \right| = \left| G_{(k)}[\eta_\alpha(\mathbf{p})] - G_{(k)}[\eta_\alpha(\mathbf{q})] \right| \leq \left| \sum_{i \in \mathcal{C}} (\eta_\alpha(p_i) - \eta_\alpha(q_i)) \right| \quad (2.41)$$

для некоторого k -подмножества \mathcal{C} множества $\{1, \dots, d\}$. Применяя $\epsilon := \sum_{i \in \mathcal{C}} |p_i - q_i|$ и $\varepsilon := \|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho}\|_{(k)}$, видим, что правая часть (2.41) не превосходит

$$\epsilon^\alpha \ln_\alpha(k+1) + \eta_\alpha(\epsilon) \leq \varepsilon^\alpha \ln_\alpha(k+1) + \eta_\alpha(\varepsilon), \quad (2.42)$$

если $\varepsilon \leq \alpha^{1/(1-\alpha)}$. Это следует из Предложения 9 и $\epsilon \leq G_{(k)}[\mathbf{p} - \mathbf{q}] \leq \varepsilon$ благодаря (2.40). Таким образом, получаем неравенство, которое обобщает неравенство Фанне в отношении отдельных членов в выражении для энтропии Цаллиса для $\alpha \in (0; 2]$.

Предложение 11 *Для заданных $\alpha \in (0; 2]$ и $k \in \{1, \dots, d\}$ справедливо следующее. Если операторы плотности $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\varrho}$ удовлетворяют условию $\|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho}\|_{(k)} = \varepsilon \leq \alpha^{1/(1-\alpha)}$, то*

$$\left| S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) - S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\varrho}) \right| \leq \varepsilon^\alpha \ln_\alpha(k+1) + \eta_\alpha(\varepsilon). \quad (2.43)$$

Второй метод получения оценок типа Фанне для энтропии Цаллиса работает в области $\alpha > 1$ и был представлен в работе [37]. Пусть \mathbf{p} и \mathbf{q} — m -мерные вероятностные векторы. Для них ℓ_1 -метрика, или дистанция Колмогорова, определяется формулой (1.10), которая в нашем случае принимает вид

$$\mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m |p_i - q_i| \equiv \frac{1}{2} G_{(m)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (2.44)$$

Используя каплинг-метод, автор работы [37] доказал следующее неравенство. Для $\alpha > 1$ и $\delta = \mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ имеет место

$$\left| H_\alpha^{(m)}(\mathbf{p}) - H_\alpha^{(m)}(\mathbf{q}) \right| \leq \delta^\alpha \ln_\alpha(m-1) + h_\alpha(\delta, 1-\delta), \quad (2.45)$$

где бинарная энтропия Цаллиса $h_\alpha(\delta, 1-\delta) = \eta_\alpha(\delta) + \eta_\alpha(1-\delta)$. Выполнение условия нормировки $\sum_{i=1}^m p_i = \sum_{i=1}^m q_i = 1$ имеет решающее значение для использования каплинг-метода. Тем не менее мы можем использовать

результат (2.45) с целью получения оценок для частичных энтропийных сумм Цаллиса.

Правую часть (2.45) можно переписать как $g(\delta, m - 1)$, где

$$g(\delta, n) := \delta^\alpha \ln_\alpha(n) + h_\alpha(\delta, 1 - \delta) = (1 - \alpha)^{-1} (n^{1-\alpha} \delta^\alpha + (1 - \delta)^\alpha - 1) . \quad (2.46)$$

По определению имеем $\eta_\alpha(\delta) \leq g(\delta, n)$. Как функция δ при фиксированном n величина $g(\delta, n)$ монотонно возрастает в диапазоне $0 < \delta < n/(n + 1)$. Действительно, для $\alpha > 1$ условие $\partial g/\partial \delta > 0$ приводит к требованию

$$\frac{\delta}{n} < 1 - \delta . \quad (2.47)$$

Заметим также, что если $|B| \leq C$ и $A > 0$, то $|A + B| \leq C$ неизбежно влечёт ограничение

$$A \leq C + |B| . \quad (2.48)$$

Теперь сформулируем одно утверждение.

Предложение 12 Если $\epsilon \leq \min\{\alpha^{1/(1-\alpha)}, (k + 1)/(k + 2)\}$ и $\alpha > 1$, то в области \mathfrak{D}_ϵ справедливо неравенство

$$|F(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq g(\epsilon, k + 1) + \eta_\alpha(\epsilon) . \quad (2.49)$$

Доказательство. Без потери общности величину $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ мы будем считать неотрицательной. Рассмотрим по отдельности следующие два случая:

(i) Компоненты векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} удовлетворяют условию $u + \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k y_i = 1 - v$, где $u, v \geq 0$. При $m = k + 2$ мы построим два m -мерных вероятностных вектора $\mathbf{p} = (x_1, \dots, x_k, u, v)$ и $\mathbf{q} = (y_1, \dots, y_k, 0, v)$;

(ii) Компоненты векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} удовлетворяют условию $u + \sum_{i=1}^k y_i = \sum_{i=1}^k x_i = 1 - v$, где $u, v \geq 0$. При $m = k + 2$ мы построим два m -мерных вероятностных вектора $\mathbf{p} = (x_1, \dots, x_k, 0, v)$ и $\mathbf{q} = (y_1, \dots, y_k, u, v)$.

Применяя определение энтропии Цаллиса и сокращая $\eta_\alpha(v)$, в обоих случаях можем написать

$$H_\alpha^{(m)}(\mathbf{p}) - H_\alpha^{(m)}(\mathbf{q}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \pm \eta_\alpha(u) , \quad (2.50)$$

где знак плюс отвечает случаю (i), а знак минус отвечает случаю (ii). Для обоих случаев также справедливы соотношения

$$u = \left| \sum_{i=1}^k x_i - \sum_{i=1}^k y_i \right| \leq \sum_{i=1}^k |x_i - y_i| \leq G_{(k)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \epsilon ,$$

причём $2\mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^k |x_i - y_i| + u \leq 2\epsilon$. Таким образом, мы можем использовать результат (2.45) с подстановкой $\delta \leq \epsilon$ и $m = k + 2$. Когда $\epsilon \leq (k + 1)/(k + 2)$, мы имеем $g(\delta, k + 1) \leq g(\epsilon, k + 1)$ и, наконец,

$$|F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + B| \leq g(\epsilon, k + 1) .$$

Ещё здесь подразумеваются равенства (2.50) и $B = \pm \eta_\alpha(u)$. Если

$$u \leq \epsilon \leq \min\{\alpha^{1/(1-\alpha)}, (k + 1)/(k + 2)\} ,$$

то $|B| = \eta_\alpha(u) \leq \eta_\alpha(\epsilon) \leq g(\epsilon, k + 1)$. Применение ограничения (2.48) завершает доказательство. ■

Следует подчеркнуть, что два диапазона $\alpha \in (0; 2]$ и $\alpha \in (1; +\infty)$, в которых соответственно были доказаны неравенства (2.30) и (2.49), имеют общий интервал $(1; 2]$. Как нетрудно видеть, здесь оценка (2.49) слабее, так что мы будем использовать её только для $\alpha \in (2; +\infty)$. В случае $\epsilon \ll 1$, однако, разница между двумя доказанными оценками мала. Аналогично неравенству (2.43), из формулы (2.49) немедленно получаем такой результат.

Предложение 13 Для данных $\alpha \in (2; +\infty)$ и $k \in \{1, \dots, d\}$ справедливо следующее. Если операторы плотности ρ и ϱ удовлетворяют условию $\|\rho - \varrho\|_{(k)} = \varepsilon \leq \alpha^{1/(1-\alpha)}$, то

$$\left| S_\alpha^{(k)}(\rho) - S_\alpha^{(k)}(\varrho) \right| \leq \varepsilon^\alpha \ln_\alpha(k + 1) + \eta_\alpha(\varepsilon) + h_\alpha(\varepsilon, 1 - \varepsilon) . \quad (2.51)$$

Неравенства (2.43) и (2.51) формулируются в терминах расстояния $\|\rho - \varrho\|_{(k)}$, которые обладают свойствами, напоминающими свойства следовой метрики [17]. Эти меры могут быть связаны с частными точностями воспроизведения [22]. В целом, концепция точности воспроизведения обеспечивает естественное обобщение понятия вероятности перехода с чистых

квантовых состояний на смешанные [20]. А именно, k -тая частная точность воспроизведения определяется формулой (1.73). Как было показано в работе [18], выполняется неравенство

$$\|\rho - \varrho\|_{(k)} \leq 2(1 - F_k(\rho, \varrho)) . \quad (2.52)$$

Замена ε на $\varepsilon' := 2(1 - F_k(\rho, \varrho))$, даёт переформулировку (2.43) и (2.51) в терминах частных точностей воспроизведения при соответствующих условиях на ε' . Предложения 11 и 13 вместе полностью покрывают диапазон $\alpha \in (0; +\infty)$. Следует отметить, что обе границы явно зависят только от k , но не от размерности пространства \mathcal{H} . Выведенные неравенства показывают, что все частичные суммы энтропии Цаллиса непрерывны относительно соответствующих следовых дистанций, а тем самым и относительно полной следовой метрики. Действительно, по определению (1.6) для $k = 1, \dots, d$ имеем

$$\|\rho - \varrho\|_{(k)} \leq \|\rho - \varrho\|_{(d)} \equiv \text{Tr}|\rho - \varrho| .$$

Соотношения (2.43) и (2.51) являются новыми в том смысле, что предыдущие обобщения неравенства Фанне касались энтропии Цаллиса как целого. Однако сама по себе непрерывность некоторого функционала не означает того же свойства для отдельных составляющих указанного функционала (см., например, отношение (2.10) к (2.11)). Как было явно показано выше, частичные энтропийные суммы также непрерывны. Итак, свойство непрерывности энтропии Цаллиса имеет более утончённый характер.

Наконец, мы обсудим устойчивость частичных энтропийных сумм. Для того, чтобы эти меры различимости обеспечивали надёжный анализ экспериментальных данных, необходимо подтвердить свойство устойчивости. Общепринятый критерий устойчивости был предложен в работе [30] и формулируется следующим образом. Пусть Φ — положительный функционал, определённый на вероятностном симплексе Δ_m . Предположим, что множество $\{\Phi(\mathbf{p}) : \mathbf{p} \in \Delta_m\}$ положительных чисел ограничено сверху гранью Φ_M . Устойчивость означает, что для каждого $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\frac{|\Phi(\mathbf{p}) - \Phi(\mathbf{q})|}{\Phi_M} \leq \delta \quad (2.53)$$

всякий раз, когда $G_{(m)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \leq \varepsilon$. В силу $G_{(k)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \leq G_{(m)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ запишем

$$\left| H_{\alpha}^{(k)}(\mathbf{p}) - H_{\alpha}^{(k)}(\mathbf{q}) \right| \leq g(\varepsilon, k + 1) + \eta_{\alpha}(\varepsilon) \quad (2.54)$$

при условии $G_{(m)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \varepsilon \leq \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \min\{\alpha^{1/(1-\alpha)}, (k + 1)/(k + 2)\}$. Соотношения (2.8) и (2.54) обеспечивают свойство устойчивости для частичных энтропийных сумм. Действительно, каждому $\xi \in (0; \varepsilon_0)$ мы присваиваем $\delta(\xi) = (g(\xi, k + 1) + \eta_{\alpha}(\xi)) \ln_{\alpha}(k)$ такое, что неравенство

$$\left| H_{\alpha}^{(k)}(\mathbf{p}) - H_{\alpha}^{(k)}(\mathbf{q}) \right| (\max H_{\alpha}^{(k)})^{-1} \leq \delta(\xi) \quad (2.55)$$

тем самым установлено для случая $G_{(m)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \leq \xi$. Функция $\xi \mapsto \delta(\xi)$ зануляется в точке $\xi = 0$ и монотонно возрастает с ростом ξ в интервале $\xi \in (0; \varepsilon_0)$. Таким образом, она задаёт некоторое взаимно однозначное соответствие между интервалами $[0; \varepsilon_0]$ и $[0; \delta(\varepsilon_0)]$. Поэтому для каждого $\delta \in (0; \delta(\varepsilon_0)]$ имеем $\xi(\delta) > 0$, так что условие устойчивости (2.55) действительно выполняется всякий раз, когда $G_{(m)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \leq \xi(\delta)$. Это пример того, что устойчивость в смысле работы [30] формально эквивалентна равномерной непрерывности [37, 40].

Глава 3

Общие свойства унифицированных энтропий

В этой главе рассмотрены свойства унифицированных энтропий, важные с точки зрения физических приложений [41]. Концепция энтропии играет ключевую роль как в статистической физике, так и в теории информации. Свойства энтропийных функционалов сопряжены со многими интересными вопросами из различных областей математики. В настоящее время классическая энтропия Шеннона и квантовая энтропия фон Неймана сами по себе являются объектами активных исследований. Повсеместное распространение статистических методов было сопряжено с расширением арсенала используемых энтропийных функционалов. Наиболее известными из обобщений энтропии Шеннона являются энтропии Рёньи [42] и Цаллиса [32]. В контексте задач теории информации энтропия Цаллиса была независимо исследована в работе [33]. В случае квантовых состояний используются соответствующие аналоги классических энтропий.

Пусть $\mathbf{p} = \{p_i\}_{i=1}^r$ есть вероятностное распределение с r элементами. Для $0 < q \neq 1$, q -энтропия Рёньи этого распределения равна [42]

$$R_q(\mathbf{p}) := \frac{1}{1-q} \ln \left(\sum_{i=1}^r p_i^q \right). \quad (3.1)$$

Энтропия Цаллиса широко используется в статистической физике неаддитивных систем. Для $0 < q \neq 1$, q -энтропия Цаллиса определяется формулой [32]

$$H_q(\mathbf{p}) := \frac{1}{1-q} \left(\sum_{i=1}^r p_i^q - 1 \right). \quad (3.2)$$

Целесообразно представить правую часть (3.2) в следующих двух формах:

$$H_q(\mathbf{p}) = - \sum_{i=1}^r p_i^q \ln_q(p_i) = \sum_{i=1}^r p_i \ln_q\left(\frac{1}{p_i}\right), \quad (3.3)$$

где q -логарифм положительного аргумента вводится как

$$\ln_q(\xi) := \begin{cases} \frac{\xi^{1-q}-1}{1-q}, & \text{для } 0 < q \neq 1, \\ \ln \xi, & \text{для } q = 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

В пределе $q \rightarrow 1$, оба выражения (3.1) и (3.2) сводятся к энтропии Шеннона

$$H_1(\mathbf{p}) = - \sum_{i=1}^r p_i \ln p_i \quad (3.5)$$

Как всегда, здесь используется соглашение $-0 \ln 0 \equiv 0$. Между энтропиями Рённи и Цаллиса одного порядка существует простая связь

$$(1 - q) R_q(\boldsymbol{\rho}) = \ln[1 + (1 - q) H_q(\boldsymbol{\rho})]. \quad (3.6)$$

Если q очень мало отличается от 1, то q -энтропии Рённи и Цаллиса практически совпадают друг с другом и также с энтропией Шеннона. Это видно из соотношения (3.6) при $|1 - q| \ll 1$.

Квантовые аналоги классических энтропий вводятся следующим образом. Пусть $\boldsymbol{\rho}$ — матрица плотности с единичным следом, т.е. $\text{Tr}(\boldsymbol{\rho}) = 1$. Энтропия фон Неймана вычисляется по формуле

$$H_1(\boldsymbol{\rho}) := -\text{Tr}(\boldsymbol{\rho} \ln \boldsymbol{\rho}) = - \sum_{i=1}^r \lambda_i(\boldsymbol{\rho}) \ln \lambda_i(\boldsymbol{\rho}), \quad (3.7)$$

где собственные значения $\lambda_i(\boldsymbol{\rho})$ матрицы плотности $\boldsymbol{\rho}$ берутся с учетом кратности. Сходным образом, квантовые аналоги выражений (3.1) и (3.2) имеют вид

$$R_q(\boldsymbol{\rho}) := \frac{1}{1 - q} \ln[\text{Tr}(\boldsymbol{\rho}^q)], \quad (3.8)$$

$$H_q(\boldsymbol{\rho}) := \frac{1}{1 - q} \text{Tr}(\boldsymbol{\rho}^q - \boldsymbol{\rho}). \quad (3.9)$$

Квантовые энтропии Рённи и Цаллиса связаны простым соотношением

$$(1 - q) R_q(\boldsymbol{\rho}) = \ln[1 + (1 - q) H_q(\boldsymbol{\rho})]. \quad (3.10)$$

Для $q \geq 1$ они непосредственно выражаются через нормы Шаттена. Как уже было сказано, сингулярные числа оператора \mathbf{X} вводятся как собственные значения положительного оператора $|\mathbf{X}|$. Для положительного оператора, включая случай операторов плотности, сингулярные числа очевидно совпадают с его собственными значениями. Тогда q -норма Шаттена оператора \mathbf{X} определяется согласно уравнению (1.3). Для $q \geq 1$ мы получаем

$$R_q(\boldsymbol{\rho}) = \frac{q}{1-q} \ln \|\boldsymbol{\rho}\|_q, \quad H_q(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\|\boldsymbol{\rho}\|_q^q - 1}{1-q}.$$

Приведённые энтропийные функционалы допускают дальнейшие обобщения. Одним из них является семейство унифицированных энтропий.

Авторы работы [43] ввели определение унифицированных энтропий в классическом и квантовом режимах. Следует отметить, что сходные в том или ином отношении энтропийные функции рассматривались и ранее. Рассмотрение семейства унифицированных энтропий начнем с классического случая. Авторы работы [43] определили унифицированную (q, s) -энтропию вероятностного распределения $\mathbf{p} = \{p_i\}_{i=1}^r$ выражением

$$E_q^{(s)}(\mathbf{p}) := \frac{1}{(1-q)s} \left[\left(\sum_{i=1}^r p_i^q \right)^s - 1 \right], \quad (3.11)$$

причем $0 < q \neq 1$ и $s \neq 0$. Также, по определению принимаем $E_q^{(0)}(\mathbf{p}) \equiv R_q(\mathbf{p})$, что дополняет определение для $s = 0$. Подобно энтропиям Рёnyi и Цаллиса, определение (3.11) легко переносится случай матриц плотности. Для квантового состояния с матрицей плотности $\boldsymbol{\rho}$, унифицированная (q, s) -энтропия определяется как [43]

$$E_q^{(s)}(\boldsymbol{\rho}) := \frac{1}{(1-q)s} \left\{ [\text{Tr}(\boldsymbol{\rho}^q)]^s - 1 \right\} \quad (3.12)$$

для $0 < q \neq 1$ и $s \neq 0$, и как $E_q^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) \equiv R_q(\boldsymbol{\rho})$ для $s = 0$. Некоторые свойства квантовой унифицированной энтропии были рассмотрены в [43]. Там же были получены нижняя и верхняя границы на энтропию (3.12) для $1 \leq q$ и $1 \leq s$. Теперь мы сформулируем два результата, которые дополняют статью [43] в этом отношении.

Предложение 14 Рассмотрим ансамбль чистых состояний $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, где по определению $\langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1$ и $\sum_i p_i = 1$. Пусть данный ансамбль порождает оператор плотности ρ согласно формуле

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (3.13)$$

Для значений параметров $0 < q$ при $s \neq 0$, а также для $0 < q < 1$ при $s = 0$, мы имеем

$$E_q^{(s)}(\rho) \leq E_q^{(s)}(p), \quad (3.14)$$

где $p = \{p_i\}$.

Доказательство. В вычислениях мы примем $0 < q \neq 1$, так как случай $q = 1$ хорошо известен. Пусть λ_j и $|\varphi_j\rangle$ обозначают собственные значения и нормированные собственные векторы заданной матрицы плотности

$$\rho = \sum_j \lambda_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|. \quad (3.15)$$

Согласно теореме о классификации ансамблей [44] имеем равенство

$$\sqrt{p_i} |\psi_i\rangle = \sum_j u_{ij} \sqrt{\lambda_j} |\varphi_j\rangle, \quad (3.16)$$

причём числа u_{ij} составляют унитарную матрицу $[[u_{ij}]]$ соответствующего размера. Используя (3.16) и $\langle\varphi_j|\varphi_k\rangle = \delta_{jk}$, получаем

$$p_i = \sum_j w_{ij} \lambda_j,$$

а числа $w_{ij} = u_{ij}^* u_{ij}$ составляют некоторую унистохастическую матрицу, так что $\sum_i w_{ij} = 1$ для каждого j и $\sum_j w_{ij} = 1$ для каждого i .

Функция $\xi \mapsto \xi^q$ вогнута для $0 < q < 1$ и выпукла для $1 < q$. Применяя неравенство Йенсена и унистохастичность матрицы $[[w_{ij}]]$, мы получаем

$$\sum_i p_i^q = \sum_i \left(\sum_j w_{ij} \lambda_j \right)^q \begin{cases} \geq, & 0 < q < 1 \\ \leq, & 1 < q < \infty \end{cases} \sum_{ij} w_{ij} \lambda_j^q = \sum_j \lambda_j^q. \quad (3.17)$$

Для $s \neq 0$ функция $z \mapsto z^s/s$ монотонно возрастает, поэтому

$$\frac{1}{s} \left(\sum_i p_i^q \right)^s \begin{cases} \geq, & 0 < q < 1 \\ \leq, & 1 < q < \infty \end{cases} \frac{1}{s} \left(\sum_j \lambda_j^q \right)^s. \quad (3.18)$$

Так как множитель $(1 - q)^{-1}$ положителен для $q < 1$ и отрицателен для $1 < q$, неравенства (3.18) дают

$$\frac{1}{(1 - q)s} \left(\sum_i p_i^q \right)^s \geq \frac{1}{(1 - q)s} \left(\sum_j \lambda_j^q \right)^s. \quad (3.19)$$

В силу равенства $\sum_j \lambda_j^q = \text{Tr}(\rho^q)$ и определений (3.11) и (3.12), неравенство (3.19) обеспечивает (3.14).

В случае $s = 0$ мы имеем дело с квантовой энтропией Рёньи (3.8). Здесь результат (3.14) для $0 < q < 1$ доказывается аналогично. Функция

$$z \mapsto \frac{1}{1 - q} \ln z \quad (3.20)$$

монотонно возрастает для $0 < q < 1$. Комбинируя (3.17) с (3.20) и учитывая определения классической и квантовой энтропий Рёньи, окончательно получаем (3.14) для $s = 0$. ■

Утверждение Предложения 14 дает верхнюю оценку на квантовую унифицированную энтропию в терминах ансамблей чистых состояний. Для $q = 1$ результат (3.14) сводится к хорошо известному свойству энтропии фон Неймана, — см., например, обзор [45]. Таким образом, аналогичное утверждение справедливо для квантовой унифицированной энтропии в широкой области изменения параметров. Аналогичная верхняя оценка в терминах ансамблей смешанных состояний была доказана в работе [43], но только для значений параметров из диапазона $\{(q, s) : 1 \leq q, 1 \leq s\}$. Следовательно, область действия неравенства (3.14) гораздо шире в отношении обоих параметров q и s . Другой интересный результат связан с выпуклой комбинацией операторов плотности. Предположим, что исследуемый оператор плотности представлен в форме

$$\rho = \sum_i p_i \omega_i, \quad (3.21)$$

где $\text{Tr}(\omega_i) = 1$ и $\sum_i p_i = 1$. Для $1 \leq q$ и $1 \leq s$ авторы работы [43] представили нижнюю оценку на унифицированную энтропию ρ в терминах выпуклых комбинаций вида (3.21). Сейчас мы рассмотрим оценку снизу в диапазоне $0 < q < 1$, которая дополняет представленные в статье [43] результаты.

Предложение 15 Пусть матрица плотности ρ задана в виде (3.21). Для $0 < q < 1$ и $s \leq 1$ справедливо неравенство

$$\sum_i p_i E_q^{(s)}(\omega_i) \leq E_q^{(s)}(\rho) . \quad (3.22)$$

Доказательство. Начнём со случая $s \neq 0$. Для всякой выпуклой функции $\xi \mapsto f(\xi)$, функционал $\mathbf{X} \mapsto \text{Tr}[f(\mathbf{X})]$ также является выпуклым на пространстве самосопряженных линейных операторов $\mathcal{L}_{s.a.}(\mathcal{H})$ (доказательство можно найти в разделе III статьи [46]). При $0 < q < 1$ функция $\xi \mapsto \xi^q$ является вогнутой, поэтому

$$\text{Tr}(\rho^q) \geq \sum_i p_i \text{Tr}(\omega_i^q) . \quad (3.23)$$

Для $s \neq 0$ функция $z \mapsto z^s/s$ возрастает на $z \in [0; \infty)$. Кроме того, она вогнута для $s \leq 1$, поскольку её вторая производная равна $(s - 1)z^{s-2}$. Применяя эти два факта шаг за шагом, для $s \leq 1$ мы находим

$$\frac{1}{s} [\text{Tr}(\rho^q)]^s \geq \frac{1}{s} \left[\sum_i p_i \text{Tr}(\omega_i^q) \right]^s \geq \frac{1}{s} \sum_i p_i [\text{Tr}(\omega_i^q)]^s . \quad (3.24)$$

Умножая (3.24) на $(1 - q)^{-1} > 0$ и используя определение (3.12), получаем (3.22). В случае $s = 0$, когда мы имеем дело с квантовой энтропией Рёньи (3.8), приведённые выше аргументы применяются к функциям $z \mapsto \ln z$, которая также является возрастающей и вогнутой. ■

В диапазоне параметров $\{(q, s) : 1 \leq q, 1 \leq s\}$ результат (3.22) был доказан в статье [43]. Утверждение Предложения 15 подразумевает вогнутость квантовой унифицированной энтропии для $0 < q < 1$ и $s \leq 1$. Соответствующее свойство энтропии фон Неймана хорошо известно [45]. Следует подчеркнуть, что энтропия Рёньи порядка $q > 1$ не является чисто выпуклой или чисто вогнутой [47] даже в классическом режиме. В общем случае неравенство (3.22) можно также рассматривать как нижнюю оценку на квантовую унифицированную энтропию в терминах выпуклой комбинации операторов плотности. Таким образом, в широком диапазоне значений параметров квантовая унифицированная энтропия (3.12) обладает многими свойствами, напоминающими свойства энтропии фон Неймана. Поскольку такие свойства исключительно важны для энтропийных

функционалов, описанные выше результаты позволяют расширить сферу возможных применений унифицированных энтропий.

Любая энтропийная величина должна обладать хорошими свойствами как функция состояния. В частности, для близких с том или ином смысле матриц плотности соответствующие энтропии также должны быть близки. Для энтропии фон Неймана свойство непрерывности характеризуется известным неравенством Фанне [29]. Это неравенство выражается в терминах следовой метрики и даёт оценку сверху на потенциальное изменение энтропии фон Неймана. Неравенство Фанне было распространено на квантовые энтропии Цаллиса [36, 37] и ее частичные суммы [28]. Некоторые границы типа Фанне для квантовой относительной энтропии были рассмотрены в работе [48]. Выраженные в терминах следовой метрики, эти оценки описывают непрерывность квантовой относительной энтропии в смысле Фанне. Мы рассмотрим оценки аналогичного типа для унифицированных энтропий.

Вспомним некоторые результаты, связанные с энтропией Цаллиса. В рамках рассматриваемого вопроса мы можем совместно трактовать как классический, так и квантовый режимы. Поэтому формулировки будут даны для квантового случая. Следовая метрика между двумя операторами плотности определяется формулой (1.9). В классическом режиме эта величина заменяется на (1.10). Следующие два подхода известны для энтропий типа Цаллиса. Первый метод оценки с ограничением $q \in [0; 2]$ представлен в статье [36]. Введём функцию

$$\eta_q(\xi) := \frac{\xi^q - \xi}{1 - q}, \quad (3.25)$$

где $\xi > 0$ и $0 < q \neq 1$. Для $q \in [0; 2]$ и $d = \dim(\mathcal{H})$ мы имеем

$$|H_q(\rho) - H_q(\omega)| \leq (2\varepsilon)^q \ln_q(d) + \eta_q(2\varepsilon) \quad (3.26)$$

при условии, что $2D(\rho, \omega) = 2\varepsilon \leq q^{1/(1-q)}$. На интервале $0 < 2\varepsilon < q^{1/(1-q)}$ величина $\eta_q(2\varepsilon)$ монотонно возрастает, так что возрастает и правая часть (3.26). Второй метод использует так называемый каплинг-метод [37], известный также как метод склеивания вероятностных векторов. Для $q > 1$,

мы получаем

$$|H_q(\rho) - H_q(\omega)| \leq \varepsilon^q \ln_q(d-1) + h_q(\varepsilon, 1-\varepsilon), \quad (3.27)$$

где $\varepsilon = D(\rho, \omega)$ и бинарная q -энтропия Цаллиса равна

$$h_q(\varepsilon, 1-\varepsilon) = \frac{\varepsilon^q + (1-\varepsilon)^q - 1}{1-q}. \quad (3.28)$$

Элементарные методы дифференциального исчисления показывают, что правая часть (3.27) монотонно возрастает при $0 < \varepsilon < (d-1)/d$. Неравенство (3.27) является плотным в том смысле, что в известных случаях оно насыщается [37]. Явное присутствие размерности d означает, что указанные выше оценки конечномерны. Неравенства (3.26) и (3.27) могут быть использованы для получения верхних границ на изменение квантовой унифицированной энтропии при вариациях матрицы плотности. Наш метод годится для довольно широкого диапазона параметров и основан на следующем утверждении.

Предложение 16 *Для $s \geq 1$ и $x, y \in [0; 1]$, равно как и для $0 < s \leq 1$ и $x, y \in [1; \infty)$, справедливо неравенство*

$$|x^s - y^s| \leq s|x - y|. \quad (3.29)$$

Для $0 < s \leq 1$ и $x, y \in [0; 1]$, равно как и для $s \geq 1$ и $x, y \in [1; \infty)$, справедливо неравенство с противоположным знаком. Для $x, y \in [1; \infty)$ мы также имеем

$$|\ln x - \ln y| \leq |x - y|. \quad (3.30)$$

Доказательство. Принимая для определенности $x < y$, результат (3.29) и обратный ему можно переписать соответственно как $(y^s - x^s) \leq s(y - x)$ и $(y^s - x^s) \geq s(y - x)$. Теперь мы запишем

$$y^s - x^s = \int_x^y s t^{s-1} dt \left\{ \begin{array}{l} \leq, \quad t^{s-1} \leq 1 \\ \geq, \quad t^{s-1} \geq 1 \end{array} \right\} \int_x^y s dt = s(y - x). \quad (3.31)$$

Условие $t^{s-1} \leq 1$ выполняется для $0 < s < 1$ и $t \geq 1$, равно как и для $s > 1$ и $t \leq 1$. Условие $t^{s-1} \geq 1$ выполняется для $0 < s < 1$ и $t \leq 1$, равно как

и для $s > 1$ и $t \geq 1$. Тем самым неравенство (3.30) и противоположное к нему доказаны. Наконец, неравенство (3.30) следует из соотношения

$$\ln y - \ln x = \int_x^y \frac{dt}{t} \leq \int_x^y dt = y - x ,$$

справедливого для $t \geq 1$. ■

Заметим, что случай $s = 1$ охватывается равномерными оценками (3.26) и (3.27) для энтропии Цаллиса. Мы не рассматривали случай $q = 1$, так как он сводится к оригинальному неравенству Фанне [29] для энтропии фон Неймана. Для унифицированных энтропий неравенства типа Фанне формулируются следующим образом.

Предложение 17 Пусть ρ и ω — нормированные d -мерные матрицы плотности. В параметрической области значений

$$\{(q, s) : 0 < q < 1, s \in (-\infty; -1] \cup [0; +1]\} \quad (3.32)$$

и при условии $2D(\rho, \omega) = 2\varepsilon \leq q^{1/(1-q)}$ справедливо неравенство

$$|E_q^{(s)}(\rho) - E_q^{(s)}(\omega)| \leq (2\varepsilon)^q \ln_q d + \eta_q(2\varepsilon) . \quad (3.33)$$

Для удобства введём фактор

$$\varkappa_s := \begin{cases} d^{2(q-1)} , & \text{для } s \in [-1; 0] , \\ 1 , & \text{для } s \in [+1; +\infty) . \end{cases} \quad (3.34)$$

В параметрической области значений

$$\{(q, s) : 1 < q, s \in [-1; 0] \cup [+1; +\infty)\} \quad (3.35)$$

для любого $D(\rho, \omega) = \varepsilon$ справедливо неравенство

$$|E_q^{(s)}(\rho) - E_q^{(s)}(\omega)| \leq \varkappa_s [\varepsilon^q \ln_q(d-1) + h_q(\varepsilon, 1-\varepsilon)] . \quad (3.36)$$

Доказательство. Для краткости введём обозначения

$$\xi = \text{Tr}(\rho^q) , \quad \zeta = \text{Tr}(\omega^q) . \quad (3.37)$$

В области значений параметров (3.32) мы имеем $\xi \geq 1$ и $\zeta \geq 1$ в силу $0 < q < 1$. Для $s \in (-\infty; -1]$ положим $\nu = -s \geq +1$ и запишем

$$|E_q^{(s)}(\rho) - E_q^{(s)}(\omega)| = \frac{1}{(1-q)\nu} \left| \frac{1}{\xi^\nu} - \frac{1}{\zeta^\nu} \right| . \quad (3.38)$$

Используя неравенство (3.29) с $x = 1/\xi$, $y = 1/\zeta$ и ν вместо s , на основе формулы (3.38) получаем

$$\begin{aligned} |E_q^{(s)}(\rho) - E_q^{(s)}(\omega)| &\leq \frac{1}{(1-q)} \frac{|\zeta - \xi|}{\xi\zeta} \\ &\leq \frac{1}{1-q} |\xi - \zeta| = |H_q(\rho) - H_q(\omega)| \end{aligned} \quad (3.39)$$

в силу определения (3.9). Вводя $x = \xi$ и $y = \zeta$, мы применяем неравенство (3.29) для $s \in (0; +1]$ и неравенство (3.30) для случая Рёньи $s = 0$, откуда

$$|E_q^{(s)}(\rho) - E_q^{(s)}(\omega)| \leq \left| \frac{\xi - \zeta}{1-q} \right| = |H_q(\rho) - H_q(\omega)|. \quad (3.40)$$

Комбинируя правые части (3.39) и (3.40) с границей (3.26), получаем обоснование неравенства (3.33).

В области значений параметров (3.35) мы имеем $\xi \leq 1$ и $\zeta \leq 1$ в силу $q > 1$. Кроме того, справедливы неравенства

$$\xi = \text{Tr}(\rho^q) \leq d^{1-q}, \quad \zeta = \text{Tr}(\omega^q) \leq d^{1-q}.$$

Для $s \in [-1; 0)$, мы положим $\nu = -s \in (0; +1]$ и запишем

$$\begin{aligned} |E_q^{(s)}(\rho) - E_q^{(s)}(\omega)| &= \frac{1}{(q-1)\nu} \left| \frac{1}{\xi^\nu} - \frac{1}{\zeta^\nu} \right| \leq \frac{1}{(q-1)} \frac{|\zeta - \xi|}{\xi\zeta} \\ &\leq \frac{d^{2(q-1)}}{q-1} |\xi - \zeta| = d^{2(q-1)} |H_q(\rho) - H_q(\omega)|, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где использована формула (3.29) с $x = 1/\xi$, $y = 1/\zeta$ и ν вместо s . В случае Рёньи $s = 0$ мы применяем (3.30) и получаем верхнюю границу (3.41). Наконец, для $+1 \leq s$ мы применяем (3.29) с $x = \xi$ и $y = \zeta$, что снова приводит к (3.40). Комбинируя соотношения (3.40) и (3.41) с формулой (3.27), мы завершаем доказательство (3.36). ■

Для $1 \leq q$ и $+1 \leq s$ авторы статьи [43] представили верхнюю границу

$$|E_q^{(s)}(\rho) - E_q^{(s)}(\omega)| \leq 2q(q-1)^{-1} D(\rho, \omega). \quad (3.42)$$

Таким образом, неравенство (3.36) обеспечивает другую оценку для таких значения q и s . Отличие состоит в том, что неравенство (3.36) также справедливо для значений $1 \leq q$ и $s \in [-1; 0]$. Кроме того, для диапазона

значений параметров (3.32) с $0 < q < 1$ верхняя граница определяется формулой (3.33). Подобно неравенствам (3.26) и (3.27) новые верхние границы (3.33) и (3.36) выражаются через размерность d и, тем самым, являются конечномерными. Кроме того, выведенные неравенства описывают лишь приближенные верхние границы. Тем не менее они показывают, что унифицированные энтропии непрерывны в смысле Фанне для значений параметров в диапазонах (3.32) и (3.35). Более того, приведенные выше результаты позволяют охарактеризовать свойство устойчивости энтропий.

С точки зрения ряда применений информационно-теоретических величин исключительно важной является их устойчивость. Внимание к этому вопросу было стимулировано статьей [30], в которой рассмотрены энтропии Рённи. Энтропия Цаллиса [40] и её частичные суммы [28] были проанализированы в отношении свойства устойчивости. Устойчивость интересного класса энтропийных функций была рассмотрена в работах [49, 50]. Приступим к исследованию устойчивости унифицированных энтропий с этой точки зрения. Критерий устойчивости, предложенный в работе [30], можно переформулировать следующим образом [40, 50]. Пусть $\rho \mapsto \Gamma(\rho)$ — функционал нормированных матриц плотности. Предположим, что его значения ограничены сверху конечной верхней гранью Γ_M . Функционал называется устойчивым, если для каждого $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольного ω из $D(\rho, \omega) \leq \varepsilon$ следует

$$\frac{|\Gamma(\rho) - \Gamma(\omega)|}{\Gamma_M} \leq \delta . \quad (3.43)$$

В конечномерном случае унифицированные энтропии ограничены сверху для всех действительных s и для $q > 0$ [43]. В частности, для $q \neq 1$ и $s \neq 0$ мы имеем

$$E_q^{(s)}(\rho) \leq \max E_q^{(s)} = \frac{1}{(1-q)s} \left(d^{(1-q)s} - 1 \right) , \quad (3.44)$$

а для $s = 0$ справедливо $\max E_q^{(0)} = \ln d$. Используя неравенства (3.33) и (3.36), для диапазонов значений параметров (3.32) и (3.35) получим

$$\frac{|E_q^{(s)}(\rho) - E_q^{(s)}(\omega)|}{\max E_q^{(s)}} \leq F(\varepsilon) . \quad (3.45)$$

Здесь функция $F(\varepsilon)$ обозначает правую часть неравенства, выбранного из двух формул (3.33) и (3.36) соответственно значениям s и q . Данная функция зануляется для $\varepsilon = 0$ и монотонно возрастает с $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$, где $2\varepsilon_0 = q^{1/(1-q)}$ для (3.32) и $\varepsilon_0 = (d-1)/d$ для (3.35). Следовательно, имеет место взаимно однозначное соответствие между интервалами $[0; \varepsilon_0]$ и $[0; \delta(\varepsilon_0)]$. Для каждого $\delta \in (0; \delta(\varepsilon_0)]$ мы имеем $\varepsilon_\delta > 0$ такое, что $F(\varepsilon) \leq \delta$ всякий раз, когда $\varepsilon \leq \varepsilon_\delta$. Объединение этого с соотношением (3.45) даёт свойство устойчивости унифицированной энтропии для диапазонов (3.32) и (3.35).

Случай $s = 0$, когда рассматриваются энтропии Рёньи, заслуживает специального обсуждения. Как известно, энтропия Рёньи порядка q неустойчива для всех $q \neq 1$ [40, 49, 50]. Этот важный вывод был получен в работе [30] и более подробно изучен в работе [40]. Между тем, оба диапазона параметров (3.32) и (3.35) включают энтропию Рёньи. На самом деле никакого противоречия здесь нет. Действительно, выводы статей [30, 40] подразумевают переход к термодинамическому пределу, т.е. бесконечное число степеней свободы. Но до сих пор мы рассматривали только конечномерный случай. Разделив оба неравенства (3.33) и (3.36) на $\max E_q^{(0)} = \ln d$, мы видим, что правая часть (3.45) содержит величину

$$\frac{\ln_q(d)}{\ln d} \approx \frac{d^{1-q}}{(1-q) \ln d}$$

для $0 < q < 1$ и $s = 0$, а также величину $d^{2(q-1)}/\ln d$ для $1 < q$ и $s = 0$. Обе эти дроби неогранично возрастают при $d \rightarrow \infty$. Соответственно мы не можем делать какие-то выводы о поведении энтропии Рёньи в этом пределе на основании неравенства (3.45). Устойчивость энтропии Рёньи порядка $q \neq 1$ действительно имеет место для конечного d , но нарушается в термодинамическом пределе. Иначе ведёт себя энтропия Цаллиса. Когда $0 < q < 1$, мы имеем (3.26) и $F(\varepsilon) \rightarrow (2\varepsilon)^q$ в пределе $d \rightarrow \infty$; когда $1 < q$, мы имеем (3.27) и

$$F(\varepsilon) \rightarrow \varepsilon^q + (q-1)h_q(\varepsilon, 1-\varepsilon) .$$

Таким образом, устойчивость энтропии Цаллиса имеет место, в том числе, и в термодинамическом пределе.

Поскольку в статистической физике термодинамический предел играет важную роль, мы сейчас рассмотрим данный вопрос для унифицированных энтропий. Разделим соотношения (3.33) и (3.36) на $\max E_q^{(s)}$ и перейдём к пределу $d \rightarrow \infty$. Несложная проверка показывает, что устойчивость в термодинамическом пределе имеет место для значений параметров $1 \leq q$ и $+1 \leq s$. Принимая $q \neq 1$ и комбинируя (3.36) и (3.44), получаем

$$\frac{|E_q^{(s)}(\rho) - E_q^{(s)}(\omega)|}{\max E_q^{(s)}} \leq \frac{(q-1)s}{1-d^{(1-q)s}} \left[\varepsilon^q \frac{(d-1)^{1-q} - 1}{1-q} + h_q(\varepsilon, 1-\varepsilon) \right] \\ \xrightarrow{d \rightarrow \infty} s \varepsilon^q + (q-1)s h_q(\varepsilon, 1-\varepsilon). \quad (3.46)$$

Перепишав правую часть (3.46) как $s[1 - (1-\varepsilon)^q] \leq sq\varepsilon$ в силу (3.29), мы делаем свойство устойчивости очевидным. Для оставшихся частей диапазонов (3.32) и (3.35) правая часть (3.45) неограниченно возрастает при $d \rightarrow \infty$. В этом случае мы не можем делать выводы о наличии или отсутствии устойчивости на основе неравенства (3.45). Здесь необходимо провести дополнительное рассмотрение.

Обычно неустойчивость демонстрируется построением явного примера. Мы рассмотрим два примера, использованные ранее в работе [30]. Пусть ρ_0 и ω_0 определены в некотором базисе как

$$\rho_0 = \text{diag}(1, 0, \dots, 0), \quad \omega_0 = \text{diag}\left(1 - \varepsilon, \frac{\varepsilon}{d-1}, \dots, \frac{\varepsilon}{d-1}\right). \quad (3.47)$$

Очевидно, что эти операторы плотности коммутируют и $D(\rho_0, \omega_0) = \varepsilon$. Далее, для всех $q > 0$ имеем $\text{Tr}(\rho_0^q) = 1$ и

$$\text{Tr}(\omega_0^q) = (1 - \varepsilon)^q + \varepsilon^q (d-1)^{1-q}. \quad (3.48)$$

Заметим, что для состояний (3.47) в неравенстве (3.27) достигается равенство. Покажем, что унифицированная энтропия не является устойчивой в термодинамическом пределе при $0 < q < 1$ и $s < 0$. В самом деле, здесь имеем $1 - q > 0$ и $(1 - q)s < 0$, так что $\text{Tr}(\omega_0^q) \rightarrow \infty$ и

$$\frac{|E_q^{(s)}(\rho_0) - E_q^{(s)}(\omega_0)|}{\max E_q^{(s)}} = \frac{|1 - [\text{Tr}(\omega_0^q)]^s|}{1 - d^{(1-q)s}} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 1. \quad (3.49)$$

Таким образом, свойство устойчивости явно отсутствует.

Рассмотрим теперь две матрицы плотности

$$\rho_1 = \text{diag}\left(0, \frac{1}{d-1}, \dots, \frac{1}{d-1}\right), \quad (3.50)$$

$$\omega_1 = \text{diag}\left(\varepsilon, \frac{1-\varepsilon}{d-1}, \dots, \frac{1-\varepsilon}{d-1}\right), \quad (3.51)$$

которые также коммутируют и для которых $D(\rho_1, \omega_1) = \varepsilon$. Здесь мы имеем

$$\text{Tr}(\rho_1^q) = (d-1)^{1-q}, \quad \text{Tr}(\omega_1^q) = \varepsilon^q + (1-\varepsilon)^q(d-1)^{1-q}.$$

Этот пример позволяет нам продемонстрировать нарушение устойчивости в термодинамическом пределе для значений $1 < q$ и $s < 0$. В случае $d \gg 1$ справедливы асимптотические выражения

$$\max E_q^{(s)} \approx \frac{1}{(1-q)s} d^{(1-q)s}, \quad \text{Tr}(\omega_1^q) \approx \varepsilon^q, \quad (3.52)$$

так как $(1-q)s > 0$ и $(1-q) < 0$. В силу (3.52) запишем

$$\frac{|E_q^{(s)}(\rho_1) - E_q^{(s)}(\omega_1)|}{\max E_q^{(s)}} \approx \frac{|(d-1)^{(1-q)s} - \varepsilon^{qs}|}{d^{(1-q)s}} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 1. \quad (3.53)$$

Таким образом, унифицированная энтропия не является устойчивой в термодинамическом пределе при $1 < q$ и $s < 0$.

Приведённые выше результаты можно резюмировать следующим образом. Для значений параметров, удовлетворяющих условиям $1 \leq q$ и $+1 \leq s$, унифицированная энтропия остаётся устойчивой в термодинамическом пределе. Для оставшихся частей из диапазонов (3.32) и (3.35), устойчивость имеет место только в конечномерном случае. Известно, что q -энтропия Рёньи порядка $q \neq 1$ устойчива в конечномерном случае, но утрачивает это свойство в термодинамическом пределе. Сходным образом ведёт себя унифицированная (q, s) -энтропия для тех частей из диапазонов (3.32) и (3.35), которые соответствуют отрицательному s . Для всех положительных $q \neq 1$ и $s < 0$ унифицированная (q, s) -энтропия неустойчива в термодинамическом пределе. Случай $q = 1$ должен быть отделён, так как он относится к стандартным энтропиям Шеннона и фон Неймана. С точки зрения устойчивости унифицированные энтропии имеют желательные свойства для $1 \leq q$ и $+1 \leq s$. Хотя унифицированные энтропии не обладают свойством устойчивости для всех принятых значений q и s , диапазон устойчивости всё же достаточно широк.

Представляющие наибольший интерес квантовые системы являются, как правило, комбинированными, т.е. состоящими из двух или более физических подсистем. Пусть состояние составной системы AB описывается оператором плотности ρ_{AB} на пространстве $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Тогда операторы плотности подсистем A и B получаются с помощью операции взятия частичного следа [4]. А именно, запишем

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) , \quad \rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB}) , \quad (3.54)$$

где частичный след берётся над пространствами \mathcal{H}_B и \mathcal{H}_A соответственно. Во многих случаях мы интересуемся тем, как энтропийные и другие меры различимости изменяются в результате взятия частичного следа. За исключением состояний вида $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$, такой вопрос оказывается достаточно трудным. Применительно к унифицированным энтропиям мы хотели бы знать, как энтропия составной системы $E_q^{(s)}(\rho_{AB})$ связана с энтропиями подсистем $E_q^{(s)}(\rho_A)$ и $E_q^{(s)}(\rho_B)$.

В классическом режиме, как известно, энтропия Шеннона субаддитивна. Энтропия фон Неймана также субаддитивна (см., например, раздел 11.3.4 книги [4]), что записывается как

$$H_1(\rho_{AB}) \leq H_1(\rho_A) + H_1(\rho_B) . \quad (3.55)$$

Была высказана гипотеза о субаддитивности энтропии Вигнера–Яназе [51], но вскоре Хансен представил контрпример [52]. Другой контрпример сконструирован в работе [53]. Вместе с тем, если состояние системы из двух подсистем является чистым, то этого достаточно для субаддитивности энтропии Вигнера–Яназе. Другое достаточное условие субаддитивности энтропии Вигнера–Яназе сформулировано в статье [54]. Нетрудно проверить, что энтропия Шеннона обладает сильной субаддитивностью. Свойство сильной субаддитивности сохраняется для энтропии фон Неймана, но доказательство этого факта оказывается очень трудным. Существует несколько подходов, которые опираются на глубокий математический результат — теорему Либа о матричных функциях.

В классическом режиме q -энтропия Цаллиса обладает свойством сильной субаддитивности для $q > 1$ [55]. В конечномерном случае кванто-

вая q -энтропия Цаллиса субаддитивна для $q > 1$, так что

$$H_q(\rho_{AB}) \leq H_q(\rho_A) + H_q(\rho_B) . \quad (3.56)$$

Этот результат был предложен как гипотеза в статье [34] и позднее доказан в статье [35]. Оказывается, что доводы работы [35] можно распространить на квантовые унифицированные энтропии в широком диапазоне изменения параметров. Ключевым моментом является одно неравенство для q -норм Шаттена редуцированных плотностей (3.54), а именно (см. теорему 1 в [35])

$$\|\rho_A\|_q + \|\rho_B\|_q \leq 1 + \|\rho_{AB}\|_q . \quad (3.57)$$

Вследствие этого результата получаем следующее утверждение.

Предложение 18 Для $q > 1$ и $s \geq q^{-1}$, квантовая унифицированная (q, s) -энтропия субаддитивна, т.е.

$$E_q^{(s)}(\rho_{AB}) \leq E_q^{(s)}(\rho_A) + E_q^{(s)}(\rho_B) . \quad (3.58)$$

Доказательство. Следуя методу работы [35], мы введём два 2-мерных вектора

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \|\rho_A\|_q \\ \|\rho_B\|_q \end{pmatrix} , \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \|\rho_{AB}\|_q \end{pmatrix} . \quad (3.59)$$

Рассмотрим нормы Фань Цзы этих векторов. Во-первых, мы имеем

$$\max\{\|\rho_A\|_q, \|\rho_B\|_q\} \leq 1 ,$$

поскольку q -нормы нормированной матрицы плотности не превосходят 1. Во-вторых, имеет место формула (3.57). Для каждого $k = 1, 2$ мы запишем

$$\|\mathbf{u}\|_{(k)} \leq \|\mathbf{v}\|_{(k)} . \quad (3.60)$$

Иными словами, вектор \mathbf{u} слабо мажорируется вектором \mathbf{v} . В силу теоремы Фань Цзы (см., например, теорему IV.2.2 в книге [31]) соотношение $\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v}\|$ справедливо для каждой унитарно инвариантной нормы. В частности, для всех векторных p -норм имеем

$$\|\mathbf{u}\|_p \leq \|\mathbf{v}\|_p .$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$[\text{Tr}(\rho_A^q)]^{p/q} + [\text{Tr}(\rho_B^q)]^{p/q} \leq 1 + [\text{Tr}(\rho_{AB}^q)]^{p/q} . \quad (3.61)$$

Полагая $s = p/q$ и используя определение (3.12), мы видим, что равенство (3.61) равносильно (3.58). Поскольку $p \geq 1$, доказательство справедливо для $s \geq 1/q$. ■

Таким образом, мы установили субаддитивность квантовой унифицированной энтропии в широком диапазоне значений параметров. А именно, (q, s) -энтропия полной матрицы плотности меньше, чем сумма энтропий двух редуцированных плотностей. В этом отношении унифицированные энтропии оправдывают интуитивное ожидание, что ситуация становится более неопределённой при наличии только частичной информации. Для состояний с матрицей плотности типа $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ аддитивные свойства были рассмотрены в статье [43]. Там утверждалось, что формула субаддитивности (3.58) не имеет места в параметрической области значений

$$\{(q, s) : 1 < q, s < 0\} \cup \{(q, s) : 0 < q < 1, 0 < s\} . \quad (3.62)$$

Мы вывели соотношение (3.58) для $\{(q, s) : 1 < q, q^{-1} \leq s\}$. Хотя картина субаддитивности не выяснена до конца, вопрос разрешён для наиболее часто используемых значений параметров. Как и в случае с энтропией фон Неймана, неравенство субаддитивности (3.58) приводит к неравенству Араки–Либа [56].

Предложение 19 *Для $q > 1$ и $s \geq q^{-1}$, квантовая унифицированная (q, s) -энтропия удовлетворяет неравенству треугольника*

$$|E_q^{(s)}(\rho_A) - E_q^{(s)}(\rho_B)| \leq E_q^{(s)}(\rho_{AB}) . \quad (3.63)$$

Доказательство. Добавим воображаемую систему C такую, что система ABC находится в чистом состоянии $|\Psi_{ABC}\rangle$. Этот вектор является пурификацией данного оператора плотности ρ_{AB} , так что [4]

$$\rho_{AB} = \text{Tr}_C(|\Psi_{ABC}\rangle\langle\Psi_{ABC}|) , \quad \rho_C = \text{Tr}_{AB}(|\Psi_{ABC}\rangle\langle\Psi_{ABC}|) . \quad (3.64)$$

Из разложения Шмидта состояния $|\Psi_{ABC}\rangle$ следует, что матрицы плотности ρ_{AB} и ρ_C имеют одни и те же ненулевые собственные значения (см.,

например, раздел 2.5 в книге [4]). Поэтому $E_q^{(s)}(\rho_{AB}) = E_q^{(s)}(\rho_C)$. Аналогичным образом мы имеем $E_q^{(s)}(\rho_A) = E_q^{(s)}(\rho_{BC})$. Объединяя эти два факта с соотношением субаддитивности

$$E_q^{(s)}(\rho_{BC}) \leq E_q^{(s)}(\rho_C) + E_q^{(s)}(\rho_B) \quad (3.65)$$

немедленно даёт неравенство

$$E_q^{(s)}(\rho_A) - E_q^{(s)}(\rho_B) \leq E_q^{(s)}(\rho_{AB}) . \quad (3.66)$$

Так как рассуждение симметрично по отношению к подсистемам A и B , справедливо также неравенство

$$E_q^{(s)}(\rho_B) - E_q^{(s)}(\rho_A) \leq E_q^{(s)}(\rho_{AB}) . \quad (3.67)$$

Ввиду (3.66) и (3.67) неравенство (3.63) доказано. ■

Подводя итог, мы видим следующее. Для $q > 1$ и $s \geq q^{-1}$ квантовая унифицированная энтропия обладает свойствами субаддитивности подобно энтропии фон Неймана. В частности, имеет место неравенство треугольника. Эти результаты будут полезны при использовании унифицированных энтропий для изучения свойств составных систем. Это принципиально важно, так как операция взятия частичного следа неизбежно присутствует в протоколах обработки информации на квантовых носителях. Следует обратить внимание на то, что приведённые выше доказательства ограничены конечномерным случаем. Как было указано в [35], некоторые существенные пункты в доказательстве результата (3.57) не имеют места в случае континуальных распределений. В то же время рассмотрение конечномерных квантовых систем отвечает потребностям квантовой теории информации [4].

Одно из важнейших с физической точки зрения свойств энтропии фон Неймана связано с процессом измерения [4]. Обобщённое квантовое измерение описывается некоторым набором $\{\mathbf{M}_i\}$ измерительных операторов. Пусть ρ — оператор плотности квантовой системы непосредственно перед измерением. Отдельные члены суммы

$$\sum_i \mathbf{M}_i \rho \mathbf{M}_i^\dagger \quad (3.68)$$

соответствуют различным исходам проведённого измерения. Поскольку вероятность получения i -ого исхода равна $\text{Tr}(\mathbf{M}_i^\dagger \mathbf{M}_i \rho)$, операторы измерения удовлетворяют соотношению [4]

$$\sum_i \mathbf{M}_i^\dagger \mathbf{M}_i = \mathbf{1} . \quad (3.69)$$

Таким образом, положительные операторы $\mathbf{M}_i^\dagger \mathbf{M}_i$ формируют неортогональное разложение единицы $\mathbf{1}$, или “положительную операторно-значную меру” (ПОЗМ). Стандартное проективное измерение $\{\mathbf{P}_j\}$ описывается множеством взаимно ортогональных проекторов, которые образуют ортогональное разложение единицы. Как правило, проективные измерения легче реализовать экспериментально. В результате применения проективного измерения энтропия фон Неймана не может уменьшиться (см., например, теорему 11.9 в книге [4]). С другой стороны, обобщённые измерения могут уменьшать энтропию. Мы рассмотрим этот вопрос в отношении квантовой унифицированной энтропии. Для заданного проективного измерения $\{\mathbf{P}_j\}$ результирующий оператор плотности записывается в виде [4]

$$\tilde{\rho} = \sum_j \mathbf{P}_j \rho \mathbf{P}_j . \quad (3.70)$$

В матричном анализе операция такого рода обычно называется “пинчинг” (см., например, раздел IV.2 в книге [31]). Для заданного ортогонального разложения единицы $\{\mathbf{P}_j\}$ и произвольного оператора $\mathbf{X} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ мы введём его пинчинг в форме

$$\mathcal{C}(\mathbf{X}) = \sum_j \mathbf{P}_j \mathbf{X} \mathbf{P}_j . \quad (3.71)$$

Нас интересует следующий вопрос. Каково соотношение между величинами $\text{Tr}(\tilde{\rho}^q)$ и $\text{Tr}(\rho^q)$? Если $\text{rank}(\mathbf{P}_j) = 1$ для всех j , то ответ записывается просто как

$$\text{Tr}(\tilde{\rho}^q) \begin{cases} \geq, & 0 < q < 1 \\ \leq, & 1 < q \end{cases} \text{Tr}(\rho^q) . \quad (3.72)$$

Этот результат следует из неравенства Йенсена и того факта, что с выпуклой функцией $\xi \mapsto f(\xi)$ для любых оператора $\mathbf{X} \in \mathcal{L}_{s.a.}(\mathcal{H})$ и единичного вектора $|j\rangle$ справедливо

$$f(\langle j | \mathbf{X} | j \rangle) \leq \langle j | f(\mathbf{X}) | j \rangle . \quad (3.73)$$

Ответ не столь очевиден в случае, когда для некоторых проекторов $\text{rank}(\mathbf{P}_j) \neq 1$. Для $q \geq 1$ мы можем напрямую использовать неравенство пинчинга. Согласно этому неравенству [31], если некоторая норма $\|\cdot\|$ унитарно инвариантна, то операция пинчинга не может привести к её возрастанию, т.е.

$$\|\mathcal{C}(\mathbf{X})\| \leq \|\mathbf{X}\| . \quad (3.74)$$

Поскольку q -нормы Шаттена унитарно инвариантны и матрицы плотности положительны, неравенство (3.74) даёт $\|\tilde{\rho}\|_q \leq \|\rho\|_q$. Таким образом, для $q \geq 1$ мы пишем

$$\text{Tr}(\tilde{\rho}^q) \leq \text{Tr}(\rho^q) . \quad (3.75)$$

Для $0 < q < 1$, интересующие нас величины не выражаются через унитарно инвариантные нормы. Здесь нам потребуются некоторые свойства операторно выпуклых функций от матриц.

Пусть $\xi \mapsto f(\xi)$ — функция вещественной переменной. Такая функция называется “операторно выпуклой”, если для всех $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{L}_{s.a.}(\mathcal{H})$ и $0 \leq \theta \leq 1$ справедливо неравенство [31]

$$f(\theta\mathbf{X} + (1 - \theta)\mathbf{Y}) \leq \theta f(\mathbf{X}) + (1 - \theta)f(\mathbf{Y}) . \quad (3.76)$$

Операторная вогнутость означает неравенство с противоположным знаком. При этом предполагается, что собственные значения эрмитовых операторов лежат в некотором заданном интервале \mathcal{I} вещественной оси. Для положительных полуопределённых операторов берём $\mathcal{I} = [0; +\infty)$. При $0 < q < 1$ мы будем использовать следующее утверждение.

Предложение 20 Пусть \mathcal{I} — интервал, содержащий точку 0, и пусть f — операторно выпуклая на \mathcal{I} функция такая, что $f(0) \leq 0$. Для любой матрицы $\mathbf{X} \in \mathcal{L}_{s.a.}(\mathcal{H})$ со спектром $\text{spes}(\mathbf{X}) \subset \mathcal{I}$ мы имеем

$$\text{Tr}[f(\mathcal{C}(\mathbf{X}))] \leq \text{Tr}[f(\mathbf{X})] . \quad (3.77)$$

Доказательство. Различные характеристики операторно выпуклых функции можно найти в главе V книги [31]. В частности (см. теорему V.2.3), если предусловия на функцию f выполнены, то для всех проекторов

\mathbf{P} и эрмитовых операторов \mathbf{X} со спектром в \mathcal{I} мы имеем

$$f(\mathbf{PXP}) \leq \mathbf{P}f(\mathbf{X})\mathbf{P}. \quad (3.78)$$

Так как операторы $\mathbf{P}_j\mathbf{X}\mathbf{P}_j$ имеют взаимно ортогональные носители, справедливо

$$f(\mathcal{C}(\mathbf{X})) = \sum_j f(\mathbf{P}_j\mathbf{X}\mathbf{P}_j) \leq \sum_j \mathbf{P}_j f(\mathbf{X}) \mathbf{P}_j. \quad (3.79)$$

Поскольку след любого положительного оператора также положителен, то окончательно записываем

$$\mathrm{Tr}[f(\mathcal{C}(\mathbf{X}))] \leq \mathrm{Tr}\left[\sum_j \mathbf{P}_j f(\mathbf{X})\right] = \mathrm{Tr}[f(\mathbf{X})]. \quad (3.80)$$

Здесь мы использовали линейность и инвариантность следа относительно циклических перестановок, а также $\mathbf{P}_j^2 = \mathbf{P}_j$ и соотношение полноты $\sum_j \mathbf{P}_j = \mathbf{1}$. ■

Теперь вспомним два результата из матричного анализа. Функция $\xi \mapsto \xi^q$ является операторно вогнутой на $\mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ для $0 \leq q \leq 1$ и операторно выпуклой на $\mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ для $1 \leq q \leq 2$. Данные утверждения доказаны соответственно как теорема 4.2.3 и теорема 1.5.8 в [57]. Объединяя эти факты с Предложением 20, получим

$$\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}^q) \geq \mathrm{Tr}(\rho^q) \quad (3.81)$$

для $0 < q < 1$, а также неравенство (3.75) для $1 < q \leq 2$. Свойство неубывания квантовой унифицированной энтропии под действием проективного преобразования формулируется следующим образом.

Предложение 21 Пусть $\{\mathbf{P}_j\}$ — ортогональное разложение единицы, и пусть оператор плотности $\tilde{\rho}$ определяется формулой (3.70). Для $q > 0$ и всех действительных s мы имеем

$$E_q^{(s)}(\tilde{\rho}) \geq E_q^{(s)}(\rho). \quad (3.82)$$

Доказательство. Далее мы считаем, что $q \neq 1$, так как случай энтропии фон Неймана хорошо известен. Функция $z \mapsto z^s/s$ монотонно возрастает при $s \neq 0$. Объединяя это с неравенствами (3.75) и (3.81), находим

$$\frac{1}{s} [\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}^q)]^s \begin{cases} \geq, & 0 < q < 1 \\ \leq, & 1 < q \end{cases} \frac{1}{s} [\mathrm{Tr}(\rho^q)]^s. \quad (3.83)$$

Так как фактор $(1 - q)^{-1}$ положителен при $q < 1$ и отрицателен для $q > 1$, соотношение (3.83) даёт

$$\frac{1}{(1 - q)^s} [\text{Tr}(\tilde{\rho}^q)]^s \geq \frac{1}{(1 - q)^s} [\text{Tr}(\rho^q)]^s . \quad (3.84)$$

Согласно определению (3.12), неравенство (3.84) приводит к (3.82) для $q > 0$ и всех $s \neq 0$. Когда $s = 0$, мы имеем дело с квантовой энтропией Рённи и переписываем соотношения (3.83) и (3.84) с функцией $z \mapsto \ln z$, которая также возрастает. Повторяя изложенные выше шаги, доказываем неравенство (3.82) для энтропии Рённи (3.8). ■

Таким образом, мы доказали неубывание квантовой унифицированной энтропии (3.12) под действием произвольных проективных измерений для всех рассмотренных значений параметров. С другой стороны, легко видеть, что обобщённые измерения могут уменьшать квантовые унифицированные энтропии. Для энтропии фон Неймана одиночного кубита пример указан в упражнении 11.15 книги [4]. Это измерение таково, что

$$\tilde{\rho}_{00} = \rho_{00} + \rho_{11} , \quad \tilde{\rho}_{11} = 0 .$$

Если состояние ρ не является чистым и диагоналізується в измерительном базисе, то

$$\text{Tr}(\tilde{\rho}^q) = \tilde{\rho}_{00}^q \left\{ \begin{array}{l} <, \quad 0 < q < 1 \\ >, \quad 1 < q \end{array} \right\} \text{Tr}(\rho^q) = \rho_{00}^q + \rho_{11}^q , \quad (3.85)$$

откуда $E_q^{(s)}(\tilde{\rho}) < E_q^{(s)}(\rho)$. Для $q > 0$ и всех вещественных s квантовая унифицированная (q, s) -энтропия может быть уменьшена в результате применения обобщённого измерения. В этом отношении унифицированные энтропии аналогичны энтропии фон Неймана.

Мы обсудили те свойства унифицированных энтропий, которые имеют первостепенное значение в физических приложениях. Унифицированные энтропии образуют класс двухпараметрических расширений энтропии Шеннона и энтропии фон Неймана. Неудивительно, что характерные свойства энтропийных функций зависят от параметров. Сопутствующие математические вопросы также представляют интерес и сами по себе, безотносительно к физическим приложениям. Получены некоторые оценки

в терминах ансамблей квантовых состояний. Для значений параметров в некотором диапазоне получены неравенства типа Фанне. Отсюда следует, что унифицированные энтропии устойчивы в конечномерном случае. Рассматривая термодинамический предел, мы определили диапазоны параметров, соответствующие как свойству устойчивости, так и его нарушению. Субаддитивность и неравенство треугольника справедливы в широком диапазоне значений энтропийных параметров. Доказано, что все унифицированные энтропии не убывают в результате выполнения проективных измерений. Резюмируя, мы видим, что для значений $q \geq 1$ и $s \geq 1$ квантовая унифицированная (q, s) -энтропия обладает практически всеми желаемыми свойствами. Напротив, отрицательные значения параметра s приводят к нарушению устойчивости, по крайней мере в термодинамическом пределе. Представленные выше результаты дополняют имеющиеся представления об основных свойствах унифицированных энтропий.

Глава 4

Неравенства типа Пинскера и Фанне для квантовой относительной энтропии Цаллиса

В этой главе представлены новые оценки типа Пинскера и Фанне на относительную энтропию Цаллиса [58, 59]. Физические системы с дальним взаимодействием, памятью или фрактальными структурами вряд ли допустимо рассматривать в рамках традиционного формализма статистической физики. Энтропии Цаллиса часто предлагаются как адекватная основа для описания подобных систем, по крайней мере в окрестности состояний равновесия [60]. Стационарные состояния таких систем представляются однопараметрическими расширениями степенного закона Ципфа–Мандельброта. Обобщённые энтропии также нашли применение в качестве альтернативных квантификаторов информационного содержания вероятностных векторов или матриц плотности. В частности, энтропии Рёньи и Цаллиса можно использовать для формулировки соотношений неопределённостей для неортогональных разложений единицы или супероператоров. Изучение обобщённых функционалов позволяет глубже понять свойства и области релевантности стандартных энтропий Шеннона и фон Неймана. Сильная субаддитивность энтропии фон Неймана связана с гипотезой Вигнера–Яназе–Дайсона [61, 62] касательно ряда таких обобщений.

Концепция относительной энтропии, известная также как дивергенция Кульбака–Лейблера [63], обеспечивает чрезвычайно ёмкую и плодотворную

творную меру статистической различимости. Дальнейшим развитием концепции стали f -дивергенция Чизара [64, 65] и квази-энтропии Петца [13, 66]. Они обобщают меру Кульбака–Лейблера в классическом и квантовом случаях, соответственно. В обоих случаях свойства относительной энтропии являются предметом активных исследований. Итак, расширение обычной трактовки стандартных энтропийных функций на обобщённые либо установление невозможности такой интерпретации остаётся достаточно важным вопросом. Нижние оценки типа Пинскера для классической f -дивергенции были получены в работе [67] в неявном функциональном виде. Автор статьи [68] дал явные аналитические выражения для оценок на классические f -дивергенции, включая случай относительной энтропии Цаллиса.

Полученные далее нижние и верхние ограничения на относительную энтропию Цаллиса выражаются в терминах следовой метрики между двумя распределениями вероятностей или операторами плотности в конечномерном пространстве. Некоторые из результатов следуют из монотонности квантовой f -дивергенции. Семейство нижних границ на относительную энтропию Цаллиса для $\alpha \in (0, 1)$ фактически даёт однопараметрическое расширение известного неравенства Пинскера. Рассмотрен также случай относительной энтропии Рёньи. Верхние оценки на относительную α -энтропию Цаллиса двух вероятностных распределений формулируются в терминах минимальной вероятности второго из аргументов. Верхние границы типа Фано для оценки условной энтропии Цаллиса получены для всех $\alpha > 0$. Показано также, что эти границы приводят к обобщённым неравенствам типа Фанне.

В классическом режиме мы рассматриваем вероятностные векторы, следовая метрика между которыми определяется формулой (1.10). Рассмотрим также пространство $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ линейных операторов на конечномерном гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Через $\mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ мы обозначим множество положительно полуопределённых операторов. Для любого оператора \mathbf{X} определим $|\mathbf{X}| \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ как единственный положительный квадратный корень из $\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$. Следовая метрика между операторами определяется формулой

(1.9). Для каждого оператора $\mathbf{X} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ введём два соответствующих подпространства пространства \mathcal{H} , а именно его ядро $\ker(\mathbf{X})$ и образ $\operatorname{ran}(\mathbf{X})$. Собственные значения оператора \mathbf{X} формируют спектр $\operatorname{spes}(\mathbf{X})$.

Для положительного $\alpha \neq 1$ мы вводим α -энтропию Цаллиса [32] вероятностного вектора $\mathbf{P} = \{p(x)\}$ по формуле

$$H_\alpha(\mathbf{P}) := \frac{1}{1-\alpha} \left(\sum_{x \in \Omega} p(x)^\alpha - 1 \right) = - \sum_{x \in \Omega} p(x)^\alpha \ln_\alpha(p(x)) . \quad (4.1)$$

Множество Ω конечной мощности N даёт возможные значения метки x . Максимальное значение $\ln_\alpha(N)$ достигается для равномерного распределения такого, что $p(x) = 1/N$ для всех $x \in \Omega$. Энтропия Шеннона

$$H_1(\mathbf{P}) = - \sum_{x \in \Omega} p(x) \ln p(x)$$

получается в пределе $\alpha \rightarrow 1$. Через $h_\alpha(u)$ мы обозначим бинарную α -энтропию, т.е.

$$h_\alpha(u) := - u^\alpha \ln_\alpha(u) - (1-u)^\alpha \ln_\alpha(1-u) , \quad (4.2)$$

где $u \in [0; 1]$. Эта функция вогнута, а также $h_\alpha(u) = h_\alpha(1-u)$. Другое семейство однопараметрических энтропий образуют энтропии Рёньи (см. обзоры [65, 66] и указанные там ссылки). Для $0 < \alpha \neq 1$, α -энтропия Рёньи определяется выражением

$$R_\alpha(\mathbf{P}) := \frac{1}{1-\alpha} \ln \left(\sum_{x \in \Omega} p(x)^\alpha \right) . \quad (4.3)$$

Определения (4.1) и (4.3) дают $(1-\alpha)R_\alpha(\mathbf{P}) = \ln[1 + (1-\alpha)H_\alpha(\mathbf{P})]$.

Для матрицы плотности ρ с единичным следом $\operatorname{Tr}(\rho) = 1$ квантовые варианты рассмотренных выше энтропий имеют вид

$$H_\alpha(\rho) := \frac{\operatorname{Tr}(\rho^\alpha) - 1}{1-\alpha} , \quad (4.4)$$

$$R_\alpha(\rho) := \frac{\ln[\operatorname{Tr}(\rho^\alpha)]}{1-\alpha} . \quad (4.5)$$

Аддитивные свойства квантовых энтропий интересны во многих отношениях. Субаддитивность квантовой энтропии Цаллиса (4.4) для $\alpha > 1$ была

высказана в качестве гипотезы в статье [34] и позже доказана в статье [35]. Как мы видели в Главе 3, этот результат можно распространить на некоторые из унифицированных энтропий. В течение некоторого времени считалось, что свойство субаддитивности выполняется для энтропии Вигнера–Яназе, пока справедливость этого утверждения не опровергли контрпримеры [52, 53]. Вместе с тем, если состояние системы из двух подсистем чистое, то энтропия Вигнера–Яназе действительно субаддитивна. Другие достаточные условия субаддитивности энтропии Вигнера–Яназе были получены в [54].

Для вероятностных распределений $P = \{p(x)\}$ to $Q = \{q(x)\}$ стандартная относительная энтропия задаётся выражением [65]

$$H_1(P||Q) = - \sum_{x \in \Omega} p(x) \ln \left(\frac{q(x)}{p(x)} \right). \quad (4.6)$$

Для матриц плотности ρ и σ квантовая относительная энтропия определяется по формуле [4]

$$H_1(\rho||\sigma) := \begin{cases} \text{Tr}(\rho \ln \rho - \rho \ln \sigma), & \text{если } \text{ran}(\rho) \subseteq \text{ran}(\sigma), \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Заметим, что для $A \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ подпространство $\text{ran}(A)$ формируется собственными векторами A , отвечающими строго положительным собственным значениям. Вместо условия $\text{ran}(\rho) \subseteq \text{ran}(\sigma)$ можно было бы использовать $\text{ker}(\sigma) \subseteq \text{ker}(\rho)$ [69].

В классическом режиме относительная α -энтропия Цаллиса определяется выражением [70]

$$H_\alpha(P||Q) := - \sum_{x \in \Omega} p(x) \ln_\alpha \left(\frac{q(x)}{p(x)} \right) = \frac{1}{1 - \alpha} \left(1 - \sum_{x \in \Omega} p(x)^\alpha q(x)^{1-\alpha} \right). \quad (4.8)$$

Основные свойства этого энтропийного функционала рассмотрены в статьях [70, 71]. Относительная α -энтропия Рёньи записывается в виде [65]

$$R_\alpha(P||Q) := \frac{-1}{1 - \alpha} \ln \left(\sum_{x \in \Omega} p(x)^\alpha q(x)^{1-\alpha} \right). \quad (4.9)$$

Автор работы [68] получил неравенства типа Пинскера для относительных энтропий Цаллиса и Рёньи. Отметим, что относительная энтропия записана там аналогично (4.8), но со знаменателем $\alpha(1 - \alpha)$ вместо $(1 - \alpha)$.

Прежде всего распространим определение (4.8) на произвольные положительные функции $\mathbf{A} = \{a(x)\}$ и $\mathbf{B} = \{b(x)\}$ на конечном множестве Ω . Для заданного $\mathbf{A} = \{a(x)\}$ мы введём $\Omega_A = \{x : a(x) \neq 0\} \subseteq \Omega$. Для $\alpha > 1$ определим относительную α -энтропию $\mathbf{A} = \{a(x)\}$ по отношению к $\mathbf{B} = \{b(x)\}$ формулой

$$H_\alpha(\mathbf{A}||\mathbf{B}) := \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \left(\sum_{x \in \Omega_A} a(x)^\alpha b(x)^{1-\alpha} - \sum_{x \in \Omega_A} a(x) \right), & \text{если } \Omega_A \subseteq \Omega_B, \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.10)$$

Опуская вторую строку в правой части (4.10), мы получаем определение для $0 < \alpha < 1$. Для произвольного положительного скаляра λ имеем

$$H_\alpha(\lambda\mathbf{A}||\lambda\mathbf{B}) = \lambda H_\alpha(\mathbf{A}||\mathbf{B}), \quad (4.11)$$

так что величина (4.10) является однородной функцией степени 1. Это свойство будет использоваться в дальнейшем при выводе неравенств типа Фанне.

Для $\alpha \in (0; 1)$ и матриц плотности ρ и σ мы определим квантовую относительную α -энтропию выражением

$$H_\alpha(\rho||\sigma) := \frac{1 - \text{Tr}(\rho^\alpha \sigma^{1-\alpha})}{1 - \alpha}. \quad (4.12)$$

Если $\alpha > 1$, то правая часть (4.12) является хорошо определённой в случае $\text{ran}(\rho) \subseteq \text{ran}(\sigma)$. В сингулярном случае, когда $\text{ran}(\rho) \not\subseteq \text{ran}(\sigma)$, правая часть (4.12) трактуется аналогично стандартной относительной энтропии (4.7). А именно, относительная энтропия принимается равной $+\infty$. Распространяя (4.9) на квантовый случай, для $0 < \alpha \neq 1$ запишем

$$R_\alpha(\rho||\sigma) := \frac{-1}{1 - \alpha} \ln[\text{Tr}(\rho^\alpha \sigma^{1-\alpha})]. \quad (4.13)$$

Эти относительные энтропии связаны формулой

$$(\alpha - 1)R_\alpha(\rho||\sigma) = \ln[1 + (\alpha - 1)H_\alpha(\rho||\sigma)], \quad (4.14)$$

которая очевидна и в классическом режиме. Для $\alpha > 1$ и $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ введём величину

$$H_\alpha(\mathbf{A}||\mathbf{B}) := \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} [\text{Tr}(\mathbf{A}^\alpha \mathbf{B}^{1-\alpha}) - \text{Tr}(\mathbf{A})], & \text{если } \text{ran}(\mathbf{A}) \subseteq \text{ran}(\mathbf{B}), \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.15)$$

Свойство однородности (4.11) имеет место и для квантовой энтропии.

Настало время обсудить один результат, который будет использоваться для получения квантовых оценок типа Пинскера. Относительная энтропия Цаллиса (4.8) тесно связана с f -дивергенцией Чизара [64]. Пусть $z \mapsto f(z)$ — выпуклая функция на $z \in [0; +\infty)$ такая, что $f(1) = 0$. Тогда f -дивергенция $\mathbf{P} = \{p(x)\}$ по отношению к $\mathbf{Q} = \{q(x)\}$ определяется как [64, 65]

$$S_f(\mathbf{P}||\mathbf{Q}) := \sum_{x \in \Omega} q(x) f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right). \quad (4.16)$$

Если мы примем $f_\alpha(z) = (z^\alpha - z)/(\alpha - 1)$ с положительным $\alpha \neq 1$, то формула (4.16) приводит к (4.8). Стандартный случай получаем с помощью функции $f(z) = z \ln z$. Определение (4.16) обычно может быть использовано безотносительно к условию нормировки.

В дальнейшем принимается соглашение о том, что степени положительно полуопределённого оператора берутся только на его носителе. Таким образом, \mathbf{A}^{-1} и \mathbf{A}^0 соответственно означают обобщённый обратный и проекционный операторы на $\text{ran}(\mathbf{A})$. Квантовый аналог f -дивергенции Чизара вводится следующим образом [61]. Для оператора $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ введём операции $\Lambda_{\mathbf{A}}$ и $\Upsilon_{\mathbf{A}}$, которые обозначают левое и правое умножения на \mathbf{A} , соответственно. А именно, для всех $\mathbf{X} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ положим

$$\Lambda_{\mathbf{A}} : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad \Upsilon_{\mathbf{A}} : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}\mathbf{A}. \quad (4.17)$$

Операции левого и правого умножения коммутируют друг с другом, поэтому для $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ мы имеем

$$\Lambda_{\mathbf{A}}\Upsilon_{\mathbf{B}} = \Upsilon_{\mathbf{B}}\Lambda_{\mathbf{A}}. \quad (4.18)$$

Пусть функция $z \mapsto f(z)$ непрерывна на $z \in [0; +\infty)$. Рассмотрим множество

$$\{ab^{-1} : a \in \text{spec}(\mathbf{A}), b \in \text{spec}(\mathbf{B})\}, \quad (4.19)$$

а также спектральные разложения

$$\mathbf{A} = \sum_{a \in \text{spec}(\mathbf{A})} a \mathbf{P}_a, \quad \mathbf{B} = \sum_{b \in \text{spec}(\mathbf{B})} b \mathbf{Q}_b. \quad (4.20)$$

Теперь мы можем записать [61]

$$f(\Lambda_A \Upsilon_{B^{-1}}) := \sum_{a \in \text{spec}(\mathbf{A})} \sum_{b \in \text{spec}(\mathbf{B})} f(ab^{-1}) \Lambda_{P_a} \Upsilon_{Q_b} . \quad (4.21)$$

Если $\text{ran}(\mathbf{A}) \subset \text{ran}(\mathbf{B})$, то f -дивергенция \mathbf{A} по отношению к \mathbf{B} определяется формулой [61]

$$S_f(\mathbf{A}||\mathbf{B}) := \left\langle \mathbf{B}^{1/2}, f(\Lambda_A \Upsilon_{B^{-1}}) \mathbf{B}^{1/2} \right\rangle_{\text{HS}} . \quad (4.22)$$

Напомним, что $\mathbf{1}$ обозначает единичный оператор. В общем случае, квантовая f -дивергенция записывается как

$$S_f(\mathbf{A}||\mathbf{B}) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} S_f(\mathbf{A}||\mathbf{B} + \varepsilon \mathbf{1}) . \quad (4.23)$$

Основные свойства величины (4.22) обсуждаются в статье [61]. Если взять функцию $f_\alpha(z) = (z^\alpha - z)/(\alpha - 1)$, то определение (4.22) в конечном счёте приводит к относительной энтропии Цаллиса (4.15). Одним из наиболее важных свойств стандартной относительной энтропии является её монотонность под действием вполне положительных сохраняющих след отображений [72]. В общем, роль стохастических отображений в квантовой теории обсуждается в статье [73]. Многие фундаментальные результаты квантовой теории информации тесно связаны с монотонностью стандартной относительной энтропии [4, 62, 74]. Общие условия, при которых квантовая f -дивергенция обладает свойством монотонности, сформулированы в работе [61]. Если отображение Φ является вполне положительным отображением и функция f является операторно выпуклой на $[0; +\infty)$, то

$$S_f(\Phi(\mathbf{A})||\Phi(\mathbf{B})) \leq S_f(\mathbf{A}||\mathbf{B}) . \quad (4.24)$$

Заметим, что в работе [61] неравенство (4.24) было установлено при более слабых условиях, наложенных на отображения. Здесь эти условия обсуждаться не будут. Из монотонности (4.24) можно получить простую нижнюю границу на квантовую f -дивергенцию, причём граница эта выражается в терминах соответствующей классической дивергенции. Пусть $\Pi \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ — проекционный оператор. Известно, что линейное отображение

$$\mathbf{X} \mapsto \{\text{Tr}(\Pi \mathbf{X}), \text{Tr}[(\mathbf{1} - \Pi) \mathbf{X}]\} \quad (4.25)$$

сохраняет след и является вполне положительным. Сочетая эти факты с монотонностью (4.24), мы приходим к следующему выводу.

Предложение 22 *Рассмотрим два положительных оператора $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$. Через $\Pi_{\pm} \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ обозначим проекционные операторы на собственные подпространства, отвечающие положительным и отрицательным собственным значениям разности $(\mathbf{A} - \mathbf{B})$, соответственно. Проекторы удовлетворяют условию $\Pi_+ + \Pi_- = \mathbb{1}$. Если функция f является операторно выпуклой, то*

$$S_f(\mathbf{A}||\mathbf{B}) \geq S_f(\{u'_{\pm}\}||\{v'_{\pm}\}) , \quad (4.26)$$

где $u'_{\pm} = \text{Tr}(\Pi_{\pm}\mathbf{A})$ и $v'_{\pm} = \text{Tr}(\Pi_{\pm}\mathbf{B})$.

Функция $z \mapsto z^{\alpha}$ является операторно вогнутой на $[0; +\infty)$ для $0 \leq \alpha \leq 1$ и операторно выпуклой на $[0; +\infty)$ для $1 \leq \alpha \leq 2$ (см., соответственно, теоремы 4.2.3 и 1.5.8 в книге [57]). Таким образом, функция $f_{\alpha}(z) = (z^{\alpha} - z)/(\alpha - 1)$ является операторно выпуклой для $\alpha \in [0; 2]$ и $\alpha \neq 1$. Объединив этот факт с неравенством (4.26), мы имеем

$$S_{\alpha}(\mathbf{A}||\mathbf{B}) \geq H_{\alpha}(\{u'_{\pm}\}||\{v'_{\pm}\}) . \quad (4.27)$$

С точностью до обозначений, результат (4.27) с матрицами плотности был представлен в работе [46]. Здесь мы распространили его на произвольные положительные операторы. В следующем разделе будут использоваться соотношение (4.27) и неравенство

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_1 = |u'_+ - v'_+| + |u'_- - v'_-| \quad (4.28)$$

Это позволит нам оценить правую часть (4.26) снизу в терминах следовой метрики, равной половине $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_1$.

Изучение связей между мерами различимости квантовых состояний составляет важное направление в квантовой теории информации. Неравенство Пинскера [64] и его квантовый аналог, выраженный как [75]

$$H_1(\rho||\sigma) \geq 2D(\rho, \sigma)^2 , \quad (4.29)$$

являются хорошо известными результатами такого рода. Нижние и верхние границы на относительную энтропию (4.7) были даны в работе [48].

Верхние границы из статей [48, 76] напоминают оригинальное неравенство Фанне [29]. Авторы работы [77] показали, что

$$H_\alpha(\rho||\sigma) \leq H_1(\rho||\sigma) \leq H_\beta(\rho||\sigma) , \quad (4.30)$$

где $0 \leq \alpha < 1$ и $1 < \beta \leq 2$. Итак, для $1 < \beta \leq 2$ относительная энтропия $H_\beta(\rho||\sigma)$ ограничена снизу правой частью уравнения (4.29). Более детальные нижние оценки на относительную энтропию (4.7) представлены в статье [48]. Ввиду (4.30) все эти нижние оценки справедливы для $H_\beta(\rho||\sigma)$ со значениями параметра $1 < \beta \leq 2$.

Пусть Π_+ — оператор проецирования на пространство, соответствующее положительным собственным значениям разности $(\rho - \sigma)$. Для нормированных операторов плотности неравенство (4.27) вместе с определениями (4.8) и (4.12) приводит к результату

$$H_\alpha(\rho||\sigma) \geq H_\alpha(\{u, 1-u\}||\{v, 1-v\}) , \quad (4.31)$$

где мы приняли для удобства $u = \text{Tr}(\Pi_+\rho)$ и $v = \text{Tr}(\Pi_+\sigma)$. Обозначая $t = |u - v|$, мы также имеем $\|\rho - \sigma\|_1 = 2t$ и $D(\rho, \sigma) = t$. В статье [46] было доказано неравенство

$$\sqrt{uv} + \sqrt{(1-u)(1-v)} \leq \sqrt{1-t^2} , \quad (4.32)$$

подразумевающее $u, v \in [0; 1]$ и $|u - v| \leq t$. Действительно, при $v \leq u$ имеем $u = v + t$. Вспомним также понятие степенного среднего положительных чисел x и y для вещественного a , которое равно [78]

$$\mathfrak{M}_a(x, y) := \left(\frac{x^a + y^a}{2} \right)^{1/a} . \quad (4.33)$$

Одним из принципиальных результатов является тот факт, что $a < b$ влечёт $\mathfrak{M}_a(x, y) \leq \mathfrak{M}_b(x, y)$. Полагая $a = 1/2$, $b = 1$, $x = uv$ и $y = (1-u)(1-v)$, мы запишем

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{uv} + \sqrt{(1-u)(1-v)} \right)^2 &= 4 \mathfrak{M}_{1/2}(x, y) \\ &\leq 4 \mathfrak{M}_1(x, y) = 2(uv + (1-u)(1-v)) . \end{aligned} \quad (4.34)$$

Подстановка $u = v + t$ даёт функцию

$$2(1 - t - 2v + 2tv + 2v^2) = 4 \left(\frac{1-t}{2} + (t-1)v + v^2 \right) . \quad (4.35)$$

Дифференцируя правую часть (4.35) по v и приравнивая её к нулю, находим $v = (1 - t)/2$, откуда $u = (1 + t)/2$. В этом случае правая часть (4.34) равна $4uv = 1 - t^2$. Тем самым неравенство (4.32) доказано. Далее, легко видеть, что при $v = (1 - t)/2$ и $u = (1 + t)/2$ данное неравенство насыщается.

Используя (4.32), мы запишем неравенство

$$H_{1/2}(\{u, 1 - u\} || \{v, 1 - v\}) \geq 2(1 - \sqrt{1 - t^2}) , \quad (4.36)$$

которое в силу (4.31) приводит к соотношению

$$H_{1/2}(\rho || \sigma) \geq D(\rho, \sigma)^2 . \quad (4.37)$$

Здесь было использовано очевидное неравенство $2(1 - \sqrt{1 - t^2}) \geq t^2$. Заметим, что результат (4.32) является в действительности частным случаем неравенства

$$D(\rho, \sigma) \leq \sqrt{1 - F(\rho, \sigma)^2} , \quad (4.38)$$

где точность воспроизведения $F(\rho, \sigma)$ определяется формулой (1.69). Соотношение (4.38) было доказано в известной работе [24]. Используя (4.32), мы получаем следующее утверждение.

Предложение 23 Пусть $u, v \in [0; 1]$ и $g(t) = 1 - \sqrt{1 - t^2}$. Если выполнено $\alpha \in [0; 1/2]$ и $t = |u - v|$, то мы имеем

$$u^\alpha v^{1-\alpha} + (1 - u)^\alpha (1 - v)^{1-\alpha} \leq 1 - 2\alpha g(t) . \quad (4.39)$$

Доказательство. Рассматривая u и v как фиксированные параметры, мы определим функцию переменной α , равную

$$\Psi_{uv}(\alpha) = u^\alpha v^{1-\alpha} + (1 - u)^\alpha (1 - v)^{1-\alpha} + 2\alpha g(t) - 1 . \quad (4.40)$$

Утверждение (4.39) эквивалентно неравенству $\Psi_{uv}(\alpha) \leq 0$ для всех $\alpha \in [0; 1/2]$. Во-первых, мы замечаем очевидное неравенство $\Psi_{uv}(0) \leq 0$. Во-вторых, мы имеем $\Psi_{uv}(1/2) \leq 0$ в силу (4.32). В-третьих, величина $\Psi_{uv}(\alpha)$ является выпуклой функцией α . Действительно, для $u, v \neq 0, 1$ мы получаем

$$\frac{\partial^2 \Psi_{uv}}{\partial \alpha^2} = u^\alpha v^{1-\alpha} \left[\ln \left(\frac{u}{v} \right) \right]^2 + (1 - u)^\alpha (1 - v)^{1-\alpha} \left[\ln \left(\frac{1 - u}{1 - v} \right) \right]^2 \geq 0 . \quad (4.41)$$

Если выпуклая функция принимает неположительные значения на краях некоторого интервала, то она неположительна во всех точках этого интервала. ■

Объединяя утверждение Предложения 23 с (4.27), мы получаем нижнюю границу типа Пинскера на относительную α -энтропию Цаллиса для значений параметра $\alpha \in (0; 1)$. Сформулируем эту границу для двух положительно полуопределённых операторов с равными следами.

Предложение 24 Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$, $\text{Tr}(\mathbf{A}) = \text{Tr}(\mathbf{B}) = \theta$, $D(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \tau$, и $g(t) = 1 - \sqrt{1 - t^2}$. Для всех $\alpha \in (0; 1)$ справедливо неравенство

$$H_\alpha(\mathbf{A}||\mathbf{B}) \geq \varkappa_\alpha \theta g(\tau/\theta), \quad (4.42)$$

где фактор

$$\varkappa_\alpha := \begin{cases} \frac{2\alpha}{1-\alpha}, & \text{для } 0 < \alpha \leq 1/2, \\ 2, & \text{для } 1/2 \leq \alpha < 1. \end{cases} \quad (4.43)$$

Доказательство. Используя обозначения Предложения 22, запишем $u'_+ + u'_- = v'_+ + v'_- = \theta$ и $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_1 = 2|u'_+ - v'_+|$, откуда $\tau = |u'_+ - v'_+|$. Из (4.10) и (4.27) следует, что

$$\begin{aligned} (1 - \alpha) H_\alpha(\mathbf{A}||\mathbf{B}) &\geq (1 - \alpha) H_\alpha(\{u'_\pm\}||\{v'_\pm\}) \\ &= \theta [1 - u^\alpha v^{1-\alpha} - (1 - u)^\alpha (1 - v)^{1-\alpha}], \end{aligned} \quad (4.44)$$

где $u = u'_+/\theta$, $v = v'_+/\theta$, и $|u - v| = \tau/\theta$. В силу (4.39) мы видим, что для $0 < \alpha \leq 1/2$ правая часть (4.44) не меньше, чем $2\alpha \theta g(\tau/\theta)$. Отсюда вытекает результат (4.42) с $\varkappa_\alpha = 2\alpha/(1 - \alpha)$. Для $1/2 \leq \alpha < 1$ положим $\beta = 1 - \alpha$ и запишем

$$\beta H_\alpha(\boldsymbol{\rho}||\boldsymbol{\sigma}) \geq \theta [1 - u^{1-\beta} v^\beta - (1 - u)^{1-\beta} (1 - v)^\beta] \geq 2\beta \theta g(\tau/\theta). \quad (4.45)$$

Из последнего неравенства следует результат (4.42) с $\varkappa_\alpha = 2$. ■

Для вероятностных распределений нижняя граница (4.42) выражается аналогично, но с классической следовой метрикой $\tau = \mathcal{D}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$. Разлагая функцию $g(\tau/\theta)$ в степенной ряд, мы получаем семейство нижних границ типа Пинскера. А именно, запишем

$$H_\alpha(\mathbf{A}||\mathbf{B}) \geq \varkappa_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^{n+1} \frac{\tau^{2n}}{\theta^{2n-1}}, \quad (4.46)$$

включая $H_\alpha(\mathbf{A}||\mathbf{B}) \geq (2\theta)^{-1} \varkappa_\alpha \tau^2$. Входящий в (4.46) коэффициент

$$\binom{1/2}{n} (-1)^{n+1} = \frac{(2n-3)!!}{n! 2^n}$$

положителен для всех n . Итак, любая частичная сумма ряда (4.46) обеспечивает вариант нижней границы типа Пинскера. В целом, это семейство не обеспечивает обобщения неравенства Пинскера с наилучшими константами при степенях следовой метрики. Для стандартной относительной энтропии $H_1(\mathbf{P}||\mathbf{Q})$ нахождение наилучших констант довольно долго было предметом исследований (см. работу [79] и указанные там ссылки).

Используя функцию $f(z) = (z^\alpha - z)/(\alpha(\alpha - 1))$, автор статьи [68] получил оценку типа Пинскера на f -дивергенцию (4.16) для $\alpha \in [-1; 2]$ и $\alpha \neq 0, 1$. Если $\alpha \in [0; 2]$, то результаты [68] можно напрямую комбинировать с (4.26), поскольку для таких значений параметра квантовая относительная α -энтропия обладает свойством монотонности. В наших обозначениях относительной энтропии Цаллиса неравенство работы [68] даёт

$$H_\alpha(\boldsymbol{\rho}||\boldsymbol{\sigma}) \geq 2\alpha\tau^2 + \frac{2}{9} \alpha(\alpha + 1)(2 - \alpha)\tau^4, \quad (4.47)$$

где $\tau = D(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma})$ обозначает следовую метрику между нормированными матрицами плотности. Следует подчеркнуть, что неравенство (4.42) лучше в некоторой совместной области значений следовой метрики и параметра α , близкого к $1/2$. Например, для $\alpha = 1/2$ нижняя граница (4.42) сильнее для всех $\tau \neq 0$. В этом случае из (4.46) мы получаем

$$H_{1/2}(\boldsymbol{\rho}||\boldsymbol{\sigma}) \geq \tau^2 + \frac{1}{4} \tau^4 + \sum_{n=3}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^{n+1} \tau^{2n}, \quad (4.48)$$

тогда как граница (4.47) включает только первые два из слагаемых, входящих в правую часть (4.48).

Для $\alpha \in (0; 1)$ мы комбинируем (4.14) с (4.42), в результате чего получаем

$$R_\alpha(\boldsymbol{\rho}||\boldsymbol{\sigma}) \geq \frac{1}{\alpha - 1} \ln[1 - (1 - \alpha)\varkappa_\alpha g(\tau)] \geq \varkappa_\alpha g(\tau), \quad (4.49)$$

где $\tau = D(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma})$. Действительно, функция $x \mapsto (\alpha - 1)^{-1} \ln[1 - (1 - \alpha)x]$ возрастает с ростом $x \in [0; \frac{1}{1-\alpha})$, причём $-\ln(1 - \xi) \geq \xi$ для $\xi \in [0; 1)$.

Неравенство (4.49) можно рассматривать как оценку типа Пинскера на носительную энтропию Рёни для $\alpha \in (0; 1)$. Таким образом, мы имеем семейство нижних границ в терминах следовой метрики на обе относительные энтропии (4.12) и (4.13).

Одной из основных особенностей стандартной относительной энтропии является её неограниченность. Относительная α -энтропия обладает тем же свойством для $\alpha > 1$. Поэтому мы можем задать вопрос о поведении $H_\alpha(P||Q)$ в случае, когда минимальная вероятность в распределении Q стремится к нулю. Конечно, в квантовом режиме вопрос сложнее для разрешения ввиду некоммутативности операторов. Для стандартной относительной энтропии верхние границы такого типа были представлены в книге [80], и, в более детальной форме, в статьях [48, 76]. Для квантовой относительной α -энтропии порядка $\alpha > 1$ верхние оценки в терминах минимального собственного значения его второго аргумента были получены в [58]. Оказывается, что в коммутативном случае эти границы могут быть значительно улучшены. Наш вывод будет основан на свойстве совместной выпуклости. А именно, для каждого положительного $\alpha \neq 1$ величина (4.10) удовлетворяет неравенству

$$H_\alpha(\theta A' + (1 - \theta)A'' || \theta B' + (1 - \theta)B'') \leq \theta H_\alpha(A' || B') + (1 - \theta)H_\alpha(A'' || B'') \quad (4.50)$$

для всех $0 \leq \theta \leq 1$. Это соотношение вытекает из обобщения неравенства для логарифма суммы на α -логарифмы (см. формулу (16) в статье [70]). Свойства (4.11) и (4.50) приводят к следующему утверждению.

Предложение 25 Пусть A, B, C — три набора положительных чисел, и пусть A, B, C — три положительно полуопределённых оператора; тогда имеем

$$H_\alpha(A + C || B + C) \leq H_\alpha(A || B) \quad (0 \leq \alpha < \infty), \quad (4.51)$$

$$H_\alpha(A + C || B + C) \leq H_\alpha(A || B) \quad (0 \leq \alpha \leq 2). \quad (4.52)$$

Доказательство. Комбинируя (4.11) и (4.50), мы немедленно пишем

$$\begin{aligned} H_\alpha(A + C || B + C) &= 2 H_\alpha((A + C)/2 || (B + C)/2) \\ &\leq H_\alpha(A || B) + H_\alpha(C || C) = H_\alpha(A || B), \end{aligned} \quad (4.53)$$

поскольку $H_\alpha(\mathbf{C}||\mathbf{C}) = 0$. Тем самым (4.51) доказано. Квантовая относительная энтропия (4.15) также обладает свойствами однородности степени один и совместной выпуклости, но последнее свойство работает только для $0 \leq \alpha \leq 2$ (см., например, обзор [62]). Переписывая приведённые выше аргументы с квантовой относительной α -энтропией вместо классической, мы получаем результат (4.52). ■

Для стандартной относительной энтропии (4.7) соотношение (4.52) было доказано в [48]. Неравенство (4.51) можно использовать для получения верхней оценки на $H_\alpha(\mathbf{P}||\mathbf{Q})$ в терминах следовой метрики $\mathcal{D}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ и минимальной вероятности

$$q_0 := \min\{q_j : j \in \Omega_P\} . \quad (4.54)$$

Здесь мы считаем, что любая сумма в формуле для $H_\alpha(\mathbf{P}||\mathbf{Q})$ эффективно берётся над подмножеством индексов Ω_P , для которых $p_j \neq 0$. Вводя набор $\Delta = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$ с элементами $\delta_j = p_j - q_j$, мы добавляем другой набор $\bar{\mathbf{Q}}$ с положительными элементами

$$\bar{q}_j := \max\{q_0, -\delta_j\} . \quad (4.55)$$

Комбинируя равенство $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}} + (\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{Q}})$ со свойством (4.51) при $\mathbf{C} = \mathbf{Q} - \bar{\mathbf{Q}}$, получаем

$$H_\alpha(\mathbf{P}||\mathbf{Q}) = H_\alpha(\Delta + \bar{\mathbf{Q}} + (\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{Q}})||\bar{\mathbf{Q}} + (\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{Q}})) \leq H_\alpha(\Delta + \bar{\mathbf{Q}}||\bar{\mathbf{Q}}) . \quad (4.56)$$

Использование (4.51) правомерно здесь в силу положительности как $\Delta + \bar{\mathbf{Q}}$, так и $\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{Q}}$. Действительно, мы имеем $\delta_j + \max\{q_0, -\delta_j\} \geq 0$ и $q_j - \max\{q_0, q_j - p_j\} \geq 0$ благодаря (4.54). Максимизация (4.56) должна проводиться при условиях $\sum_j \delta_j = 0$ и $\sum_j |\delta_j| = 2\mathcal{D}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$. Мы сформируем верхние границы по отдельности для случаев $\mathcal{D}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \leq q_0$ и $q_0 < \mathcal{D}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \leq 1 - q_0$.

Предложение 26 Пусть вероятность q_0 определена равенством (4.54), $\Omega_P \subseteq \Omega_Q$ и $\tau = \mathcal{D}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$. Для $\alpha > 1$ относительная α -энтропия Цаллиса

ограничена сверху согласно неравенствам

$$H_\alpha(\mathbb{P}||\mathbb{Q}) \leq \frac{(q_0 + \tau)^\alpha q_0^{1-\alpha} + (q_0 - \tau)^\alpha q_0^{1-\alpha} - 2q_0}{\alpha - 1} \quad (\tau \leq q_0), \quad (4.57)$$

$$H_\alpha(\mathbb{P}||\mathbb{Q}) \leq \frac{(q_0 + \tau)^\alpha q_0^{1-\alpha} - (q_0 + \tau)}{\alpha - 1} \quad (q_0 < \tau \leq 1 - q_0). \quad (4.58)$$

Доказательство. Удобно ввести три подмножества множества Ω_P , а именно

$$\omega_x := \{j : j \in \Omega_P, 0 < \delta_j\}, \quad (4.59)$$

$$\omega_y := \{j : j \in \Omega_P, -q_0 \leq \delta_j < 0\}, \quad (4.60)$$

$$\omega_z := \{j : j \in \Omega_P, \delta_j < -q_0\}, \quad (4.61)$$

так что $\omega_x \cup \omega_y \cup \omega_z = \Omega_P$. Число элементов в Ω_P обозначим через n . Мы также введём n -мерные векторы X, Y, Z с положительными элементами, определёнными формулами

$$x_i := \begin{cases} \delta_i, & \text{если } i \in \omega_x, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4.62)$$

$$y_j := \begin{cases} -\delta_j, & \text{если } j \in \omega_y, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4.63)$$

$$z_k := \begin{cases} -\delta_k, & \text{если } k \in \omega_z, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.64)$$

Отсюда имеем $\Delta = X - Y - Z$. В силу (4.55) можно записать

$$\bar{q}_j = \begin{cases} q_0, & \text{для } j \in \omega_x \cup \omega_y, \\ z_j, & \text{для } j \in \omega_z. \end{cases} \quad (4.65)$$

Начнём с случая $\tau \leq q_0$. В силу $|\delta_j| \leq \tau$ здесь мы имеем $\omega_z = \emptyset$. Предположим, что все числа δ_j отличны от нуля, тогда $\Omega_P = \omega_x \cup \omega_y$. Условия $\sum_j \delta_j = 0$ и $\sum_j |\delta_j| = 2\tau$ принимают вид

$$\sum_{i \in \omega_x} x_i = \sum_{j \in \omega_y} y_j = \tau. \quad (4.66)$$

В терминах переменных x_i и y_j правая часть (4.56) переписывается как функция

$$F(X, Y) = \frac{1}{\alpha - 1} \left(\sum_{i \in \omega_x} (q_0 + x_i)^\alpha q_0^{1-\alpha} + \sum_{j \in \omega_y} (q_0 - y_j)^\alpha q_0^{1-\alpha} - nq_0 \right). \quad (4.67)$$

Возможные значения переменных x_i и y_j соответствуют внутренним точкам симплекса, определяемого условиями $0 \leq x_i$, $0 \leq y_j$ и (4.66). Напомним, что глобальный максимум выпуклой функции относительно точек выпуклого множества достигается в одной из крайних точек этого множества [81]. Следовательно, максимальное значение $F(X, Y)$ на симплексе совпадает с правой частью (4.57). Эта величина достигается, когда один из элементов x_i и один из элементов y_j равны τ , тогда как все остальные равны нулю. Разумеется, значения $F(X, Y)$ во внутренних точках симплекса не превышают этого максимума. Записав соотношение (4.66), мы приняли, что все числа δ_j отличны от нуля. Если это не так, т.е. некоторые из разностей δ_j зануляются, то вопрос рассматривается совершенно аналогично, но с уменьшением n .

В случае $q_0 < \tau$ мы снова начнём с предположения, что все разности δ_j отличны от нуля. Вместо (4.66) мы теперь имеем

$$\sum_{i \in \omega_x} x_i = \sum_{j \in \omega_y} y_j + \sum_{k \in \omega_z} z_k = \tau. \quad (4.68)$$

Начнём с преобразования правой части (4.56). В силу (4.65) записываем $\bar{Q} = q_0(I_x + I_y) + Z$ и

$$\Delta + \bar{Q} = q_0(I_x + I_y) + X - Y. \quad (4.69)$$

Здесь вектор I_x обозначает индикатор ω_x , так что элементы I_x принимают значение 1 для $j \in \omega_x$ и значение 0 для $j \notin \omega_x$. Аналогичным образом I_y и I_z обозначают индикаторы ω_y и ω_z , соответственно. Заметим также, что если множество Ω_Z не имеет общих элементов с $\Omega_A \cup \Omega_B$, то справедливо $H_\alpha(A||B + Z) = H_\alpha(A||B)$. Используя это наблюдение дважды и неравенство (4.51) с положительным вектором $C = q_0 I_y - Y$, мы переписываем правую

часть (4.56) в виде

$$\begin{aligned} H_\alpha(q_0(\mathbb{I}_x + \mathbb{I}_y) + \mathbf{X} - \mathbf{Y} \| q_0(\mathbb{I}_x + \mathbb{I}_y) + \mathbf{Z}) &= H_\alpha(q_0\mathbb{I}_x + \mathbf{X} + \mathbf{C} \| q_0\mathbb{I}_x + \mathbf{Y} + \mathbf{C}) \\ &\leq H_\alpha(q_0\mathbb{I}_x + \mathbf{X} \| q_0\mathbb{I}_x + \mathbf{Y}) = H_\alpha(q_0\mathbb{I}_x + \mathbf{X} \| q_0\mathbb{I}_x) . \end{aligned} \quad (4.70)$$

Правую часть (4.70) можно переписать как функцию

$$G(\mathbf{X}) = \frac{1}{\alpha - 1} \left(\sum_{i \in \omega_x} (q_0 + x_i)^\alpha q_0^{1-\alpha} - (n_x q_0 + \tau) \right) , \quad (4.71)$$

где n_x обозначает мощность множества ω_x . Возможные значения переменных x_i относятся к внутренним точкам симплекса, определяемого условиями $0 \leq x_i$ и $\sum_i x_i = \tau$. Таким образом, максимальное значение функции $G(\mathbf{X})$ равно правой части (4.58) и достигается, когда один из элементов x_i равен τ , а все другие равны нулю. Как уже было отмечено выше, аналогичным образом рассматривается случай, когда некоторые из разностей δ_j равны нулю. ■

Верхние границы (4.57) и (4.58) обнаруживают поведение $q_0^{1-\alpha}$ относительно минимальной вероятности q_0 , входящей в распределение \mathbb{Q} . Для квантовой относительной энтропии $H_\alpha(\rho \| \sigma)$ верхние оценки с аналогичной зависимостью от минимального собственного значения матрицы σ были получены в работе [58]. Если $\text{ran}(\rho) \subseteq \text{ran}(\sigma)$, то для произвольного $\alpha > 1$ мы имеем

$$H_\alpha(\rho \| \sigma) \leq \frac{\lfloor \alpha \rfloor}{\alpha - 1} \frac{\lambda_1^{\alpha-1}}{b_0^{\alpha-1}} \|\rho - \sigma\|_1 , \quad (4.72)$$

где $\lambda_1 := \max\{\lambda : \lambda \in \text{spec}(\rho) \cup \text{spec}(\sigma)\}$ и $b_0 := \min\{b \neq 0 : b \in \text{spec}(\sigma)\}$ [58]. Разумеется, неравенство (4.72) можно переписать с 1 вместо $\lambda_1 \leq 1$. Оценки (4.57) и (4.58) являются более плотными, но их доказательство ограничено коммутативным случаем. Основным препятствием на пути переноса доказательства Предложения 26 на матрицы состоит в том, что положительность диагональных элементов матрицы не означает положительности самой матрицы (кроме, разумеется, диагональных матриц). Заметим, что неравенства (4.57) и (4.58) можно переписать в терминах α -логарифма

как

$$H_\alpha(P||Q) \leq - (q_0 + \tau) \ln_\alpha \left(\frac{q_0}{q_0 + \tau} \right) - (q_0 - \tau) \ln_\alpha \left(\frac{q_0}{q_0 - \tau} \right), \quad (4.73)$$

$$H_\alpha(P||Q) \leq - (q_0 + \tau) \ln_\alpha \left(\frac{q_0}{q_0 + \tau} \right), \quad (4.74)$$

причём первое неравенство относится к случаю $\tau \leq q_0$, а второе — к случаю $q_0 < \tau \leq 1 - q_0$. Используя (4.14) в классическом режиме, границы (4.73) и (4.74) остаются в силе с относительной энтропией $R_\alpha(P||Q)$ вместо $H_\alpha(P||Q)$. Действительно, функция $x \mapsto \ln[1 + (\alpha - 1)x]$ увеличивается с ростом $x > 0$, а для $\xi \geq 0$ выполняется неравенство $\ln(1 + \xi) \leq \xi$. Верхние границы (4.73) и (4.74) являются однопараметрическими расширениями некоторых оценок, полученных в статье [48] для стандартной относительной энтропии.

Теперь мы приступим к исследованию верхних оценок на условную α -энтропию Цаллиса для всех $\alpha > 0$. Удобно слегка изменить используемые обозначения. Пусть X и Y — дискретные случайные величины с вероятностными распределениями $\{p_X(x)\}$ и $\{p_Y(y)\}$. При этом будем считать, что x и y принимают значения из одного и того же множества Ω мощности N . В контексте задач коммуникации X и Y могут соответствовать вводу и выводу некоторого канала связи. При этом Ω является множеством “слов” для некоторого формализованного языка. Через $p_{XY}(x, y)$ и $p_{X|Y}(x|y)$ соответственно обозначим совместные и условные вероятности. Совместная α -энтропия и условная α -энтропия определяются выражениями

$$H_\alpha(X, Y) := \frac{1}{1 - \alpha} \left(\sum_{x, y} p_{XY}(x, y)^\alpha - 1 \right), \quad (4.75)$$

$$H_\alpha(X|Y) := \sum_y p_Y(y)^\alpha H_\alpha(X|y), \quad (4.76)$$

где $H_\alpha(X|y) = (1 - \alpha)^{-1} \left(\sum_x p_{X|Y}(x|y)^\alpha - 1 \right)$. Записывая

$$H_\alpha(X|y) = - \sum_x p_{X|Y}(x|y)^\alpha \ln_\alpha p_{X|Y}(x|y),$$

мы далее получаем

$$H_\alpha(X|Y) = - \sum_{x, y} p_{XY}(x, y)^\alpha \ln_\alpha p_{X|Y}(x|y), \quad (4.77)$$

поскольку $p_Y(y) p_{X|Y}(x|y) = p_{XY}(x, y)$ в силу формулы Байеса. При выводе неравенств типа Фано мы будем следовать исходной схеме вывода (см. раздел 6.2 в книге [82]). Вероятность ошибки выражается в виде

$$P_e = \sum_y p_Y(y) q(e|y), \quad q(e|y) = 1 - p_{X|Y}(y|y) = \sum_{x \neq y} p_{X|Y}(x|y). \quad (4.78)$$

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение, после чего сформулируем основной результат.

Предложение 27 *Для всех $\alpha \in (0; \infty)$ справедливо неравенство*

$$H_\alpha(X|Y) \leq \sum_y p_Y(y)^\alpha h_\alpha(q(e|y)) + \ln_\alpha(N-1) \sum_y p_Y(y)^\alpha q(e|y)^\alpha. \quad (4.79)$$

Доказательство. Используя выражение для $q(e|y)$ и определение (4.2), мы записываем

$$\begin{aligned} H_\alpha(X|y) &= -p_{X|Y}(y|y)^\alpha \ln_\alpha p_{X|Y}(y|y) - \sum_{x \neq y} p_{X|Y}(x|y)^\alpha \ln_\alpha p_{X|Y}(x|y) \\ &= h_\alpha(q(e|y)) + q(e|y)^\alpha \ln_\alpha q(e|y) - \sum_{x \neq y} p_{X|Y}(x|y)^\alpha \ln_\alpha p_{X|Y}(x|y). \end{aligned} \quad (4.80)$$

В силу равенства $q(e|y) = \sum_{x \neq y} p_{X|Y}(x|y)$ и свойств α -логарифма, второе и третье слагаемые в правой части (4.80) комбинируются в форме

$$\begin{aligned} & - \sum_{x \neq y} p_{X|Y}(x|y)^\alpha \ln_\alpha p_{X|Y}(x|y) + q(e|y) q(e|y)^{\alpha-1} \ln_\alpha q(e|y) \\ &= - \sum_{x \neq y} p_{X|Y}(x|y)^\alpha \left(\ln_\alpha p_{X|Y}(x|y) - p_{X|Y}(x|y)^{1-\alpha} q(e|y)^{\alpha-1} \ln_\alpha q(e|y) \right) \\ &= - \sum_{x \neq y} p_{X|Y}(x|y)^\alpha \left(\ln_\alpha p_{X|Y}(x|y) + p_{X|Y}(x|y)^{1-\alpha} \ln_\alpha \frac{1}{q(e|y)} \right) \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$= -q(e|y)^\alpha \sum_{x \neq y} \frac{p_{X|Y}(x|y)^\alpha}{q(e|y)^\alpha} \ln_\alpha \frac{p_{X|Y}(x|y)}{q(e|y)} \leq q(e|y)^\alpha \ln_\alpha(N-1). \quad (4.82)$$

Здесь были использованы тождества $\ln_\alpha(1/z) = -z^{\alpha-1} \ln_\alpha z$ после (4.81) и $\ln_\alpha(\xi z) = \ln_\alpha \xi + \xi^{1-\alpha} \ln_\alpha z$ после (4.82). Подставляя (4.82) в (4.80) и далее в (4.76), получаем (4.79). ■

Предложение 28 *Пусть случайные переменные X и Y принимают значения из одного и того же конечного множества мощности N . Для*

заданной вероятности ошибки P_e условная энтропия Цаллиса ограничена сверху неравенствами

$$H_\alpha(X|Y) \leq \frac{P_e^\alpha - \alpha P_e}{1 - \alpha} + P_e^\alpha \ln_\alpha [N(N - 1)] \quad (0 < \alpha < 1), \quad (4.83)$$

$$H_\alpha(X|Y) \leq h_\alpha(P_e) + P_e^\alpha \ln_\alpha(N - 1) \quad (1 < \alpha < \infty). \quad (4.84)$$

Доказательство. Для $\alpha \in (0; 1)$ мы применяем формулу

$$h_\alpha(u) = \frac{u^\alpha + (1 - u)^\alpha - 1}{1 - \alpha} \leq \frac{u^\alpha - \alpha u}{1 - \alpha},$$

которая вытекает из (4.2) вместе с неравенством

$$1 - (1 - u)^\alpha = \int_0^u \alpha(1 - t)^{\alpha-1} dt \geq \int_0^u \alpha dt = \alpha u. \quad (4.85)$$

Используя эти соотношения и $\xi_y = p_Y(y) q(e|y)$, видим, что первая сумма в правой части (4.79) не превосходит величины

$$\frac{1}{1 - \alpha} \sum_y p_Y(y)^\alpha [q(e|y)^\alpha - \alpha q(e|y)] \leq \frac{1}{1 - \alpha} \left(\sum_y \xi_y^\alpha - \alpha P_e \right), \quad (4.86)$$

так как $\sum_y p_Y(y)^\alpha q(e|y) \geq \sum_y p_Y(y) q(e|y) = P_e$. Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\max \left\{ \sum_{y=1}^N \xi_y^\alpha : 0 \leq \xi_y, \sum_{y=1}^N \xi_y = P_e \right\} = N^{1-\alpha} P_e^\alpha, \quad (4.87)$$

причём максимум достигается для $\xi_y = P_e/N$. Итак, величина

$$\frac{N^{1-\alpha} P_e^\alpha - \alpha P_e}{1 - \alpha}$$

даёт верхнюю границу на правую часть (4.86). Складывая эту границу с произведением $\ln_\alpha(N - 1)$ на (4.87), мы доказываем (4.83).

Используя $p_Y(y)^\alpha \leq p_Y(y)$ для $\alpha > 1$, а также неравенство Иенсена для вогнутой функции (4.2), далее имеем

$$\begin{aligned} \sum_y p_Y(y)^\alpha h_\alpha(q(e|y)) &\leq \sum_y p_Y(y) h_\alpha(q(e|y)) \\ &\leq h_\alpha \left(\sum_y p_Y(y) q(e|y) \right) = h_\alpha(P_e), \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\sum_y p_Y(y)^\alpha q(e|y)^\alpha \leq \left(\sum_y p_Y(y) q(e|y) \right)^\alpha = P_e^\alpha. \quad (4.89)$$

Комбинируя (4.88) и (4.89) с неравенством (4.79), мы немедленно приходим к (4.84). ■

Для $\alpha > 1$ неравенство (4.84) с P_e вместо P_e^α было выведено в работе [55]. Таким образом, мы получили улучшение ранее известного результата. Формула (4.83) для $0 < \alpha < 1$ является новой, поскольку раньше в этой параметрической области неравенство Фано для условной энтропии Цаллиса не исследовалось. По построению неравенство (4.83) не является точным. Тем не менее оно оказывается достаточно хорошим при малых значениях P_e . Формулы (4.83) и (4.84) показывают, что условие $P_e \rightarrow 0$ означает $H_\alpha(X|Y) \rightarrow 0$. С другой стороны, если значение энтропии $H_\alpha(X|Y)$ велико, то вероятность ошибки также должна принимать заметное значение. В смысле этих рассуждений содержание наших неравенств согласуется с типичной интерпретацией стандартного неравенства Фано.

Равномерная непрерывность является важным свойством энтропии фон Неймана. В этом отношении первый явный результат был сформулирован Фанне [29]. Энтропия Цаллиса [36, 37] и её частичные суммы [28] также обладают свойством равномерной непрерывности. Известно, что классическое неравенство Фано можно использовать для улучшения верхних оценок типа Фанне (см., например, теорему 3.8 в книге [83]). Покажем теперь, что неравенства (4.83) и (4.84) также приводят к неравенствам типа Фанне для энтропии Цаллиса. Используя свойства α -логарифма, перепишем совместную энтропию (4.75) в виде [55]

$$H_\alpha(X, Y) = H_\alpha(X) + H_\alpha(Y|X) = H_\alpha(Y) + H_\alpha(X|Y) . \quad (4.90)$$

В силу $H_\alpha(Y|X) \geq 0$ разность $H_\alpha(X) - H_\alpha(Y) \leq H_\alpha(X|Y)$ ограничена сверху величиной правой частью (4.83) для $\alpha \in (0; 1)$ и правой частью (4.84) для $\alpha \in (1; \infty)$. Для заданных распределений $\{p_X(x)\}$ и $\{p_Y(y)\}$ совместные вероятности $p_{XY}(x, y)$ могут быть выбраны так, что

$$P_e = \mathcal{D}(P_X, P_Y) = \frac{1}{2} \sum_x |p_X(x) - p_Y(x)| . \quad (4.91)$$

Этот выбор обосновывается в рамках каплинг-метода [84]. Полагая $\{p_X(x)\} = \text{спес}(\boldsymbol{\rho})$ и $\{p_Y(y)\} = \text{спес}(\boldsymbol{\sigma})$ с убывающим порядком собственных значений, мы имеем $\mathcal{D}(P_X, P_Y) \leq D(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma})$ (см., например, лемму 11.1 в

книге [83]). В случае $N \geq 2$, правая часть (4.83) возрастает с ростом P_e для всех $0 \leq P_e \leq 1$, тогда как правая часть (4.84) возрастает с ростом P_e для $0 \leq P_e \leq (N-1)/N$. Заменяя $\mathcal{D}(P_X, P_Y)$ на бóльшую величину $D(\rho, \sigma)$, мы получаем следующий результат.

Предложение 29 Пусть d обозначает размерность пространства состояний, и пусть $\tau = D(\rho, \sigma)$. Тогда имеем

$$|H_\alpha(\rho) - H_\alpha(\sigma)| \leq \frac{\tau^\alpha - \alpha\tau}{1 - \alpha} + \tau^\alpha \ln_\alpha[d(d-1)] \quad (0 < \alpha < 1, \quad 0 \leq \tau \leq 1), \quad (4.92)$$

$$|H_\alpha(\rho) - H_\alpha(\sigma)| \leq h_\alpha(\tau) + \tau^\alpha \ln_\alpha(d-1) \quad \left(1 < \alpha, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{d-1}{d}\right). \quad (4.93)$$

Соотношение (4.93), работающее для $\alpha > 1$, даёт оценку равномерной непрерывности, полученную ранее прямым методом в статье [37]. Кстати, этот метод позволяет получить оценку для всех $0 \leq \tau \leq 1$. В пределе $\alpha \rightarrow 1$ неравенство (4.93) воспроизводит утверждение теоремы 3.8 книги [83]. Для $\alpha \in (0; 1)$ также существует неравенство

$$|H_\alpha(\rho) - H_\alpha(\sigma)| \leq \frac{(2\tau)^\alpha - 2\tau}{1 - \alpha} + (2\tau)^\alpha \ln_\alpha(d), \quad (4.94)$$

справедливое при условии $\|\rho - \sigma\|_1 = 2\tau \leq \alpha^{1/(1-\alpha)}$. Оценка (4.94) фактически доказана в [36] для всех $\alpha \in [0; 2]$, но в области $\alpha \geq 1$ более предпочтительна граница (4.93). Сопоставляя (4.92) с (4.94), мы видим следующее. В общем случае граница (4.92) обычно слабее, но зато она охватывает все допустимые значения $\tau \in [0, 1]$ следовой метрики. Область действия неравенства (4.94) ограничена диапазоном $0 \leq 2\tau \leq \alpha^{1/(1-\alpha)}$. Однако в случае небольших значений d граница (4.92) может быть лучше, чем (4.94). Пусть, к примеру, $d = 2$ и $\alpha = 1/2$, тогда формула (4.94) работает для $0 \leq \tau \leq 1/8$. В этом диапазоне правая часть (4.94) больше, чем правая часть (4.92). Более того, при достаточно малых τ разница между двумя границами составляет до 40 %. Таким образом, наше неравенство (4.92) представляет практический интерес, по крайней мере, в важнейшем случае кубита.

В заключение приведём доказательство неравенства (4.72), справедливого в некоммутативном случае [58]. Начнём с вывода одного вспомогательного утверждения. Оно формулируется следующим образом.

Предложение 30 Для целого числа $n \geq 1$ и конечномерных операторов $X, Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ p -норма Шаттена разности $X^n - Y^n$ для всех $p \in [1; \infty]$ удовлетворяет неравенству

$$\|X^n - Y^n\|_p \leq n \lambda_1^{n-1} \|X - Y\|_p, \quad (4.95)$$

где $\lambda_1 := \max\{\|X\|_\infty, \|Y\|_\infty\}$.

Доказательство. Доказательство проводится по индукции. Для $n = 1$ доказываемое утверждение очевидно. Если $n > 1$, то пишем

$$X^{n+1} - Y^{n+1} = X^{n+1} - X^n Y + X^n Y - Y^{n+1} = X^n (X - Y) + (X^n - Y^n) Y. \quad (4.96)$$

Для каждого $p \in [1; \infty]$ и произвольных $X, Y, Z \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ мы имеем (см., например, формулу (1.175) в книге [25])

$$\|XYZ\|_p \leq \|X\|_\infty \|Y\|_p \|Z\|_\infty. \quad (4.97)$$

В силу неравенства треугольника для норм формулы (4.97) и $\|X^n\|_\infty \leq \lambda_1^n$ приводят к соотношению

$$\begin{aligned} \|X^{n+1} - Y^{n+1}\|_p &\leq \|X^n (X - Y)\|_p + \|(X^n - Y^n) Y\|_p \\ &\leq \lambda_1^n \|X - Y\|_p + \lambda_1 \|X^n - Y^n\|_p. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Предполагая справедливость неравенства (4.95) для n , мы видим, что оно справедливо и для $n + 1$, так как $\|X^{n+1} - Y^{n+1}\|_p \leq (n + 1) \lambda_1^n \|X - Y\|_p$. ■

Используя Предложение 30, можно получить верхнюю границу вида b_0^{1-q} для любого $q > 1$, включая нецелые значения q . Для таких $q > 1$ мы записываем $n = \lfloor q \rfloor$ и $s = q - n$, откуда

$$\rho^{n+s} - \sigma^{n+s} = (\rho^n - \sigma^n) \rho^s + \sigma^n (\rho^s - \sigma^s). \quad (4.99)$$

В силу линейности следа и $r = q - 1$ имеем

$$\begin{aligned} r H_q(\rho || \sigma) &= \text{Tr} \{ \sigma^{-r} (\rho^q - \sigma^q) \} \\ &= \text{Tr} \{ \sigma^{-r} (\rho^n - \sigma^n) \rho^s \} + \text{Tr} \{ \sigma^{1-s} (\rho^s - \sigma^s) \}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Поскольку p -норма Шаттена не возрастает с ростом p , свойство (4.97) даёт мультипликативность $\|\mathbf{XY}\|_p \leq \|\mathbf{X}\|_p \|\mathbf{Y}\|_p$. Комбинируя (4.97) для $p = 1$ с очевидным неравенством $|\mathrm{Tr}(\mathbf{X})| \leq \mathrm{Tr}|\mathbf{X}|$, мы получаем

$$|\mathrm{Tr}(\mathbf{XYZ})| \leq \|\mathbf{X}\|_\infty \|\mathbf{Z}\|_\infty \mathrm{Tr}|\mathbf{Y}| . \quad (4.101)$$

В силу уравнений (4.95) и (4.101), первый след в правой части формулы (4.100) ограничен сверху величиной

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}^{-r}\|_\infty \|\boldsymbol{\rho}^n - \boldsymbol{\sigma}^n\|_1 \|\boldsymbol{\rho}^s\|_\infty &\leq n a_1^s \lambda_1^{n-1} b_0^{-r} \|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\sigma}\|_1 \\ &\leq [q] \lambda_1^{q-1} b_0^{-r} \|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\sigma}\|_1 , \end{aligned} \quad (4.102)$$

где $a_1 := \max\{a : a \in \mathrm{spec}(\boldsymbol{\rho})\}$ и $b_0 := \min\{b \neq 0 : b \in \mathrm{spec}(\boldsymbol{\sigma})\}$. Второй след в правой части (4.100) удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^{1-s} \boldsymbol{\rho}^s) - 1 = - (1 - s) \mathrm{H}_s(\boldsymbol{\rho} || \boldsymbol{\sigma}) \leq 0$$

в силу $s \in (0; 1)$ и положительности относительной s -энтропии. Объединение этого с уравнениями (4.100) и (4.102) тогда обеспечивает результат (4.72) для нецелого $q > 1$. Для $q \in (n; n + 1)$ правая часть формулы (4.102) является непрерывной функцией параметра q . Выражение для $\mathrm{H}_q(\boldsymbol{\rho} || \boldsymbol{\sigma})$ непрерывно по q для всех $q \neq 1$. Таким образом, (4.72) остаётся в силе, когда q стремится к целому числу снизу.

Глава 5

Квантификаторы квантовой когерентности на основе относительной энтропии Цаллиса

Интерес физиков к природе когерентных объектов и процессов имеет очень длинную историю. Понятие когерентности хорошо известно в оптике из-за роли фазовой когерентности в оптических явлениях [85]. В настоящее время стало ясно, что концепция квантовой когерентности необходима при изучении термодинамических свойств малых систем при низких температурах [86, 87, 88, 89, 90]. Понимание роли коллективных квантовых свойств, таких как многочастичный энтенглмент, также связано с описанием когерентности. Сцепленные состояния играют центральную роль в квантовых технологиях передачи и обработки информации [4]. Благодаря взаимодействию с окружающей средой когерентные суперпозиции неизбежно будут изменяться. Описывающие декогерентизацию физические процессы также являются предметом активных исследований. В последнее время квантовая когерентность исследуется с точки зрения её использования как физического ресурса. Ресурсные модели направлены на установление общих ограничений на те квантовые операции, которые могли бы быть реализованы [91, 92]. Чтобы разрешить эти вопросы в отношении когерентности, желательно располагать формальной основой для её количественного описания. Авторы работы [93] рассмотрели важные с физической точки зрения свойства, которым должен удовлетворять любой

квантификатор когерентности. Кроме того, они обсудили несколько естественных кандидатов на роль обладающего хорошими свойствами и легко вычисляемого квантификатора.

В принципе, любая мера различимости квантовых состояний приводит к возможному кандидату на количественную оценку степени когерентности [93]. Здесь следует выделить следующий отрицательный результат. Оказывается, что квантификатор когерентности, индуцированный возведённой в квадрат нормой Гильберта–Шмидта, не обладает свойством монотонности [93]. В этом отношении монотонность играет решающую роль в построении надлежащих характеристик степени когерентности. Некоторые количественные меры когерентности были использованы для изучения дополненности по отношению к набору равнонаклонённых базисов [94]. Авторы статьи [94] также выдвинули гипотезу, связанную с упомянутым выше отрицательным результатом. Благодаря простой структуре, предположенный квантификатор когерентности заслуживает дальнейшего изучения. Отношения между характеристиками когерентности и интерференционными явлениями были рассмотрены в работах [95, 96]. Роль когерентности в алгоритме Дойча–Джозсы и родственных ему была рассмотрена в статье [97]. Авторы работы [98] исследовали условия, при которых когерентность открытой квантовой системы не подвержена влиянию внешнего шума. Статья [99] посвящена квантовым процессам, которые не могут ни создавать, ни использовать когерентность. Квантование когерентности в бесконечномерных системах исследовано в работах [100, 101].

В этой главе будут исследованы квантификаторы когерентности, основанные на относительной α -энтропии Цаллиса. Основные результаты получены в работе [102]. Поскольку квантовые относительные энтропии Цаллиса выражаются через степени матриц плотности, в некоторых случаях мы можем ожидать сравнительно простой характер индуцированной меры когерентности. Сначала мы напомним базовые пункты подхода, разработанного в статье [93]. Далее будут рассмотрены относительные энтропии типа Цаллиса и доказаны два предварительных результата. Затем вводятся соответствующие квантификаторы когерентности и изучаются их основные

свойства. Методологически важный случай одиночного кубита обсуждается отдельно. Показано также, что свойство монотонности удовлетворяется в модифицированной форме, зависящей от формальной структуры выражения для относительной энтропии. Полученное семейство квантификаторов когерентности включает в себя однородную квадратичную функцию модулей матричных элементов. Другая квадратичная функция такого рода индуцируется квадратом ℓ_2 -нормы. Мы сопоставляем эти две функции в основном с точки зрения выполнения свойства монотонности.

Пусть $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — пространство линейных операторов на конечномерном гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Через $\mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ обозначим множество положительно полуопределённых операторов на \mathcal{H} . Подпространство $\text{ran}(\mathbf{X})$ обозначает образ оператора \mathbf{X} . В дальнейшем мы используем соглашение, согласно которому степени положительно полуопределённого оператора берутся только на подпространстве-носителе. Для любого $\mathbf{Z} \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ мы рассматриваем \mathbf{Z}^0 как ортогональный проектор на $\text{ran}(\mathbf{Z})$. Пусть \mathbf{P} и \mathbf{Q} — операторы ортогональной проекции. В конечномерном случае мы определяем $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$ как проектор на сумму подпространств $\text{ran}(\mathbf{P}) + \text{ran}(\mathbf{Q})$. В бесконечномерном случае это определение следует изменить должным образом. В дальнейшем мы будем иметь дело с конечномерными пространствами.

В случае операторов аналог понятия дистанции обычно индуцируется той или иной нормой. По отношению к заданному ортонормированному базису каждый оператор $\mathbf{X} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ представляется квадратной матрицей с элементами x_{ij} . Тогда ℓ_1 -норма определяется формулой

$$\|\mathbf{X}\|_{\ell_1} := \sum_{ij} |x_{ij}| . \quad (5.1)$$

Далее, ℓ_2 -норма определяется как

$$\|\mathbf{X}\|_{\ell_2} := \left(\sum_{ij} |x_{ij}|^2 \right)^{1/2} . \quad (5.2)$$

Эта норма также известна как норма Фробениуса или норма Гильберта–Шмидта [103]. Действительно, её можно переопределить с использованием сингулярных чисел. Отметим, что ℓ_2 -норма является унитарно инвариантной.

Состояние интересующей нас квантовой системы описывается матрицей плотности $\rho \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$, нормированной как $\text{Tr}(\rho) = 1$. Формулируя желаемые свойства для мер когерентности, мы будем использовать основные факты о квантовых операциях, уже описанные в Главе 1. Далее предполагаем, что эволюция открытых квантовых систем описывается линейными вполне положительными преобразованиями [4]. Авторы работы [93] разработали подход к понятию квантовой когерентности по отношению к фиксированному ортонормированному базису, предпочтительному с точки зрения исследуемых физических ситуаций. Они также перечислили те свойства, которым должна, по их мнению, удовлетворять всякая разумная мера когерентности. Некоторая разработка этих идей была выполнена в статьях [94, 96, 100]. Пусть $\mathcal{E} = \{|e_i\rangle\}$ — выбранный ортонормированный базис в \mathcal{H}_A . Набор некогерентных по отношению к \mathcal{E} состояний содержит все состояний, которые диагональны в нём, а именно

$$\delta = \sum_i \delta_i |e_i\rangle\langle e_i|. \quad (5.3)$$

Через $\mathcal{I}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{L}_+(\mathcal{H}_A)$ мы обозначаем множество всех таких состояний. Каждой матрице плотности квантификатор когерентности ставит в соответствие некоторое неотрицательное действительное число. С интуитивной точки зрения следующие два квантификатора когерентности выглядят наиболее естественными [93]. Используя ℓ_1 -норму, записываем

$$C_{\ell_1}(\mathcal{E}|\rho) := \min_{\delta \in \mathcal{I}(\mathcal{E})} \|\rho - \delta\|_{\ell_1} = \sum_{i \neq j} |\langle e_i | \rho | e_j \rangle|. \quad (5.4)$$

Другим естественным кандидатом служит величина, индуцированная возведённой в квадрат ℓ_2 -нормой. Она выражается аналитически простой формулой

$$C_{\ell_2}(\mathcal{E}|\rho) := \min_{\delta \in \mathcal{I}(\mathcal{E})} \|\rho - \delta\|_{\ell_2}^2 = \sum_{i \neq j} |\langle e_i | \rho | e_j \rangle|^2. \quad (5.5)$$

К сожалению, данная интуитивно привлекательная величина не обладает необходимым свойством монотонности [93]. Следовая норма также индуцирует интересный квантификатор для оценки уровня когерентности [104]. Свойства этого квантификатора продолжают изучаться. Авторы статьи [105] предложили общий подход, в рамках которого можно совместно

анализировать количественные уровни когерентности и энтенглмента. Они также исследовали геометрическую когерентность, основанную на понятии точности воспроизведения квантовых состояний [20, 21].

Напомним определение относительных энтропий типа Цаллиса. Многие фундаментальные результаты квантовой теории информации связаны со свойствами стандартной относительной энтропии [4]. В частности, предпринимались и предпринимаются попытки расширить семейство стандартных энтропийных функций [26]. Многие кандидаты на роль относительной энтропии могут быть унифицированы в рамках концепции квантовой f -дивергенции [61]. Этот подход является развитием подхода Чизара [64] к понятию относительной энтропии в случае вероятностных векторов. Для $0 < \alpha \neq 1$ относительная α -энтропия Цаллиса определяется формулой [70, 71]

$$H_\alpha(\mathbf{p}||\mathbf{q}) := \frac{1}{\alpha - 1} \left(\sum_j p_j^\alpha q_j^{1-\alpha} - 1 \right). \quad (5.6)$$

Если для некоторого j имеем $p_j \neq 0$ и $q_j = 0$, то относительная α -энтропия с $\alpha > 1$ принимается равной $+\infty$. В пределе $\alpha \rightarrow 1$ указанная дивергенция дает стандартную относительную энтропию

$$H_1(\mathbf{p}||\mathbf{q}) = \sum_j p_j \ln(p_j/q_j).$$

Здесь предполагается, что $-0 \ln 0 \equiv 0$ и $-p_j \ln 0 \equiv +\infty$ для $p_j > 0$ [4]. Основные свойства величины (5.6) обсуждаются в статьях [70, 71]. Мы укажем только некоторые из них. Как показано в работе [71], имеем $H_\alpha(\mathbf{p}||\mathbf{q}) \geq 0$. Необходимые условия для обращения $H_\alpha(\mathbf{p}||\mathbf{q})$ в нуль являются более сложным вопросом. Для f -дивергенций Чизара этот вопрос рассмотрен в статье [106]. Ответ связан с понятием строгой выпуклости некоторой функции в точке 1. Из полученных в [106] результатов следует, что $H_\alpha(\mathbf{p}||\mathbf{q}) = 0$ только и только тогда, когда вероятностные векторы \mathbf{p} и \mathbf{q} совпадают (см., например, пример 2 в статье [106]).

Перейдём к обсуждению квантового случая. Для нормированных матриц плотности ρ и σ стандартная относительная энтропия выражается

в виде [4]

$$H_1(\rho||\sigma) := \begin{cases} \text{Tr}(\rho \ln \rho - \rho \ln \sigma) , & \text{если } \text{ran}(\rho) \subseteq \text{ran}(\sigma) , \\ +\infty , & \text{иначе} . \end{cases} \quad (5.7)$$

Понятие относительной энтропии (5.7) можно расширить в нескольких направлениях. Для $\alpha \in (1; +\infty)$ определим α -дивергенцию Цаллиса по формуле

$$H_\alpha(\rho||\sigma) := \begin{cases} \frac{\text{Tr}(\rho^\alpha \sigma^{1-\alpha}) - 1}{\alpha - 1} , & \text{если } \text{ran}(\rho) \subseteq \text{ran}(\sigma) , \\ +\infty , & \text{иначе} . \end{cases} \quad (5.8)$$

В случае $\text{ran}(\rho) \subseteq \text{ran}(\sigma)$ след берётся над подпространством $\text{ran}(\sigma)$. Для $\alpha \in (0; 1)$ верхняя строка (5.8) имеет смысл без такого условия. С использованием α -логарифма формулу (4.15) можно переписать в виде, напоминающем (4.7). Напомним, что α -логарифм определяется выражением (2.6). С точностью до множителя относительная энтропия (4.15) входит в семейство квазиэнтропий, предложенных в статье [13].

Более общее семейство квантовых f -дивергенций изучается в работе [61]. Для дальнейших рассуждений удобно принять расширенное понятие дивергенции. Пусть \mathbf{A} и \mathbf{B} — положительно полуопределённые операторы такие, что $\text{ran}(\mathbf{A}) \subseteq \text{ran}(\mathbf{B})$. Тогда α -дивергенция \mathbf{A} относительно \mathbf{B} определяется формулой

$$H_\alpha(\mathbf{A}||\mathbf{B}) := \frac{1}{\alpha - 1} \left[\text{Tr}(\mathbf{A}^\alpha \mathbf{B}^{1-\alpha}) - \text{Tr}(\mathbf{A}) \right] . \quad (5.9)$$

Перечислим необходимые в дальнейшем свойства α -дивергенции. Большинство из них следуют из результатов, доказанных в более общем контексте авторами работы [61]. Для всех $\lambda \in [0; +\infty)$ справедливо равенство

$$H_\alpha(\lambda \mathbf{A}||\lambda \mathbf{B}) = \lambda H_\alpha(\mathbf{A}||\mathbf{B}) . \quad (5.10)$$

Предположим, что четыре положительно полуопределённых оператора \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{B}_2 удовлетворяют условию $\mathbf{A}_1^0 \vee \mathbf{B}_1^0 \perp \mathbf{A}_2^0 \vee \mathbf{B}_2^0$. Тогда мы имеем

$$H_\alpha(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2||\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = H_\alpha(\mathbf{A}_1||\mathbf{B}_1) + H_\alpha(\mathbf{A}_2||\mathbf{B}_2) . \quad (5.11)$$

Последнее может быть доказано для квантовых f -дивергенций при определённых требованиях, наложенных на линейные отображения состояний

[61]. Эти общие ограничения являются более общими, чем те, которые предполагаются в дальнейших выкладках. Мы будем использовать (5.11) при формулировке свойства монотонности для квантификаторов когерентности.

Одним из фундаментальных свойств относительной энтропии (5.7) является её монотонность под действием сохраняющих след вполне положительных преобразований [4]. А именно, для любого квантового канала Φ справедливо неравенство

$$H_1(\Phi(\rho) \parallel \Phi(\sigma)) \leq H_1(\rho \parallel \sigma) .$$

В классическом режиме для всех $\alpha \geq 0$ относительная энтропия Цаллиса (5.6) не возрастает под действием стохастических преобразований [71]. В квантовом режиме монотонность ограничена более узкой областью значений параметра α . Квантовая α -дивергенция (5.8) обладает свойством монотонности для $\alpha \in (0; 2]$, так что

$$H_\alpha(\Phi(\rho) \parallel \Phi(\sigma)) \leq H_\alpha(\rho \parallel \sigma) . \quad (5.12)$$

Данное неравенство следует из теоремы 4.3, доказанной в статье [61], а также из двух известных фактов относительно матричных функций. Рассматривая в качестве аргументов положительные матрицы, функция $\xi \mapsto \xi^\alpha$ является операторно вогнутой для $0 \leq \alpha \leq 1$ и операторно выпуклой для $1 \leq \alpha \leq 2$ (см., например, теоремы 4.2.3 и 1.5.8 в книге [57]). В свою очередь, свойство монотонности означает совместную выпуклость f -дивергенций [61]. В частности, квантовая α -дивергенция Цаллиса совместно выпукла для $\alpha \in (0; 2]$. Пусть $\{\rho_n\}$ и $\{\sigma_n\}$ — два набора нормированных матриц плотности, и пусть положительные числа p_n в сумме дают 1. Тогда для $\alpha \in (0; 2]$ имеем

$$H_\alpha\left(\sum_n p_n \rho_n \parallel \sum_n p_n \sigma_n\right) \leq \sum_n p_n H_\alpha(\rho_n \parallel \sigma_n) . \quad (5.13)$$

Свойства (5.12) и (5.13) будут принципиально важны при проверке соответствующих свойств индуцированных квантификаторов когерентности. Мы также обсудим ряд дополнительных свойств квантовой α -дивергенции,

которые необходимы в наших дальнейших построениях. Они будут сформулированы по отдельности вместе с доказательствами или ссылками на литературу.

Предложение 31 *Для $\alpha > 0$ квантовая относительная α -энтропия Цаллиса неотрицательна, то есть*

$$H_\alpha(\rho||\sigma) \geq 0, \quad (5.14)$$

причём равенство достигается, если и только если $\rho = \sigma$.

Доказательство этого утверждения проводится аналогично случаю стандартной относительной энтропии (см., например, теорему 11.7 в книге [4]). Здесь мы воздержимся от презентации соответствующих деталей. Следует отметить, что неотрицательность квантовой α -дивергенции сама по себе была рассмотрена в предложении 2.4 статьи [71]. Хотя авторы работы [71] сфокусировались на параметрическом диапазоне $0 < \alpha < 1$, их аргументы применимы для всех положительных значений α . Но, наряду с неотрицательностью, нам также важно, при каких условиях квантовая α -дивергенция обращается в нуль. Чтобы обосновать указанное в Предложении 31 условие равенства, мы просто модифицируем доказательство теоремы 11.7 из [4] с заменой обычного логарифма на α -логарифм (3.4). Ещё одно свойство относительной α -энтропии Цаллиса будет использоваться при изучении монотонности в сильном смысле индуцированных мер когерентности.

Предложение 32 *Пусть $\{K_n\}$ — набор операторов $K_n : \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_{B_n}$ таких, что*

$$\sum_n K_n^\dagger K_n = \mathbf{1}_A. \quad (5.15)$$

Для заданных нормированных матриц плотности ρ и σ на \mathcal{H}_A указанные операторы генерируют два вероятностных распределения с элементами

$$p_n = \text{Tr}(K_n \rho K_n^\dagger), \quad q_n = \text{Tr}(K_n \sigma K_n^\dagger). \quad (5.16)$$

Для $\alpha > 0$ квантовые α -дивергенции удовлетворяют неравенству

$$\sum_n H_\alpha(K_n \rho K_n^\dagger || K_n \sigma K_n^\dagger) \geq \sum_n p_n^\alpha q_n^{1-\alpha} H_\alpha(\rho_n || \sigma_n), \quad (5.17)$$

где состояния $\rho_n = p_n^{-1} \mathbf{K}_n \rho \mathbf{K}_n^\dagger$ и $\sigma_n = q_n^{-1} \mathbf{K}_n \sigma \mathbf{K}_n^\dagger$ являются нормированными.

Доказательство. Фактически правую часть формулы (5.17) можно анализировать для тех значений n , для которых одновременно $p_n \neq 0$ и $q_n \neq 0$. Действительно, когда $p_n \neq 0$ и $q_n = 0$ для некоторого n , мы имеем $\mathbf{K}_n \rho \mathbf{K}_n^\dagger \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{K}_n \sigma \mathbf{K}_n^\dagger = \mathbf{0}$. Тогда соответствующий член в левой части формулы (5.17) становится равным $+\infty$ (см. вторую строку (5.8)), откуда сразу вытекает и сам результат. Итак, мы будем доказывать (5.17) в предположении, что $p_n \neq 0$ означает $q_n \neq 0$. В силу определения (5.8), мы записываем

$$\begin{aligned} H_\alpha(\mathbf{K}_n \rho \mathbf{K}_n^\dagger \| \mathbf{K}_n \sigma \mathbf{K}_n^\dagger) &= H_\alpha(p_n \rho_n \| q_n \sigma_n) \\ &= p_n^\alpha q_n^{1-\alpha} H_\alpha(\rho_n \| \sigma_n) + \frac{p_n^\alpha q_n^{1-\alpha} - p_n}{\alpha - 1}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Следовательно, левая часть (5.17) минус правая её часть равна величине $H_\alpha(\mathbf{p} \| \mathbf{q}) \geq 0$. ■

В случае $\alpha = 1$ неравенство (5.17) принимает вид

$$\sum_n H_1(\mathbf{K}_n \rho \mathbf{K}_n^\dagger \| \mathbf{K}_n \sigma \mathbf{K}_n^\dagger) \geq \sum_n p_n H_1(\rho_n \| \sigma_n). \quad (5.19)$$

Это свойство стандартной относительной энтропии было сформулировано и доказано в [107] (см. пункт (F4)). Итак, мы получили расширение формулы (5.19) на квантовые относительные энтропии типа Цаллиса. Похоже, что такое расширение в текущей литературе ещё не обсуждалось. Следует отметить, что по своей аналитической структуре правая часть (5.17) сложнее. Неравенство (5.17) потребуется нам при изучении изменений квантификаторов когерентности при некогерентных селективных измерениях.

Авторы работы [93] указали общий способ получения кандидатов для количественной характеристики уровня когерентности по отношению к заданному базису. Чтобы расширить набор квантификаторов когерентности, мы рассмотрим обобщённые относительные энтропии. Этот подход формулируется следующим образом. Взяв α -дивергенцию Цаллиса в качестве меры различимости квантовых состояний, мы определим величину

$$C_\alpha(\mathcal{E} | \rho) := \min_{\delta \in \mathcal{I}(\mathcal{E})} H_\alpha(\rho \| \delta). \quad (5.20)$$

где $\alpha > 0$. В принципе, используемый подход может применяться с квантовыми дивергенциями более общего типа. Как правило, проблема оптимизации с такими дивергенциями является достаточно сложной. Однако в случае относительной энтропии типа Цаллиса оказывается возможным получить замкнутое аналитическое выражение в терминах матричных элементов оператора плотности. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 33 Для $0 < \alpha \neq 1$ определённый формулой (5.20) квант-фикатор когерентности равен

$$C_\alpha(\mathcal{E}|\rho) = \frac{1}{\alpha - 1} \left\{ \left(\sum_j \langle e_j | \rho^\alpha | e_j \rangle^{1/\alpha} \right)^\alpha - 1 \right\}. \quad (5.21)$$

Доказательство. Поскольку α -дивергенцию $H_\alpha(\rho||\delta)$ следует минимизировать, мы предполагаем, что $\text{supp}(\rho) \subseteq \text{supp}(\delta)$. Обозначая собственные значения δ через δ_j , мы тем самым устанавливаем $\delta_j = 0$ всякий раз, когда $\langle e_j | \rho | e_j \rangle = 0$. Так как любая матрица плотности $\delta \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$ диагональна относительно \mathcal{E} , записываем

$$H_\alpha(\rho||\delta) = \frac{1}{\alpha - 1} \left\{ \sum_j \langle e_j | \rho^\alpha | e_j \rangle \delta_j^{1-\alpha} - 1 \right\}, \quad (5.22)$$

где сумма берётся по ненулевым матричным элементам. Введём вероятности r_j такие, что $r_j^\alpha \propto \langle e_j | \rho^\alpha | e_j \rangle$. Принимая во внимание условие нормировки, получаем

$$r_j = \frac{1}{Z} \langle e_j | \rho^\alpha | e_j \rangle^{1/\alpha}, \quad (5.23)$$

$$Z = \sum_i \langle e_i | \rho^\alpha | e_i \rangle^{1/\alpha}. \quad (5.24)$$

Подстановка $\langle e_j | \rho^\alpha | e_j \rangle = Z^\alpha r_j^\alpha$ в формулу (5.22) даёт

$$H_\alpha(\rho||\delta) = Z^\alpha H_\alpha(\mathbf{r}||\delta) + \frac{N^\alpha - 1}{\alpha - 1}. \quad (5.25)$$

В последнем выражении вероятности r_j и знаменатель Z нормировки зависят только от состояния ρ . Как уже упоминалось, мы заведомо имеем $H_\alpha(\mathbf{r}||\delta) \geq 0$. Чтобы свести к минимуму правую часть (5.25), мы должны поэтому достичь равенства $H_\alpha(\mathbf{r}||\delta) = 0$, принимая $\delta_j = r_j$. Объединение этого результата с формулой для Z завершает доказательство. ■

Таким образом, результат минимизации выражается через матричные элементы возведённой в степень α матрицы плотности. Для заданных ρ и α , минимум в (5.20) достигается с диагональным состоянием

$$\delta_\rho = \frac{1}{Z} \sum_j \langle e_j | \rho^\alpha | e_j \rangle^{1/\alpha} | e_j \rangle \langle e_j | . \quad (5.26)$$

Следует отметить, что δ_ρ зависит не только от состояния ρ , но и от значения параметра α . Чтобы не загромождать формулы, мы не будем указывать параметрическую зависимость явно. В случае $\alpha = 1$ имеем дело с формулировкой на основе стандартной относительной энтропией. Тогда состояние (5.26) получается из ρ обнулением всех недиагональных элементов. Соответствующая мера когерентности оказывается равной разности энтропий фон Неймана между полученным диагональным состоянием и самим ρ [93]. Рассмотрим другой интересный случай $\alpha = 2$. Поскольку матрица плотности эрмитова, получаем

$$C_2(\mathcal{E}|\rho) = \left(\sum_j \sqrt{\sum_i |\rho_{ij}|^2} \right)^2 - 1 , \quad (5.27)$$

где $\rho_{ij} = \langle e_i | \rho | e_j \rangle$. Подобно величине (5.5), этот квантификатор когерентности является функцией квадратов модулей $|\rho_{ij}|^2$, но более сложным по своей аналитической структуре. Теперь перечислим основные свойства представленных квантификаторов когерентности.

Прежде всего, величина (5.20) равна нулю для всех некогерентных состояний. Данное заключение следует из (5.21) подстановкой $\langle e_j | \rho^\alpha | e_j \rangle = \rho_{jj}^\alpha$ и $\sum_j \rho_{jj} = 1$. Кроме того, мы видим, что $C_\alpha(\mathcal{E}|\rho) = 0$ только для некогерентных состояний. Действительно, в соответствии с Предложением 31 необходимым условием для $H_\alpha(\rho||\sigma) = 0$ является равенство $\rho = \sigma$. Поэтому для $\rho \notin \mathcal{I}(\mathcal{E})$ и любого $\delta \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$ мы имеем $H_\alpha(\rho||\delta) > 0$. Таким образом, квантификатор когерентности (5.20) удовлетворяет одному из очевидных условий, которым должен удовлетворять любой кандидат на роль меры когерентности [93]. Верхнюю границу на α -квантификаторы когерентности можно выразить в терминах степени отклонения данного состояния от идемпотентного.

Предложение 34 Для $0 < \alpha \leq 2$ справедливо неравенство

$$C_\alpha(\mathcal{E}|\rho) \leq -\ln_\alpha\left(\frac{1}{d \operatorname{Tr}(\rho^2)}\right). \quad (5.28)$$

Для $2 < \alpha < \infty$ мы имеем

$$C_\alpha(\mathcal{E}|\rho) \leq \frac{1}{\alpha - 1} \left\{ d \operatorname{Tr}(\rho^2) \left(1 + \sqrt{d-1} \sqrt{d \operatorname{Tr}(\rho^2) - 1}\right)^{\alpha-2} - 1 \right\}. \quad (5.29)$$

Доказательство. Сначала предположим, что $\alpha \neq 1$. Используя определение (5.20), для $0 < \alpha \neq 1$ мы легко получаем

$$C_\alpha(\mathcal{E}|\rho) \leq \frac{d^{\alpha-1} \operatorname{Tr}(\rho^\alpha) - 1}{\alpha - 1}. \quad (5.30)$$

Правая часть неравенства (5.30) является α -дивергенцией ρ по отношению к полностью смешанному состоянию. В параметрическом диапазоне $\alpha \leq 2$ функция $\xi \mapsto \xi^{\alpha-1}/(\alpha-1)$ вогнута. Вычисляя след в собственном базисе ρ и применяя неравенство Йенсена, мы записываем

$$\frac{\operatorname{Tr}(\rho^\alpha)}{\alpha - 1} = \sum_j \lambda_j \frac{\lambda_j^{\alpha-1}}{\alpha - 1} \leq \frac{[\operatorname{Tr}(\rho^2)]^{\alpha-1}}{\alpha - 1}. \quad (5.31)$$

Напомним, что собственные значения λ_j матрицы плотности ρ неотрицательны и связаны условием нормировки. Комбинируя равенство (5.31) с формулами (5.30) и (3.4), приходим к результату (5.28) для $\alpha \neq 1$. Чтобы завершить доказательство (5.28), записываем

$$C_1(\mathcal{E}|\rho) \leq \ln d + \operatorname{Tr}(\rho \ln \rho), \quad (5.32)$$

повторяя затем вышеизложенные выкладки с вогнутой функцией $\xi \mapsto \ln \xi$.

Перейдём к рассмотрению случая $\alpha > 2$. Можно показать, что наибольшее значение оператора ρ удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{\max} \leq \frac{1}{d} \left(1 + \sqrt{d-1} \sqrt{d \operatorname{Tr}(\rho^2) - 1}\right). \quad (5.33)$$

Это неравенство в комбинации с формулами $\operatorname{Tr}(\rho^\alpha) \leq \lambda_{\max}^{\alpha-2} \operatorname{Tr}(\rho^2)$ и (5.30) завершает доказательство (5.29). ■

Неравенства (5.28) и (5.29) обеспечивают верхнюю границу при оценке квантификаторов когерентности на основе α -дивергенции. Правые части этих неравенств выражены как величины $\operatorname{Tr}(\rho^2)$, характеризующей

близость матрицы плотности к чистым состояниям. В некотором отношении формулы (5.28) и (5.29) напоминают соотношение комплементарности, выведенное в статье [94] для мер когерентности (5.4) по отношению к $d + 1$ равнонаклонённым базисам. В отличие от упомянутого соотношения, неравенства (5.28) и (5.29) содержат единственный квантификатор только в одном базисе. Величина $\text{Tr}(\rho^2)$ тесно связана с концепцией операционно инвариантной меры информации в квантовых измерениях, предложенной в работе [108]. Результат (5.28) можно переформулировать как соотношение комплементарности между когерентностью и мерой смешанности. В d -мерном пространстве степень смешанности матрицы плотности ρ обычно характеризуется величиной [109]

$$M(\rho) := \frac{d}{d-1} [1 - \text{Tr}(\rho^2)] . \quad (5.34)$$

Эта характеристика равна нулю для чистых состояний и достигает 1 для полностью смешанного состояния. Мы можем выразить $\text{Tr}(\rho^2)$ через (5.34) и подставить результат в (5.28) и (5.29). Однако полученные неравенства будут достаточно сложными по своей аналитической структуре. Удобный альтернативный способ заключается в том, чтобы аппроксимировать сверху правую часть (5.28), используя при этом линейную функцию переменной $d \text{Tr}(\rho^2) = y \in [1; d]$. Мы применим здесь функцию

$$f_\alpha(y) := -\ln_\alpha\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{y^{\alpha-1} - 1}{\alpha - 1} , \quad (5.35)$$

которая вогнута для $\alpha \leq 2$. Взяв формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и с промежуточной точкой c такой, что $1 < c < d$, мы записываем

$$f_\alpha(y) = f_\alpha(1) + f'_\alpha(1)(y-1) + \frac{1}{2} f''_\alpha(c)(y-1)^2 \leq y-1 . \quad (5.36)$$

Здесь использованы формулы $f_\alpha(1) = 0$, $f'_\alpha(1) = 1$ и $f''_\alpha(c) \leq 0$. Неравенство (5.36) выражает тот факт, что график вогнутой функции $f_\alpha(y)$ проходит ниже его касательной, проведённой в точке $y = 1$. Объединяя (5.36) с (5.28), для $0 < \alpha \leq 2$ получаем

$$C_\alpha(\mathcal{E}|\rho) \leq d \text{Tr}(\rho^2) - 1 . \quad (5.37)$$

В силу формулы (5.37) итоговое соотношение комплементарности между когерентностью и мерой смешанности записывается в виде

$$\frac{1}{d-1} C_\alpha(\mathcal{E}|\rho) + M(\rho) \leq 1, \quad (5.38)$$

где $0 < \alpha \leq 2$. Когда степень смешанности возрастает, верхняя граница на значения α -квантификатора когерентности уменьшается. Поучительно сравнить (5.38) с теоремой 1 статьи [110], где соотношение дополнителъности между когерентностью и смешанность выражается через величины (5.4) и (5.34).

Полезно рассмотреть свойства α -квантификаторов когерентности на простейшем примере одиночного кубита. Здесь многие результаты допускают явные аналитические выражения. По отношению к выбранному базису матрица плотности записывается в виде

$$\omega = \begin{pmatrix} u & w^* \\ w & 1-u \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

Чтобы не загромождать формулы, мы будем далее опускать в обозначениях символ двухмерного базиса. Поскольку матрица ω положительна, положительны и её диагональные матричные элементы, так что вещественный параметр u лежит между 0 и 1. Собственные значения матрицы (5.39) записываются в виде

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + |w|^2}. \quad (5.40)$$

Собственные значения должны быть неотрицательны и не больше 1, откуда $|w| \leq \sqrt{u(1-u)}$. Для целочисленных значений $\alpha > 0$ квантификаторы когерентности выражаются довольно простыми формулами. Для $\alpha = 1$ мы имеем

$$C_1(\omega) = h(u) - h(\lambda_+) , \quad (5.41)$$

где $h(u) := -u \ln u - (1-u) \ln(1-u)$ обозначает бинарную энтропию Шеннона. Далее записываем

$$C_2(\omega) = \left(\sqrt{u^2 + |w|^2} + \sqrt{(1-u)^2 + |w|^2} \right)^2 - 1. \quad (5.42)$$

Заметим также, что $C_{\ell_1}(\omega) = 2|\omega|$ и $C_{\ell_2}(\omega) = 2|\omega|^2$. Для других целочисленных α результирующие выражения получаются аналогично случаю (5.42).

Один из способов изучения когерентности одного кубита заключается в следующем. Для данного значения u рассмотрим интервал изменений соответствующего квантификатора. Минимум явно равен 0, а максимум мы найдём, исследуя соответствующие функции переменной $|\omega|$ в интервале $|\omega| \leq \sqrt{u(1-u)}$. Таким образом, получаем

$$\max \left\{ C_2(\omega) : |\omega| \leq \sqrt{u(1-u)} \right\} = 2\sqrt{u(1-u)} , \quad (5.43)$$

$$\max \left\{ C_{\ell_1}(\omega) : |\omega| \leq \sqrt{u(1-u)} \right\} = 2\sqrt{u(1-u)} . \quad (5.44)$$

Для данного u квантификаторы когерентности $C_2(\omega)$ и $C_{\ell_1}(\omega)$ покрывают один и тот же интервал значений. Далее, их максимальные значения достигаются для одних и тех же состояний. Эти состояния чистые, так как $|\omega|^2 = u(1-u)$ влечёт $\lambda_+ = 1$ и $\lambda_- = 0$. Квантификаторы когерентности равны нулю для полностью некогерентных состояний, когда $\omega = 0$.

Рассмотрим максимум $C_\alpha(\omega)$ для заданного u аналогично (5.43) и (5.44). На рис. 5.1 этот максимум показан как функция от u для нескольких целочисленных значений α . В частности, сплошная линия показывает оба максимума (5.43) и (5.44). Кривые нарисованы только для половины интервала $u \in [0; 1]$, так как они симметричны относительно прямой $u = 1/2$. Поведение всех четырёх кривых оказывается подобным. В каждом случае диапазон между осью абсцисс и кривой показывает те значения, которые покрываются соответствующим квантификатором. Следовательно, α -квантификатор когерентности представляется более чувствительным для больших значений α . С другой стороны, меры когерентности должны подчиняться свойствам монотонности. Без выполнения этих свойств любой кандидат на роль меры когерентности должен быть отклонён.

В случае $d = 2$ формула (5.38) приводит к соотношению

$$C_\alpha(\omega) + M(\omega) \leq 1 , \quad (0 < \alpha \leq 2) .$$

Для одиночного кубита можно получить даже более плотное соотношение

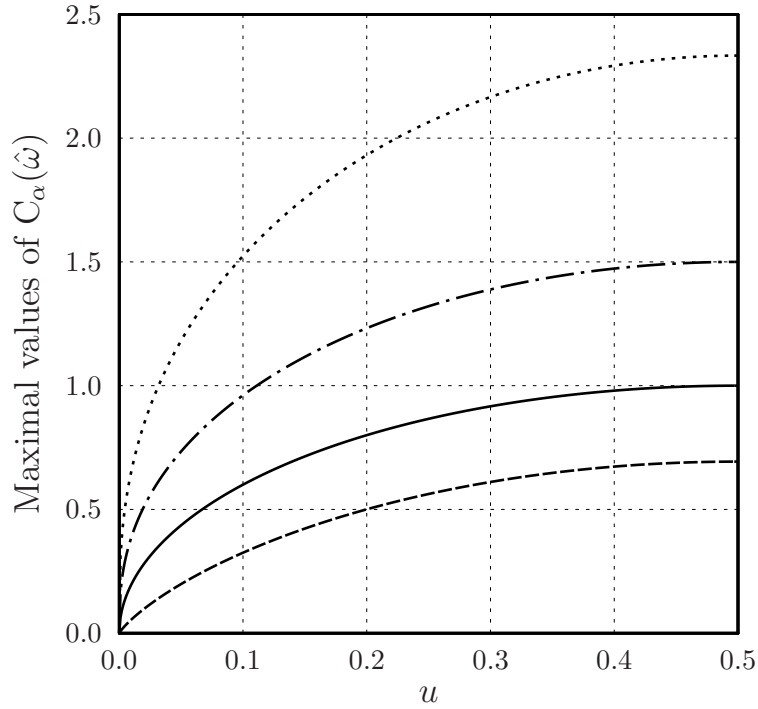


Рис. 5.1: Максимальное значение $C_\alpha(\omega)$ в зависимости от u показано штрихованной линией для $\alpha = 1$, сплошной линией для $\alpha = 2$, штрих-пунктирной линией для $\alpha = 3$ и пунктиром для $\alpha = 4$.

комплементарности. В частности, получаем

$$4u(1 - u) \leq C_2(\omega) + M(\omega) \leq 2\sqrt{u(1 - u)}. \quad (5.45)$$

Целесообразно также сопоставить неравенство (5.45) с точным выражением

$$C_{\ell_1}(\omega)^2 + M(\omega) = 4u(1 - u). \quad (5.46)$$

На рис. 5.2 левая часть (5.45) показана штрихованной линией, а правая часть (5.45) — сплошной линией. Здесь первое значение достигается для полностью некогерентных состояний, тогда как последнее имеет место для чистых состояний. Для каждого u щель между этими линиями показывает диапазон, покрываемый значениями суммы $C_2(\omega) + M(\omega)$. Таким образом, эта сумма изменяется в достаточно узком интервале. Она похожа на сумму (5.46), но последняя квадратична по мере когерентности. Таким образом, уменьшение когерентности будет скорее сопровождаться некоторым увеличением смешанности. Рисунок 5.2 также иллюстрирует, что

соотношение $C_2(\omega) + M(\omega) \leq 1$ является достаточно плотным, если диагональные элементы (5.39) существенно не отличаются друг от друга. В случае одиночного кубита рассматриваемые квантификаторы когерентности обнаруживают поведение, аналогичное мере (5.4). Существуют также естественные взаимосвязи между когерентностью и смешанностью, что ярко демонстрируется квантификатором (5.27). Таким образом, квадратичная функция (5.27) предоставляет полезный альтернативный подход для количественной оценки уровня когерентности. Чтобы окончательно обосновать это утверждение, следует рассмотреть вопрос о монотонности введённых мер по отношению к действию квантовых операций. Оказывается, что свойства монотонности α -квантификаторов когерентности удаётся обеспечить только в обобщённой формулировке, зависящей от α .

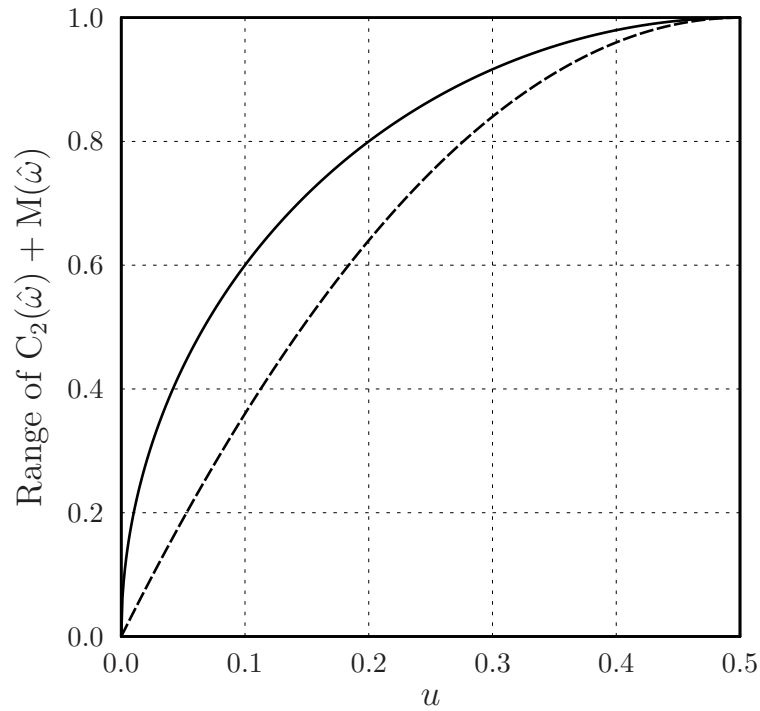


Рис. 5.2: Минимальные и максимальные значения суммы $C_2(\omega) + M(\omega)$ как функции u .

Поведение мер когерентности при трансформации квантовых состояний является принципиально важным [93]. Естественно ожидать, что уровень когерентности не может повыситься в результате смешивания. Пусть $\{\rho_n\}$ является набором матриц плотности, и пусть положительные числа

ρ_n удовлетворяют $\sum_n \rho_n = 1$. Для всех $\alpha \in (0; 2]$ мы имеем

$$C_\alpha(\mathcal{E} \mid \sum_n \rho_n \rho_n) \leq \sum_n \rho_n C_\alpha(\mathcal{E} \mid \rho_n) . \quad (5.47)$$

Этот результат немедленно следует из совместной выпуклости (5.13) и определения (5.20). Здесь мы воздержимся от детального вывода. Следовательно, для $\alpha \in (0; 2]$ квантификатор (5.20) удовлетворяет одному из свойств, перечисленных в [93]. Изменения мер когерентности при действии на состояния некоторых форм квантовых операций имеют исключительно большое значение. Авторы работы [93] сфокусировали внимание на некогерентных операциях двух определённых классов. Первая формулировка свойства монотонности звучит следующим образом. Вспомним, что понятие когерентности зависит от базиса. Пусть \mathcal{E}' — заданный ортонормированный базис, по отношению к которому введены некогерентные состояния выходной системы с пространством \mathcal{H}_B . Некогерентная квантовая операция определяется как сохраняющее след вполне положительное отображение $\Phi_I : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$, операторы Крауса которого подчиняются свойству

$$\rho \in \mathcal{I}(\mathcal{E}) \implies \frac{K_n \rho K_n^\dagger}{\text{Tr}(K_n \rho K_n^\dagger)} \in \mathcal{I}(\mathcal{E}') . \quad (5.48)$$

Для $\alpha \in (0; 2]$ квантификатор когерентности (5.20) является монотонным при некогерентных операциях первого класса в смысле соотношения

$$C_\alpha(\mathcal{E}' \mid \Phi_I(\rho)) \leq C_\alpha(\mathcal{E} \mid \rho) . \quad (5.49)$$

Это заключение прямо следует из свойства (5.12) и определения (5.20), включающего процедуру минимизации.

Свойство монотонности при некогерентных селективных измерениях является более жёстким требованием [93]. Формулировка (5.49) относится к ситуации, в которой утрачивается информации об итогах измерений. Если результаты измерений сохраняются, то дальнейшие операции выбираются в соответствии с этими результатами. Такие операции также описываются множеством операторов Крауса $\{K_n\}$, но теперь эти операторы могут иметь разные пространства вывода, хотя пространство ввода одно и то же. Итак, мы рассматриваем набор операторов

$$K_n : \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_{Bn} ,$$

которые удовлетворяют соотношению полноты

$$\sum_n \mathbf{K}_n^\dagger \mathbf{K}_n = \mathbf{1}_A . \quad (5.50)$$

Каждому выходному пространству \mathcal{H}_{Bn} назначается ортонормированный базис \mathcal{E}'_n , используемый для определения некогерентных матриц плотности. Авторы статьи [93] сформулировали монотонность при некогерентных селективных измерениях в виде соотношения

$$\sum_n p_n C(\mathcal{E}'_n | \rho_n) \leq C(\mathcal{E} | \rho) . \quad (5.51)$$

Здесь выражение $p_n = \text{Tr}(\mathbf{K}_n \rho \mathbf{K}_n^\dagger)$ даёт вероятность n -го исхода, приводящего к n -му частному выводу

$$\rho_n = p_n^{-1} \mathbf{K}_n \rho \mathbf{K}_n^\dagger . \quad (5.52)$$

Авторы статьи [104] назвали свойство (5.51) сильной монотонностью при действии некогерентных каналов. В контексте микроскопических явлений переноса некогерентные квантовые каналы рассмотрены в работе [111]. Оказывается, что α -квантификаторы когерентности подчиняются свойству монотонности в видоизменённой формулировке.

Предложение 35 Пусть некогерентное состояние $\delta_\rho \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$ удовлетворяет равенству $C_\alpha(\mathcal{E} | \rho) = H_\alpha(\rho | | \delta_\rho)$. Для всех $\alpha \in (0; 2]$ квантификатор когерентности (5.20) при действии некогерентных селективных измерений удовлетворяет неравенству

$$\sum_n p_n^\alpha q_n^{1-\alpha} C_\alpha(\mathcal{E}'_n | \rho_n) \leq C_\alpha(\mathcal{E} | \rho) , \quad (5.53)$$

где вероятности $p_n = \text{Tr}(\mathbf{K}_n \rho \mathbf{K}_n^\dagger)$ и $q_n = \text{Tr}(\mathbf{K}_n \delta_\rho \mathbf{K}_n^\dagger)$, а вывод ρ_n определён формулой (5.52).

Доказательство. Прежде всего заметим, что можно ввести множество операторов Крауса с одним и тем же выходным пространством. Точнее, мы определяем пространство

$$\tilde{\mathcal{H}}_B := \bigoplus_n \mathcal{H}_{Bn} , \quad (5.54)$$

где \mathcal{H}_{Bn} есть выходное пространство n -го оператора Крауса \mathbf{K}_n . Каждому $\mathbf{K}_n : \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_{Bn}$ поставим в соответствие оператор

$$\mathbf{L}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{K}_n \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (5.55)$$

Таким образом, данный оператор представлен столбцом из блоков, причём n -ый блок равен \mathbf{K}_n , а все остальные блоки нулевые соответствующего размера. Ясно, что оператор \mathbf{L}_n преобразует векторы пространства \mathcal{H}_A в векторы пространства $\tilde{\mathcal{H}}_B$. Для каждого n вводимые состояния ρ и δ_ρ отображаются соответственно в суб-нормированные выводимые матрицы плотности

$$\mathbf{L}_n \rho \mathbf{L}_n^\dagger = \text{diag}(\mathbf{0} \dots \mathbf{K}_n \rho \mathbf{K}_n^\dagger \dots \mathbf{0}), \quad (5.56)$$

$$\mathbf{L}_n \delta_\rho \mathbf{L}_n^\dagger = \text{diag}(\mathbf{0} \dots \mathbf{K}_n \delta_\rho \mathbf{K}_n^\dagger \dots \mathbf{0}). \quad (5.57)$$

Итак, вывод (5.56) является блочно-диагональной матрицей с $\mathbf{K}_n \rho \mathbf{K}_n^\dagger$ в качестве блока (n, n) и остальными нулевыми блоками. Аналогичным образом, вывод (5.57) является блочно-диагональной матрицей с оператором $\mathbf{K}_n \delta_\rho \mathbf{K}_n^\dagger$ в качестве единственного ненулевого блока (n, n) . Согласно определению (5.8) мы сразу получаем

$$\text{H}_\alpha(\mathbf{L}_n \rho \mathbf{L}_n^\dagger || \mathbf{L}_n \delta_\rho \mathbf{L}_n^\dagger) = \text{H}_\alpha(\mathbf{K}_n \rho \mathbf{K}_n^\dagger || \mathbf{K}_n \delta_\rho \mathbf{K}_n^\dagger). \quad (5.58)$$

Теперь введём сохраняющее след вполне положительное отображение $\tilde{\Phi}_I : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}_B)$ в соответствии с формулой

$$\tilde{\Phi}_I(\mathbf{X}) := \sum_n \mathbf{L}_n \mathbf{X} \mathbf{L}_n^\dagger. \quad (5.59)$$

Сохранение следа вытекает из равенства $\mathbf{L}_n^\dagger \mathbf{L}_n = \mathbf{K}_n^\dagger \mathbf{K}_n$ и того, что операторы Крауса некогерентного селективного измерения удовлетворяют свойству (5.50). При вводимом состоянии ρ вывод квантовой операции (5.59) можно представить в виде

$$\tilde{\Phi}_I(\rho) = \sum_n p_n \tilde{\rho}_n, \quad (5.60)$$

где $\tilde{\rho}_n = p_n^{-1} \mathbf{L}_n \rho \mathbf{L}_n^\dagger$. Обозначая $\delta_{\rho n} = q_n^{-1} \mathbf{K}_n \delta_\rho \mathbf{K}_n^\dagger$, мы записываем ряд соотношений, а именно

$$H_\alpha(\rho || \delta_\rho) \geq H_\alpha(\tilde{\Phi}_I(\rho) || \tilde{\Phi}_I(\delta_\rho)) \quad (5.61)$$

$$= \sum_n H_\alpha(\mathbf{L}_n \rho \mathbf{L}_n^\dagger || \mathbf{L}_n \delta_\rho \mathbf{L}_n^\dagger) \quad (5.62)$$

$$= \sum_n H_\alpha(\mathbf{K}_n \rho \mathbf{K}_n^\dagger || \mathbf{K}_n \delta_\rho \mathbf{K}_n^\dagger) \quad (5.63)$$

$$\geq \sum_n p_n^\alpha q_n^{1-\alpha} H_\alpha(\rho_n || \delta_{\rho n}) . \quad (5.64)$$

Здесь шаг (5.61) следует из (5.12), тогда как шаг (5.62) следует из (5.11). Действительно, конструкция операторов (5.55) подразумевает ортогональность подпространств $\text{ran}(\mathbf{L}_n \rho \mathbf{L}_n^\dagger)$ для различных значений индекса n . Далее, шаг (5.63) следует из (5.58), и, наконец, шаг (5.64) основан на Предложении 32. Доказательство завершается комбинированием (5.64) с неравенством

$$H_\alpha(\rho_n || \delta_{\rho n}) \geq C_\alpha(\mathcal{E}'_n | \rho_n) ,$$

которое следует из определения (5.20) ввиду проводимой там минимизации. ■

В случае $\alpha = 1$ утверждение Предложения 35 сводится к неравенству (5.51), записанному в терминах меры когерентности $C_1(\mathcal{E} | \rho)$. Это свойство было впервые доказано в [93]. В некотором смысле соотношение (5.53) является естественным расширением формулы (5.51). Итак, α -квантификаторы когерентности также можно рассматривать как монотонные, но соответствующее неравенство сложнее по своей формальной структуре и зависит от α . В частности, формулировка теперь включает в себя значения вероятностей q_n , рассчитанных для некогерентного состояния (5.26). Отметим, что вероятности q_n фактически определяются рассматриваемым состоянием ρ , но не так непосредственно, как вероятности p_n . В свете полученных выше результатов построение мер когерентности, которые подчиняются свойству монотонности только в форме (5.51), представляется нам достаточно проблематичным. Единственными известными примерами являются меры когерентности $C_{\ell_1}(\mathcal{E} | \rho)$ и $C_1(\mathcal{E} | \rho)$. Конечно, мы не рассматриваем здесь какую-либо линейную комбинацию упомянутых двух величин. Поскольку наложенные свойства линейны по квантифика-

тору когерентности, линейная комбинация из двух или более конкретных мер будет подчиняться этим свойствам всякий раз, когда им удовлетворяют отдельные слагаемые.

В связи с рядом вопросов, поставленных ранее в отношении величины $S_{\ell_2}(\mathcal{E}|\rho)$, мы сопоставим два квантификатора когерентности, выражающихся как однородные квадратичные функции матричных элементов. Эти величины определяются формулами (5.5) и (5.27) соответственно. Авторы работы [93] проиллюстрировали на примере, что мера когерентности (5.5) не является монотонной при некогерентных селективных измерениях. Поучительно использовать этот пример для тестирования свойства (5.53), описывающего монотонность α -квантификатора когерентности (5.27). В рассматриваемом примере используется один и тот же базис в пространствах ввода и вывода. Для краткости будем опускать символы \mathcal{E} и \mathcal{E}' в дальнейших расчетах. Два оператора Крауса записываются в виде

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.65)$$

причём комплексные числа a и b удовлетворяют $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Рассмотрим также матрицу плотности

$$\rho = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.66)$$

Нормированные частные выводы записываются как

$$\rho_1 = \frac{1}{2 + |a|^2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |a|^2 \end{pmatrix}, \quad (5.67)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{1 + |b|^2} \begin{pmatrix} 1 & b^* & 0 \\ b & |b|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

Соответствующие вероятности появления этих выводов равны

$$p_1 = \frac{2 + |a|^2}{4}, \quad p_2 = \frac{1 + |b|^2}{4}. \quad (5.69)$$

Для $\alpha = 2$ дивергенция Цаллиса минимизируется с помощью некогерентного состояния, отличные от нуля элементы которого пропорциональны квадратным корням диагональных элементов матрицы $\boldsymbol{\varrho}^2$, а именно

$$\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\varrho}} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.70)$$

Вычисляя квантификатор когерентности (5.27), мы получаем

$$C_2(\boldsymbol{\varrho}) = H_2(\boldsymbol{\varrho} || \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\varrho}}) = \frac{2\sqrt{2} - 1}{4}. \quad (5.71)$$

Используя $\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\varrho}}$ как вводимое состояние, находим соответствующие вероятности

$$q_1 = \text{Tr}(\mathbf{K}_1 \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\varrho}} \mathbf{K}_1^\dagger) = \frac{\sqrt{2} + |a|^2}{2 + \sqrt{2}}, \quad (5.72)$$

$$q_2 = \text{Tr}(\mathbf{K}_2 \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\varrho}} \mathbf{K}_2^\dagger) = \frac{1 + |b|^2}{2 + \sqrt{2}}. \quad (5.73)$$

Для матриц плотности (5.68) вычисления дают $C_2(\boldsymbol{\varrho}_1) = 0$ и

$$C_2(\boldsymbol{\varrho}_2) = \frac{2|b|}{1 + |b|^2}. \quad (5.74)$$

Для всех $|b| \in [0; 1]$ мы рассматриваем величину

$$p_1^2 q_1^{-1} C_2(\boldsymbol{\varrho}_1) + p_2^2 q_2^{-1} C_2(\boldsymbol{\varrho}_2) = \frac{2 + \sqrt{2}}{8} |b| \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{8} \approx 0.4268, \quad (5.75)$$

которая строго меньше квантификатора $C_2(\boldsymbol{\varrho}) = (2\sqrt{2} - 1)/4 \approx 0.4571$. Данный пример иллюстрирует справедливость результата (5.53). Он также показывает, что зависящая от α формулировка (5.53) действительно необходима. Иными словами, для квантификатора (5.27) свойство монотонности в формулировке (5.51) может и не иметь места. Чтобы это увидеть, мы записываем

$$p_1 C_2(\boldsymbol{\varrho}_1) + p_2 C_2(\boldsymbol{\varrho}_2) = \frac{|b|}{2}. \quad (5.76)$$

Правая часть (5.76) возрастает вплоть до значения 0.5 для $|b| = 1$, во многих случаях превосходя значение $C_2(\boldsymbol{\varrho}) \approx 0.4571$. Представленные результаты дают доказательство того, что α -квантификаторы не подчиняются, вообще говоря, свойству сильной монотонности в обычной формулировке (5.51). С другой стороны, эти величины безусловно удовлетворяют

свойству монотонности в обобщённой формулировке (5.53). Таким образом, свойство монотонности квантификаторов когерентности при некогерентных селективных измерениях является достаточно ёмким по своему характеру. Само по себе данное свойство не следует непосредственно из монотонности квантовых относительных энтропий.

Рассматриваемый пример позволяет также ответить на следующий логичный вопрос. Квантификатор когерентности (5.5) не удовлетворяет свойству монотонности при некогерентных селективных измерениях в виде (5.51). В принципе, мы могли бы предположить, что монотонность величины (5.5) имеет место в формулировке, аналогичной (5.53). Другими словами, возьмём сумму

$$\sum_n p_n^\alpha r_n^{1-\alpha} C_{\ell_2}(\rho_n), \quad (5.77)$$

где $r_n = \text{Tr}(\mathbf{K}_n \delta_* \mathbf{K}_n^\dagger)$, а состояние δ_* получено из ρ обнулением недиагональных элементов. Рассмотренный выше пример показывает, что (5.77) может превосходить $C_{\ell_2}(\rho)$. Действительно, входное состояние (5.66) является таким, что $r_n = p_n$ для $n = 1, 2$. Следовательно, в данном примере сумма (5.77) совпадает с суммой

$$\sum_n p_n C_{\ell_2}(\mathbf{e}_n),$$

которая, как уже известно благодаря [93], нарушает требование монотонности в виде (5.51). Таким образом, квантификатор когерентности (5.5) не является монотонным даже в обобщённом смысле (5.53). Этот вывод показывает, что результат (5.53) является глубоко нетривиальным. Кроме того, в пределе $\alpha \rightarrow 1$ он сводится к стандартной формулировке (5.51). Следовательно, мы можем трактовать (5.53) как естественное и обоснованное расширение соотношения (5.51).

Мы проанализировали квантификаторы уровня квантовой когерентности, основанные на α -дивергенциях типа Цаллиса. Эти величины допускают достаточно простое выражение в терминах матричных элементов. Были доказаны естественные соотношения комплементарности между квантификаторами когерентности и степенью смешанности измеремого состояния. Основные свойства введённых величин были дополнительно

проиллюстрированы на примере одиночного кубита. Большинство свойств квантификаторов когерентности естественно вытекает из общих свойств квантовых относительных энтропий типа Цаллиса. Свойство монотонности при некогерентных селективных измерениях является более интересным и сложным вопросом. Ранее свойство монотонности в стандартной формулировке было установлено для двух мер, основанных соответственно на ℓ_1 -норме и на стандартной относительной энтропии [93]. Для квантификатора когерентности на основе следовой метрики известны только частные результаты, в которых проявляется монотонность [104]. Нами было доказано, что α -квантификаторы когерентности действительно монотонны при некогерентных селективных измерениях, но в обобщённой и зависящей от параметра α формулировке (5.53). В пределе $\alpha \rightarrow 1$ эта формулировка непосредственно редуцируется к стандартной формулировке, предложенной в [93]. В этом смысле результат (5.53) является параметрическим расширением стандартного соотношения (5.51). Можно предположить, что два упомянутых примера, удовлетворяющих именно формуле (5.51), являются единственными такими величинами.

Полученное семейство включает в себя квантификатор, выраженный через возведённые в квадрат модули матричных элементов. В нескольких отношениях эта величина отличается от меры когерентности, индуцированной квадратом ℓ_2 -нормы. В обоих случаях (5.4) и (5.5) ближайшее к заданному некогерентное состояние получается обнулением всех недиагональных элементов ρ . За исключением случая $\alpha = 1$, нахождение минимизирующего некогерентного состояния в формуле (5.20) для α -квантификатора осуществляется более сложным путём. Тем не менее, для квантовых α -дивергенций типа Цаллиса требуемый ответ выражается в замкнутом аналитическом виде. Сомнительно, что это окажется возможным для квантовых f -дивергенций в целом. В настоящее время активно исследуются так называемые “сэндвич”-дивергенции [112]. Относительные энтропии такого рода можно было бы использовать для того, чтобы ввести квантификаторы когерентности. Но получение минимизирующего когерентного состояния представляется здесь довольно сложным. Сравнивая два квад-

ратичных квантификатора когерентности, мы пришли к следующему выводу. Для индуцированного квадратом ℓ_2 -нормы квантификатора свойство монотонности нарушается также и в обобщённой формулировке. Авторы работы [94] предположили, что квадратный корень из (5.5) может подчиняться всем налагаемым на меры когерентности свойствам, включая монотонность при некогерентных селективных измерениях. В свете полученных нами результатов, эта гипотеза представляется достаточно спорной. С другой стороны, использование квадратного корня из (5.5) как меры когерентности вряд ли проще, чем применение величины (5.27). Последняя, как мы видели, удовлетворяет всем предъявляемым к мерам когерентности требованиям с учётом формулировки (5.53).

Обычно когерентность рассматривается по отношению к выделенному ортонормированному базису. С другой стороны, в квантовой теории информации широко используются ПОЗМ-измерения [4]. Из результатов статьи [38] следует, что во многих случаях можно ограничиться рассмотрением ПОЗМ-измерений с элементами ранга 1. Квантификаторы когерентности по отношению к таким измерениям вводятся следующим образом [113]. Рассмотрим множество N кет-векторов в d -мерном пространстве таких, что операторы

$$\mathbf{M}_j = |\mu_j\rangle\langle\mu_j| \quad (5.78)$$

формируют неортогональное разложение единицы. Обозначив i -ую компоненту j -ого вектора через μ_{ij} , составим матрицу размером $d \times N$. Ввиду соотношения полноты строки этой матрицы взаимно ортогональны. Добавляя $(N-d)$ подходящих строк, построим в итоге унитарную $N \times N$ -матрицу. Столбцы этой матрицы образуют ортонормированный базис $\tilde{\mathcal{B}}$ в расширенном N -мерном пространстве. Этот случай является простейшим примером *расширения Наймарка* [114, 115]. Столбцы результирующей унитарной матрицы имеют вид

$$|\tilde{\mu}_j\rangle := \begin{pmatrix} |\mu_j\rangle \\ |\mu'_j\rangle \end{pmatrix}. \quad (5.79)$$

Исходной матрице плотности ставится в соответствие блочно-диагональная

матрица $\tilde{\rho} = \text{diag}(\rho, \mathbf{0})$, так что для всех $\alpha > 0$ получаем

$$\langle \tilde{\mu}_i | \tilde{\rho}^\alpha | \tilde{\mu}_j \rangle = \langle \mu_i | \rho^\alpha | \mu_j \rangle. \quad (5.80)$$

Следует отметить, что имеющаяся свобода в построении унитарной $N \times N$ -матрицы не влияет на матричные элементы вида (5.80). Тем самым приходим к семейству α -квантификаторов когерентности [113]

$$C_\alpha^{(\tilde{\mathcal{B}})}(\tilde{\rho}) = \frac{1}{\alpha - 1} \left\{ \left(\sum_j \langle \mu_j | \rho^\alpha | \mu_j \rangle^{1/\alpha} \right)^\alpha - 1 \right\}. \quad (5.81)$$

Как уже было отмечено выше, результат вычислений не зависит от выбранного расширения Наймарка. Квантификатор (5.81) определяется только теми объектами, которые относятся к исходному пространству состояний. Так как построение использует ортонормированный базис в расширенном пространстве, этим же путём обобщаются свойства, доказанные ранее для α -квантификаторов когерентности по отношению к заданному ортонормированному базису.

Глава 6

Энтропийные соотношения неопределённостей для экстремальных “распутываний” супероператоров

Принцип неопределённостей Гейзенберга является одной из фундаментальных физических концепций. Идея о неизбежном влиянии процесса наблюдения на наблюдаемый объект и сопутствующие выводы сыграли известную роль в развитии других научных дисциплин. Несмотря на прошедшее с момента публикации время, окончательное мнение о должной формулировке соотношений неопределённостей всё ещё отсутствует. Большинство известных формулировок принципа неопределённостей касаются наблюдаемых или, в более общем плане, ПОЗМ-измерений. Как квантовое измерение, так и унитарная эволюция являются простыми формами изменения состояний в квантовой теории [116]. Формализм квантовых операций, или супероператоров, теперь является стандартным инструментом для описания квантовых процессов. Ниже мы рассматриваем вопрос о том, как сформулировать принцип неопределённостей для супероператоров. Оказывается, что один из возможных путей обеспечивается понятием экстремального “распутывания” данного супероператора. Для энтропии Шеннона экстремальность в этом смысле рассматривалась в работе [117]. В качестве энтропийных функционалов мы будем использовать энтропии Цаллиса и Рённи. Чтобы сформулировать соотношения неопределённостей, для заданного входного состояния и супероператора мы находим экстремальное

распутывание, сводящее все энтропии Цаллиса к минимуму одновременно. Случай энтропии Рёньи формулируется не столь однозначно.

Для заданного вероятностного распределения энтропия Цаллиса определяется формулой (3.2). В данной главе мы будем рассматривать связанные энтропийные параметры, которые удобно обозначить через α и β . Тогда энтропию Цаллиса запишем в виде

$$H_\alpha(\mathbf{p}) := \frac{1}{1-\alpha} \left(\sum_i p_i^\alpha - 1 \right) . \quad (6.1)$$

Полезно переписать это выражение как

$$H_\alpha(\mathbf{p}) = - \sum_i p_i^\alpha \ln_\alpha(p_i) \quad (6.2)$$

где α -логарифм положительной переменной ξ определяется формулой (2.6). В пределе $\alpha \rightarrow 1$ имеем $\ln_\alpha(\xi) \rightarrow \ln \xi$, так что (6.1) сводится к энтропии Шеннона. Мы также будем использовать α -энтропию Рёньи, определенную для $\alpha \neq 1$ как [42]

$$R_\alpha(\mathbf{p}) := \frac{1}{1-\alpha} \ln \left(\sum_i p_i^\alpha \right) . \quad (6.3)$$

Рёньи α -энтропия также совпадает с энтропией Шеннона в пределе $\alpha \rightarrow 1$. Существует множество различных связей между обобщёнными энтропиями [118]. Мы будем применять равенство

$$(1-\alpha)R_\alpha(\mathbf{p}) = \ln(1 + (1-\alpha)H_\alpha(\mathbf{p})) , \quad (6.4)$$

которое сразу следует из (6.1) и (6.3).

В дальнейшем понадобятся некоторые сведения из линейной алгебры. Пусть \mathcal{H} — конечномерное гильбертово пространство. Для двух векторов $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ их внутреннее произведение обозначается через $\langle \psi, \varphi \rangle$. Для двух операторов \mathbf{X} и \mathbf{Y} на \mathcal{H} скалярное произведение Гильберта–Шмидта задаётся выражением

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{\text{HS}} := \text{Tr}(\mathbf{X}^\dagger \mathbf{Y}) . \quad (6.5)$$

Это скалярное произведение индуцирует норму Фробениуса, которая также получается из q -норм Шаттена (1.3) для $q = 2$:

$$\|\mathbf{X}\|_2 = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle_{\text{HS}}^{1/2} .$$

Как ясно из (1.3), квадрат нормы Фробениуса равен сумме квадратов сингулярных чисел. Наибольшее сингулярное число даёт спектральную норму (1.5).

Обобщённое квантовое измерение описывается неортогональным разложением единицы, или “положительной операторно-значной мерой” (ПОЗМ). Это множество $\{\mathbf{M}_i\}$ положительно полуопределенных операторов, удовлетворяющих соотношению полноты

$$\sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{1} .$$

В некоторых отношениях сами квантовые измерения могут рассматриваться как объект обработки информации [119]. Рассмотрим линейное отображение Φ , которое переводит линейные операторы на \mathcal{H} в линейные операторы на \mathcal{H}' , а также является вполне положительным и сохраняет след. Следуя лекциям [120], мы называем такие отображения “супероператорами”. Каждый супероператор имеет представление в терминах операторов Крауса, а именно [4, 116]

$$\Phi(\mathbf{X}) = \sum_i \mathbf{A}_i \mathbf{X} \mathbf{A}_i^\dagger , \quad (6.6)$$

причём операторы \mathbf{A}_i отображают элементы исходного пространства \mathcal{H} в элементы выходного пространства \mathcal{H}' . Сохранение следа означает выполнение условия

$$\sum_i \mathbf{A}_i^\dagger \mathbf{A}_i = \mathbf{1} , \quad (6.7)$$

где $\mathbf{1}$ обозначает единичный оператор на \mathcal{H} . Представление вида (6.6) не является единственным [25]. Для данного супероператора Φ существует целое семейство наборов $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_i\}$, которые приводят к (6.6). В работе [117] каждый конкретный набор $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_i\}$, дающий (6.6), называется “распутыванием” супероператора Φ . Данная терминология следует работе [121], автор которой использовал этот термин для представлений кинетического мастер-уравнения. Как известно, два представления Крауса одного и того же супероператора связаны соотношением

$$\mathbf{B}_i = \sum_j \mathbf{A}_j u_{ji} , \quad (6.8)$$

причём квадратная матрица $\mathbf{U} = [[u_{ij}]]$ является унитарной [120]. В формуле (6.8) мы полагаем, что множества \mathcal{A} и \mathcal{B} содержат одинаковое количество элементов. Для данного оператора плотности ρ и распутывания $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_j\}$ можно ввести матрицу

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}|\rho) := [[\langle \mathbf{A}_i \sqrt{\rho}, \mathbf{A}_j \sqrt{\rho} \rangle_{\text{HS}}]] \equiv [[\text{Tr}(\mathbf{A}_i^\dagger \mathbf{A}_j \rho)]] . \quad (6.9)$$

Диагональный элемент $p_i = \text{Tr}(\mathbf{A}_i^\dagger \mathbf{A}_i \rho)$ явно положителен и даёт вероятность i -го эффекта. В терминах этих вероятностей мы вводим энтропии $H_\alpha(\mathcal{A}|\rho)$ и $R_\alpha(\mathcal{A}|\rho)$ согласно формулам (6.1) и (6.3) соответственно. По определению матрица $\mathbb{P}(\mathcal{A}|\rho)$ эрмитова. Если элементы двух множеств $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_i\}$ и $\mathcal{B} = \{\mathbf{B}_j\}$ удовлетворяют соотношению (6.8), то, используя свойства скалярного произведения, мы имеем

$$\langle \mathbf{B}_i \sqrt{\rho}, \mathbf{B}_k \sqrt{\rho} \rangle_{\text{HS}} = \sum_{jl} u_{ji}^* u_{lk} \langle \mathbf{A}_j \sqrt{\rho}, \mathbf{A}_l \sqrt{\rho} \rangle_{\text{HS}} . \quad (6.10)$$

В компактном виде, соотношение (6.10) между матрицами читается как

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}|\rho) = \mathbf{U}^\dagger \mathbb{P}(\mathcal{A}|\rho) \mathbf{U} . \quad (6.11)$$

Таким образом, если оба множества \mathcal{A} и \mathcal{B} являются распутываниями одного и того же супероператора, то матрицы $\mathbb{P}(\mathcal{A}|\rho)$ и $\mathbb{P}(\mathcal{B}|\rho)$ унитарно подобны. Ввиду эрмитовости, все матрицы вида $\mathbb{P}(\mathcal{A}|\rho)$, соответствующие одному и тому же супероператору, унитарно подобны единственной, с точностью до перестановок, диагональной матрице

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) , \quad (6.12)$$

где r есть число элементов, а λ_i — собственные значения каждой из этих матриц. Отметим, что среди указанных собственных значений могут встретиться нули. Поэтому все матрицы вида $\mathbb{P}(\mathcal{A}|\rho)$ являются положительно полуопределенными.

Для заданного распутывания $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_i\}$ и оператора плотности ρ мы получаем конкретную матрицу $\mathbb{P}(\mathcal{A}|\rho)$, которую можем диагонализировать с помощью унитарной матрицы

$$\mathbf{V}^\dagger \mathbb{P}(\mathcal{A}|\rho) \mathbf{V} = \mathbf{D} . \quad (6.13)$$

Определим конкретное распутывание $\mathcal{A}_\rho^{(ex)}$, чьи операторы связаны с множеством \mathcal{A} формулой

$$\mathbf{A}_i^{(ex)} = \sum_j \mathbf{A}_j v_{ji} , \quad (6.14)$$

причём унитарная матрица $\mathbf{V} = [[v_{ji}]]$ диагонализует $\Pi(\mathcal{A}|\rho)$. Оказывается, что распутывание (6.14) обладает свойством *экстремальности* по отношению к α -энтропиям Цаллиса для всех $\alpha \in (0; \infty)$ и α -энтропиям Рёньи для $\alpha \in (0; 1]$ (случай $\alpha = 1$ приводит к энтропии Шеннона).

Предложение 36 Пусть распутывание $\mathcal{A}_\rho^{(ex)}$ определено для заданных матрицы плотности ρ и супероператора Φ согласно формуле (6.14). Для каждого распутывания \mathcal{A} супероператора Φ , справедливы неравенства

$$H_\alpha(\mathcal{A}_\rho^{(ex)}|\rho) \leq H_\alpha(\mathcal{A}|\rho) \quad \forall \alpha \in (0; \infty) , \quad (6.15)$$

$$R_\alpha(\mathcal{A}_\rho^{(ex)}|\rho) \leq R_\alpha(\mathcal{A}|\rho) \quad \forall \alpha \in (0; 1] . \quad (6.16)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что имеем $\Pi(\mathcal{A}_\rho^{(ex)}|\rho) = \mathbf{D}$ с вероятностями эффектов λ_j . С учетом $\Pi(\mathcal{A}|\rho) = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^\dagger$, вероятности $p_i = \text{Tr}(\mathbf{A}_i^\dagger \mathbf{A}_i \rho)$ различных эффектов распутывания \mathcal{A} связаны с числами λ_j равенством

$$p_i = \sum_j v_{ij} \lambda_j v_{ij}^* = \sum_j s_{ij} \lambda_j , \quad (6.17)$$

где $s_{ij} = v_{ij} v_{ij}^*$. Матрица $[[s_{ij}]] = \mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{V}^\dagger$ является унистохастической, так что

$$\sum_i s_{ij} = 1 \quad \forall j , \quad (6.18)$$

$$\sum_j s_{ij} = 1 \quad \forall i . \quad (6.19)$$

Теперь мы используем данные соотношения и тот очевидный факт, что для $\alpha > 0$ функция $\xi \mapsto \eta_\alpha(\xi) = (\xi^\alpha - \xi)/(1 - \alpha)$ вогнута в диапазоне $\xi \in [0; 1]$. Согласно неравенству Йенсена, запишем

$$\begin{aligned} H_\alpha(\mathcal{A}|\rho) &= \sum_i \eta_\alpha \left(\sum_j s_{ij} \lambda_j \right) \geq \sum_i \sum_j s_{ij} \eta_\alpha(\lambda_j) \\ &= \sum_j \eta_\alpha(\lambda_j) = H_\alpha(\mathcal{A}_\rho^{(ex)}|\rho) . \end{aligned} \quad (6.20)$$

Тем самым неравенство (6.15) доказано. Замечаем далее, что для $0 < \alpha < 1$ функция $y \mapsto (1 - \alpha)^{-1} \ln(1 + (1 - \alpha)y)$ возрастает в интервале $y \in [0; \infty)$. Объединение равенства (6.4) с (6.15) даёт (6.16). ■

Для энтропии Шеннона проблема “минимального” распутывания была рассмотрена в [122] и позже в [117]. В известном смысле диагонализация матрицы $P(\mathcal{A}|\rho)$ фактически эквивалентно экстремальным условиям, которые были получены в [117] методом множителей Лагранжа. Основанный на локальном рассмотрении подход дополняется приведенным выше доказательством, основанным на вогнутости. Предложенный нами метод позволяет доказать экстремальность прямо из (6.14). Таким образом, для заданного состояния ρ все энтропии Цаллиса степени $\alpha \in (0; \infty)$ и энтропии Рённи порядка $\alpha \in (0; 1)$ минимизируются одним и тем же распутыванием данного супероператора. Вместе с тем, распутывание с операторами (6.14) не обеспечивает, вообще говоря, минимизации остальных энтропий Рённи. Экстремальность распутывания по отношению к энтропии Рённи порядка $\alpha > 1$ может зависеть также от самого параметра α . Решение задачи экстремальности в такой формулировке представляется достаточно сложным, так как энтропии Рённи указанных порядков не являются ни чисто выпуклыми, ни чисто вогнутыми.

Соотношения (6.15) и (6.16) имеют аналог в терминах ансамблей чистых состояний, приводящих к заданному оператору плотности. В соответствии с (6.1) и (6.3), для матрицы плотности ρ и $\alpha \neq 1$ мы введём квантовые энтропии Цаллиса и Рённи

$$H_\alpha(\rho) = \frac{\text{Tr}(\rho^\alpha - \rho)}{1 - \alpha}, \quad (6.21)$$

$$R_\alpha(\rho) = \frac{\ln(\text{Tr}(\rho^\alpha))}{1 - \alpha}. \quad (6.22)$$

В случае $\alpha = 1$ оба выражения сводятся к энтропии фон Неймана, записываемой как

$$H_1(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho). \quad (6.23)$$

В работах [123, 124, 125] проанализированы дифференциальные энтропии Рённи и их связь с асимптотическим поведением некоторых ортогональных полиномов, использующихся в задачах квантовой механики. Рассмотрение

дифференциальной энтропии Шеннона в аналогичном ключе дано в статьях [126, 127]. Следует отметить, что дифференциальные энтропии не являются, вообще говоря, знакоопределёнными.

Пусть $\{p_i, \psi_i\}$ — ансамбль нормированных чистых состояний, такой что $\langle \psi_i, \psi_i \rangle = 1$ и $\sum_i p_i = 1$, который приводит к оператору плотности ρ , а именно

$$\sum_i p_i \psi_i \psi_i^\dagger = \rho = \sum_j \lambda_j \varphi_j \varphi_j^\dagger . \quad (6.24)$$

В общем случае состояния ψ_i не являются взаимно ортогональными. Правая часть (6.24) даёт спектральное разложение оператора плотности ρ , так что векторы φ_j образуют ортонормированный базис в пространстве \mathcal{H} . Согласно теореме о классификации ансамблей [44], для некоторой унитарной матрицы $[[u_{ij}]]$ имеем

$$\sqrt{p_i} \psi_i = \sum_j u_{ij} \sqrt{\lambda_j} \varphi_j . \quad (6.25)$$

Из (6.25) и $\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \delta_{jk}$ следует, что $p_i = \sum_j s_{ij} \lambda_j$, где $s_{ij} = u_{ij}^* u_{ij}$ являются элементами унистохастической матрицы. Изменяя обозначения в формуле (6.20), мы в результате получаем

$$H_\alpha(\rho) = H_\alpha(\lambda) \leq H_\alpha(p) \quad \forall \alpha \in (0; \infty) , \quad (6.26)$$

$$R_\alpha(\rho) = R_\alpha(\lambda) \leq R_\alpha(p) \quad \forall \alpha \in (0; 1] . \quad (6.27)$$

В пределе $\alpha \rightarrow 1$ оба неравенства сводятся к $-\text{Tr}(\rho \ln \rho) \leq H_1(p)$. Данное соотношение между энтропией фон Неймана матрицы плотности ρ и энтропией Шеннона соответствующего ансамбля хорошо известно [45]. В случае энтропии Цаллиса этот результат можно переформулировать применительно к ансамблям смешанных состояний. Пусть заданный ансамбль $\{p_i, \omega_i\}$ такой, что $\text{Tr}(\omega_i) = 1$ и $\sum_i p_i = 1$, даёт оператор плотности

$$\rho = \sum_i p_i \omega_i = \sum_{ij} p_i \nu_{ij} \varphi_{ij} \varphi_{ij}^\dagger , \quad (6.28)$$

где $\omega_i = \sum_j \nu_{ij} \varphi_{ij} \varphi_{ij}^\dagger$. Применяя неравенство (6.26) к правой части (6.28), имеем

$$\begin{aligned} H_\alpha(\rho) &\leq - \sum_{ij} p_i^\alpha \nu_{ij}^\alpha \ln_\alpha(p_i \nu_{ij}) = - \sum_{ij} p_i^\alpha \nu_{ij}^\alpha (\ln_\alpha(\nu_{ij}) + \nu_{ij}^{1-\alpha} \ln_\alpha(p_i)) \\ &= - \sum_i p_i^\alpha \sum_j \nu_{ij}^\alpha \ln_\alpha(\nu_{ij}) - \sum_i p_i^\alpha \ln_\alpha(p_i) . \end{aligned} \quad (6.29)$$

Здесь было использовано тождество $\ln_\alpha(xy) = \ln_\alpha(y) + y^{1-\alpha} \ln_\alpha(x)$. Добавляя следствия вогнутости функции $\xi \mapsto \eta_\alpha(\xi)$, мы окончательно записываем

$$\sum_i p_i H_\alpha(\omega_i) \leq H_\alpha(\rho) \leq \sum_i p_i^\alpha H_\alpha(\omega_i) + H_\alpha(\mathbf{p}) . \quad (6.30)$$

Неравенство слева можно доказать следующим образом. Для любого вогнутой функции $\xi \mapsto f(\xi)$ функционал $\text{Tr}(f(\mathbf{X}))$ также является вогнутым на множестве эрмитовых операторов \mathbf{X} (см., например, раздел III в статье [46]). Мы также замечаем, что $H_\alpha(\rho) = \text{Tr}(\eta_\alpha(\mathbf{X}))$. В пределе $\alpha \rightarrow 1$ неравенства (6.30) сводятся к известным оценкам для энтропии фон Неймана [45]. Представляется, что такая трактовка не подходит для энтропии Рённи. Действительно, α -энтропия Цаллиса обладает свойством сильной аддитивностью, что не имеет место для энтропии Рённи [130].

Выяснив основные свойства экстремальных распутываний супероператоров, перейдём к формулировке соотношений неопределённостей в рамках энтропийного подхода. Чтобы получить такие соотношения, мы будем использовать версию теоремы Марселя Рисса (см., например, теорему 297 в книге [78]). Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ — n -мерный набор комплексных чисел x_j , а $\mathbf{T} = [[t_{ij}]]$ — $m \times n$ матрица. Определим число ϑ как максимальное среди модулей $|t_{ij}|$, т.е.

$$\vartheta := \max \{|t_{ij}| : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} . \quad (6.31)$$

Каждая матрица \mathbf{T} описывает линейное преобразование $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, которое каждому \mathbf{x} ставит в соответствие m -мерный вектор $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ с элементами

$$y_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n t_{ij} x_j \quad (i = 1, \dots, m) . \quad (6.32)$$

Для $b \geq 1$ норма ℓ_b вектора \mathbf{x} определяется выражением

$$\|\mathbf{x}\|_b := \left(\sum_j |x_j|^b \right)^{1/b} . \quad (6.33)$$

Для $\beta > 0$, мы будем использовать подобную функцию вероятностных векторов, а именно

$$\|\mathbf{q}\|_\beta = \left(\sum_j q_j^\beta \right)^{1/\beta} . \quad (6.34)$$

Заметим, что правая часть (6.34) не является легитимной нормой для $0 < \beta < 1$. Теорема Рисса формулируется следующим образом.

Пусть $m \times n$ матрица \mathbf{T} такова, что соотношение $\|\mathbf{y}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_2$ выполнено для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Тогда для сопряжённых в смысле $1/a + 1/b = 1$ индексов a и $b \in (1; 2)$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{y}\|_a \leq \vartheta^{(2-b)/b} \|\mathbf{x}\|_b . \quad (6.35)$$

С помощью этого утверждения мы сейчас получим улучшенную версию одного результата, доказанного в [129]. Каждому обобщённому разложению единицы $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_i\}$ и заданному смешанному состоянию ρ мы ставим в соответствие вероятностный вектор $\mathbf{p} = \{p_i\}$ с элементами $p_i = \text{Tr}(\mathbf{M}_i \rho) \equiv \|\mathbf{M}_i^{1/2} \sqrt{\rho}\|_2^2$. Другому разложению единицы $\mathcal{N} = \{\mathbf{N}_j\}$ присваивается вектор $\mathbf{q} = \{q_j\}$ с элементами $q_j = \text{Tr}(\mathbf{N}_j \rho) \equiv \|\mathbf{N}_j^{1/2} \sqrt{\rho}\|_2^2$.

Предложение 37 Для данного оператора плотности ρ и двух разложений единицы $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_i\}$ и $\mathcal{N} = \{\mathbf{N}_j\}$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{p}\|_\alpha \leq g(\mathcal{M}, \mathcal{N} | \rho)^{2(1-\beta)/\beta} \|\mathbf{q}\|_\beta , \quad (6.36)$$

где $1/\alpha + 1/\beta = 2$ и $1/2 < \beta < 1$, а функция $g(\mathcal{M}, \mathcal{N} | \rho)$ определена выражением

$$g(\mathcal{M}, \mathcal{N} | \rho) := \max \left\{ (p_i q_j)^{-1/2} |\text{Tr}(\mathbf{M}_i \mathbf{N}_j \rho)| : p_i \neq 0, q_j \neq 0 \right\} . \quad (6.37)$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда оба разложения $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_i\}$ и $\mathcal{N} = \{\mathbf{N}_j\}$ ортогональны. Для всех значений i и j , удовлетворяющих $\text{Tr}(\mathbf{M}_i \rho) \neq 0$ и $\text{Tr}(\mathbf{N}_j \rho) \neq 0$, мы введём операторы

$$\boldsymbol{\omega}_i = \frac{\mathbf{M}_i \sqrt{\rho}}{\|\mathbf{M}_i \sqrt{\rho}\|_2} , \quad \boldsymbol{\pi}_j = \frac{\mathbf{N}_j \sqrt{\rho}}{\|\mathbf{N}_j \sqrt{\rho}\|_2} . \quad (6.38)$$

В силу определения имеем $\|\boldsymbol{\omega}_i\|_2 = 1$ и $\|\boldsymbol{\pi}_j\|_2 = 1$. Поскольку оба разложения $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_i\}$ и $\mathcal{N} = \{\mathbf{N}_j\}$ являются ортогональными, мы также видим, что

$$\langle \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_k \rangle_{\text{HS}} = \delta_{ik} , \quad \langle \boldsymbol{\pi}_j, \boldsymbol{\pi}_\ell \rangle_{\text{HS}} = \delta_{j\ell} . \quad (6.39)$$

Матричные элементы преобразования \mathbf{T} определяем равенством

$$t_{ij} = \langle \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\pi}_j \rangle_{\text{HS}} = \frac{\langle \mathbf{M}_i \sqrt{\rho}, \mathbf{N}_j \sqrt{\rho} \rangle_{\text{HS}}}{\|\mathbf{M}_i \sqrt{\rho}\|_2 \|\mathbf{N}_j \sqrt{\rho}\|_2} . \quad (6.40)$$

Теперь мы перепишем (6.32) в виде

$$y_i(x) = \langle \omega_i, \sigma \rangle_{\text{HS}}, \quad (6.41)$$

где для некоторого \mathbf{x} принято $\sigma = \sum_j x_j \pi_j$ по определению. В силу (6.39) получаем $\|\sigma\|_2^2 = \sum_j |x_j|^2$ и

$$\sigma = \sum_i y_i \omega_i + \varpi, \quad (6.42)$$

причём оператор ϖ таков, что $\langle \omega_i, \varpi \rangle_{\text{HS}} = 0$ для всех i . С учётом ортогональности состояний ω_i и неравенства треугольника для нормы запишем соотношение

$$\sum_i |y_i|^2 = \left\| \sum_i y_i \omega_i \right\|_2^2 \leq \|\sigma\|_2^2 = \sum_j |x_j|^2. \quad (6.43)$$

Таким образом, предусловие теоремы Рисса выполнено, т.е. преобразование \mathbf{T} таково, что $\|\mathbf{y}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.

Теперь мы применим (6.35) к значениям $x'_j = \|\mathbf{N}_j \sqrt{\rho}\|_2$. Положим также $y'_i = \|\mathbf{M}_i \sqrt{\rho}\|_2$. Применяя соотношение полноты, запишем

$$\mathbf{1} \sqrt{\rho} = \sum_k y'_k \omega_k = \sum_j x'_j \pi_j,$$

откуда немедленно

$$y'_i = \sum_j \langle \omega_i, \pi_j \rangle_{\text{HS}} x'_j. \quad (6.44)$$

Иными словами, вектор с элементами y'_i выражается через x'_j в соответствии с (6.32) и (6.40). Так как операторы \mathbf{M}_i и \mathbf{N}_j являются проективными, мы имеем

$$p_i = |y'_i|^2, \quad q_j = |x'_j|^2, \quad (6.45)$$

откуда $\|\mathbf{p}\|_\alpha = \|\mathbf{y}'\|_\alpha^2$ и $\|\mathbf{q}\|_\beta = \|\mathbf{x}'\|_\beta^2$ с индексами $\alpha = a/2$ и $\beta = b/2$. Из неравенства (6.35) тогда следует, что соотношение

$$\|\mathbf{p}\|_\alpha^{1/2} \leq \max |\langle \omega_i, \pi_j \rangle_{\text{HS}}|^{(1-\beta)/\beta} \|\mathbf{q}\|_\beta^{1/2} \quad (6.46)$$

имеет место при условиях $1/\alpha + 1/\beta = 2$ и $1/2 < \beta < 1$. Замечая, что максимум модуля (6.40) действительно равен $g(\mathcal{M}, \mathcal{N} | \rho)$, мы доказали (6.36) в случае, когда оба разложения единицы \mathcal{M} и \mathcal{N} ортогональны.

Чтобы обобщить (6.36) на случай двух произвольных разложений, мы используем метод, предложенный в [128] и развитый далее в [129]. В расширенном пространстве $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ разложения \mathcal{M} и \mathcal{N} реализуются как новые разрешения $\tilde{\mathcal{M}}$ и $\tilde{\mathcal{N}}$ соответственно, причём разложение $\tilde{\mathcal{M}}$ теперь ортогонально в силу свойств расширения Наймарка (см., например, раздел 5.1 в книге [25]). Расширение можно построить таким образом, что для любой матрицы плотности ρ на \mathcal{H} выполнены равенства

$$\text{Tr}(\mathbf{M}_i \rho) = \text{Tr}(\tilde{\mathbf{M}}_i \tilde{\rho}) , \quad \text{Tr}(\mathbf{N}_j \rho) = \text{Tr}(\tilde{\mathbf{N}}_j \tilde{\rho}) ,$$

и $\text{Tr}(\mathbf{M}_i \mathbf{N}_j \rho) = \text{Tr}(\tilde{\mathbf{M}}_i \tilde{\mathbf{N}}_j \tilde{\rho})$. Это обусловлено тем, что $\tilde{\rho}$ построен из ρ путем добавления подходящего количества нулевых строк и столбцов. Следовательно, значения энтропий при расширении остаются неизменными [129]

$$g(\mathcal{M}, \mathcal{N} | \rho) = g(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{N}} | \tilde{\rho}) . \quad (6.47)$$

Применяя затем конструкцию с расширением к полученному после первого расширения $\tilde{\mathcal{N}}$, вопрос окончательно приводится к уже доказанному случаю двух ортогональных разложений единицы. ■

Используя простые преобразования, детально описанные в доказательстве предложения 3 статьи [129], неравенство (6.36) переформулируется в виде

$$R_\alpha(\mathcal{M} | \rho) + R_\beta(\mathcal{N} | \rho) \geq -2 \ln g(\mathcal{M}, \mathcal{N} | \rho) . \quad (6.48)$$

Для чистого состояния это соотношение в терминах энтропий Рёньи совпадает с результатом, который был выведен в предыдущей работе [129]. Для спектрального разложения

$$\rho = \sum_\lambda \lambda \psi_\lambda \psi_\lambda^\dagger$$

мы введём определение

$$f(\mathcal{M}, \mathcal{N} | \rho) := \max \left\{ (p_i^{(\lambda)} q_j^{(\lambda)})^{-1/2} |\langle \mathbf{M}_i \psi_\lambda, \mathbf{N}_j \psi_\lambda \rangle| : p_i^{(\lambda)} \neq 0, q_j^{(\lambda)} \neq 0 \right\} ,$$

где вероятности равны $p_i^{(\lambda)} = \|\mathbf{M}_i^{1/2} \psi_\lambda\|_2^2$ и $q_j^{(\lambda)} = \|\mathbf{N}_j^{1/2} \psi_\lambda\|_2^2$. Ранее неравенство (6.48), но с $f(\mathcal{M}, \mathcal{N} | \rho)$ вместо $g(\mathcal{M}, \mathcal{N} | \rho)$, было получено в [129]. Если состояние ρ не является чистым, то мы имеем $g(\mathcal{M}, \mathcal{N} | \rho) < f(\mathcal{M}, \mathcal{N} | \rho)$

и более сильную границу в (6.48). Для канонически сопряженных переменных соотношения неопределённости в терминах энтропии Рёны были выведены в [131].

Перейдем к соотношениям неопределённости с энтропиями Цаллиса. Сумма $H_\alpha(\mathbf{p}) + H_\beta(\mathbf{q})$ не может быть сколь угодно малой из-за ограничения (6.36). Мы перепишем эту сумму в виде

$$H_\alpha(\mathbf{p}) + H_\beta(\mathbf{q}) = \phi(\xi, \zeta) = \frac{\xi - 1}{1 - \alpha} + \frac{\zeta - 1}{1 - \beta}, \quad (6.49)$$

где были введены переменные $\xi = \sum_i p_i^\alpha = \|\mathbf{p}\|_\alpha^\alpha$ и $\zeta = \sum_j q_j^\beta = \|\mathbf{q}\|_\beta^\beta$. Предполагая $\alpha > 1 > \beta$, мы очевидным образом имеем ограничения $\xi \leq 1$ и $\zeta \geq 1$. Заметим, однако, что последние неравенства могут и не выполняться в случае наблюдаемых с непрерывным спектром.

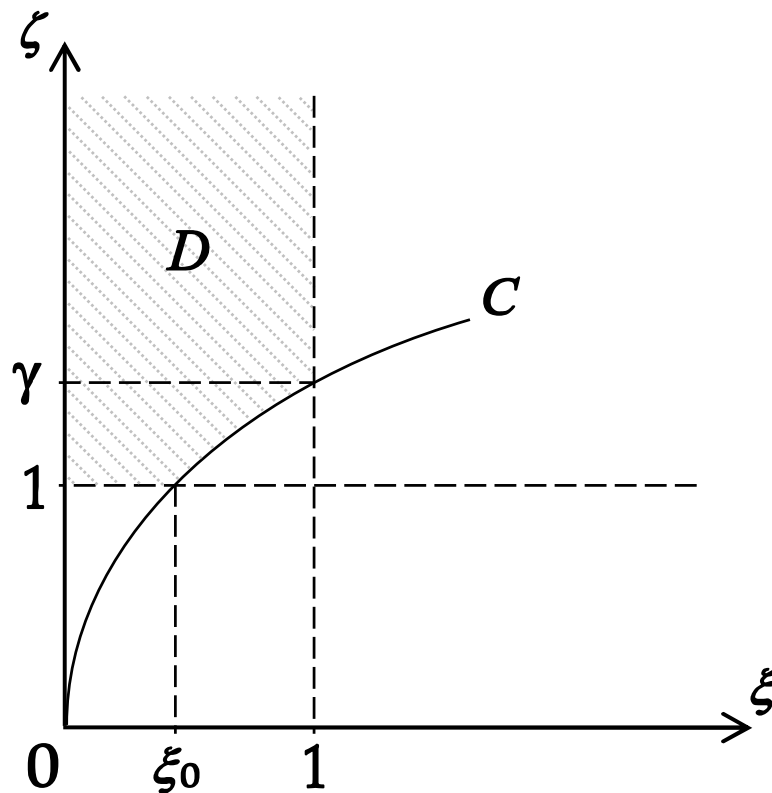


Рис. 6.1: Область \mathcal{D} , в которой ищется минимум функции $\phi(\xi, \zeta)$, определённой в (6.49).

Добавляя (6.36) в форме $\zeta \geq \gamma \xi^{\beta/\alpha}$, где $\gamma = g(\mathcal{M}, \mathcal{N} | \rho)^{-2(1-\beta)}$,

мы рассмотрим задачу минимизации $\phi(\xi, \zeta)$ при перечисленных условиях. Здесь существенно, что $g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\rho) \leq 1$ и, следовательно, $\gamma \geq 1$. Действительно, из неравенства Коши–Шварца для произведения Гильберта–Шмидта следует, что модуль (6.40) не превышает 1. Задача формулируется следующим образом. Мы ищем минимальное значение функции (6.49) в области

$$\mathfrak{D} := \{(\xi, \zeta) : 0 \leq \xi \leq 1, 1 \leq \zeta < \infty, \gamma \xi^{\beta/\alpha} \leq \zeta\}. \quad (6.50)$$

Когда $\gamma > 1$, кривая $\zeta = \gamma \xi^{\beta/\alpha}$ отсекает нижний правый угол прямоугольника $\{(\xi, \zeta) : 0 \leq \xi \leq 1, 1 \leq \zeta < \infty\}$, включая точку $(1, 1)$, в которой $\phi = 0$ (см. рис. 6.1). Внутри области \mathfrak{D} имеем

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{1}{1 - \alpha} < 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = \frac{1}{1 - \beta} > 0, \quad (6.51)$$

поскольку $\alpha > 1 > \beta$. Таким образом, минимум достигается на границе области \mathfrak{D} . Используя (6.51), задача наконец сводится к минимизации $\phi(\xi, \zeta)$ на сегменте кривой $C : \zeta = \gamma \xi^{\beta/\alpha}$ между точкой $(\xi_0, 1)$, где $\xi_0 = \gamma^{-\alpha/\beta}$, и точкой $(1, \gamma)$. Подставляя $\zeta = (\xi/\xi_0)^{\beta/\alpha}$ в (6.49) и дифференцируя по ξ , получаем

$$\frac{1}{1 - \alpha} + \frac{\beta}{\alpha(1 - \beta)\xi} \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{\beta/\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{\xi} \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{\beta/\alpha} - 1\right), \quad (6.52)$$

где мы использовали $\beta/(1 - \beta) = \alpha/(\alpha - 1)$ в силу условия $1/\alpha + 1/\beta = 2$. Когда $\xi_0 < 1$, величина (6.52) строго положительна для $\xi_0 \leq \xi \leq 1$, поэтому минимальное значение достигается в точке $(\xi_0, 1)$ и равно

$$\min_{\mathfrak{D}} \phi(\xi, \zeta) = \phi(\xi_0, 1) = \frac{\xi_0 - 1}{1 - \alpha}. \quad (6.53)$$

В результате указанных вычислений мы видим, что сумма $H_\alpha(\mathbf{p}) + H_\beta(\mathbf{q})$ ограничена снизу величиной

$$\frac{\gamma^{-\alpha/\beta} - 1}{1 - \alpha} = \frac{g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\rho)^{2\alpha(1-\beta)/\beta} - 1}{1 - \alpha} = \frac{g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\rho)^{2(\alpha-1)} - 1}{1 - \alpha}, \quad (6.54)$$

которая записывается в виде $\phi(\xi_0, 1) = \ln_\alpha(g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\rho)^{-2})$. Здесь мы применили условие $(1 - \beta)/\beta = (\alpha - 1)/\alpha$, вытекающее из связи $1/\alpha + 1/\beta = 2$. Ввиду симметрии $g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\rho) = g(\mathcal{N}, \mathcal{M}|\rho)$, мы приходим к следующему утверждению.

Предложение 38 Для данного оператора плотности ρ и двух разложенных единицы $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_i\}$ и $\mathcal{N} = \{\mathbf{N}_j\}$ справедливо неравенство

$$H_\alpha(\mathcal{M}|\rho) + H_\beta(\mathcal{N}|\rho) \geq \ln_\mu(g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\rho)^{-2}) , \quad (6.55)$$

где $1/\alpha + 1/\beta = 2$ и $\mu = \max\{\alpha, \beta\}$.

Неравенство (6.55) является соотношением неопределённостей в терминах энтропий Цаллиса для двух обобщённых квантовых измерений. Отметим, что формулировка соотношений неопределённостей с помощью энтропий Цаллиса были в частных случаях пары координата-импульс [132] и компонент спина 1/2 [133, 134]. Легко видеть, что соотношения неопределённостей (6.48) и (6.55) становятся тривиальными в детерминированном классическом случае. Всякое квантовое состояние может быть представлено нетривиальной смесью чистых состояний. Таким образом, уровень неопределённостей при таком смешивании характеризуется некоторой величиной, добавочной по отношению к чисто квантовым неопределённостям в каждом из чистых состояний указанного ансамбля. Поэтому полностью детерминированная ситуация имеет место, когда все задействованные операторы являются диагональными в одном и том же ортонормированном базисе. Очевидно, что в этом случае мы имеем $g = 1$ с занулением правых частей в неравенствах (6.48) и (6.55).

Интересно получить независящую от состояния версию соотношений неопределённостей (6.48) и (6.55). Так как функция $\ln_\mu(x)$ возрастает для $\mu > 0$ и справедливы неравенства $g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\rho) \leq f(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\rho)$ [129] и

$$f(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\psi) \leq \max \left\{ \|\mathbf{M}_i^{1/2} \mathbf{N}_j^{1/2}\|_\infty : \mathbf{M}_i \in \mathcal{M}, \mathbf{N}_j \in \mathcal{N} \right\} =: \bar{f}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) , \quad (6.56)$$

мы получаем

$$R_\alpha(\mathcal{M}|\rho) + R_\beta(\mathcal{N}|\rho) \geq \ln(\bar{f}(\mathcal{M}, \mathcal{N})^{-2}) , \quad (6.57)$$

$$H_\alpha(\mathcal{M}|\rho) + H_\beta(\mathcal{N}|\rho) \geq \ln_\mu(\bar{f}(\mathcal{M}, \mathcal{N})^{-2}) . \quad (6.58)$$

Заметим, что $\bar{f}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \leq 1$ обеспечивается неравенством $\|\mathbf{M}_i^{1/2} \mathbf{N}_j^{1/2}\|_\infty^2 \leq \|\mathbf{M}_i\|_\infty \|\mathbf{N}_j\|_\infty \leq 1$. Здесь первое неравенство является неравенством Коши–Шварца

$$\|\mathbf{M}_i^{1/2} \mathbf{N}_j^{1/2}\|_\infty^2 \leq \|\mathbf{M}_i\|_\infty \|\mathbf{N}_j\|_\infty \leq 1 . \quad (6.59)$$

для обычных матричного произведения и спектральной нормы (см., например, результат (4.50) в книге [135]), тогда как второе неравенство следует из соотношения полноты. Неравенство $\bar{f}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \leq 1$ насыщается тогда и только тогда, когда для некоторых элементов $\mathbf{M}_0, \mathbf{N}_0$ и ненулевого вектора $\varphi_0 \in \mathcal{H}$ одновременно имеют место два равенства $\mathbf{M}_0\varphi_0 = \varphi_0$ и $\mathbf{N}_0\varphi_0 = \varphi_0$. Другими словами, равенство $\bar{f}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 1$ означает, что существуют операторы $\mathbf{M}_0 \in \mathcal{M}$ и $\mathbf{N}_0 \in \mathcal{N}$, которые действуют как коммутирующие проекторы d непустом подпространстве $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{H}$. В противном случае энтропийная граница в правой части (6.58) заведомо нетривиальна. Итак, мы распространили соотношение неопределённостей, высказанное в качестве гипотезы в статье [136] и позже доказанное в [14], на энтропии Цаллиса и обобщённые квантовые измерения. Рассмотрим два конкретных физических примера.

В качестве первого примера рассмотрим пару взаимно дополнительных наблюдаемых в d -уровневой системе. Пусть комплексные амплитуды \bar{c}_k и c_ℓ связаны дискретным преобразованием Фурье

$$\bar{c}_k = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{\ell=1}^d e^{2\pi i k \ell / d} c_\ell, \quad (6.60)$$

причём соответствующие вероятности равны $p_k = |\bar{c}_k|^2$ и $q_\ell = |c_\ell|^2$. Преобразование (6.60) является примером “канонического” преобразования, которое приводит к взаимно дополнительным наблюдаемым в конечномерном пространстве [136]. Из $\|\bar{\mathbf{c}}\|_2 = \|\mathbf{c}\|_2$ и (6.35) следует, что

$$\|\mathbf{c}\|_a \leq \left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right)^{(2-b)/b} \|\bar{\mathbf{c}}\|_b, \quad \|\bar{\mathbf{c}}\|_a \leq \left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right)^{(2-b)/b} \|\mathbf{c}\|_b, \quad (6.61)$$

где $1/a + 1/b = 1$ и $1 < b < 2$. Возведением в квадрат мы получаем $\|\mathbf{q}\|_\alpha \leq (1/d)^{(1-\beta)/\beta} \|\mathbf{p}\|_\beta$ и $\|\mathbf{p}\|_\alpha \leq (1/d)^{(1-\beta)/\beta} \|\mathbf{q}\|_\beta$ при ограничениях на α и β из Предложения 37. Записанное в симметричной по индексам форме, соотношение неопределённостей в терминах энтропий Цаллиса имеет вид

$$H_\alpha(\mathbf{p}) + H_\beta(\mathbf{q}) \geq \ln_\mu(d), \quad (6.62)$$

в котором $1/\alpha + 1/\beta = 2$ и $\mu = \max\{\alpha, \beta\}$. Для $a = b = 2$ неравенства (6.61) обращаются в равенства. Таким образом, неравенство

$$H_1(\mathbf{p}) + H_1(\mathbf{q}) \geq \ln d$$

является плотным том смысле, что оно может быть насыщено. Например, это происходит тогда, когда одно из распределений $\{p_k\}$ и $\{q_\ell\}$ равномерное и другое детерминированное). Скажем, пусть $|\tilde{c}_k| = 1/\sqrt{d}$ для всех k и, далее, все c_ℓ , кроме одного, равны нулю. Для такого выбора неравенства (6.61) также насыщаются с индексами $a = \infty$ и $b = 1$. Но этот случай скорее формальный, так как $H_\alpha \rightarrow 0$ в пределе $\alpha \rightarrow \infty$. Чтобы получить наиболее сильное соотношение неопределённостей, мы должны вычислить совершенно точно (b, a) -норме преобразования (6.60) для любой пары сопряженных индексов a и b .

Второй пример относится к паре наблюдаемых из азимутального угла φ и компоненты углового момента J_z . Эти наблюдаемые допускают аналогичное рассмотрение до определённого момента. Далее проявляется важное отличие, связанное с непрерывным характером изменения азимутального угла. Сначала рассмотрим случай, когда интервал изменения φ разделён на некоторое количество экспериментальных интервалов — “бинов”. Принимая один и тот же размер $\delta\varphi$ для всех бинов, причём отношение $2\pi/\delta\varphi$ является строго положительным целым числом, мы вводим вероятности

$$p_k = \int_{k\delta\varphi}^{(k+1)\delta\varphi} |\Psi(\varphi)|^2 d\varphi, \quad q_\ell = |c_\ell|^2. \quad (6.63)$$

Здесь коэффициенты c_ℓ соответствуют разложению волновой функции по собственным состояниям оператора J_z :

$$\Psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} c_\ell e^{i\ell\varphi}. \quad (6.64)$$

Используя теорему 192 книги [78] для интегральных средних и предполагая $\beta < 1 < \alpha$, мы имеем

$$\frac{1}{\delta\varphi} \int_{k\delta\varphi}^{(k+1)\delta\varphi} |\Psi(\varphi)|^{2\beta} d\varphi \leq \left(\frac{1}{\delta\varphi} \int_{k\delta\varphi}^{(k+1)\delta\varphi} |\Psi(\varphi)|^2 d\varphi \right)^\beta \quad (6.65)$$

и противоположное неравенство с α вместо β . Суммируя эти неравенства по k с последующим возведением результатов в степени $1/\beta$ и $1/\alpha$ соответственно, где $b = 2\beta$ и $a = 2\alpha$, мы окончательно записываем

$$\|\Psi\|_b^2 \leq \delta\varphi^{(1-\beta)/\beta} \|\mathbf{p}\|_\beta, \quad \delta\varphi^{(1-\alpha)/\alpha} \|\mathbf{p}\|_\alpha \leq \|\Psi\|_a^2. \quad (6.66)$$

Здесь нормы волновой функции выражаются стандартной формулой

$$\|\Psi\|_b = \left(\int_0^{2\pi} |\Psi(\varphi)|^b d\varphi \right)^{1/b}. \quad (6.67)$$

В наших обозначениях неравенства Юнга–Хаусдорфа записываются в виде (см., например, раздел 8.17 в книге [78])

$$\|\mathbf{c}\|_a \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{(2-b)/b} \|\Psi\|_b, \quad \|\Psi\|_a \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{(2-b)/b} \|\mathbf{c}\|_b. \quad (6.68)$$

Комбинируя подходящим образом неравенства (6.66) и (6.68), мы получаем

$$\|\mathbf{q}\|_\alpha \leq \left(\frac{\delta\varphi}{2\pi} \right)^{(1-\beta)/\beta} \|\mathbf{p}\|_\beta, \quad \|\mathbf{p}\|_\alpha \leq \left(\frac{\delta\varphi}{2\pi} \right)^{(1-\beta)/\beta} \|\mathbf{q}\|_\beta. \quad (6.69)$$

Отсюда следует соотношение неопределённостей в терминах энтропий Цаллиса, а именно

$$H_\alpha(\mathbf{p}) + H_\beta(\mathbf{q}) \geq \ln_\mu \left(\frac{2\pi}{\delta\varphi} \right), \quad (6.70)$$

в котором $1/\alpha + 1/\beta = 2$ и $\mu = \max\{\alpha, \beta\}$. Когда $\mu \rightarrow 1$, новое неравенство (6.70) совпадает с соотношением в терминах энтропий Рёньи, полученным в статье [131]. Другой способ представить энтропийные соотношения неопределённостей для наблюдаемых φ и \mathbf{J}_z связан с энтропиями плотности вероятности

$$\omega(\varphi) = |\Psi(\varphi)|^2.$$

Для $0 < \alpha \neq 1$, энтропийные α -функции определяются выражениями

$$R_\alpha(\omega) := \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \|\omega\|_\alpha, \quad (6.71)$$

$$H_\alpha(\omega) := \frac{\|\omega\|_\alpha^\alpha - 1}{1-\alpha}, \quad (6.72)$$

где вспомогательный функционал $\|\omega\|_\alpha$ равен

$$\|\omega\|_\alpha = \left(\int_0^{2\pi} \omega(\varphi)^\alpha d\varphi \right)^{1/\alpha}. \quad (6.73)$$

Последняя величина похожа на норму в функциональном пространстве, но является таковой только для $\alpha \geq 1$. В пределе $\alpha \rightarrow 1$ оба выражения приводят к дифференциальной энтропии Шеннона

$$H_1(\omega) := - \int_0^{2\pi} \omega(\varphi) \ln \omega(\varphi) d\varphi. \quad (6.74)$$

В отличие от энтропий дискретных случайных величин, дифференциальные энтропии в общем случае не являются положительно определёнными. Этот факт становится ясным из следующего рассмотрения. Если $0 < \beta < 1 < \alpha$, то в случае дискретных вероятностных распределений мы заведомо имеем

$$\|p\|_\alpha \leq 1 \leq \|p\|_\beta, \quad (6.75)$$

причём равенство достигается только для детерминированных распределений. Данный факт обеспечивает неотрицательность энтропийных функций. Более того, при выводе соотношений неопределённостей вида мы искали минимум функции $\phi(\xi, \zeta)$ в области (6.50), но такая область подразумевает справедливость (6.75).

Для непрерывно изменяющихся случайных величины от подобных соотношений придётся отказаться. Пусть $w(\varphi)$ есть некоторая плотность вероятности. Из $0 < \beta < 1 < \alpha$ и нормировки

$$\int_0^{2\pi} w(\varphi) d\varphi = 1 \quad (6.76)$$

отнюдь не следует, что

$$\|w\|_\alpha \leq 1 \leq \|w\|_\beta. \quad (6.77)$$

Легко построить контрпримеры, считая, что $w(\varphi)$ отлична от нуля только в некотором узком интервале значений φ . Предположим, что

$$w_\Delta(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta\varphi}, & \text{для } \varphi_0 < \varphi < \varphi + \Delta\varphi, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6.78)$$

Для этой плотности вычисления дают

$$\|w_\Delta\|_\alpha = \Delta\varphi^{(1-\alpha)/\alpha}. \quad (6.79)$$

Так как величина $\Delta\varphi$ выбирается произвольно в интервале $(0; 2\pi)$, для заданного α правая часть (6.79) может быть сделана как больше, так и меньше 1. Несмотря на отмеченные особенности дифференциальных энтропий, соотношения неопределённостей в терминах энтропий Рёны могут быть получены без принятия дополнительных гипотез. Начиная со следствий

(6.68) из неравенств Юнга–Хаусдорфа и применяя чисто алгебраические операции, мы имеем

$$R_\alpha(\omega) + R_\beta(\mathbf{q}) \geq \ln 2\pi , \quad (6.80)$$

где $1/\alpha + 1/\beta = 2$. Нужно помнить, однако, что первая энтропия в (6.80) вычисляется для плотности распределения вероятности и может быть отрицательной. Как известно, неравенства Юнга–Хаусдорфа насыщаются тогда и только тогда, когда $\Psi(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} \exp(im\varphi)$ и $c_\ell = 0$ для всех $\ell \neq m$ (см., например, пункт (2.25) главы XII в [137]). То же самое относится к неравенствам (6.68). Таким образом, энтропийное соотношение (6.80) является плотным в том смысле, что он насыщается любой из собственных функций оператора J_z . На практике можно было бы использовать соотношение (6.80) для измерений с бинами $\delta\varphi \ll 1$.

Отличие наших соотношений неопределённостей в терминах энтропий Цаллиса в том, что их вывод подразумевает оптимизацию некоторой функции в области (6.50). Чтобы приспособить эти доводы к дифференциальным энтропиями, мы должны ограничиться достаточно плавными плотностями $\omega(\varphi)$. Фактически необходимо, чтобы неравенства (6.77) действительно выполнялись при $0 < \beta < 1 < \alpha$. Если это так, то мы получаем

$$H_\alpha(\omega) + H_\beta(\mathbf{q}) \geq \ln_\mu(2\pi) , \quad (6.81)$$

где $1/\alpha + 1/\beta = 2$, $\mu = \max\{\alpha, \beta\}$ и α -энтропия является дифференциальной. Как уже было указано, неравенства Юнга–Хаусдорфа насыщаются, когда $\Psi(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} \exp(im\varphi)$ и $c_\ell = 0$ для всех $\ell \neq m$. Предполагая выполнение (6.77) и $\alpha > 1$, мы получаем пример насыщения неравенства (6.81). Действительно, вероятностный вектор \mathbf{q} здесь детерминированный и $H_\beta(\mathbf{q}) = 0$. Далее, плотность вероятности $\omega(\varphi) = |\Psi(\varphi)|^2 = 1/(2\pi)$, откуда

$$\|\omega\|_\alpha^\alpha = (2\pi)^{1-\alpha} , \quad H_\alpha(\omega) = \frac{(2\pi)^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} = \ln_\alpha(2\pi) . \quad (6.82)$$

Для плотности $\omega(\varphi)$ такой, что (6.77) не выполняется, мы можем использовать либо результат (6.80) с дифференциальной энтропией Рённи, либо соотношение (6.70) для энтропий Цаллиса с бинами. Попутно заметим, что из (6.68) следует соотношение в терминах энтропий Рённи с

бинами, а именно

$$R_\alpha(\mathbf{p}) + R_\beta(\mathbf{q}) \geq \ln\left(\frac{2\pi}{\delta\varphi}\right), \quad (6.83)$$

в котором $1/\alpha + 1/\beta = 2$. Поскольку все физические измерения непрерывных переменных имеют конечное разрешение и так или иначе реализуются на “шкалах” с бинами, соотношения неопределённостей (6.70) и (6.83) представляются более релевантными.

В рамках (6.55) мы готовы рассмотреть случай экстремальных распутываний супероператоров. Для экстремальных распутываний $\mathcal{A}_\rho^{(ex)}$ и $\mathcal{B}_\rho^{(ex)}$ супероператоров Φ_A и Φ_B получаем соотношение неопределённости

$$H_\alpha(\mathcal{A}_\rho^{(ex)}|\rho) + H_\beta(\mathcal{B}_\rho^{(ex)}|\rho) \geq \ln_\mu\left(g(\mathcal{A}_\rho^{(ex)}, \mathcal{B}_\rho^{(ex)}|\rho)^{-2}\right), \quad (6.84)$$

где величина $g(\mathcal{A}_\rho^{(ex)}, \mathcal{B}_\rho^{(ex)}|\rho)$ определена в (6.37) для разложений единицы с элементами

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{A}_i^\dagger \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{N}_j = \mathbf{B}_j^\dagger \mathbf{B}_j, \quad (6.85)$$

при этом операторы $\mathbf{A}_i \in \mathcal{A}_\rho^{(ex)}$ и $\mathbf{B}_j \in \mathcal{B}_\rho^{(ex)}$. Следы $\text{Tr}(\mathbf{A}_i^\dagger \mathbf{A}_i \rho)$ и $\text{Tr}(\mathbf{B}_j^\dagger \mathbf{B}_j \rho)$ дают вероятности соответствующих каналов. Мы можем также записать соотношение неопределённости для экстремальных распутываний по отношению к энтропиям Рёньи. Используя (6.48) и полагая $\alpha > 1$, получаем соотношение

$$R_\alpha(\tilde{\mathcal{A}}_{\alpha,\rho}^{(ex)}|\rho) + R_\beta(\mathcal{B}_\rho^{(ex)}|\rho) \geq -2 \ln\left(g(\tilde{\mathcal{A}}_{\alpha,\rho}^{(ex)}, \mathcal{B}_\rho^{(ex)}|\rho)\right), \quad (6.86)$$

где $\tilde{\mathcal{A}}_{\alpha,\rho}^{(ex)}$ обозначает распутывание Φ_A , экстремальное по отношению к α -энтропии Рёньи порядка $\alpha > 1$. Это распутывание отличается от заданного в (6.14) и зависит, вообще говоря, не только от ρ , но и от параметра α . Поиск явного аналитического выражения для операторов распутывания $\tilde{\mathcal{A}}_{\alpha,\rho}^{(ex)}$ представляется достаточно сложным, потому что выпуклость или вогнутость не могут быть здесь использованы. Тем не менее энтропийное соотношение (6.86) в терминах энтропий Рёньи выполняется, по крайней мере, как математическое неравенство.

Каждый супероператор можно реализовать с помощью различных наборов операторов Крауса. Каждый конкретный набор операторов Крауса называется распутыванием данного супероператора. Мы проанализировали распутывания супероператора, экстремальные по отношению к все

энтропиям Цаллиса положительной степени и энтропиям Рёньи порядка $0 < \alpha < 1$. Этот общий результат сформулирован в Предложении 36. Если одно из распутываний дано явно, то соответствующее минимизирующее распутывание легко получить с помощью диагонализации некоторой эрмитовой матрицы. Довольно широко известное соотношение между энтропией Шеннона ансамбля чистых состояний и энтропией фон Неймана индуцированной ансамблем матрицы плотности распространяется как на энтропии Цаллиса, так и на энтропии Рёньи для вышеуказанных значений параметра α . Структура энтропии Цаллиса допускает обобщение на смеси операторов плотности, что резюмируется формулой (6.30)). Из теоремы Рисса следует, что существует неравенство между функциями вероятностных векторов, порождённых на данном квантовом состоянии двумя разложениями единицы. Данное следствие сформулировано в Предложении 37. Отсюда вытекают соотношения неопределённостей, данные неравенством (6.48) в терминах энтропий Рёньи и неравенством (6.55) в терминах энтропий Цаллиса. Общая формулировка (6.55) является новым результатом в рамках данного направления исследований. Её применение проиллюстрировано на двух интересных с физической точки зрения примерах.

Описанный подход не всегда ведёт к самым сильным отношениям, хотя иногда представленные энтропийные границы действительно достижимы для произвольных значений параметров. На основе теоремы Рисса мы не в состоянии получить оптимальные неравенства во всех без исключения случаях. Строго говоря, результат (6.35) обеспечивает только верхнюю оценку для (b, a) -нормы преобразования (6.32). Ситуацию можно прояснить на примере преобразования Фурье, для которого точные значения норм были вычислены в работах [138, 139]. Используя теорему Рисса вслед за авторами работы [14], можно прийти лишь к более слабому соотношению Хиршмана [140]. Поиск точных значений для указанных норм заданного преобразования является отдельной достаточно сложной проблемой. Формулировки (6.48) и (6.55) энтропийных соотношений неопределённостей являются независимыми неравенствами, основанными на предложении 37. Какая из них может быть более подходящей на практике?

Чтобы характеристика квантового состояния была экспериментально надёжной, она должна обладать свойством устойчивости. Этот вопрос был инициирован в статье [30], где было показано, что энтропия Рёны в термодинамическом пределе неустойчива по отношению к малым деформациям состояния. Напротив, в случае Цаллиса как сама энтропия [40], так и её частичные суммы [28] обладают свойством устойчивости. С этой точки зрения формулировка (6.55) представляется более подходящей. В формулах (6.84) и (6.86) энтропийные соотношения неопределённостей естественным образом записываются для экстремальных распутываний двух заданных сохраняющих след супероператоров. Было бы интересно разработать представленные соотношения в направлении основной идеи работы [141], где учтено влияние памяти на уровень неопределённостей. Это открывает перспективу непосредственного применения энтропийных соотношений неопределённостей в задачах обработки информации на квантовых носителях.

Глава 7

Энтропийные соотношения неопределённостей для равнонаклонённых базисов и симметричных информационно полных измерений

В этой главе рассмотрены энтропийные соотношения неопределённостей, полученные в работе [142]. Как правило, в задачах передачи и обработки информации на квантовых носителях особое значение имеют измерения, обладающие той или иной специальной структурой. В частности, таковыми являются измерения на основе набора равнонаклонённых базисов. Отметим, что первая по времени появления и одновременно наиболее распространённая практически схема квантовой криптографии — протокол BB84 [143] — основана на использовании двух равнонаклонённых базисов. Фактически базисы такого типа рассматривались ещё Швингером в связи с исследованием понятия дополненности в квантовой теории [144]. Если два базиса равнонаклонены, то состояние одного из базисов имеет одно и то же перекрытие с любым из состояний другого базиса. Поэтому измерение состояния из первого базиса во втором не даёт какой либо информации о том, какое именно состояние было приготовлено. Именно этот факт используется в протоколе BB84 квантового распределения ключа. Равнонаклонённые базисы широко используются в квантовой томографии

[145], квантовой коррекции ошибок [146, 147], детектировании энтенглмента [148] и других задачах (см. обзор [149] и указанные там ссылки). Максимальное число в наборе равнонаклонённых базисов d -мерного пространства известно для случая, когда d — степень простого числа, и равно $d + 1$. Для других значений d максимально возможное в d -мерном пространстве количество равнонаклонённых базисов является открытой проблемой [149]. Ответ неизвестен даже для числа $d = 6$, первого среди отличных от степени простого натуральных чисел.

Энтропийные соотношения неопределённостей для $d + 1$ равнонаклонённых базисов в d -мерном пространстве состояний были получены в работах [150, 151]. При этом в качестве квантификатора неопределённостей использовалась энтропия Шеннона. Для четного d такие соотношения были улучшены в статье [152]. Автор работы [151] привёл также точные границы для кубитового случая $d = 2$. Соотношения неопределённости специального вида с некоторыми приложениями были представлены в работе [153]. Эти результаты сформулированы в терминах энтропий Шеннона и энтропии Рёньи порядка 2. Они основаны на том факте, что $d + 1$ равнонаклонённых базиса, если таковые вообще существуют, образуют сферическую комбинаторную 2-схему в d -мерном пространстве. Эти понятия также связаны с построением симметричных информационно полных измерений [154]. В настоящей главе мы получим соотношения неопределённостей в терминах энтропий Рёньи и Цаллиса для равнонаклонённых базисов и симметричных информационно полных измерений. Изучение статистических свойств таких измерений мотивировано приложениями к задачам квантовой обработки информации [155]. Использование обобщённых энтропий позволяет расширить область применимости результатов. В качестве примера можно привести формулировку неравенств типа Белла в терминах условных энтропий Цаллиса [156]. Это расширяет класс вероятностных моделей, чья нелокальность или контекстуальность контролируются в рамках энтропийного подхода.

Рассмотрим два ортонормированных базиса $\mathcal{B}_1 = \{|b_j^{(1)}\rangle\}$ и $\mathcal{B}_2 = \{|b_k^{(2)}\rangle\}$ в d -мерном комплексном пространстве \mathcal{H} . Данные базисы называ-

ются *равнонаклонёнными*, если для всех значений индексов j и k выполняется условие

$$|\langle b_j^{(1)} | b_k^{(2)} \rangle| = \frac{1}{\sqrt{d}} . \quad (7.1)$$

Семейство $\mathbb{B} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_M\}$ является набором равнонаклонённых базисов, когда любые два из этих базисов взаимно равнонаклонены. Как уже было отмечено, для равнонаклонённых базисов состояние одного из них имеет одно и то же перекрытие с каждым из состояний другого. Это свойство используется в протоколе BB84 [143] и в протоколе шести состояний [157]. В двух измерениях три собственных базиса спиновых матриц Паули являются равнонаклонёнными. Основные конструктивные методы построения равнонаклонённых базисов были предложены в работах [158, 159, 160, 161] и суммированы в обзоре [149]. Поиск таких базисов для тех значений d , которые не являются степенью простого числа, связан с изучением комплексных матриц Адамара [162].

Квантовые измерения отражают многие специфические черты квантовой теории в целом. Каждое измерение предполагает определённое взаимодействие исследуемой системы с измерительным прибором или, в более широком смысле, просто с ещё одной системой. При этом появляется возможность “косвенного” измерения, когда измерение в смысле фон Неймана проводится фактически над добавленной системой, которая может иметь бóльшую размерность. Это один из способов ввести так называемые обобщённые квантовые измерения. Каждое такое измерение описывается неортогональным разложением единицы, или ПОЗМ, которое представляет из себя набор положительно полуопределённых операторов, удовлетворяющих соотношению полноты. Принципиально важным здесь является тот факт, что число различных исходов ПОЗМ-измерения превосходит размерность системы, над которой оно проводится.

В случае ПОЗМ-измерения $\mathcal{N} = \{\mathbf{N}_j\}$ над системой с матрицей плотности ρ вероятность j -ого исхода равна [4]

$$p_j(\mathcal{N}|\rho) = \text{Tr}(\mathbf{N}_j\rho) . \quad (7.2)$$

Измерение является информационным полным, если его статистика полностью определяет квантовое состояние до измерения [163, 164, 165, 166]. В

d -мерном пространстве рассмотрим набор, содержащий d^2 положительно полуопределённых матриц ранга один и вида

$$\mathbf{N}_j = \frac{1}{d} |\phi_j\rangle\langle\phi_j|. \quad (7.3)$$

Если нормированные на единицу векторы $|\phi_j\rangle$ подчиняются условию

$$|\langle\phi_j|\phi_k\rangle|^2 = \frac{1}{d+1}, \quad j \neq k, \quad (7.4)$$

то набор $\{\mathbf{N}_j\}$ описывает симметричное информационно полное измерение [154]. Авторы работы [167] рассмотрели вопрос о приближённом построении симметричных информационно полных измерений, когда допускается небольшое отклонение от требования (7.4) по симметричной величине внутренних произведений. Из уравнения (7.4) следует, что попарные внутренние произведения двух элементов измерения \mathcal{N} равны величине

$$\langle\mathbf{N}_j, \mathbf{N}_k\rangle_{\text{hs}} = \frac{1}{d^2(d+1)}, \quad j \neq k. \quad (7.5)$$

Из уравнений (7.4) и (7.5) следуют основные свойства симметричных информационно полных измерений [154]. В частности, векторы $|\phi_j\rangle$ образуют сферическую комбинаторную 2-схему [154].

Напомним необходимые свойства энтропий Рёньи и Цаллиса. Для заданного вероятностного вектора \mathbf{p} его α -энтропии Цаллиса и Рёньи определяются формулами (6.1) и (6.3) соответственно. Обзор физических приложений энтропии Рёньи дан в статье [47]. Наряду со стандартным случаем $\alpha = 1$, следующие два выбора энтропийного параметра α встречаются особенно часто. Для $\alpha = 2$ формула (6.3) даёт так называемую столкновительную энтропию

$$R_2(\mathbf{p}) = -\ln\left(\sum_j p_j^2\right). \quad (7.6)$$

В работах [153, 168] энтропия использовалась в качестве меры неопределённостей при измерениях заданного состояния в нескольких равнонаклонённых базисах. В пределе $\alpha \rightarrow \infty$ получается min-энтропия

$$R_\infty(\mathbf{p}) = -\ln(\max p_j). \quad (7.7)$$

Min-энтропия представляет особый интерес при изучении стойкости квантово-криптографических протоколов [169]. Для размерности $d = 2^n$,

авторы статьи [170] получили нижние оценки на сумму min-энтропий по отношению к набору равнонаклонённых базисов.

В случае энтропийных функций Цаллиса будет систематически использоваться понятие α -логарифма (2.6). Тогда правую часть (6.1) можно переписать в виде

$$H_\alpha(\mathbf{p}) = - \sum_j p_j^\alpha \ln_\alpha(p_j) = \sum_j p_j \ln_\alpha\left(\frac{1}{p_j}\right). \quad (7.8)$$

Энтропия Цаллиса (6.1) является выпуклой функцией вероятностного распределения; для каждого $\lambda \in [0; 1]$ и двух распределений $\mathbf{p} = \{p_j\}$ и $\mathbf{q} = \{q_j\}$ мы имеем

$$H_\alpha(\lambda\mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{q}) \geq \lambda H_\alpha(\mathbf{p}) + (1 - \lambda)H_\alpha(\mathbf{q}). \quad (7.9)$$

Действительно, функция $x \mapsto (x^\alpha - x)/(1 - \alpha)$ очевидно вогнута. Следует подчеркнуть, что, если мы не фиксируем размерность вероятностных векторов, вогнутость α -энтропии Рёньи можно использовать только для $\alpha < 1$. Когда $\alpha > 1$, α -энтропия Рёньи не является ни чисто выпуклой, ни чисто вогнутой [47]. Известно также [171], что в случае двумерных вероятностных векторов α -энтропия Рёньи вогнута для всех $\alpha \in [0; 2]$.

Неэффективности детектирования будут анализироваться в рамках следующей модели. Заданному значению эффективности $\eta \in [0; 1]$ и произвольному вероятностному распределению $\mathbf{p} = \{p_j\}$ ставится в соответствие “искажённое” распределение $\mathbf{p}^{(\eta)}$ с вероятностями

$$p_j^{(\eta)} = \eta p_j, \quad p_\emptyset^{(\eta)} = 1 - \eta. \quad (7.10)$$

Вероятность $p_\emptyset^{(\eta)}$ соответствует событию “детектор не сработал”. Как показано в статье [156], для всех $\alpha > 0$ справедливо

$$H_\alpha(\mathbf{p}^{(\eta)}) = \eta^\alpha H_\alpha(\mathbf{p}) + h_\alpha(\eta), \quad (7.11)$$

где $h_\alpha(\eta)$ — бинарная α -энтропия Цаллиса. Для энтропии Шеннона имеем $H_1(\mathbf{p}^{(\eta)}) = \eta H_1(\mathbf{p}) + h_1(\eta)$. Соотношения вида (7.11) для энтропии Шеннона были использованы при изучении энтропийного подхода к неравенствам Белла в сценариях с неэффективными детекторами [172]. В статье [156] эта трактовка была расширена на энтропийные функции типа Цаллиса.

В простейшем случае одного кубита три базиса из собственных векторов матриц Паули являются равнонаклонёнными по отношению друг к другу. Пусть \mathbf{m} и \mathbf{n} – два единичных вещественных вектора. В работе [173] было показано, что

$$H_{1/2}(\boldsymbol{\sigma}_m|\boldsymbol{\rho}) + H_{1/2}(\boldsymbol{\sigma}_n|\boldsymbol{\rho}) \geq \ln_{1/2}\left(1 + \sqrt{1 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2}\right), \quad (7.12)$$

где $\boldsymbol{\sigma}_m = m_x\boldsymbol{\sigma}_x + m_y\boldsymbol{\sigma}_y + m_z\boldsymbol{\sigma}_z$ и $\boldsymbol{\sigma}_n = n_x\boldsymbol{\sigma}_x + n_y\boldsymbol{\sigma}_y + n_z\boldsymbol{\sigma}_z$. Правая часть (7.12) максимальна при $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$, когда единичные векторы ортогональны, а собственные векторы операторов $\boldsymbol{\sigma}_m$ и $\boldsymbol{\sigma}_n$ равнонаклонены друг к другу. В таком случае энтропийная граница равна $\ln_{1/2}(2) = 2(\sqrt{2} - 1)$. Энтропийное соотношение неопределённостей в терминах энтропий Рёньи имеет вид [173]

$$R_{1/2}(\boldsymbol{\sigma}_m|\boldsymbol{\rho}) + R_{1/2}(\boldsymbol{\sigma}_n|\boldsymbol{\rho}) \geq \ln\left(1 + \sqrt{1 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2}\right). \quad (7.13)$$

Правая часть (7.13) получается из правой части (7.12) заменой $1/2$ -логарифма на обычный натуральный логарифм. Соотношение неопределённостей (7.13) не может быть получено на основе соотношений типа Маассена и Уффинка.

После этих вступительных замечаний перейдём к выводу энтропийных соотношений неопределённостей для произвольного набора равнонаклонённых базисов. Мы начнём с формулировок, использующих α -энтропию Цаллиса для значений параметра $\alpha \in (0; 2]$. При этом можно совместно рассматривать как формулировки, содержащие зависимость от измеряемого состояния, так и формулировки, справедливые для всех состояний. Наш первый результат выражается следующим образом.

Предложение 39 Пусть $\mathbb{B} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_M\}$ – набор M равнонаклонённых базисов в d -мерном комплексном пространстве \mathcal{H} . Для $\alpha \in (0; 2]$ и произвольной матрицы плотности $\boldsymbol{\rho}$ на \mathcal{H} усреднённая по \mathbb{B} α -энтропия Цаллиса удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{M} \sum_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} H_\alpha(\mathcal{B}|\boldsymbol{\rho}) \geq \ln_\alpha\left(\frac{Md}{\text{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2) d + M - 1}\right). \quad (7.14)$$

Не зависящая от ρ нижняя граница устанавливается неравенством

$$\frac{1}{M} \sum_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} H_\alpha(\mathcal{B}|\rho) \geq \ln_\alpha \left(\frac{Md}{d+M-1} \right). \quad (7.15)$$

Доказательство. Мы будем предполагать, что $\alpha \neq 1$. Каждому ортонормированному базису $\mathcal{B} = \{|b_j\rangle\}$ поставим в соответствие индекс совпадения

$$C(\mathcal{B}|\rho) := \sum_{j=1}^d p_j(\mathcal{B}|\rho)^2, \quad (7.16)$$

где $p_j(\mathcal{B}|\rho) = \langle b_j|\rho|b_j\rangle$. Вторая производная функции $\ln_\alpha(1/x)$ равна $(2-\alpha)x^{\alpha-3}$ и положительна для $\alpha \leq 2$. Таким образом, сама упомянутая функция выпукла для таких α . Комбинируя неравенство Иенсена с правой частью (7.8), для $0 < \alpha \leq 2$ и произвольного вероятностного вектора p запишем

$$H_\alpha(p) \geq \ln_\alpha \left(\frac{1}{C(p)} \right). \quad (7.17)$$

Используя это неравенство и повторно неравенство Иенсена, мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M H_\alpha(\mathcal{B}_m|\rho) &\geq \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \ln_\alpha \left(\frac{1}{C_m} \right) \\ &\geq \ln_\alpha \left\{ \left(\frac{1}{M} \sum_m C_m \right)^{-1} \right\}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где $C_m = C(\mathcal{B}_m|\rho)$. Авторы статьи [168] доказали следующий важный результат. Для M равнонаклонённых базисов сумма индексов совпадения удовлетворяет неравенству

$$\sum_{m=1}^M C_m \leq \text{Tr}(\rho^2) + \frac{M-1}{d}. \quad (7.19)$$

Так как функция $x \mapsto \ln_\alpha(1/x)$ убывающая, неравенство $x \leq y$ влечёт $\ln_\alpha(1/x) \geq \ln_\alpha(1/y)$. Объединив это с уравнениями (7.18) и (7.19), мы получаем результат (7.14). Подставляя $\text{Tr}(\rho^2) \leq 1$ в неравенство (7.19), те же соображения дают (7.15). Наконец, стандартный случай получается в пределе $\alpha \rightarrow 1$. ■

Для чистых состояний, когда $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, имеем $\text{Tr}(\rho^2) = 1$. Тогда зависящая от состояния граница (7.14) сводится к виду (7.15). Для состояний, не являющихся чистыми, нижняя граница (7.14) сильнее ввиду

строгoго неравенства $\text{Tr}(\rho^2) < 1$. Итaк, полученные нижние границы увеличиваются с ростом смешанности измеряемого состояния. В пределе $\alpha \rightarrow 1$ границы (7.14) и (7.15) воспроизводят соотношения, полученные ранее в статье [168]. В отличие от предыдущих результатов энтропийные границы работы [168] выполняются для любой размерности d и произвольного числа M равнонаклонённых базисов. Единственное предположение состоит в том, что M таких базисов существуют. Значит, мы распространили общие энтропийные соотношения неопределённостей для равнонаклонённых базисов с использованием однопараметрического семейства α -энтропий, причём $\alpha \in (0; 2]$. Заметим, что наши доводы во многом отличаются от метода работы [168]. Последний в основном основан на результатах статьи [174]. Её авторы получили семейство неравенств между энтропией Шеннона и индексами совпадения [174]. Такие неравенства также использовались для получения более подробных оценок в не зависящей от измеряемого состояния формулировке [168]. Как было обнаружено, такие энтропийные границы не сильнее границы из неравенства (7.14) для $\alpha = 1$. Тем не менее, было бы интересно исследовать оценки такого рода для α -энтропий Цаллиса.

Подставляя $M = d + 1$ в неравенства (7.14) и (7.15), мы получаем

$$\frac{1}{d+1} \sum_{m=1}^{d+1} H_{\alpha}(\mathcal{B}_m | \rho) \geq \ln_{\alpha} \left(\frac{d+1}{\text{Tr}(\rho^2) + 1} \right) \quad (7.20)$$

$$\geq \ln_{\alpha} \left(\frac{d+1}{2} \right). \quad (7.21)$$

В случае $\alpha = 1$ правая часть неравенства (7.21) приводит к известной энтропийной оценке. Она была дана в статье [151] и впоследствии получена другими методами во многих работах. В частности, здесь можно использовать следующий факт [153]. Любая совокупность $d + 1$ равнонаклонённых базисов в d -мерном комплексном пространстве, если таковая существует, образует сферическую комбинаторную 2-схему [154]. Представленная выше граница (7.21) может быть выведена на основе этого факта и неравенства (7.17). Однако существование наборов, содержащих $d + 1$ равнонаклонённых базисов, установлено только в случае значений d , являющихся степенью простого числа. Поэтому важно иметь энтропийные

границы, справедливые для произвольного количества равнонаклонённых базисов.

Оценки уровня неопределённостей в терминах энтропий с параметрической зависимостью не являются просто ещё одним способом сформулировать сам принцип [14]. Энтропийные соотношения неопределённостей налагают некоторые условия на вероятности исходов при квантовом измерении. Таким образом, соотношения (7.14) и (7.15) представляют также и практический интерес. В этой связи полезно рассмотреть более реалистичный случай измерений с неэффективностями детектирования. Пусть параметр $\eta \in [0; 1]$ характеризует эффективность используемых в эксперименте детекторов. Событие “детектор не сработал” обозначается дополнительным результатом \emptyset . Предполагая, что для любого базиса $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$ вероятностное распределение искажается согласно уравнению (7.10), запишем

$$p_j^{(\eta)}(\mathcal{B}|\rho) = \eta p_j(\mathcal{B}|\rho) , \quad p_{\emptyset}^{(\eta)}(\mathcal{B}|\rho) = 1 - \eta . \quad (7.22)$$

Другими словами, эффективность детекторов считается одинаковой по отношению ко всем из выбранных равнонаклонённых базисов. С физической точки зрения такое предположение представляется наиболее естественным. Используя формулы (7.11) и (7.14), для $\alpha \in (0; 2]$ мы получаем

$$\frac{1}{M} \sum_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} H_{\alpha}^{(\eta)}(\mathcal{B}|\rho) \geq \eta^{\alpha} \ln_{\alpha} \left(\frac{Md}{\text{Tr}(\rho^2) d + M - 1} \right) + h_{\alpha}(\eta) . \quad (7.23)$$

Здесь $H_{\alpha}^{(\eta)}(\mathcal{B}|\rho)$ обозначает α -энтропию распределения (7.22). Результат (7.23) является энтропийным соотношением неопределённостей в модели с неэффективностями детектирования. В случае $\alpha = 1$ мы просто добавляем бинарную энтропию Шеннона $h_1(\eta)$ к нижней границе, отвечающей случаю идеальных детекторов. Энтропии фактических вероятностных распределений учитывают не только квантовые неопределённости по отношению к базисам, но неизбежно вводимую реальными детекторами дополнительную неопределённость. Правая часть формулы (7.23) также позволяет оценить требуемый уровень эффективности применяемых детекторов. В этом случае первый член правой части (7.23) должен быть достаточно большим по сравнению с бинарной энтропией $h_{\alpha}(\eta)$.

Формулировку соотношений неопределённостей для равнонаклонённых базисов с использованием α -энтропий Рёньи начнём с вывода нижней оценки на усреднённую min-энтропию. Он основан на одном элементарном, но очень полезном неравенстве. Это неравенство формулируется следующим образом.

Предложение 40 Пусть n положительных чисел x_j удовлетворяют двум условиям

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1, \quad \sum_{j=1}^n x_j^2 = b^2. \quad (7.24)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\max\{x_j : 1 \leq j \leq n\} \leq \frac{1}{n} \left(1 + \sqrt{n-1} \sqrt{nb^2 - 1} \right). \quad (7.25)$$

Доказательство. Для определённости мы предположим, что $x_j \leq x_n$ для всех $j = 1, \dots, n-1$. Применяя неравенство Йенсена к выпуклой функции $x \mapsto x^2$, запишем

$$\left(\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} x_j \right)^2 \leq \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2. \quad (7.26)$$

Согласно одному из предварительных условий (7.24) мы имеем $\sum_{j=1}^{n-1} x_j = 1 - x_n$. Объединение этого с уравнением (7.26) приводит в конце концов к неравенству

$$\frac{(1 - x_n)^2}{n-1} \leq \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2. \quad (7.27)$$

Из другого предусловия мы записываем требование

$$(1 - x_n)^2 + (n-1)x_n^2 = n \left(x_n - \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{n-1}{n} \leq (n-1)b^2, \quad (7.28)$$

которое приводится к виду

$$\left(x_n - \frac{1}{n} \right)^2 \leq \frac{(n-1)}{n^2} (nb^2 - 1).$$

Поскольку по смыслу x_n не меньше $1/n$, число x_n должно быть ограничено сверху правой частью (7.25). ■

Неравенство (7.25) даёт верхнюю границу на ∞ -норму комплексного вектора. Напомним, что q -норма вектора $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ для $q \in [1; \infty]$ определена

формулой

$$\|\mathbf{u}\|_q := \left(\sum_{j=1}^n |u_j|^q \right)^{1/q}. \quad (7.29)$$

Как хорошо известно, случай $q = 2$ даёт обычную евклидову норму $\|\mathbf{u}\|_2$. В предельном случае $q = \infty$ определение (7.29) приводит к ∞ -норме, равной

$$\|\mathbf{u}\|_\infty := \max\{|u_j| : 1 \leq j \leq n\}. \quad (7.30)$$

Подставляя $x_j = \|\mathbf{u}\|_1^{-1} |u_j|$ в формулу (7.25), мы сразу получаем неравенство

$$\|\mathbf{u}\|_\infty \leq \frac{1}{n} \left(\|\mathbf{u}\|_1 + \sqrt{n-1} \sqrt{n\|\mathbf{u}\|_2^2 - \|\mathbf{u}\|_1^2} \right). \quad (7.31)$$

Неравенство (7.31) явно насыщается в следующих двух случаях. В первом случае только одна из компонент вектора отлична от нуля, откуда все q -нормы имеют одну и ту же величину. Во втором случае все компоненты равны по модулю величине $\|\mathbf{u}\|_1/n$, откуда

$$\|\mathbf{u}\|_q = n^{(1-q)/q} \|\mathbf{u}\|_1.$$

Аналогичные соотношения можно записать для соответствующих q -норм Шаттена конечномерного линейного оператора. Здесь мы воздерживаемся от обсуждения подробностей. Отметим, что использованное выше неравенство (5.33) также следует из (7.31).

Используя неравенство (7.31), можно вывести нижние границы на усреднённую min-энтропию по отношению к произвольному набору равнонаклонённых базисов. Для размерности $d = 2^n$ авторы работы [170] вывели нижние оценки на усреднённую min-энтропию в формулировке, не зависящей от состояния, для произвольного числа равнонаклонённых базисов. Наш метод позволяет достичь этого без использования предположения $d = 2^n$. Более того, нетрудно получить зависящую от измеряемого состояния формулировку.

Предложение 41 Пусть $\mathbb{B} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_M\}$ — набор M равнонаклонённых базисов в d -мерном комплексном пространстве \mathcal{H} . Для произвольной матрицы плотности ρ , заданной на пространстве \mathcal{H} , усреднённая min-энтропия удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{M} \sum_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} R_\infty(\mathcal{B}|\rho) \geq \ln d - \ln \left(1 + M^{-1/2} \sqrt{d-1} \sqrt{\text{Tr}(\rho^2) d - 1} \right). \quad (7.32)$$

Не зависящая от ρ нижняя граница устанавливается неравенством

$$\frac{1}{M} \sum_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} R_\infty(\mathcal{B}|\rho) \geq \ln \left(\frac{\sqrt{M} d}{d + \sqrt{M} - 1} \right). \quad (7.33)$$

Доказательство. Функция $x \mapsto -\ln x$ является выпуклой. Объединяя соответствующее неравенство Иенсена с формулой (7.7), мы запишем

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M R_\infty(\mathcal{B}_m|\rho) \geq -\ln \left(\frac{1}{M} \sum_m \max p_j(\mathcal{B}_m|\rho) \right). \quad (7.34)$$

Для сокращения выражений введём вспомогательную функцию $g_d(x) = d^{-1}(1 + \sqrt{d-1}\sqrt{xd-1})$. Из результатов (7.19) и (7.25) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_m \max p_j(\mathcal{B}_m|\rho) &\leq \frac{1}{M} \sum_m g_d(C_m) \\ &\leq g_d \left(\frac{1}{M} \sum_m C_m \right) \leq g_d \left(\frac{\text{Tr}(\rho^2) d + M - 1}{Md} \right). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Здесь были использованы два свойства функции $g_d(x)$, а именно её выпуклость и возрастание с ростом x . Правую часть (7.35) можно переписать в виде

$$\frac{1}{d} \left(1 + \sqrt{d-1} \sqrt{\frac{\text{Tr}(\rho^2) d - 1}{M}} \right) \leq \frac{d + \sqrt{M} - 1}{\sqrt{M} d}, \quad (7.36)$$

так как $\text{Tr}(\rho^2) \leq 1$. Поскольку функция $x \mapsto -\ln x$ является убывающей, неравенства (7.32) и (7.33) прямо следуют из (7.34) и (7.36). ■

С точностью до обозначений независимое от измеряемого состояния соотношение (7.33) совпадает с формулами (10) и (41) статьи [170]. Таким образом, граница (7.33) на усреднённую min-энтропию является расширением одного из основных результатов [170] до зависящей от квантового состояния формулировки. К тому же наш вывод не предполагает специального выбора размерности d . Единственное предположение состоит в том, в пространстве такой размерности существуют M равнонаклонённых базисов. По этим причинам неравенство (7.32) интересно как само по себе, так и с точки зрения потенциальных приложений. Теперь перейдём к формулировке соотношений неопределённостей в терминах α -энтропий Рёны с произвольным $\alpha \geq 2$. Для этого понадобится ещё одно вспомогательное утверждение, доказанное в [175]. Для $\alpha \geq 2$ имеем

$$\sum_j p_j^\alpha \leq (\max p_j)^{\alpha-2} C(\rho). \quad (7.37)$$

Тогда для α -энтропии Рёньи порядка $\alpha \geq 2$ справедливо неравенство

$$R_\alpha(\mathbf{p}) \geq \frac{1}{\alpha - 1} R_2(\mathbf{p}) + \frac{\alpha - 2}{\alpha - 1} R_\infty(\mathbf{p}). \quad (7.38)$$

Заметим также, что из выпуклости функции $x \mapsto (1 - \alpha)^{-1} \ln x$ и формулы (7.19) следует, что

$$\frac{1}{M} \sum_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} R_2(\mathcal{B}|\boldsymbol{\rho}) \geq \ln \left(\frac{Md}{\text{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2) d + M - 1} \right) \quad (7.39)$$

$$\geq \ln \left(\frac{Md}{d + M - 1} \right). \quad (7.40)$$

Комбинируя (7.38), (7.39) и (7.32), получаем следующее утверждение [175].

Предложение 42 Пусть $\mathbb{B} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_M\}$ — набор M равнонаклонённых базисов в d -мерном комплексном пространстве \mathcal{H} . Для $\alpha \in (0; 2]$ и произвольной матрицы плотности $\boldsymbol{\rho}$ на \mathcal{H} усреднённая по \mathbb{B} α -энтропия Рёньи удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} R_\alpha(\mathcal{B}|\boldsymbol{\rho}) &\geq \frac{1}{\alpha - 1} \ln \left(\frac{Md}{\text{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2) d + M - 1} \right) \\ &+ \frac{\alpha - 2}{\alpha - 1} \left\{ \ln d - \ln \left(1 + M^{-1/2} \sqrt{d - 1} \sqrt{\text{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2) d - 1} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Не зависящая от $\boldsymbol{\rho}$ нижняя граница устанавливается неравенством

$$\frac{1}{M} \sum_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} R_\alpha(\mathcal{B}|\boldsymbol{\rho}) \geq \frac{1}{\alpha - 1} \ln \left(\frac{Md}{d + M - 1} \right) + \frac{\alpha - 2}{\alpha - 1} \ln \left(\frac{\sqrt{M} d}{d + \sqrt{M} - 1} \right). \quad (7.42)$$

В смысле зависимости от матрицы плотности $\boldsymbol{\rho}$, нижняя граница (7.41) напоминает соотношение (7.14). Для всех чистых состояний формула (7.41) сводится к независимой от состояния форме (7.42). В общем же случае неравенство (7.41) обеспечивает более сильную оценку снизу. Для $\alpha \in [2; \infty)$ мы получили нижние оценки (7.41) и (7.42), которые зависят от α . Результат (7.39) был приведен в статье [168]. Таким образом, мы получили однопараметрическое расширение известного результата. Поскольку α -энтропия Рёньи не увеличивается с ростом α , ограничение (7.39) справедливо для всех энтропий Рёньи порядка $\alpha \geq 2$. Для таких значений энтропийного параметра выведенная граница не зависит от α .

Большинство энтропийных формулировок соотношений неопределённостей относятся к паре наблюдаемых и основаны на подходе известной работы [14]. Используя такие результаты, нижние оценки на сумму энтропий Шеннона легко формулируются для произвольного числа равнонаклонённых базисов. Однако эти оценки оказываются существенно слабее тех, что были получены в статьях [150, 151, 168]. Расширение соотношений неопределённостей в присутствии сторонней квантовой информации было получено в работах [141, 176]. Базовая идея по использованию теоремы Рисса была разработана с использованием энтропий Рёньи [131] и Цаллиса [129]. Здесь мы имеем дело с двумя обобщёнными энтропиями, чьи энтропийные параметры связаны определённым условием в силу применения теоремы Рисса. Поэтому в случае нескольких измерений обобщённые энтропии следует симметризовать. Для пары наблюдаемых соотношения неопределённостей в терминах симметризованных энтропий были получены в формулировках Рёньи [131] и Цаллиса [177]. Мы рассмотрим данный подход применительно к набору равнонаклонённых базисов. Это интересно в том смысле, что соотношения (7.15) и (7.42) формулируются в терминах энтропий Цаллиса и Рёньи одного и того же порядка. Напомним, что один из вариантов теоремы Рисса был представлен как утверждение (6.35) о векторных нормах до и после линейного преобразования. Для $b \geq 1$, напомним, ℓ_b -норма вектора определяется выражением (6.33). Для $\beta > 0$ мы будем использовать похожую функцию вероятностных векторов, а именно (6.34).

Теорема Рисса является соотношением между двумя векторными нормами с сопряженными индексами, которые подчиняются условию $1/a + 1/b = 1$. Как явствует из Главы 6, для заданных индексов a и b энтропийные параметры α и β определяются по формулам $\alpha = a/2$ и $\beta = b/2$. Эти параметры связаны тогда равенством $1/\alpha + 1/\beta = 2$. Предполагая $s \in [0; 1)$, мы параметризуем связанные энтропийные параметры как

$$\max\{\alpha, \beta\} = \frac{1}{1-s}, \quad \min\{\alpha, \beta\} = \frac{1}{1+s}. \quad (7.43)$$

Чтобы получить из теоремы Рисса соотношения неопределённостей для

набора равнонаклонённых базисов, мы используем симметризованные энтропии

$$\tilde{R}_s(\mathbf{p}) := \frac{R_\alpha(\mathbf{p}) + R_\beta(\mathbf{p})}{2}, \quad (7.44)$$

$$\tilde{H}_s(\mathbf{p}) := \frac{H_\alpha(\mathbf{p}) + H_\beta(\mathbf{p})}{2}. \quad (7.45)$$

Искомые соотношения неопределённостей формулируются следующим образом.

Предложение 43 Пусть $\mathbb{B} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_M\}$ — набор M равнонаклонённых базисов в d -мерном комплексном пространстве \mathcal{H} . Для всех $s \in [0; 1)$ и произвольной матрицы плотности ρ , заданной на пространстве \mathcal{H} , усреднённая симметризованная энтропия Цаллиса удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{M} \sum_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} \tilde{H}_s(\mathcal{B}|\rho) \geq \frac{1}{2} \ln_\mu(d), \quad (7.46)$$

где $\mu = (1 - s)^{-1}$. Для всех $s \in [0; 1)$ усреднённая симметризованная энтропия Рёныи удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{M} \sum_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} \tilde{R}_s(\mathcal{B}|\rho) \geq \frac{1}{2} \ln d. \quad (7.47)$$

Доказательство. Для базисов $\mathcal{B}_m = \{|b_i^{(m)}\rangle\}$ и $\mathcal{B}_n = \{|b_j^{(n)}\rangle\}$ запишем вероятности

$$q_i = \langle b_i^{(m)} | \rho | b_i^{(m)} \rangle, \quad p_j = \langle b_j^{(n)} | \rho | b_j^{(n)} \rangle.$$

Применяя теорему Рисса к линейному преобразованию с матричными элементами

$$t_{ij} = \langle b_i^{(m)} | b_j^{(n)} \rangle, \quad |t_{ij}| = d^{-1/2}, \quad (7.48)$$

мы получаем неравенство $\|\mathbf{q}\|_\alpha \leq d^{(\beta-1)/\beta} \|\mathbf{p}\|_\beta$, подразумевающее условия $1/\alpha + 1/\beta = 2$ и $1/2 < \beta < 1$. В силу этой связи между функционалами распределений соответствующие энтропии удовлетворяют соотношению

$$H_\alpha(\mathcal{B}_m|\rho) + H_\beta(\mathcal{B}_n|\rho) \geq \ln_\mu(d). \quad (7.49)$$

Это утверждение является частным случаем Предложения 38. Сложив формулу (7.49) с такой же, но с переставленными энтропийными параметрами в левой части, и разделив результат пополам, получаем соотношение

$$\tilde{H}_s(\mathcal{B}_m|\rho) + \tilde{H}_s(\mathcal{B}_n|\rho) \geq \ln_\mu(d) \quad (m \neq n). \quad (7.50)$$

Из заданных M равнонаклонённых базисов мы можем выбрать максимум $M(M-1)/2$ различных пар, при этом каждый базис появляется в $M-1$ парах. Суммирование формулы (7.50) по всем парам даёт

$$(M-1) \sum_{m=1}^M \tilde{H}_s(\mathcal{B}_m|\rho) \geq \frac{M(M-1)}{2} \ln_\mu(d). \quad (7.51)$$

Делением последнего неравенства на $M(M-1)$ сразу получаем (7.46). Теперь докажем формулировку Рёньи. Начнём с соотношения

$$R_\alpha(\mathcal{B}_m|\rho) + R_\beta(\mathcal{B}_n|\rho) \geq \ln d, \quad (7.52)$$

которое следует из $\|\mathbf{q}\|_\alpha \leq d^{(\beta-1)/\beta} \|\mathbf{p}\|_\beta$ путём простых алгебраических преобразований (см. также результат (6.48) выше). Действуя с формулой (7.52) аналогично тому, что мы делали с (7.49), мы легко приходим к цели (7.47). ■

Неравенства (7.46) и (7.47) дают нижние границы на симметризованные энтропии Цаллиса и Рёньи, усреднённые по отношению к набору равнонаклонённых базисов. В частном случае $s=1$ оба неравенства сводятся к нижней оценке на усреднённую энтропию Шеннона. Это соотношение было представлено ранее в статье [153]. Таким образом, мы получили обобщение известного ранее результата с использованием обобщённых энтропийных функций.

Перейдём к рассмотрению энтропийных соотношений неопределённостей для симметричных информационно полных измерений. В качестве характеристик уровня квантовых неопределённостей будут использованы энтропии Цаллиса и Рёньи. Как следует из вышеизложенного, одним из возможных подходов является получение некоторого аналога соотношения (7.19). Оказывается, что для одиночного симметричного информационно полного измерения можно точно вычислить индекс совпадения. Отсюда

немедленно вытекают нижние оценки на соответствующие энтропии. Другим методом является адаптация основанных на теореме Рисса энтропийных соотношений неопределённостей для пары симметричных информационно полных измерений.

Займёмся вычислением индекса совпадения для одиночного симметричного информационно полного измерения. Решение этой задачи интересно как само по себе, так и с точки зрения получения зависящих от измеряемого состояния соотношений неопределённостей. Зафиксируем некоторый ортонормированный базис в \mathcal{H} . Каждому вектору $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ мы ставим в соответствие вектор $|\psi^*\rangle \in \mathcal{H}$ такой, что его компоненты являются комплексно сопряженными к соответствующим компонентам $|\psi\rangle$. Итак, для любых двух векторов $|\varphi\rangle$ и $|\psi\rangle$ мы имеем

$$\langle \varphi^* | \psi^* \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle^* = \langle \psi | \varphi \rangle . \quad (7.53)$$

Наши вычисления существенно опираются на соотношение полноты для симметричного информационно полного измерения, а именно

$$\frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d^2} |\phi_j\rangle \langle \phi_j| = \mathbf{1} . \quad (7.54)$$

Начнём с доказательства одного вспомогательного результата, который формулируется следующим образом.

Предложение 44 Пусть ω — примитивный корень единицы порядка d^2 . Для заданных d^2 единичных векторов $|\phi_j\rangle$ определим d^2 векторов в пространстве $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, удовлетворяющих соотношениям

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{d^{3/2}} \sum_{j=1}^{d^2} |\phi_j\rangle \otimes |\phi_j^*\rangle , \quad (7.55)$$

$$|\Psi_k\rangle = \frac{\sqrt{d+1}}{d^{3/2}} \sum_{j=1}^{d^2} \omega^{k(j-1)} |\phi_j\rangle \otimes |\phi_j^*\rangle , \quad (7.56)$$

где $k = 1, \dots, d^2 - 1$. Если единичные кет-векторы $|\phi_j\rangle$ удовлетворяют соотношению полноты (7.54), то d^2 векторов (7.55)–(7.56) образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.

Доказательство. Сначала покажем, что векторы (7.55)–(7.56) являются взаимно ортогональными. С точностью до множителя скалярное произведение $\langle \Phi | \Psi_k \rangle$ выражается в виде суммы

$$\sum_{i=1}^{d^2} \sum_{j=1}^{d^2} \omega^{k(j-1)} |\langle \phi_i | \phi_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{d^2} \omega^{k(j-1)} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{d^2} \frac{\omega^{k(j-1)}}{d+1}. \quad (7.57)$$

Здесь мы использовали формулы (7.4) и (7.53). Так как ω является примитивным корнем из единицы, то для всех $k = 1, \dots, d^2 - 1$ имеем

$$\sum_{j=1}^{d^2} \omega^{k(j-1)} = 0.$$

В правой части (7.57) мы умножаем эту нулевую сумму на фактор $(d+1)^{-1}$ и получаем

$$\frac{1}{d+1} \sum_{i=1}^{d^2} \sum_{j=1}^{d^2} \omega^{k(j-1)} = \frac{d^2}{d+1} \sum_{j=1}^{d^2} \omega^{k(j-1)}. \quad (7.58)$$

Последнее выражение равно нулю для всех $k = 1, \dots, d^2 - 1$.

Далее, мы записываем скалярное произведение $\langle \Psi_q | \Psi_k \rangle$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{d+1}{d^3} \sum_{i=1}^{d^2} \sum_{j=1}^{d^2} \omega^{-q(i-1)} \omega^{k(j-1)} |\langle \phi_i | \phi_j \rangle|^2 = \\ \frac{d+1}{d^3} \sum_{j=1}^{d^2} \omega^{(k-q)(j-1)} + \frac{1}{d^3} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{d^2} \omega^{-q(i-1)+k(j-1)}. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Для $q \neq k$ первая сумма в правой части уравнения (7.59) равна нулю. Умножая эту сумму на $(d+1)^{-1}$, добавляем его ко второй сумме в правой части формулы (7.59) и получаем

$$\frac{1}{d^3} \sum_{i=1}^{d^2} \omega^{-q(i-1)} \sum_{j=1}^{d^2} \omega^{k(j-1)} = 0. \quad (7.60)$$

Тем самым установлена взаимная попарная ортогональность векторов, введённых формулами (7.55)–(7.56).

Осталось доказать нормированность введённых d^2 векторов. Возведённая в квадрат норма вектора (7.55) равна

$$\frac{1}{d^3} \sum_{i=1}^{d^2} \sum_{j=1}^{d^2} |\langle \phi_i | \phi_j \rangle|^2 = \frac{1}{d^3} \left(d^2 + \frac{d^4 - d^2}{d + 1} \right) = 1 . \quad (7.61)$$

Полагая $q = k$ в формуле (7.59), мы находим, что возведённая в квадрат норма вектора (7.56) имеет вид

$$\frac{d + 1}{d^3} \left\{ d^2 \left(1 - \frac{1}{d + 1} \right) + \frac{1}{d + 1} \sum_{i=1}^{d^2} \omega^{-k(i-1)} \sum_{j=1}^{d^2} \omega^{k(j-1)} \right\} = 1 . \quad (7.62)$$

Здесь учтено, что суммы в последнем уравнении зануляются. Тем самым требуемая нормированность установлена. ■

Таким образом, из всякого симметричного информационно полного измерения в d -мерном пространстве \mathcal{H} можно получить ортонормированный базис в тензорном произведении $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. В некоторых отношениях наша методика построения векторов (7.55)–(7.56) аналогична схеме, использованной авторами работы [168] для построения базисов в расширенном пространстве с использованием набора равнонаклонённых базисов в исходном. В рамках такого подхода были выведены зависящие от измеряемого состояния соотношения неопределённостей для произвольного набора равнонаклонённых базисов в терминах энтропии Шеннона и 2-энтропии Рёньи [168]. Мы уже распространили эти соотношения на α -энтропии Цаллиса для $\alpha \in (0; 2]$ и Рёньи α -энтропии для $\alpha \in [2; \infty)$. В статье [168] базовым пунктом является верхняя граница на соответствующую сумму индексов совпадения. Сейчас мы точно вычислим индекс совпадения для любого симметричного информационно полного измерения с произвольной матрицей плотности.

Предложение 45 Пусть $\mathcal{N} = \{d^{-1}|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\}$ — симметричное информационно полное измерение в d -мерном пространстве \mathcal{H} . Для произвольной матрицы плотности ρ на \mathcal{H} генерируемые вероятности удовлетворяют равенству

$$\sum_{j=1}^{d^2} p_j(\mathcal{N}|\rho)^2 = \frac{\text{Tr}(\rho^2) + 1}{d(d + 1)} . \quad (7.63)$$

Доказательство. Сначала отметим два непосредственных следствия соотношения полноты (7.54) для симметричного информационно полного измерения. Для произвольных линейного оператора \mathbf{A} и вектора $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ мы имеем

$$\frac{1}{d^2} \sum_{i=1}^{d^2} \sum_{j=1}^{d^2} \langle \phi_i | \mathbf{A} | \phi_j \rangle \langle \phi_j | \phi_i \rangle = \text{Tr}(\mathbf{A}) , \quad (7.64)$$

$$\frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d^2} |\phi_j\rangle \langle \phi_j | \psi \rangle = |\psi\rangle , \quad (7.65)$$

Эти формулы получаются после подстановки разложения (7.54) в тождества $\text{Tr}(\mathbf{1}\mathbf{A}\mathbf{1}) = \text{Tr}(\mathbf{A})$ и $\mathbf{1}|\psi\rangle = |\psi\rangle$, соответственно. При выводе формулы (7.64) использовано также свойство $\text{Tr}(|\psi\rangle\langle\varphi|) = \langle\varphi|\psi\rangle$.

Рассмотрим кет $\rho \otimes \mathbf{1}|\Phi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Он может быть представлен как линейная комбинация базисных векторов $|\Phi\rangle$ и $|\Psi_k\rangle$, введённых формулами (7.55) и (7.56). Используя уравнение (7.64) и нормировку $\text{Tr}(\rho) = 1$, мы сначала записываем

$$\langle \Phi | \rho \otimes \mathbf{1} | \Phi \rangle = \frac{1}{d^3} \sum_{i=1}^{d^2} \sum_{j=1}^{d^2} \langle \phi_i | \rho | \phi_j \rangle \langle \phi_j | \phi_i \rangle = \frac{1}{d} . \quad (7.66)$$

Тем самым определён один из коэффициентов разложения. Теперь представим $\rho \otimes \mathbf{1}|\Phi\rangle$ в виде

$$\rho \otimes \mathbf{1}|\Phi\rangle = \frac{1}{d} |\Phi\rangle + \sum_{k=1}^{d^2-1} a_k |\Psi_k\rangle . \quad (7.67)$$

Коэффициенты $a_q = \langle \Psi_q | \rho \otimes \mathbf{1} | \Phi \rangle$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_q &= \frac{\sqrt{d+1}}{d^3} \sum_{i=1}^{d^2} \sum_{j=1}^{d^2} \omega^{-q(i-1)} \langle \phi_i | \rho | \phi_j \rangle \langle \phi_j | \phi_i \rangle \\ &= \frac{\sqrt{d+1}}{d^2} \sum_{i=1}^{d^2} \omega^{-q(i-1)} \langle \phi_i | \rho | \phi_i \rangle \\ &= \frac{\sqrt{d+1}}{d} \sum_{i=1}^{d^2} \omega^{-q(i-1)} p_i , \end{aligned} \quad (7.68)$$

где мы использовали формулы (7.65) и $p_i = d^{-1}\langle\phi_i|\rho|\phi_i\rangle$. Возведённую в квадрат норму вектора $\rho \otimes \mathbf{1}|\Phi\rangle$ можно выразить двумя способами. В силу формулы (7.64) мы записываем первое выражение

$$\langle\Phi|(\rho \otimes \mathbf{1})^2|\Phi\rangle = \frac{1}{d^3} \sum_{i=1}^{d^2} \sum_{j=1}^{d^2} \langle\phi_i|\rho^2|\phi_j\rangle \langle\phi_j|\phi_i\rangle = \frac{1}{d} \text{Tr}(\rho^2) . \quad (7.69)$$

Второе выражение получается из разложения (7.67) как сумма возведённых в квадрат модулей коэффициентов. Явные вычисления дают

$$\begin{aligned} \frac{1}{d^2} + \sum_{k=1}^{d^2-1} a_k^* a_k &= \frac{1}{d^2} + \frac{d+1}{d^2} \sum_{i=1}^{d^2} \sum_{j=1}^{d^2} p_i p_j \sum_{k=1}^{d^2-1} \omega^{k(i-j)} \\ &= \frac{1}{d^2} + (d+1) \sum_{j=1}^{d^2} p_j^2 - \frac{d+1}{d^2} . \end{aligned} \quad (7.70)$$

Для получения (7.70) мы использовали формулы $\sum_{k=1}^{d^2-1} \omega^{k(i-j)} = d^2 \delta_{ij} - 1$ и $\sum_{j=1}^{d^2} p_j = 1$. Приравнявая выражения (7.69) и (7.70), мы получаем

$$\frac{1}{d} \text{Tr}(\rho^2) = (d+1) \sum_{j=1}^{d^2} p_j^2 - \frac{1}{d} , \quad (7.71)$$

что эквивалентно окончательной формуле (7.63). ■

Таким образом, для любого симметричного информационно полного измерения индекс совпадения порождённого распределения вероятностей точно выражается через матрицу плотности. В общем, значения вероятностей варьируются в области, определяемой условиями $\sum_j p_j = 1$ и $p_j \geq 0$ для всех j . В случае симметричного информационно полного измерения они должны также удовлетворять дополнительному ограничению (7.63), которое зависит от измеряемого состояния. С другой стороны, статистика измерений может быть использована для характеристики неизвестного квантового состояния. С помощью полной статистики симметричного информационно полного измерения и результата (7.63) мы можем точно найти след квадрата неизвестной матрицы плотности. Этот след является одним из способов описать степень отклонения от чистых квантовых состояний.

Для чистого состояния $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ формула (7.63) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{d^2} p_j(\mathcal{N}|\psi)^2 = \frac{2}{d(d+1)}. \quad (7.72)$$

Итак, индекс совпадения является постоянным для всех чистых состояний. Это утверждение можно вывести из того, что единичные векторы $|\phi_j\rangle$ образуют сферическую комбинаторную 2-схему. Когда $|\psi\rangle$ совпадает с одним из d^2 векторов $|\phi_j\rangle$, результат (7.72) напрямую следует из уравнения (7.4). Другим очевидным примером является случай полностью смешанного состояния $\rho_* = \mathbf{1}/d$. Для симметричного информационно полного измерения мы получаем однородное распределение с вероятностями $p_j = 1/d^2$ для всех $j = 1, \dots, d^2$. В этом случае индекс совпадения равен

$$\sum_{j=1}^{d^2} p_j(\mathcal{N}|\rho_*)^2 = \frac{1}{d^2}. \quad (7.73)$$

Подставляя $\text{Tr}(\rho_*^2) = 1/d$ в правую часть (7.63), мы действительно получаем правую часть равенства (7.73). Таким образом, формула (7.63) является обобщением важного результата (7.72) на произвольные матрицы плотности. Мы будем использовать уравнения (7.63) и (7.72) при выводе соотношений неопределённостей для симметричного информационно полного измерения в терминах энтропий Рёньи и Цаллиса. В некоторых отношениях наш подход аналогичен выводам, сделанным на основе теоремы 1 работы [168]. Для набора равнонаклонённых базисов эта теорема дает верхнюю границу на сумму соответствующих индексов совпадения. Для симметричного информационно полного измерения, однако, мы получили точное значение индекса совпадения вместо неравенства. Этот интересный результат является проявлением симметричной структуры симметричного информационно полного набора чистых состояний. Вместе с условием нормировки порождённые вероятности $p_j(\mathcal{N}|\rho)$ также должны подчиняться формуле (7.63) для всех матриц плотности. Такой вывод согласуется с тем фактом, что в общем построить симметричное информационно полное измерение достаточно сложно. Авторы статьи [167] рассмотрели случай, в котором допускается небольшое отклонение от точного условия (7.4). Было

бы интересно продолжить изучение следствий, вызванных таким отклонением, в том числе и в смысле значения индекса совпадения.

В случае кубита, когда $d = 2$, формулу (7.63) можно переписать в терминах вектора Блоха. Описание такого рода часто используется при реконструкции состояний [178]. В этом случае мы будем обозначать единичную 2×2 -матрицу через $\mathbf{1}$ и обычные матрицы Паули через σ_x , σ_y и σ_z соответственно. Удобно записать матрицу плотности кубитов в виде

$$\rho = \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}) , \quad (7.74)$$

где $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$ — вектора Блоха кубитовой матрицы плотности ρ . Очевидно, что матрица (7.74) имеет единичный след. Положительная полуопределённость этой матрицы обеспечивается условием $s = |\vec{s}| \leq 1$. Поскольку $\text{Tr}(\rho^2) = (1 + s^2)/2$, обсуждаемый индекс совпадения равен

$$\sum_{j=1}^4 p_j(\mathcal{N}|\rho)^2 = \frac{3 + s^2}{12} . \quad (7.75)$$

Для чистых состояний имеем $s = 1$ и число $1/3$ в правой части уравнения (7.75). Для полностью смешанного состояния индекс совпадения равен $1/4$ в силу $s = 0$. Чем выше степень смешанности состояния, тем меньше величина индекса (7.75). Аналогичный вывод имеет место в случае более высоких размерностей. Более того, для достаточно больших d значение (7.72), соответствующее чистым состояниям, практически двукратно превосходит (7.73).

Новый результат (7.63) в какой-то степени напоминает формулу (7.19), полученную в статье [168] для набора равнонаклонённых базисов. В работе [148] результат (7.19) был использован для построения практической схемы детектирования энтенглмента. В принципе, точное соотношение (7.63) также может применяться в этом контексте. Мы рассмотрим квантовую систему из двух d -мерных подсистем. Пространство состояний всей системы является произведением $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ двух изоморфных пространств \mathcal{H}_A и \mathcal{H}_B . Фиксируя некоторый ортонормированный базис

$\{|n\rangle\}$, запишем максимально сцепленное чистое состояние в виде

$$|\Phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=1}^d |n\rangle \otimes |n\rangle . \quad (7.76)$$

Симметричному информационно полному измерению $\mathcal{N}_A = \{d^{-1}|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\}$ на \mathcal{H}_A мы поставим в соответствие измерение $\mathcal{N}_B = \{d^{-1}|\phi_j^*\rangle\langle\phi_j^*|\}$ на \mathcal{H}_B . Последнее, как легко видеть, также является симметричным информационно полным. Из этих двух измерений мы строим ПОЗМ-измерение \mathcal{N}_{AB} на \mathcal{H}_{AB} с элементами

$$\tilde{\mathbf{N}}_{ij} = \frac{1}{d^2} |\phi_i\phi_j^*\rangle\langle\phi_i\phi_j^*| , \quad |\phi_i\phi_j^*\rangle \equiv |\phi_i\rangle \otimes |\phi_j^*\rangle . \quad (7.77)$$

Заметим, что это измерение уже не является, вообще говоря, информационно полным на \mathcal{H}_{AB} . Пусть $\tilde{\rho}$ — матрица плотности системы из двух d -мерных подсистем. Используя вероятности $P(i, j) = \text{Tr}(\tilde{\mathbf{N}}_{ij} \tilde{\rho})$, мы введём корреляционную меру

$$G(\mathcal{N}_{AB}|\tilde{\rho}) = \sum_{j=1}^{d^2} P(j, j) . \quad (7.78)$$

Эта мера аналогична величине, предложенной в статье [148]. Для каждого состояния вида $\tilde{\rho} = \rho_A \otimes \rho_B$ вероятность $P(i, j)$ равна произведению двух локальных вероятностей. Используя уравнение (7.63) и неравенство Коши–Шварца, мы тогда получаем

$$G(\mathcal{N}_{AB}|\rho_A \otimes \rho_B) \leq \frac{\sqrt{\text{Tr}(\rho_A^2) + 1} \sqrt{\text{Tr}(\rho_B^2) + 1}}{d(d+1)} \quad (7.79)$$

$$\leq \frac{2}{d(d+1)} . \quad (7.80)$$

Рассмотрим теперь выпуклую комбинацию состояний вида $\tilde{\rho} = \rho_A \otimes \rho_B$, а именно

$$\tilde{\rho} = \sum_{\lambda} \lambda \rho_{A\lambda} \otimes \rho_{B\lambda} , \quad (7.81)$$

где $\lambda \geq 0$ и $\sum_{\lambda} \lambda = 1$. Вычисление вероятности $\tilde{P}(i, j) = \text{Tr}(\tilde{\mathbf{N}}_{ij} \tilde{\rho})$ приводит к формуле

$$\tilde{P}(i, j) = \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda}(i, j) . \quad (7.82)$$

Комбинируя (7.78) с (7.82), мы получаем

$$G(\mathcal{N}_{AB}|\tilde{\rho}) = \sum_{\lambda} \lambda G(\mathcal{N}_{AB}|\rho_{A\lambda} \otimes \rho_{B\lambda}) . \quad (7.83)$$

Выпуклые комбинации типа (7.81) называются *сепарабельными* [179]. Поскольку каждая величина $G(\mathcal{N}_{AB}|\rho_{A\lambda} \otimes \rho_{B\lambda})$ удовлетворяет (7.80) и $\sum_{\lambda} \lambda = 1$, мы приходим к следующему заключению. Если состояние $\tilde{\rho}$ сепарабельно, то есть представимо в виде (7.81), то

$$G(\mathcal{N}_{AB}|\tilde{\rho}) \leq \frac{2}{d(d+1)} . \quad (7.84)$$

Отсюда можно сформулировать достаточный критерий энтенглмента. Допустим, что мы располагаем некоторым количеством экземпляров одного и того же состояния, причём это количество достаточно для набора статистики при проведении ПОЗМ-измерения \mathcal{N}_{AB} . Если вычисление корреляционной меры (7.78) приводит к нарушению неравенства (7.80), то исследуемое состояние не может быть сепарабельным. Иными словами, состояние заведомо является сцепленным.

В целях сопоставления с верхней границей (7.80) мы вычислим корреляционную меру (7.78) для сцепленного состояния (7.76). Так как каждый кет $|\phi_j\rangle$ нормирован, мы имеем

$$\langle \phi_j \phi_j^* | \Phi_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=1}^d |\langle \phi_j | n \rangle|^2 = \frac{1}{\sqrt{d}} \quad (7.85)$$

Следовательно, мы имеем диагональные вероятности $P(j, j) = d^{-3}$, откуда значение корреляционной меры равно $G(\mathcal{N}_{AB}|\Phi_+) = d^{-1}$. При достаточно высоких значениях размерности d указанная величина значительно больше верхней границы (7.80). Конечно, неравенство (7.80) даёт только необходимый критерий сепарабельности состояний, или, что эквивалентно, достаточный критерий энтенглмента. Здесь мы не стремимся проанализировать сложную проблему детектирования энтенглмента в деталях. Нашей целью было продемонстрировать, что результаты (7.63) и (7.72) имеют прикладное значение в вопросах обработки информации на квантовых носителях.

Перейдём к выводу энтропийных соотношений неопределённостей для симметричных информационно полных измерений. В качестве количественных мер уровня неопределённостей будут использоваться энтропии

Цаллиса и Рённи. Простой способ получить нижние оценки для энтропии Шеннона для заданного ПОЗМ-измерения был указан автором работы [180]. Разрабатывая эту идею с правой частью уравнения (7.8), мы для всех $\alpha > 0$ записываем

$$H_\alpha(\mathcal{N}|\rho) \geq \ln_\alpha\left(\frac{1}{\max p_j}\right) \geq \ln_\alpha(d). \quad (7.86)$$

Действительно, в случае симметричного информационно полного измерения мы находим $p_j = d^{-1}\langle\phi_j|\rho|\phi_j\rangle \leq d^{-1}$ для всех j . Далее, функция $x \mapsto \ln_\alpha(1/x)$ убывает с ростом x для всех $\alpha > 0$. В случае энтропии Рённи мы записываем

$$R_\alpha(\mathcal{N}|\rho) \geq -\ln(\max p_j) \geq \ln d. \quad (7.87)$$

Чтобы это доказать, мы замечаем, что функция $x \mapsto (1-\alpha)^{-1} \ln x$ является убывающей для $0 < \alpha < 1$ и возрастающей для $1 < \alpha < \infty$. Учитывая также неравенства

$$\sum_j p_j^\alpha \begin{cases} \geq, & 0 < \alpha < 1 \\ \leq, & 1 < \alpha < \infty \end{cases} (\max p_j)^{\alpha-1} \sum_j p_j \quad (7.88)$$

в комбинации с определением α -энтропии Рённи, мы приходим к результату (7.87). Правая часть формулы (7.87) на самом деле является очевидной нижней границей на \min -энтропию, когда $\alpha = \infty$. Её справедливость для других значений α следует из того факта, что при заданном вероятностном распределении α -энтропия Рённи не может возрасти с увеличением α . Уравнения (7.63) и (7.72) дают возможность усилить нижние границы в формулировках на языке энтропий как типа Цаллиса, так и Рённи. Имеет место следующее утверждение.

Предложение 46 Пусть \mathcal{N} — симметричное информационно полное измерение на d -мерном комплексном пространстве \mathcal{H} . Для $\alpha \in (0; 2]$ и произвольной матрицы плотности ρ на \mathcal{H} , α -энтропия Цаллиса ограничена снизу согласно неравенству

$$H_\alpha(\mathcal{N}|\rho) \geq \ln_\alpha\left(\frac{d(d+1)}{\text{Tr}(\rho^2) + 1}\right). \quad (7.89)$$

Доказательство. Для $\alpha \in (0; 2]$ и любого вероятностного распределения справедливо неравенство (7.17). Комбинируя его с равенством (7.63), мы сразу получаем (7.89). ■

Для чистых состояний имеем $\text{Tr}(\rho^2) = 1$. В этом случае правая часть неравенства (7.89) сводится к независимой от состояния форме

$$H_\alpha(\mathcal{N}|\rho) \geq \ln_\alpha \left(\frac{d(d+1)}{2} \right), \quad (7.90)$$

которая в действительности справедлива для всех состояний. В стандартном случае $\alpha = 1$ соотношение неопределённостей (7.89) даёт ограничение снизу на энтропию Шеннона, а именно

$$H_1(\mathcal{N}|\rho) \geq \ln \left(\frac{d(d+1)}{\text{Tr}(\rho^2) + 1} \right) \geq \ln \left(\frac{d(d+1)}{2} \right). \quad (7.91)$$

Это ограничение сильнее неравенства $H_1(\mathcal{N}|\rho) \geq \ln d$, которое следует из формулы (7.86). Более того, при больших d правая часть (7.91) почти равна $2 \ln d$. Поэтому для порядка α около 1 и достаточно большого d соотношение неопределённостей (7.89) обеспечивает значительное улучшение простой границы (7.86). С другой стороны, соотношение (7.86) выполняется для всех $\alpha > 0$.

Рассмотрим случай неэффективностей детектирования. Мы снова будем использовать модель, которая описывается уравнениями (7.10) и (7.11). Аналогично формуле (7.22), фактические вероятности событий искажаются таким образом, что

$$p_j^{(\eta)}(\mathcal{N}|\rho) = \eta p_j(\mathcal{N}|\rho), \quad p_\emptyset^{(\eta)}(\mathcal{N}|\rho) = 1 - \eta. \quad (7.92)$$

В этих выражениях параметр $\eta \in [0; 1]$ описывает эффективность детекторов. При этом величина $p_\emptyset^{(\eta)}(\mathcal{N}|\rho)$ соответствует событию “детектор не сработал”. В силу формул (7.11) и (7.89) энтропия $H_\alpha^{(\eta)}(\mathcal{N}|\rho)$, вычисленная для распределения (7.92), подчиняется неравенству

$$H_\alpha^{(\eta)}(\mathcal{N}|\rho) \geq \eta^\alpha \ln_\alpha \left(\frac{d(d+1)}{\text{Tr}(\rho^2) + 1} \right) + h_\alpha(\eta), \quad (7.93)$$

где $\alpha \in (0; 2]$. Результат (7.93) является энтропийным соотношением неопределённостей для одного симметричного информационно полного из-

мерения в модели неэффективностей детектирования. В стандартном случае $\alpha = 1$ мы умножаем нижнюю границу (7.91) на η и добавляем бинарную энтропию Шеннона $h_1(\eta)$. Таким образом, дополнительные неопределённости вводятся детекторами. Для оценки требуемого уровня эффективности детекторов мы можем поступить следующим образом. Первый член в правой части формулы (7.93) должен значительно превосходить второй по величине. Для заданных d и, возможно, $\text{Tr}(\rho^2)$ мы находим подходящий диапазон значений η .

Рассмотрим теперь формулировку соотношений неопределённостей в терминах энтропии Рёньи. Опираясь на результат (7.25), начнём с нижней оценки на \min -энтропию симметричного информационно полного измерения.

Предложение 47 Пусть \mathcal{N} — симметричное информационно полное измерение на d -мерном комплексном пространстве \mathcal{H} . Для произвольной матрицы плотности ρ на \mathcal{H} , \min -энтропия ограничена снизу согласно неравенству

$$R_\infty(\mathcal{N}|\rho) \geq 2 \ln d - \ln \left(1 + \sqrt{d-1} \sqrt{\text{Tr}(\rho^2) d - 1} \right). \quad (7.94)$$

Доказательство. Заменяя b^2 на (7.63) и n на d^2 , неравенство (7.25) даёт

$$\max \left\{ p_j(\mathcal{N}|\rho) : 1 \leq j \leq d^2 \right\} \leq \frac{1}{d^2} \left(1 + \sqrt{d-1} \sqrt{\text{Tr}(\rho^2) d - 1} \right). \quad (7.95)$$

Результат (7.94) непосредственно следует из формул (7.7) и (7.95). ■

Следующий результат справедлив для всех $\alpha \geq 2$; он выводится аналогично (7.41) на основании формул (7.38), (7.63) и (7.94).

Предложение 48 Пусть \mathcal{N} — симметричное информационно полное измерение на d -мерном комплексном пространстве \mathcal{H} . Для $\alpha \in [2; \infty)$ и произвольной матрицы плотности ρ на \mathcal{H} , α -энтропия Рёньи ограничена снизу согласно неравенству

$$R_\alpha(\mathcal{N}|\rho) \geq \frac{1}{\alpha-1} \ln \left(\frac{d(d+1)}{\text{Tr}(\rho^2)+1} \right) + \frac{\alpha-2}{\alpha-1} \left\{ 2 \ln d - \ln \left(1 + \sqrt{d-1} \sqrt{\text{Tr}(\rho^2) d - 1} \right) \right\}. \quad (7.96)$$

Поскольку $\text{Tr}(\rho^2) \leq 1$, не зависящая от измеряемого состояния формулировка имеет вид

$$R_\alpha(\mathcal{N}|\rho) \geq \ln d + \frac{1}{\alpha - 1} \ln\left(\frac{d + 1}{2}\right). \quad (7.97)$$

В диапазоне $\alpha \in [2; \infty)$ мы имеем нижнюю границу (7.96), которая зависит от α . Для $\alpha = 2$ неравенство (7.96) дает нижнюю границу на столкновительную энтропию, а именно

$$R_2(\mathcal{N}|\rho) \geq \ln\left(\frac{d(d + 1)}{\text{Tr}(\rho^2) + 1}\right). \quad (7.98)$$

Поскольку α -энтропия Рёньи не увеличивается с ростом α , оценка (7.98) справедлива для всех энтропий Рёньи порядка $\alpha \in (0; 2]$. В этом диапазоне мы пока имеем только постоянную энтропийную границу.

Предложение 47 обеспечивает соотношение неопределённостей для симметричного информационно полного измерения на языке min -энтропии. Для чистого состояния $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ правая часть (7.94) сводится к правой части (7.87). Очевидно, что зависящее от состояния неравенство (7.94) насыщается всякий раз, когда состояние $|\psi\rangle$ является одним из кетов $|\phi_j\rangle$, формирующих симметричное информационно полное измерение. Действительно, в этом случае одна из вероятностей равна $1/d$, а другие остальные равны $(d(d + 1))^{-1}$. Далее, неравенство (7.94) насыщается для полностью смешанного состояния $\rho_* = \mathbf{1}/d$, когда $p_j = 1/d^2$ для всех j . Правая часть формулы (7.94) возрастает с уменьшением $\text{Tr}(\rho^2)$. Другими словами, чем выше степень смешанности состояния, тем больше нижняя граница (7.94). Таким образом, соотношение неопределённостей (7.94) демонстрирует естественное поведение в смысле зависимости от смешанных состояний. Как мы видели, это соотношение также насыщается в нескольких известных случаях. Новая энтропийная оценка по существу основана на точном результате (7.63). Поскольку симметричные информационно полные измерения трудно построить, представляют интерес их приближённые версии с отклонением от условия (7.4) [167]. Распространение полученных выше соотношений для таких приближённых версий могло бы быть предметом отдельного исследования. В принципе, утверждение Предложения

40 можно использовать для получения нижних границ на \min -энтропии в других случаях. Это подразумевает нахождение оценок сверху на индекс совпадения.

В общем, энтропийные соотношения неопределённостей для пары симметричных информационно полных измерений прямо следуют из результатов, приведённых в литературе. Для двух произвольных ПОЗМ-измерений независимая от состояния оценка суммы энтропий Шеннона была получена в статье [128]. Будучи сначала полученной для проективных измерений, эта оценка с использованием расширения Наймарка распространяется на неортогональные разложения единицы [128]. Обобщение этого подхода на формулировки с зависимостью от измеряемого состояния и обобщенные энтропийные функции имеют интерес описаны в работе [129]. Мы имеем следующее утверждение.

Предложение 49 Пусть $\mathcal{M} = \{|m_i\rangle\langle m_i|\}$ и $\mathcal{N} = \{|n_j\rangle\langle n_j|\}$ — два симметричных информационно полных измерения на d -мерном комплексном пространстве \mathcal{H} . Данной матрице плотности ρ поставим в соответствие величину

$$g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\rho) := \max \left\{ \frac{|\langle m_i|n_j\rangle \langle n_j|\rho|m_i\rangle|}{\langle m_i|\rho|m_i\rangle^{1/2} \langle n_j|\rho|n_j\rangle^{1/2}} : \langle m_i|\rho|m_i\rangle \neq 0, \langle n_j|\rho|n_j\rangle \neq 0 \right\}. \quad (7.99)$$

При условиях $1/\alpha + 1/\beta = 2$ и $\mu = \max\{\alpha, \beta\}$ энтропии Цаллиса и Рёньи соответствующих порядков удовлетворяют соотношениям

$$H_\alpha(\mathcal{M}|\rho) + H_\beta(\mathcal{N}|\rho) \geq \ln_\mu \left(g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\rho)^{-2} \right), \quad (7.100)$$

$$R_\alpha(\mathcal{M}|\rho) + R_\beta(\mathcal{N}|\rho) \geq -2 \ln g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\rho). \quad (7.101)$$

Доказательство. Используя соотношение полноты

$$\sum_{i=1}^{d^2} |m_i\rangle\langle m_i| = \mathbf{1},$$

мы перепишем j -ую вероятность генерируемого при измерении \mathcal{M} распределения в виде

$$q_i(\mathcal{M}|\rho) = \langle m_i|\mathbf{1}|\rho|m_i\rangle = \sum_j \langle m_i|n_j\rangle \langle n_j|\rho|m_i\rangle. \quad (7.102)$$

Далее введём числа $v'_i = \langle m_i | \rho | m_i \rangle^{1/2}$ и $u'_j = p_j(\mathcal{N} | \rho)^{1/2} = \langle n_j | \rho | n_j \rangle^{1/2}$. Делением уравнения (7.102) на v'_i мы получаем

$$v'_i = \sum_j t_{ij} u'_j, \quad (7.103)$$

$$t_{ij} = \frac{\langle m_i | n_j \rangle \langle n_j | \rho | m_i \rangle}{\langle m_i | \rho | m_i \rangle^{1/2} \langle n_j | \rho | n_j \rangle^{1/2}}. \quad (7.104)$$

Если одна из вероятностей $\langle m_i | \rho | m_i \rangle$ или $\langle n_j | \rho | n_j \rangle$, то равен нулю и числитель в (7.104). В этом случае принимаем $t_{ij} = 0$. Таким образом, выходной набор \mathbf{v}' получается из вводимого \mathbf{u}' линейным преобразованием. Чтобы применить теорему Рисса, мы должны предварительно проверить условие на преобразование $\mathbf{T} = [[t_{ij}]]$, которое записывается в виде

$$\|\mathbf{v}\|_2 \leq \|\mathbf{u}\|_2. \quad (7.105)$$

Требуется, чтобы последнее имело место для произвольного входного \mathbf{u} . Доказательство этого пункта является несложным, но несколько громоздким, так что мы вынесли его в Предложение 50 ниже. Теорема Рисса тогда гласит, что

$$\|\mathbf{v}\|_a \leq \eta^{(2-b)/b} \|\mathbf{u}\|_b, \quad (7.106)$$

где положительные индексы a и b удовлетворяют связям $1/a + 1/b = 1$ и $1 < b < 2$. Из уравнения (7.106) мы получаем соотношение

$$\|\mathbf{q}\|_\alpha \leq g(\mathcal{M}, \mathcal{N} | \rho)^{2(1-\beta)/\beta} \|\mathbf{p}\|_\beta, \quad (7.107)$$

в котором $1/\alpha + 1/\beta = 2$ и $1/2 < \beta < 1$. Как показано в главе 4, это соотношение приводит к неравенствам (7.100) и (7.101). ■

Предложение 50 Пусть линейное преобразование задано $d^2 \times d^2$ матрицей $\mathbf{T} = [[t_{ij}]]$ с элементами (7.104). Тогда условие (7.105) выполнено для произвольного вводимого вектора \mathbf{u} .

Доказательство. Как видно из (7.104), матричные элементы зависят от состояния ρ . Начнём с проверки для чистого состояния $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Для заданного вектора состояния $|\psi\rangle$ мы можем выбрать фазы векторов $|m_i\rangle$ и $|n_j\rangle$ таким образом, что скалярные произведения $\langle\psi|m_i\rangle$ и $\langle\psi|n_j\rangle$

будут неотрицательными вещественными числами. Далее, матричные элементы преобразования записываются в виде $t_{ij} = \langle m_i | n_j \rangle$. Как известно, всякое ПОЗМ-измерение с элементами ранга 1 можно реализовать через ортогональный базис в расширенном пространстве соответствующей размерности (см., к примеру, раздел 3.1 в работе [120]). Через n_{ij} мы обозначим компоненты j -ого вектора $|n_j\rangle$ по отношению к вычислительному базису. В силу соотношения полноты d строк $d \times N$ матрицы $[[n_{ij}]]$ являются взаимно ортогональными. Добавляя строки, мы можем превратить её в унитарную $N \times N$ матрицу. Столбцы этой матрицы, которые мы запишем как $|n_j\rangle \oplus |n_j^\perp\rangle$, образуют ортонормированный базис в N -мерном пространстве $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_N$. Аналогичным образом мы получаем ортонормированный базис из векторов $|m_i\rangle \oplus |m_i^\perp\rangle$ в M -мерном пространстве $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_M$, где $M = |\mathcal{M}|$. Теперь мы введём два множества векторов, лежащих в пространстве $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_M \oplus \mathcal{H}_N$, а именно

$$|\tilde{m}_i\rangle := \begin{pmatrix} |m_i\rangle \\ |m_i^\perp\rangle \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad |\tilde{n}_j\rangle := \begin{pmatrix} |n_j\rangle \\ \mathbf{0} \\ |n_j^\perp\rangle \end{pmatrix}. \quad (7.108)$$

Здесь символы $\mathbf{0}$ обозначают столбцы из нулей соответствующего размера. Оба множества $\{|\tilde{m}_i\rangle\}$ и $\{|\tilde{n}_j\rangle\}$ являются ортонормированными, но неполными наборами векторов в пространстве $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_M \oplus \mathcal{H}_N$. Используя ортонормированность, для набора чисел \mathbf{u} мы записываем

$$\sum_j |u_j|^2 = \langle \tilde{\omega} | \tilde{\omega} \rangle, \quad |\tilde{\omega}\rangle = \sum_j u_j |\tilde{n}_j\rangle. \quad (7.109)$$

Очевидно, что единичные векторы (7.108) подчиняются соотношению $t_{ij} = \langle m_i | n_j \rangle = \langle \tilde{m}_i | \tilde{n}_j \rangle$. Следовательно, числа $v_i = \sum_j t_{ij} u_j = \langle m_i | \tilde{\omega} \rangle$ являются компонентами ортогональной проекции $|\tilde{\omega}\rangle$ на подпространство $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_M$. Возведённая в квадрат норма этой проекции равна $\sum_i |v_i|^2$ и не превосходит $\langle \tilde{\omega} | \tilde{\omega} \rangle$. Тем самым утверждение доказано для случая чистого измеряемого состояния.

Аналогичный подход можно применить для смешанных состояний. Рассмотрим заданную матрицу плотности

$$\sum_\lambda \lambda |\psi_\lambda\rangle \langle \psi_\lambda| = \rho \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H}).$$

Мы поставим её в соответствие матрицу плотности на расширенном пространстве $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_M \oplus \mathcal{H}_N$ в виде

$$\tilde{\rho} := \sum_{\lambda} \lambda |\tilde{\psi}_{\lambda}\rangle\langle\tilde{\psi}_{\lambda}|, \quad |\tilde{\psi}_{\lambda}\rangle := |\psi_{\lambda}\rangle \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}. \quad (7.110)$$

Очевидно, мы имеем равенство $\langle m_i | \rho | n_j \rangle = \langle \tilde{m}_i | \tilde{\rho} | \tilde{n}_j \rangle$ и аналогичные формулы для диагональных по базисам матричных элементов ρ . Далее, введём линейные операторы

$$\tilde{\omega}_i := \langle \tilde{m}_i | \tilde{\rho} | \tilde{m}_i \rangle^{-1/2} |\tilde{m}_i\rangle\langle\tilde{m}_i| \tilde{\rho}^{1/2}, \quad (7.111)$$

$$\tilde{\eta}_j := \langle \tilde{n}_j | \tilde{\rho} | \tilde{n}_j \rangle^{-1/2} |\tilde{n}_j\rangle\langle\tilde{n}_j| \tilde{\rho}^{1/2}, \quad (7.112)$$

предполагая $\langle \tilde{m}_i | \tilde{\rho} | \tilde{m}_i \rangle \neq 0$ и $\langle \tilde{n}_j | \tilde{\rho} | \tilde{n}_j \rangle \neq 0$. Поскольку множества $\{|\tilde{m}_i\rangle\}$ и $\{|\tilde{n}_j\rangle\}$ заведомо не являются полными, мы можем исключить из них векторы, принадлежащие ядру матрицы плотности $\tilde{\rho}$. Операторы (7.111) и (7.112) явно удовлетворяют равенствам

$$\langle \tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_i \rangle_{\text{HS}} = \langle \tilde{\eta}_j, \tilde{\eta}_j \rangle_{\text{HS}} = 1, \quad (7.113)$$

$$\langle \tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_k \rangle_{\text{HS}} = \delta_{ik}, \quad \langle \tilde{\eta}_j, \tilde{\eta}_l \rangle_{\text{HS}} = \delta_{jl}. \quad (7.114)$$

Здесь мы использовали ортонормированность наборов $\{|\tilde{m}_i\rangle\}$ и $\{|\tilde{n}_j\rangle\}$. Матричные элементы преобразования можно переписать в виде

$$t_{ij} = \frac{\langle \tilde{m}_i | \tilde{n}_j \rangle \langle \tilde{n}_j | \tilde{\rho} | \tilde{m}_i \rangle}{\langle \tilde{m}_i | \tilde{\rho} | \tilde{m}_i \rangle^{1/2} \langle \tilde{n}_j | \tilde{\rho} | \tilde{n}_j \rangle^{1/2}} = \langle \tilde{\omega}_i, \tilde{\eta}_j \rangle_{\text{HS}}. \quad (7.115)$$

Для заданного набора чисел \mathbf{u} элементы выводимого набора имеют вид

$$v_i = \sum_{ij} t_{ij} u_j = \langle \tilde{\omega}_i, \tilde{\sigma} \rangle_{\text{HS}},$$

где $\tilde{\sigma} = \sum_j u_j \tilde{\eta}_j$. В силу (7.114), оператор $\tilde{\sigma}$ можно представить в виде

$$\tilde{\sigma} = \sum_i v_i \tilde{\omega}_i + \varpi, \quad (7.116)$$

причём $\langle \tilde{\omega}_i, \varpi \rangle_{\text{HS}} = 0$ для всех i . Вычисляя возведённые в квадрат нормы Гильберта–Шмидта, мы записываем

$$\sum_i |v_i|^2 = \left\langle \sum_i v_i \tilde{\omega}_i, \sum_i v_i \tilde{\omega}_i \right\rangle_{\text{HS}} \leq \langle \tilde{\sigma}, \tilde{\sigma} \rangle_{\text{HS}} = \sum_j |u_j|^2. \quad (7.117)$$

Здесь существенно использовалось свойство ортонормированности (7.114). Таким образом, предусловие (7.105) выполняется для всех вводимых наборов. ■

Представленные рассуждения отличаются от предыдущих формулировок в следующих отношениях. В приведенном выше доказательстве подчёркивается, что конструкции с расширением Наймарка фактически необходимы только при проверке условия (7.105). Выражение (7.104) для матричным элементов преобразования является практически очевидным. В случае двух симметричных информационно полных измерений $\mathcal{M} = \{d^{-1}|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\}$ и $\mathcal{N} = \{d^{-1}|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\}$ функция (7.99) принимает вид

$$g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\rho) = \frac{1}{d} \max \left\{ \frac{|\langle\varphi_i|\phi_j\rangle| |\langle\phi_j|\rho|\varphi_i\rangle|}{\langle\varphi_i|\rho|\varphi_i\rangle^{1/2} \langle\phi_j|\rho|\phi_j\rangle^{1/2}} : \langle\varphi_i|\rho|\varphi_i\rangle \neq 0, \langle\phi_j|\rho|\phi_j\rangle \neq 0 \right\}. \quad (7.118)$$

Подстановка этого выражение в формулы (7.100) и (7.101) напрямую даёт соотношения неопределённостей для пары симметричных информационно полных измерений \mathcal{M} и \mathcal{N} в терминах энтропий Цаллиса и Рёньи. Из неравенства Коши–Шварца следует, что

$$|\langle\phi_j|\rho|\varphi_i\rangle| \leq \langle\varphi_i|\rho|\varphi_i\rangle^{1/2} \langle\phi_j|\rho|\phi_j\rangle^{1/2}. \quad (7.119)$$

Заметим, что величина (7.118) удовлетворяет неравенству

$$g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\rho) \leq \frac{1}{d} \max_{ij} |\langle\varphi_i|\phi_j\rangle| =: \bar{f}(\mathcal{M}, \mathcal{N}). \quad (7.120)$$

Далее, функции $x \mapsto \ln_\mu(x^{-2})$ и $x \mapsto -2 \ln x$ являются убывающими. Из уравнений (7.100) и (7.101) следуют не зависящие от измеряемого состояния соотношения неопределённостей для пары симметричных информационно полных измерений. Полагая далее $1/\alpha + 1/\beta = 2$ и $\mu = \max\{\alpha, \beta\}$, мы получаем

$$H_\alpha(\mathcal{M}|\rho) + H_\beta(\mathcal{N}|\rho) \geq \ln_\mu(\bar{f}(\mathcal{M}, \mathcal{N})^{-2}), \quad (7.121)$$

$$R_\alpha(\mathcal{M}|\rho) + R_\beta(\mathcal{N}|\rho) \geq -2 \ln \bar{f}(\mathcal{M}, \mathcal{N}). \quad (7.122)$$

Эти формулы являются энтропийными соотношениями неопределённостей, основанными на теореме Рисса. Кроме того, правые части неравенств

(7.121) и (7.122) дают нижние границы на симметризованные энтропии. Как и ранее, соответствующие энтропийные параметры вводятся на основе формулы (7.43).

Глава 8

Энтропийный подход к соотношениям неопределённостей для энергии и времени

Материал этой главы основывается на работе [181]. Рассматривая мысленный эксперимент с микроскопом, Гейзенберг пришёл к выводу о том, что определённый импульс не может быть локализован в пространстве. Сходное мнение высказывалось в отношении энергии и времени. То есть совершенно определённое значение энергии не может быть локализовано на временной шкале. С другой стороны, случай энергии и времени не представляется возможным трактовать по аналогии с обычными наблюдаемыми. Роль времени в квантовой теории имеет довольно много аспектов [182, 183, 184]. Одно из основных возражений против существования универсальной формы самосопряжённого оператора времени, который был бы сопряжён с гамильтонианом, было указано ещё Паули. Очень важными с физической точки зрения свойствами многих систем является то, что спектр гамильтониана дискретен или что его собственные значения ограничены снизу. Паули отметил, что, при обычном понимании канонически сопряжённых переменных, существование сопряжённой с гамильтонианом наблюдаемой времени означало бы, что спектр гамильтониан покрывает всю вещественную ось (см., например, сноску 1 на с. 102 и далее русского перевода [185]). Различные подходы к построению соотношения неопределённостей типа “энергия-время” рассматриваются в [186]. Первые коли-

чественные формулировки были предложены Мандельштамом и Таммом [187] и Крыловым и Фоком [188]. Дальнейшее развитие этого направления было дано в [189, 190]. Подход к соотношению неопределённостей для энергии и времени на основе информационной энтропии рассмотрен в статье [191]. В этой работе используются некоторые идеи по построению почти периодических во времени наблюдаемых [192].

Несмотря на многие предыдущие попытки, авторы обзора [193] утверждали, что полностью удовлетворительная формулировка соотношений неопределённостей для энергии и времен ещё не получена. Автор работы [15] ввёл понятие “дополнения” гамильтониана, то есть величины, измерение которой в определённом смысле является дополнительным к измерению энергии. Оказалось, что такую величину можно построить для системы с дискретными уровнями энергии, для которых отношения энергетических уровней являются, хотя бы приближённо, рациональными числами [15]. Фактически с этой наблюдаемой ассоциируется неортогональное разложение единицы, тогда как собственно эрмитов оператор действует в расширенном пространстве состояний. Такой подход приводит к коммутационному соотношению, которое формально совпадает с коммутатором операторов числа и фазы в рамках подхода Пегга–Барнетта [194, 195, 196]. Используя понятие “дополнения” гамильтониана, автор [15] вывел соотношение неопределённостей типа Робертсона. Несмотря на некоторую ограниченность сферы применимости развитого подхода, он позволяет простым и физически мотивированным путём разрешить вопрос для многих интересных моделей. Более того, акцент делается на соответствующем коммутационном соотношении, так что проблема исследуется именно в том направлении, которое традиционно используется для обсуждения соотношений неопределённостей для энергии и времени. Как хорошо известно, прямолинейная трактовка оператора времени как канонически сопряжённой к гамильтониану наблюдаемой не представляется возможной. Тем самым понятие “дополнения” гамильтониана обеспечивает альтернативный способ ввести сопряжённую величину. Эта величина связана с эволюцией рассматриваемой системы во времени, но самим “временем”, конечно, не

является. По видимому, развитому в статье [15] подходу уделяется меньше внимания, чем он того заслуживает.

Данная глава посвящена формулировке энтропийных соотношений неопределённостей для энергии системы и “дополнения” в рамках подхода, предложенного в работе [15]. Это позволяет с иной точки зрения взглянуть на нижние энтропийные границы, выведенные в недавней статье [191]. Следует отметить, что понятие “дополнения” гамильтониана сразу приводит к соотношениям неопределённостей, которые непосредственно связаны со статистикой измерений. Кроме того, разработанный подход позволяет естественным образом учесть возможные неэффективности детектирования, что также существенно с точки зрения приложений. С другой стороны, конечно, область применимости концепции “дополнения” гамильтониана ограничена системами с дискретными уровнями энергии определённого типа. В общем случае следует использовать концептуально более сложный и абстрактный подход, разработанный авторами работы [191]. Представленные ниже соотношения неопределённостей для энергии системы и её “дополнения” можно рассматривать как непосредственно ассоциированную со статистикой измерений интерпретацию энтропийных границ из [191]. Будучи применимой лишь к частному случаю, такая интерпретация, тем не менее, справедлива для исключительно важных с физической точки зрения примеров.

Следуя Эйнштейну, авторы известной книги [197] подчёркивают, что “природа предоставляет свой собственный способ локализовать точку в пространстве-времени”. Координаты в пространстве-времени существуют лишь постольку, поскольку они связаны с определёнными событиями. Без дальнейших разъяснений наше повседневное понимание термина “время” не может быть перенесено на квантовый уровень. Разумеется, чаще всего этот вопрос ставится при обсуждении проблем квантовой гравитации [198, 199]. С другой стороны, известно, что ограничения на точность квантовых часов тесно связаны принципом неопределённостей Гейзенберга [198]. Для упрощения дальнейших формул далее используется система единиц, в которой $\hbar = 1$. Тогда шкала энергии обратно пропорциональна

шкале времени. Проблеме существования надлежащего оператора времени был посвящен ряд исследования, некоторые из которых обсуждаются в разделе III.8 книги [115]. Для бесструктурной нерелятивистской частицы, гамильтониан которой включает лишь слагаемое с кинетической энергией, временной оператор легко строится с помощью обычного преобразования Фурье. В этом случае энтропийные соотношения неопределённостей для координаты и импульса, полученные в работах [201, 202], легко перенести на величины энергии и времени [203]. Следует отметить, что формулировка соотношений неопределённостей для координаты и импульса на языке дифференциальных энтропий была впервые предложена в статье [140]. Для гамильтонианов с дискретным полуограниченным спектром задача была чисто формально проанализировано автором работы [200]. Впрочем, математические построения из [200] не являются вполне удовлетворительными с физической точки зрения [192]. Вместо того, чтобы строить оператор времени, развитый в статье [15] формализм имеет дело с оператором, который надлежащим образом действует на собственные состояния гамильтониана.

Пусть квантовая система имеет $d + 1$ энергетических уровней ε_n . Без потери общности примем, что энергия отсчитывается от уровня $\varepsilon_0 = 0$ [15]. Предположим также, что собственные значения гамильтониана невырождены и упорядочены по возрастанию. Гамильтониан записывается в виде

$$\mathbf{E} = \sum_{n=0}^d \varepsilon_n |\varepsilon_n\rangle \langle \varepsilon_n|, \quad (8.1)$$

где $|\varepsilon_n\rangle$ обозначает нормированное собственное состояние с энергией ε_n . В случае унитарной эволюции состояние замкнутой системы изменяется с течением времени согласно уравнению

$$\begin{aligned} \exp(-i\mathbf{E}t) |\psi\rangle &= \sum_{n=0}^d \exp(-i\varepsilon_n t) c_n |\varepsilon_n\rangle, \\ c_n &= \langle \varepsilon_n | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Автор статьи [15] сформулировал вопрос о том, на каких состояниях гамильтониан \mathbf{E} действует как генератор сдвигов. Иначе говоря, попробуем

найти параметризованные состояния $|\tau\rangle$, удовлетворяющие соотношению

$$\exp(-i\mathbf{E} \Delta\tau) |\tau\rangle = |\tau + \Delta\tau\rangle. \quad (8.3)$$

Как показано в работе [15], такие состояния записываются в виде

$$|\tau\rangle = \frac{1}{\sqrt{d+1}} \sum_{n=0}^d \exp(-i\varepsilon_n \tau) |\varepsilon_n\rangle. \quad (8.4)$$

Такого рода выражения являются довольно типичными при рассмотрении собственных состояний канонически сопряжённых наблюдаемых [136]. Правда, обычно мы предполагаем, что спектры этих конечномерных переменных эквидистантны. Поэтому следует выяснить, можно ли использовать формулы типа (8.4) в случае неравных разностей между энергетическими уровнями [15].

Параметр τ в формуле (8.4) может принимать любые вещественные значения. Все векторы этого типа, вместе взятые, образуют переполненную систему векторов в $(d+1)$ -мерном пространстве состояний \mathcal{H}_{d+1} . В общем, не представляется возможным получить из этого множества $d+1$ вектор ортогонального базиса [15]. Тем не менее, при выполнении определённых свойств можно получить неортогональное разложение единицы в \mathcal{H}_{d+1} . Предположим, что все дроби $\varepsilon_n/\varepsilon_1$ являются рациональными числами или с высокой точностью представляются ими. Для первого варианта запишем

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} = \frac{B_n}{A_n}, \quad (8.5)$$

где целые числа B_n и A_n взаимно просты [15]. Пусть r_1 обозначает наименьшее общее кратное чисел A_n при $n > 1$. Полагая $r_0 = 0$ и $r_n = r_1 B_n / A_n$, получаем набор целых чисел r_n . Для элементов этого набора положим

$$\varepsilon_n = \frac{2\pi r_n}{T_c}, \quad (8.6)$$

где $T_c = 2\pi r_1 / \varepsilon_1$. Следуя работе [15], рассмотрим $s+1$ состояний вида (8.4) со значениями

$$\tau_m = \tau_0 + m \frac{T_c}{s+1} \quad (m = 0, 1, \dots, s). \quad (8.7)$$

Отметим, что промежуточные значения τ_1, \dots, τ_s равномерно распределены между крайними точками τ_0 и $\tau_0 + T_c$. Иными словами, значения (8.7)

формируют эквидистантный ряд. Автор статьи [15] показал, что в рамках принятых предположений выполняется равенство

$$\frac{d+1}{s+1} \sum_{m=0}^s |\tau_m\rangle \langle \tau_m| = \mathbf{1}_{d+1}, \quad (8.8)$$

где $\mathbf{1}_{d+1}$ есть единичный оператор на пространстве \mathcal{H}_{d+1} . Таким образом, мы получаем неортогональное разложение единицы, ассоциированное с “дополнением” гамильтониана. Последний генерирует на состояниях $|\tau_m\rangle$ сдвиг параметра согласно (8.3). Формула (8.8) является точным равенством, когда дроби $\varepsilon_n/\varepsilon_1$ рациональны и разности $r_\ell - r_n$ не делятся на $s+1$. Последнее условие легко удовлетворяется с выбором $s+1 > \max r_n$. В остальном есть свобода в выборе целого числа $s \geq d$. Если дроби $\varepsilon_n/\varepsilon_1$ не являются рациональными, но аппроксимируются ими с высокой точностью, то равенство (8.8) выполняется вплоть до соответственно малого аддитивного слагаемого [15]. Каждому энергетическому уровню ε_n ставится в соответствие соответствующий ему “натуральный” период $2\pi/\varepsilon_n$. Если дробь $\varepsilon_n/\varepsilon_1$ в точности рациональна, то характеристическое время T_c имеет простую физическую интерпретацию. Это наименьший ненулевой интервал времени, по истечении которого система при эволюции согласно (8.2) возвращается в свое первоначальное состояние [15]. Иными словами, состояние $|\tau + T_c\rangle$ точно воспроизводит $|\tau\rangle$. Поэтому в наборе состояний вида $|\tau_m\rangle$ все состояния различны.

Используя неортогональное разложение единицы, мы по-прежнему не получили наблюдаемой, представленной эрмитовым оператором. С другой стороны, сами неопределённости скорее связаны с разбросами в распределениях вероятностей. Тем самым векторов $|\tau_m\rangle$ вполне достаточно для того, чтобы определить соответствующие вероятности и охарактеризовать уровень неопределённостей с дополнительной к гамильтониану точки зрения. Отсюда естественным путём выводятся энтропийные соотношения неопределённостей. С другой стороны, из теоремы Наймарка следует, что всякое ПОЗМ-измерение можно реализовать как проективное измерение в расширенном пространстве состояний. Связанная с неортогональным разложением состояниями эрмитова наблюдаемая действует в расширенном

пространстве, имеющем $s + 1$ измерений. Явный вид и свойства оператора “дополнения”, а также соотношения неопределённостей в традиционной формулировке с произведением стандартных отклонений обсуждаются в статье [15]. Однако для получения энтропийных соотношений неопределённостей достаточно просто иметь разложение единицы (8.8).

Пусть $\mathcal{E} = \{|\varepsilon_n\rangle\langle\varepsilon_n|\}$ обозначает набор проекторов на собственные состояния гамильтониана. Если состояние системы непосредственно перед измерением описывается матрицей плотности ρ с единичным следом, то вероятность получения результата ε_n равна $\langle\varepsilon_n|\rho|\varepsilon_n\rangle$. Через $R_\alpha(\mathcal{E}; \rho)$ и $H_\alpha(\mathcal{E}; \rho)$ обозначаются α -энтропии Рёньи и Цаллиса, вычисленные с упомянутыми вероятностями. Измерение дополнительной к гамильтониану наблюдаемой описывается ПОЗМ $\mathcal{T} = \{|\theta_m\rangle\langle\theta_m|\}$ с элементами ранга 1, где

$$|\theta_m\rangle = \sqrt{\frac{d+1}{s+1}} |\tau_m\rangle. \quad (8.9)$$

Для состояния ρ получаем α -энтропии Рёньи и Цаллиса $R_\alpha(\mathcal{T}; \rho)$ и $H_\alpha(\mathcal{T}; \rho)$, вычисленные с вероятностями $\langle\theta_m|\rho|\theta_m\rangle$. Приведённые выше построения во многих отношениях напоминают формализм, развитый в статьях [194, 195, 196]. Целью этих работ было построение эрмитового оператора для представления квантовой фазы. Квантовая фаза в роли наблюдаемой обсуждалась в одной из самых известных статей Дирака [204], которую обычно считают моментом рождения квантовой электродинамики. С тех пор вопрос о корректном представлении квантовой фазы изучался с различных точек зрения [193, 205]. Интуитивное предположение состоит в том, что операторы оптической фазы и числа фотонов являются канонически сопряжёнными переменными. Как известно, попытка непосредственно трактовать операторы фазы и числа фотонов подобно паре координата-импульс математически несостоятельна. Один из физически мотивированных путей разрешения этой трудности и был предложен авторами работ [194, 195, 196]. Вместо того, чтобы с самого начала иметь дело с бесконечномерным гильбертовым пространством, они рассматривают пространство с формально конечной, но в остальном произвольной размерностью. После построения всех представляющих физический интерес величин выполняется предельный переход к счётно бесконечномерному пространству.

Чтобы сформулировать энтропийные соотношения неопределённостей, введём скалярную величину

$$g(\mathcal{E}, \mathcal{T}; \rho) := \max \frac{|\langle \varepsilon_n | \theta_m \rangle \langle \theta_m | \rho | \varepsilon_n \rangle|}{\langle \varepsilon_n | \rho | \varepsilon_n \rangle^{1/2} \langle \theta_m | \rho | \theta_m \rangle^{1/2}}, \quad (8.10)$$

где максимум берётся над всеми индексами, для которых $\langle \varepsilon_n | \rho | \varepsilon_n \rangle \neq 0$ и $\langle \theta_m | \rho | \theta_m \rangle \neq 0$. В общем, величина (8.10) явно зависит от выбора состояний $|\theta_m\rangle$. Если состояние системы непосредственно перед измерением есть ρ , то

$$R_\alpha(\mathcal{E}; \rho) + R_\beta(\mathcal{T}; \rho) \geq -2 \ln g(\mathcal{E}, \mathcal{T}; \rho), \quad (8.11)$$

$$H_\alpha(\mathcal{E}; \rho) + H_\beta(\mathcal{T}; \rho) \geq \ln_\mu \{g(\mathcal{E}, \mathcal{T}; \rho)^{-2}\}, \quad (8.12)$$

где положительные энтропийные параметры связаны формулой $1/\alpha + 1/\beta = 2$ и $\mu = \max\{\alpha, \beta\}$. Связь $1/\alpha + 1/\beta = 2$ обусловлена использованием теоремы Рисса [206]. Неравенства (8.11) и (8.12) выражают соотношения неопределённостей для сценария с приготовлением одного и того же состояния. Как видно из (8.10), имеется зависимость от выбора фактических моментов отсчёта при построении ПОЗМ $\mathcal{T} = \{|\theta_m\rangle\langle\theta_m|\}$. Возможность такого выбора отражает некоторую свободу, имеющуюся в путях экспериментальной реализации измерений “дополнения” гамильтониана. Таким образом, получены энтропийные соотношения неопределённостей типа “энергия-время”. Следует отметить, что они напрямую связаны с экспериментальной статистикой. В этом смысле неравенства (8.11) и (8.12) отличаются от энтропийных соотношения неопределённостей, полученных в [191]. Другое отличие — явная зависимость правых частей (8.11) и (8.12) от измеряемого состояния ρ .

Следуя методам работы [129], можно преобразовать правые части соотношений (8.11) и (8.12) в форму, не зависящую от измеряемого состояния. В рассматриваемом случае энтропийные границы становятся зависящими от единственного параметра s . Действительно, в силу неравенства Коши–Шварца

$$g(\mathcal{E}, \mathcal{T}; \rho) \leq f(\mathcal{E}, \mathcal{T}) := \max |\langle \varepsilon_n | \theta_m \rangle|, \quad (8.13)$$

или окончательно $f(\mathcal{E}, \mathcal{T}) = (s + 1)^{-1/2}$. Таким образом, искомые соотношения неопределённостей записываются в виде

$$R_\alpha(\mathcal{E}; \rho) + R_\beta(\mathcal{T}; \rho) \geq \ln(s + 1), \quad (8.14)$$

$$H_\alpha(\mathcal{E}; \rho) + H_\beta(\mathcal{T}; \rho) \geq \ln_\mu(s + 1), \quad (8.15)$$

где $1/\alpha + 1/\beta = 2$ и $\mu = \max\{\alpha, \beta\}$. Неравенства (8.14) и (8.15) справедливы для любого состояния ρ . Видно, что нижние границы на уровень неопределённостей типа энергия-время логарифмически растут с увеличением количества “временных” отсчётов $s + 1$. Такое поведение представляется физически разумным. Следует отметить также следующий факт. При $s > d$ норма состояний $|\theta_m\rangle$ и, тем самым, вероятности $\langle \theta_m | \rho | \theta_m \rangle$ строго меньше 1. Следовательно, энтропии $R_\beta(\mathcal{T}; \rho)$ и $H_\beta(\mathcal{T}; \rho)$ в приведённых выше соотношениях строго больше нуля. Принимая во внимание неравенство $\langle \theta_m | \rho | \theta_m \rangle \leq (d + 1)/(s + 1)$, легко получить

$$R_\beta(\mathcal{T}; \rho) \geq \ln\left(\frac{s + 1}{d + 1}\right) =: \Gamma. \quad (8.16)$$

Конечно, эта оценка снизу только приближительная, но, тем не менее, она характеризует неизбежный ввиду $s > d$ уровень неопределённостей, присутствующий в измерении \mathcal{T} . Вычитая Γ из обеих частей (8.14), мы окончательно имеем

$$R_\alpha(\mathcal{E}; \rho) + R_\beta(\mathcal{T}; \rho) - \Gamma \geq \ln(d + 1). \quad (8.17)$$

После вычитания нижняя энтропийная граница определяется логарифмом размерности $d + 1$ независимо от количества “временных” отсчётов $s + 1$. Тем самым правая часть соотношения (8.17) становится полностью схожей с тем, что получается в случае конечномерных канонически сопряжённых наблюдаемых [136]. Следует отметить, что соотношения неопределённостей, выписанные в работе [136], появились в качестве основанной на численных проверках гипотезы. Доказательство на основе теоремы Рисса было опубликовано годом позднее в статье [14].

Как уже обсуждалось в Главе 7, неэффективности детектирования естественным образом учитываются в рамках энтропийного подхода к

формулировке соотношений неопределённостей. Заданному уровню эффективности $\eta \in [0; 1]$ и произвольному вероятностному распределению ставится в соответствие “искажённое” распределение (7.10). Не вдаваясь в детали, ограничимся формулировкой с энтропиями Шеннона. Пусть $\eta = \min\{\eta_{\mathcal{E}}, \eta_{\mathcal{T}}\} \geq 1/2$, где $\eta_{\mathcal{E}}$ и $\eta_{\mathcal{T}}$ соответственно характеризуют неэффективность детектирования в измерениях энергии и её “дополнения”. Используя (7.11) для $\alpha = 1$, получаем соотношение неопределённостей

$$\begin{aligned} H_1(\mathcal{E}^{(\eta_{\mathcal{E}})}; \rho) + H_1(\mathcal{T}^{(\eta_{\mathcal{T}})}; \rho) &\geq -2\eta \ln g(\mathcal{E}, \mathcal{T}; \rho) + h_1(\eta_{\mathcal{E}}) + h_1(\eta_{\mathcal{T}}) \\ &\geq \eta \ln(s + 1) + 2h_1(\max\{\eta_{\mathcal{E}}, \eta_{\mathcal{T}}\}). \end{aligned} \quad (8.18)$$

Бинарная энтропия $2h_1(\eta)$ описывает роль событий “детектор не сработал” в общей картине неопределённостей. В случае недостаточно высокой эффективности детекторов статистика измерений будет отражать, по большей части, генерируемую ими неопределённость. На таком фоне экспериментальное изучение собственно квантовых неопределённостей окажется проблематичным.

Так как состояния $|\theta_m\rangle$ приводят к неортогональному разложению единицы в \mathcal{H}_{d+1} , их нельзя рассматривать как собственные векторы эрмитовой наблюдаемой, действующей в том же пространстве. Но ПОЗМ $\mathcal{T} = \{|\theta_m\rangle\langle\theta_m|\}$ можно реализовать как проективное измерение в расширенном пространстве. Такая возможность следует из теоремы Наймарка, применения которой в квантовой теории проверки гипотез и оценивания обсуждаются в известных книгах [114, 115]. В нашем случае достаточно использовать более простой подход, описанный, например, в разделе 3.1 книги [120]). Компоненты столбцов $|\theta_m\rangle$, нумеруемые индексом m с $s + 1$ значениями, можно рассматривать как элементы некоторой матрицы размером $(d + 1) \times (s + 1)$. В силу соотношения полноты эту матрицу можно добавлением строк дополнить до унитарной матрицы размером $s + 1$. Всякая наблюдаемая в расширенном пространстве $\mathcal{H}_{s+1} = \mathcal{H}_{d+1} \oplus \mathcal{K}$ имеет $s + 1$ собственных состояний. Включая дополнительные состояния в энергетический базис, мы легко получаем ортогональное разложение

$\tilde{\mathcal{E}}_{s+1} = \{|\tilde{\ell}\rangle\langle\tilde{\ell}|\}_{\ell=0}^s$. Следуя статье [15], рассмотрим также векторы

$$|\tilde{\theta}_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{\ell=0}^s \exp(-i\ell\theta_m) |\tilde{\ell}\rangle. \quad (8.19)$$

Тем самым получается второе ортогональное разложение $\tilde{\mathcal{T}}_{s+1} = \{|\tilde{\theta}_m\rangle\langle\tilde{\theta}_m|\}_{m=0}^s$. При этом исходные энергетические состояния $|\varepsilon_n\rangle$ с индексом $n = 0, 1, \dots, d$ должны быть перенумерованы таким образом, что

$$|\tilde{\ell}\rangle = |\varepsilon_n\rangle \oplus \mathbf{0} \quad (8.20)$$

всякий раз, когда $\ell = r_n$. Это осуществимо ввиду того, что $s+1 > \max r_n$. Если $\ell \neq r_n$ для всех $n = 0, 1, \dots, d$, то кет $|\tilde{\ell}\rangle$ имеет ненулевые компоненты только в пространстве \mathcal{K} . В формуле (8.19) числа θ_m определены как [15]

$$\theta_m = \frac{2\pi\tau_m}{T_c}. \quad (8.21)$$

Эти значения равномерно заполняют интервал длиной 2π между θ_0 и $\theta_0 + 2\pi$, где $\theta_0 = 2\pi\tau_0/T_c$. Каждой матрице плотности ρ на \mathcal{H}_{d+1} ставится в соответствие матрица плотности $\tilde{\rho}$ размером $s+1$ с добавлением нулевых строк и столбцов по отношению к \mathcal{K} . Очевидным образом имеем

$$\langle\tilde{\theta}_m|\tilde{\rho}|\tilde{\theta}_m\rangle = \langle\theta_m|\rho|\theta_m\rangle \quad (8.22)$$

для всех m , $\langle\tilde{\ell}|\tilde{\rho}|\tilde{\ell}\rangle = \langle\varepsilon_n|\rho|\varepsilon_n\rangle$ для $\ell = r_n$ и $\langle\tilde{\ell}|\tilde{\rho}|\tilde{\ell}\rangle = 0$ для $\ell \neq r_n$. Итак, в расширенном пространстве рассматриваются две наблюдаемые

$$\sum_{\ell=0}^s \ell |\tilde{\ell}\rangle\langle\tilde{\ell}|, \quad \sum_{m=0}^s \theta_m |\tilde{\theta}_m\rangle\langle\tilde{\theta}_m|. \quad (8.23)$$

Первая из этих наблюдаемых даёт, с точностью до размерного множителя, гамильтониан, действующий в расширенном пространстве. Второй формально эквивалентен оператору оптической фазы в рамках подхода, развитого в статьях [194, 195, 196]. Для наблюдаемых (8.23) легко записать коммутатор и, далее, соотношение неопределённостей в терминах произведения стандартных отклонений; их обсуждение вместе с предельным случаем $s \rightarrow \infty$ можно найти в работе [15]. С другой стороны, энтропийные соотношения неопределённости апеллируют скорее к разложениям

единицы, так как для вычисления энтропий используются соответствующие вероятности. В предельном случае $s \rightarrow \infty$ мы имеем дело уже с плотностью распределения вероятностей.

Предельный случай интересен в том отношении, что позволяет отвлечься от рассмотрения конкретных энергетических уровней [15]. Поскольку разность между соседними τ_m стремится к нулю, вероятность попасть в малый интервал между τ и $\tau + \Delta\tau$ равна, в первом приближении, $\omega_\rho(\tau) \Delta\tau$. Здесь мы записываем

$$\omega_\rho(\tau) = \frac{\langle \tau' | \rho | \tau' \rangle}{T_c}, \quad (8.24)$$

где отмасштабированные векторы $|\tau'\rangle = \sqrt{d+1} |\tau\rangle$. Полагая далее $\Delta\tau = T_c/(s+1)$, видим, что величина (8.24) удовлетворяет

$$\omega_\rho(\tau_m) \Delta\tau = \langle \theta_m | \rho | \theta_m \rangle. \quad (8.25)$$

Подобно (8.21), записываем также $U_{\tilde{\rho}}(\theta_m) \Delta\theta = \omega_\rho(\tau_m) \Delta\tau$ с малым интервалом $\Delta\theta = 2\pi/(s+1)$. Как было сказано выше, матрица плотности $\tilde{\rho}$ получена из ρ добавлением нулевых строк и столбцов. Далее вводятся дифференциальные энтропии Рёньи $R_\alpha(\omega_\rho)$ и $R_\alpha(U_{\tilde{\rho}})$ согласно формуле (6.71). В отличие от энтропий дискретных вероятностных распределений, дифференциальные энтропии могут принимать отрицательные значения. Поэтому использованный в статье [129] метод неприменим, вообще говоря, к выводу соотношений неопределённостей в терминах дифференциальных энтропий Цаллиса. Тем не менее, можно получить соотношения неопределённостей с разделением интервала непрерывно изменяющихся величин на экспериментальные “бины”.

Пусть положительные энтропийные параметры α и β удовлетворяют условию $1/\alpha + 1/\beta = 2$. Переходя к пределу $s \rightarrow \infty$, мы имеем дело с расширенным пространством состояний \mathcal{H}_{s+1} . Как уже было упомянуто выше, наблюдаемые (8.23) являются канонически сопряжёнными в смысле формализма, предложенного в работах [194, 195, 196]. Для вероятностных векторов $\mathbf{p} = \{p_n\}$ с элементами $p_n = \langle \varepsilon_n | \rho | \varepsilon_n \rangle$ и $\mathbf{q} = \{q_m\}$ с элементами

$q_m = \langle \theta_m | \rho | \theta_m \rangle$ мы получаем

$$\|\mathbf{p}\|_\alpha \leq \left(\frac{1}{s+1} \right)^{(1-\beta)/\beta} \|\mathbf{q}\|_\beta, \quad (8.26)$$

$$\|\mathbf{q}\|_\alpha \leq \left(\frac{1}{s+1} \right)^{(1-\beta)/\beta} \|\mathbf{p}\|_\beta, \quad (8.27)$$

где $1/2 < \beta < 1 < \alpha$. Формулы (8.26) и (8.27) следуют из теоремы Рисса. В результате предельного перехода вместо вероятностей q_m мы имеем дело с величинами $U_{\tilde{\rho}}(\theta_m) d\theta$. В этом случае справедливы неравенства

$$\|\mathbf{p}\|_\alpha \leq \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{(1-\beta)/\beta} \|U_{\tilde{\rho}}\|_\beta, \quad (8.28)$$

$$\|U_{\tilde{\rho}}\|_\alpha \leq \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{(1-\beta)/\beta} \|\mathbf{p}\|_\beta, \quad (8.29)$$

где $1/\alpha + 1/\beta = 2$ и $1/2 < \beta < 1 < \alpha$. Следует помнить, что дифференциальные энтропии зависят также от масштабирования случайной величины. Поэтому вычисления удобнее проводить с величинами типа $\|\mathbf{p}\|_\alpha$ и $\|U_{\tilde{\rho}}\|_\beta$. Комбинируя $U_{\tilde{\rho}}(\theta) d\theta = \omega_\rho(\tau) d\tau$ с $\theta = 2\pi\tau/T_c$, находим также

$$\|U_{\tilde{\rho}}\|_\beta = \left(\frac{2\pi}{T_c} \right)^{(1-\beta)/\beta} \|\omega_\rho\|_\beta. \quad (8.30)$$

Тем самым соотношения (8.28) и (8.29) переписываются в виде

$$\|\mathbf{p}\|_\alpha \leq \left(\frac{1}{T_c} \right)^{(1-\beta)/\beta} \|\omega_\rho\|_\beta, \quad (8.31)$$

$$\|\omega_\rho\|_\alpha \leq \left(\frac{1}{T_c} \right)^{(1-\beta)/\beta} \|\mathbf{p}\|_\beta, \quad (8.32)$$

при наложении тех же условий на α и β . Путём простых алгебраических операций (8.31) и (8.32) трансформируются соотношения неопределённостей с континуальным временным параметром, а именно

$$R_\alpha(\mathcal{E}; \rho) + R_\beta(\omega_\rho) \geq \ln T_c, \quad (8.33)$$

где энтропийные индексы связаны формулой $1/\alpha + 1/\beta = 2$. Правая часть соотношения (8.33) фактически воспроизводит энтропийную оценку, выведенную в статье [191]. Однако авторы этой работы использовали более общие и абстрактные построения. По-видимому, энтропийные границы

указанного типа являются проявлениями одного и того же фундаментального ограничения. Ещё раз следует подчеркнуть, что соотношение (8.33) включает энтропийные функции, непосредственно связанные со статистикой измерений. Таким образом, мы охарактеризовали неопределённости типа энергия-время в форме, традиционной для соотношений неопределённостей. В этом смысле получена более привычная трактовка тех энтропийных соотношений неопределённостей для энергии и времени, что были предложены в работе [191].

Так как правая часть (8.33) включает в себя размерный параметр T_c , она зависит от выбранной единицы измерения времени. С другой стороны, дифференциальная энтропия $R_\beta(\omega_\rho)$ также зависит от шкалы времени. Указанная зависимость такова, что изменение масштаба времени вносит одно и то же аддитивное слагаемое в обе части неравенства (8.33). В этом смысле она не является существенной с физической точки зрения. Чтобы получить формулировку с использованием безразмерных параметров, нужно явным образом включить в рассмотрение экспериментальные “бины” на шкале времени. Предположим, что интервал $[\tau_0; \tau_0 + T_c]$ разделяется на малые отрезки точками τ_j . В отличие от значений (8.7) точки τ_j могут быть выбраны произвольным образом. Под $\delta\tau$ мы подразумеваем наибольшую из разностей $\tau_{j+1} - \tau_j$. Вместо $\omega_\rho(\tau)$ теперь используются вероятности

$$q_j^{(\delta)} := \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \omega_\rho(\tau) d\tau, \quad (8.34)$$

составляющие вероятностное распределение $\mathbf{q}_{\mathcal{T}}^{(\delta)}$. Из неравенств (8.31) и (8.31) следует, что

$$\|\mathbf{p}\|_\alpha \leq \left(\frac{\delta\tau}{T_c}\right)^{(1-\beta)/\beta} \|\mathbf{q}_{\mathcal{T}}^{(\delta)}\|_\beta, \quad (8.35)$$

$$\|\mathbf{q}_{\mathcal{T}}^{(\delta)}\|_\alpha \leq \left(\frac{\delta\tau}{T_c}\right)^{(1-\beta)/\beta} \|\mathbf{p}\|_\beta, \quad (8.36)$$

где снова $1/\alpha + 1/\beta = 2$ и $1/2 < \beta < 1 < \alpha$. Детали перехода к соотношениям (8.35) и (8.36) полностью аналогичны выкладкам, проделанным в разделе 3.3 статьи [207]. Используя (8.35) и (8.36), окончательно получаем

неравенства

$$R_\alpha(\mathcal{E}; \rho) + R_\beta(\mathfrak{q}_{\mathcal{T}}^{(\delta)}; \rho) \geq \ln\left(\frac{T_c}{\delta\tau}\right), \quad (8.37)$$

$$H_\alpha(\mathcal{E}; \rho) + H_\beta(\mathfrak{q}_{\mathcal{T}}^{(\delta)}; \rho) \geq \ln_\mu\left(\frac{T_c}{\delta\tau}\right), \quad (8.38)$$

в которых $1/\alpha + 1/\beta = 2$ и $\mu = \max\{\alpha, \beta\}$. Неравенства (8.37) и (8.38) выражают энтропийные соотношения неопределённостей с “бинами” на шкале времени. Как уже было сказано выше, фактические “бины” выбираются совершенно независимо от значений типа (8.7). В этом смысле формулировки (8.37) и (8.38) записаны в унифицированном виде, включающем единственную характеристику T_c . Конечно, приведённый вывод этих формулировок подразумевает все предпосылки, которые необходимы для построения ПОЗМ-измерения $\mathcal{T} = \{|\theta_m\rangle\langle\theta_m|\}$.

Рассмотрим конкретный пример соотношений неопределённостей для энергии и её “дополнения” в сценарии с приготовлением одного и того же состояния. В нём рассматривается повторяющиеся измерения с одиночным кубитом, приготовленным в одном и том же состоянии. Физически они могут быть реализованы как манипуляции с частицей со спином $1/2$ во внешнем магнитном поле. Гамильтониан пропорционален z -матрице Паули, однако следует учесть, что шкала энергии должна быть сдвинута в соответствии с условием $\varepsilon_0 = 0$. Это нужно при построении ПОЗМ $\mathcal{T} = \{|\theta_m\rangle\langle\theta_m|\}$. В данном случае число моментов отсчета $s + 1$ может изменяться от 2 до бесконечности. В данном примере мы можем просто принять $\tau_0 = 0$. Кубитовые состояния обычно представляются вектором Блоха. Мы рассмотрим состояния, в которых вектор Блоха \mathbf{r} направлен вдоль оси x , а его модуль принимает значения $|\mathbf{r}| = 1$ и $|\mathbf{r}| = 0.75$. На рис. 8.1 для нескольких значений β показаны левая часть неравенства (8.14) и нижняя граница $\ln(s + 1)$. Для экваториальных состояний кубита энтропия $R_\alpha(\mathcal{E}; \rho)$ постоянна. Таким образом, показанные кривые в основном демонстрируют изменения в $R_\beta(\mathcal{T}; \rho)$. Абсцисса включает значения целого числа $s + 1$ между 2 и 1000. Поведение для больших значений числа $s + 1$ напоминают картину, получающуюся для непрерывного параметра τ со многими “бинами”. Как видно из рис. 8.1, все кривые проходят вблизи ли-

нии $\ln(s + 1)$, поэтому нижняя энтропийная граница в соотношении (8.14) является достаточно точной. Когда $|\mathbf{r}|$ уменьшается, кривые энтропии становятся всё более близкими друг к другу, но при этом слегка смещаются вверх. Для учёта этого небольшого увеличения следовало бы использовать правую часть (8.11), которая зависит от измеряемого состояния.

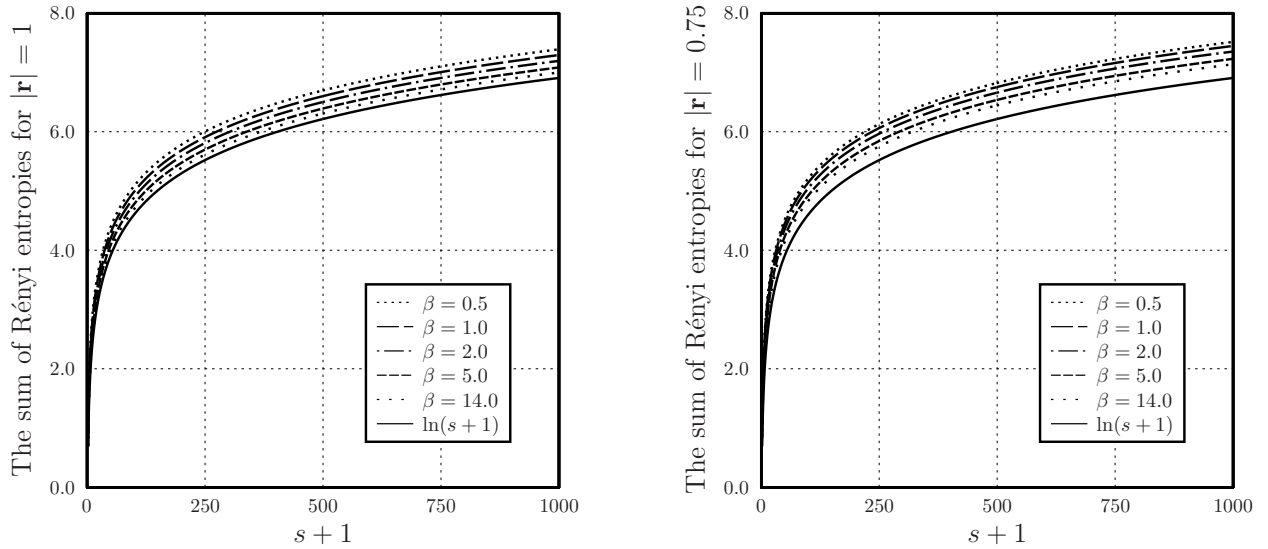


Рис. 8.1: Левая часть (8.14) для нескольких значений β , слева при $|\mathbf{r}| = 1$ и справа при $|\mathbf{r}| = 0.75$.

Рассматривая операторы в пространстве \mathcal{H}_{s+1} , можно получить соотношения неопределённостей другого типа. По построению ортонормированные базисы $\{|\tilde{\ell}\rangle\}_{\ell=0}^s$ и $\{|\tilde{\theta}_m\rangle\}_{m=0}^s$ являются равнонаклонёнными. Тем самым к этому случаю применимы соответствующие соотношения неопределённостей. Если матрица плотности $\tilde{\rho}$ получена из ρ путём добавления нулевых элементов, то мы имеем

$$R_\alpha(\mathcal{E}; \rho) = R_\alpha(\tilde{\mathcal{E}}; \tilde{\rho}), \quad R_\alpha(\mathcal{T}; \rho) = R_\alpha(\tilde{\mathcal{T}}; \tilde{\rho}), \quad (8.39)$$

и аналогично для энтропий Цаллиса. В результате соответствующих подстановок в формулы (7.14) и (7.15) для $\alpha \in (0; 2]$ получаем следующие

неравенства на энтропии Цаллиса:

$$\begin{aligned} H_\alpha(\mathcal{E}; \rho) + H_\alpha(\mathcal{T}; \rho) &\geq 2 \ln_\alpha \left(\frac{2s + 2}{(s + 1) \text{Tr}(\rho^2) + 1} \right) \\ &\geq 2 \ln_\alpha \left(\frac{2s + 2}{s + 2} \right). \end{aligned} \quad (8.40)$$

Соотношения неопределённостей в терминах энтропии Рёньи для равнонаклонённых базисов были получены в статье [142] и позднее улучшены в статье [175]. Применяя эти результаты [142, 175] к нашему случаю, для $\alpha \geq 2$ получаем

$$\begin{aligned} R_\alpha(\mathcal{E}; \rho) + R_\alpha(\mathcal{T}; \rho) &\geq \frac{2}{\alpha - 1} \ln \left(\frac{2s + 2}{(s + 1) \text{Tr}(\rho^2) + 1} \right) \\ &\quad + \frac{2\alpha - 4}{\alpha - 1} \ln \left(\frac{\sqrt{2}s + \sqrt{2}}{\sqrt{s(s + 1) \text{Tr}(\rho^2) - s + \sqrt{2}}} \right). \end{aligned} \quad (8.41)$$

В частности, min-энтропии удовлетворяют

$$R_\infty(\mathcal{E}; \rho) + R_\infty(\mathcal{T}; \rho) \geq 2 \ln \left(\frac{\sqrt{2}s + \sqrt{2}}{\sqrt{s(s + 1) \text{Tr}(\rho^2) - s + \sqrt{2}}} \right). \quad (8.42)$$

Таким образом, мы получили зависящие от измеряемого состояния соотношения неопределённостей, сформулированные с использованием энтропий Цаллиса и Рёньи. Правые части неравенств выражены через величину $\text{Tr}(\rho^2)$. Такие формулировки наиболее полезны тогда, когда след квадрата матрицы плотности достаточно далёк от 1. В случае чистого измеряемого состояния результаты (8.41) и (8.42) применяются с подстановкой $\text{Tr}(\rho^2) = 1$. Например, min-энтропии удовлетворяют

$$R_\infty(\mathcal{E}; |\psi\rangle\langle\psi|) + R_\infty(\mathcal{T}; |\psi\rangle\langle\psi|) \geq 2 \ln \left(\frac{\sqrt{2}s + \sqrt{2}}{s + \sqrt{2}} \right). \quad (8.43)$$

Конечно, для смешанного состояния сумма min-энтропий превосходит правую часть (8.43).

Используя результаты работы [208], можно улучшить неравенство (8.43). Пусть положительно полуопределённые операторы \mathbf{L} и \mathbf{N} удовлетворяет $\mathbf{L} \leq \mathbf{1}_{d+1}$ и $\mathbf{N} \leq \mathbf{1}_{d+1}$; тогда справедливо неравенство [208]

$$\text{Tr}(\mathbf{L}\rho) + \text{Tr}(\mathbf{N}\rho) \leq 1 + \|\sqrt{\mathbf{L}}\sqrt{\mathbf{N}}\|_\infty. \quad (8.44)$$

Данное неравенство обобщает неравенство, указанное в статье [209] для измерений по отношению к двум ортонормированным базисам. Подстановка $\mathbf{L} = |\theta_m\rangle\langle\theta_m|$ и $\mathbf{N} = |\varepsilon_n\rangle\langle\varepsilon_n|$ даёт

$$\|\sqrt{\mathbf{L}}\sqrt{\mathbf{N}}\|_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{s+1}}. \quad (8.45)$$

Теперь используем (8.44) и (8.45), а также примем во внимание $q_m(\mathcal{T}; \rho) \leq (d+1)/(s+1)$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \max p_n(\mathcal{E}; \rho) + \max q_m(\mathcal{T}; \rho) &\leq 1 + \Upsilon, \\ \Upsilon &:= \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{s+1}}, \frac{d+1}{s+1} \right\}. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Когда $s+1 > (d+1)^2$, имеем $\Upsilon = (d+1)/(s+1)$. Заметим также, что функция $x \mapsto -\ln x$ является выпуклой и убывающей. Комбинируя эти свойства с определением min-энтропии и (8.46), окончательно получаем

$$R_{\infty}(\mathcal{E}; \rho) + R_{\infty}(\mathcal{T}; \rho) \geq 2 \ln \left(\frac{2}{1 + \Upsilon} \right). \quad (8.47)$$

Для больших s правая часть (8.47) примерно равна $\ln 4$. В том же пределе правая часть (8.42) описывается формулой $\ln 2 - \ln(\text{Tr}(\rho^2))$. Применяя последнее к максимально смешанному состоянию, получаем нижнюю границу $\ln(2d+2)$. Когда мы рассматриваем состояния с достаточно малыми значениями $\text{Tr}(\rho^2)$, неравенство (8.42) сильнее, чем (8.47). В других случаях результат (8.47) представляется более предпочтительным.

Записывая соотношения в терминах энтропий Цаллиса с одним и тем же значением α , можно ещё раз рассмотреть случай неэффективностей детектирования. Разумно предположить, что значения обоих параметров эффективности $\eta_{\mathcal{E}}$ и $\eta_{\mathcal{T}}$ не меньше $1/2$, иначе такая экспериментальная установка вряд ли окажется полезной. Согласно (7.11) и (8.40) получаем

$$H_{\alpha}(\mathcal{E}^{(\eta_{\mathcal{E}})}; \rho) + H_{\alpha}(\mathcal{T}^{(\eta_{\mathcal{T}})}; \rho) \geq 2\eta^{\alpha} \ln_{\alpha} \left(\frac{2s+2}{(s+1)\text{Tr}(\rho^2)+1} \right) + h_{\alpha}(\eta_{\mathcal{E}}) + h_{\alpha}(\eta_{\mathcal{T}}). \quad (8.48)$$

где $\alpha \in (0; 2]$ и $\eta = \min\{\eta_{\mathcal{E}}, \eta_{\mathcal{T}}\}$. В правую часть (8.48) дают вклад не только неопределённости, отражающие дополнительный характер измеряемых квантовомеханических величин, но и генерируемая детекторами индетерминированность. В случае $\alpha = 1$ нижняя энтропийная граница умножается

на η , а затем к результату добавляется слагаемое $h_1(\eta_{\mathcal{E}}) + h_1(\eta_{\mathcal{T}})$. Поскольку эффективность реальных детекторов всегда меньше 100 %, полученные неравенства ещё раз демонстрируют плодотворность энтропийного подхода к соотношениям неопределённостей.

Уже в первые годы создания квантовой теории формулировке и смыслу соотношений неопределённостей для энергии и времени уделялось значительное внимание. Ещё Паули отмечал, что существование канонически сопряжённой с гамильтонианом наблюдаемой означало бы, что спектр гамильтониан покрывает всю вещественную ось. Таким образом, попытка сконструировать универсальную форму самосопряжённого оператора “времени” вряд ли физически оправдана. Автор работы [15] предложил концепцию “дополнения” гамильтониана. Её измерения, а в расширенном пространстве соответствующая наблюдаемая, и становятся характеристиками, сопряжёнными с гамильтонианом в указанном смысле. “Дополнение” гамильтониана связано с поведением системы во времени. Кроме того, количество моментов отсчёта, будучи ограничено снизу, в остальном выбирается произвольно. Измерение “дополнения” гамильтониана, однако, не является измерением “текущего времени” системы ни при каком понимании смысла этого термина. Как было показано в данной главе, разработанный в статье [15] подход непосредственно приводит к энтропийным соотношениям неопределённостей. Полученные энтропийные границы имеют физически разумные свойства. Концепция “дополнения” гамильтониана ограничена применимостью к системам с дискретными уровнями энергии, для которых отношения энергетических уровней являются, точно или приближённо, рациональными числами [15]. Но такие системы образуют достаточно широкий класс, включающий примеры, играющие исключительно важную роль в физической картине мира. Помимо прочего, выведенные соотношения неопределённостей могут быть использованы при рассмотрении эволюции регистров квантовых систем вычислений и коммуникаций.

Заключение

В данной диссертации были рассмотрены свойства обобщённых энтропийных функционалов и некоторые их применения в квантовой теории информации. Применение информационно-теоретических функций в прикладных дисциплинах стартовало одновременно с формированием теории информации как самостоятельного научного направления. С другой стороны, возникновение и развитие представлений об энтропии сыграло ключевую роль в становлении статистической механики и молекулярно-кинетической теории. В этой связи можно отметить явную формальную аналогию между дифференциальной энтропией Шеннона и взятым со знаком минус H -функционалом Больцмана. Помимо традиционных областей, включающих статистические по своей природе вопросы, функционалы энтропийного типа используются при разработке самых разных алгоритмов, причем не только вычислительного характера. Фактически методы построения и анализа обобщённых энтропийных функционалов могут составить отдельный раздел прикладной математики, потенциально применимый к очень широкому кругу задач. Описанные в настоящей работе результаты касаются лишь некоторых избранных вопросов квантовой теории информации. В заключение ещё раз дадим краткую характеристику рассмотренных в диссертации задач и полученных при этом выводов.

Как показано в Главе 1, унитарно инвариантные матричные нормы Фань Цзы приводят к семейству мер различимости квантовых состояний. Частичные следовые дистанции позволяют дать физическую интерпретацию для сингулярных чисел оператора разности между двумя матрицами плотности, что может быть использовано при анализе процессов обработки информации на квантовых носителях. Во-первых, многие широко используемые квантовые каналы являются бистохастическими, например каналы

деполяризации и затухания фазы. Для этих каналов справедливы мажоризационные соотношения (1.46) и (1.67) и все их следствия. Применяя ПОЗМ-измерения определённого типа к состояниям на выходе квантовых схем и используя затем формулы типа (1.46) и (1.47), можно извлечь более детальную информацию о состояниях на входе. В частности, такие методы окажутся полезными при изучении квантового канала, заданного как “чёрный ящик”. Здесь исследователь выбирает тестовые состояния, которые образуют достаточно плотное подмножество в множестве операторов плотности. Вводя эти состояния в исследуемый “чёрный ящик”, можно оценить частичные следовые дистанции между выводимыми состояниями. Если будет обнаружено увеличение некоторой дистанции, то тестируемый квантовый канал безусловно нарушает условие (1.61). При тестировании квантовых каналов на унистохастичность можно использовать частные точности воспроизведения. Таким образом, описанные семейства следовых дистанций и точностей воспроизведения являются инструментами для тестирования и количественного описания каналов обработки информации на квантовых носителях.

Как известно, неравенства типа Фанне характеризуют степень гладкости соответствующей энтропии заданных квантовых состояний. Однако такие неравенства являются существенно конечномерными, так как их правые части включают размерность пространства состояний. В Главе 2 настоящей работы показано, что использование частичных энтропийных сумм позволяет обойти указанную трудность. Более того, во многих случаях актуальная размерность состояний потенциально бесконечномерных состояний действительно может и должна быть ограничена. Например, фоковские состояния с большим числом квантов имеют сопоставимо высокую энергию, вследствие чего они менее стабильны и в большей степени подвержены взаимодействию с окружающей средой. Для реализации квантовых коммуникаций и вычислений проблема снижения влияния внешнего шума является ключевой, так как “тонкие” квантовые корреляции лежат в основе большинства протоколов и алгоритмов. Семейство неравенств типа Фанне для частичных энтропийных сумм были выведены единым методом

для квантовой энтропии Цаллиса. Возможность варьировать значения энтропийного параметра в неравенствах такого рода может быть полезна для получения более строгих оценок на актуальные состояния квантового регистра. Разумеется, при этом неравенства типа Фанне придется использовать в комбинации с другими неравенствами, не зависящими явно от размерности пространства состояний. В принципе, основанные на рассмотрении частичных сумм методы могли бы быть применены к другим оценкам, в которых размерность фигурирует явным образом.

Наиболее широкое распространение получили энтропия Шеннона в классическом режиме и энтропия фон Неймана в квантовом режиме. Вне всякого сомнения, эти понятия являются фундаментально важными. Тем не менее, плодотворные применения обобщённых энтропийных функционалов были продемонстрированы во многих исследованиях. Следует отметить, что представители того или иного параметризованного семейства энтропий наследуют не все формальные свойства стандартных функционалов. Таким образом, потенциальная сфера применений обобщённых энтропий определяется в первую очередь их актуальными свойствами. Так называемые “унифицированные” энтропии являются обобщением хорошо известных энтропий типа Рёньи и Цаллиса. Свойства унифицированных энтропий, существенные в физических приложениях, были подробно исследованы в Главе 3. В частности, определены параметрические диапазоны, в которых справедливы неравенства типа Фанне и свойство устойчивости в конечномерном случае. Рассмотрен также важный вопрос об устойчивости унифицированных энтропий в термодинамическом пределе. Оказывается, что в определённом параметрическом диапазоне свойство устойчивости нарушается. В этом смысле унифицированные энтропии подобны энтропиям Рёньи.

В Главе 4 были получены новые оценки типа Пинскера и Фанне на относительную энтропию Цаллиса, причем как в коммутативном, так и в некоммутирующем случаях. Разумеется, последний является более трудным для исследования. Неравенства такого рода характеризуют допустимый диапазон значений для относительных энтропий в терминах следовой

метрики между двумя вероятностными распределениями или операторами плотности. Для вывода неравенств типа Пинскера предложен оригинальный метод, основанный на выпуклости рассматриваемых выражений по отношению к энтропийному параметру. В комбинации с монотонностью f -дивергенции указанная выпуклость приводит к ряду неожиданных оценок снизу на относительную энтропию Цаллиса. Для относительной α -энтропии вероятностных распределений дана характеристика её непрерывности в терминах минимальной вероятности второго аргумента. Обобщённые неравенства типа Фанне выведены с использованием семейства неравенств Фано для условной энтропии Цаллиса для всех положительных значений энтропийного параметра. Показано, каким образом сформулированные верхние и нижние оценки применяются для соответствующих энтропийных функций типа Рённи.

Представления о когерентности играют исключительно важную роль в понимании оптических явлений. Квантовая теория оптической когерентности была разработана благодаря широко известным работам Глаубера. Тем не менее единый универсальный подход к трактовке понятия когерентности как одной из разновидностей корреляций между состояниями всё еще отсутствует. В Главе 5 были введены и проанализированы квантификаторы квантовой когерентности на основе семейства дивергенций типа Цаллиса. Вообще говоря, формальное определение может быть дано с использованием общих f -дивергенций, но явная минимизация над соответствующим множеством инвариантных состояний представляет известные трудности. Тем не менее для квантовых дивергенций типа Цаллиса ответ выражается формулой (5.21). Исследуя параметрические расширения стандартных квантификаторов, мы видим модификацию некоторых принципиальных свойств. Даже если такие расширения не являются полностью легитимными мерами когерентности, они позволяют вывести полезные неравенства для стандартных квантификаторов, а также обеспечить аргументы в пользу утверждения о том, что альтернатива использованию стандартных квантификаторов отсутствует. В настоящее время активно исследуются явно некоммутативные “сэндвич”-версии квантовых относи-

тельных энтропий. Найденные в Главе 5 результаты подготавливают почву для изучений мер когерентности на основе таких величин. Окончательная точка зрения по этим вопросам всё ещё отсутствует.

Как известно, имеется определённая унитарная свобода в выборе операторов Крауса для представления квантовых каналов в виде операторных сумм. Такая свобода является прямым следствием теоремы Хьюстона–Джозсы–Вуттерса. В Главе 6 были исследованы специфические наборы операторов Крауса заданного сохраняющего след супероператора. Эти наборы обладают свойством экстремальности по отношению к обобщённым энтропиям Рёньи и Цаллиса. При этом минимизирующее “распутывание” вычисляется путем диагонализации определенной эрмитовой матрицы, связанной с любым уже имеющимся представлением в виде операторной суммы. Используя известную теорему Рисса о выпуклости билинейных форм, можно вывести энтропийные соотношения неопределённостей в терминах экстремальных “распутываний”. Наличие в этих неравенствах параметрической зависимости позволяет в ряде случаев найти более строгие оценки на фактические вероятностные распределения. Были рассмотрены формулировки двух типов, первая из которых включает явную зависимость от измеряемой матрицы плотности, а другая справедлива для всех квантовых состояний. Формулировка первого типа будет особенно полезна в тех ситуациях, когда используемые матрицы плотности принадлежат некоторому достаточно узкому классу.

В Главе 7 были представлены новые энтропийные соотношения неопределённостей для равнонаклонённых базисов и симметричных информационно полных измерений. В качестве меры неопределённостей использованы обобщённые энтропии Рёньи и Цаллиса. Рассмотрены как не зависящая от измеряемого состояния формулировка, так её усиление с явной зависимостью от матрицы плотности. Соотношения неопределённостей для набора равнонаклонённых базисов вытекает из неравенства, оценивающего сверху сумму соответствующих индексов совпадения. Соотношения неопределённостей для симметричного информационно полного ПОЗМ следуют из точного вычисления индекса совпадения сформированного рас-

пределения вероятностей. Этот результат является новым и может представлять интерес в других вопросах, не связанных с неопределённостями в квантовых измерениях. Одним из таких вопросов является построение достаточно эффективных схем детектирования энтенглмента. Ещё одним новым и очень полезным результатом является оценка сверху на максимальную вероятность, выраженная в терминах индекса совпадения. В формулировке с использованием энтропий Цаллиса удаётся учесть практически важный случай с неэффективностями обнаружения. Инициализация состояний квантового регистра и проведение измерений над ним являются неизбежными этапами во всех протоколах обработки информации на квантовых носителях. Когда эти носители являются предметом изучения третьей, условно недружественной стороны, фактические корреляции будут каким-то образом искажены. Используя представленные неравенства, легитимные пользователи квантовых коммуникаций имеют возможность проверить нарушение установленных актуальным протоколом диапазонов.

Вопрос о правильной формулировке соотношений неопределённостей для энергии и времени активно дискутировался с первых лет возникновения квантовой механики. За истёкший период было предложено много различных подходов и интерпретаций. Ясно, что неопределённость “временного” типа должна быть связана с эволюцией системы во времени, но вместе с тем время как таковое выступает здесь в роли параметра. В Главе 8 были рассмотрены энтропийные соотношения неопределённостей в рамках концепции “дополнения” гамильтониана. Данная концепция позволяет трактовать соответствующие измерения как пару взаимно дополнительных, причём одно из них проводится по отношению к базису собственных энергетических состояний. Энтропийные соотношения неопределённостей для энергии и её “дополнения” обеспечивают прямо связанную с экспериментальной статистикой интерпретацию неравенств, выведенных в статье [191]. Возможные неэффективности детектирования включаются в рассмотрение в рамках простой и физически разумной модели. При подходе расширяя пространство состояний дополнительные измерения гамильтониана и его “дополнения” реализуются через два равнонаклонён-

ных базиса. Тем самым получаются два эрмитовых оператора, описывающие канонически сопряжённые переменные в конечномерном пространстве. Хотя рассмотренный подход применим к системам с дискретным спектром определённой структуры, он может иногда использоваться в более общем контексте. Нередко возникает ситуация, когда фактические состояния рассматриваемой системы лежат в некотором подпространстве, образованном собственными состояниями гамильтониана. Возможно также, что фактическая эволюция системы оставляет указанное подпространство инвариантным. Если энергетические уровни, которые отвечают формирующим подпространство состояниям, подчиняются условию соизмеримости, то полученные соотношения неопределённостей сохраняют силу.

Представленные в настоящей диссертации результаты обосновывают целесообразность применения обобщённых энтропийных функционалов в задачах квантовой теории информации. Информационно-теоретические концепции дают также возможность по-новому взглянуть на принципиальные вопросы нерелятивистской квантовой механики. Рассмотрение систем передачи и обработки информации с точки зрения физики, равно как и трактовка физических проблем с учётом понятий теории информации, обусловлены не только потенциалом возникающих квантовых технологий. В конечном счёте, вычисления и связь осуществляются с использованием физических систем, поэтому любые утверждения по этому поводу являются физическими гипотезами, чью справедливость ещё предстоит подтвердить или опровергнуть. В этом отношении примечательны работы Дэвида Дойча, в которых известный тезис Чёрча–Тьюринга впервые рассматривался как физическая гипотеза. Фактически указанный принцип даёт сегодня в более обоснованной с физической точки зрения формулировке, известной как тезис Чёрча–Тьюринга–Дойча. Исследование взаимоотношений между физикой и теорией информации, которые долгое время рассматривались независимо друг от друга, обогащает наше понимание достижений цивилизации в целом. Обобщённые энтропии и связанные с ними функции должны сыграть в этом определённую роль.

Литература

- [1] Feynman R.P. Simulating physics with computers // Int. J. Theor. Phys. — 1982. — Vol. 21. — P. 467–488.
- [2] Benioff P. Quantum mechanical hamiltonian models of turing machines // J. Stat. Phys. — 1982. — Vol. 29. — P. 515–546.
- [3] Манин Ю.И. Вычислимое и невычислимое. — М.: Советское радио, 1980. — 128 с.
- [4] Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация. — М.: Мир, 2006. — 824 с.
- [5] Физика квантовой информации / Под ред. Д. Боумейстера, А. Экерта, А. Цайлингера.— М.: Постмаркет, 2002, 376 с.
- [6] Килин С.Я. Квантовая информация // УФН. — 1999. — Т. 169. — С. 507–526.
- [7] Zurek W.H. Decoherence and the transition from quantum to classical // Physics Today. — 1991. — Vol. 44. — P. 36–44.
- [8] Zurek W.H. Preferred states, predictability, classicality and the environment – induced decoherence // Prog. Theor. Phys. — 1993. Vol. 89. — P. 281–312.
- [9] Менский М.Б. Квантовые измерения и декогеренция. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 232 с.
- [10] Wootters W.K., Zurek W.H. A single quantum cannot be cloned // Nature. — 1982. Vol. 299. — P. 802–803.

- [11] Холево А.С. Квантовые системы, каналы, информация. — М.: Изд-во МЦНМО, 2014. — 327 с.
- [12] Fuchs C.A. Distinguishability and accessible information in quantum theory // E-print arXiv:quant-ph/9601020. — 1996. — 174 p.
- [13] Petz D. Quasi-entropies for finite quantum systems // Rep. Math. Phys. — 1986. — Vol. 23. — P. 57–65.
- [14] Maassen H., Uffink J.B.M. Generalized entropic uncertainty relations // Phys. Rev. Lett. — 1988. — Vol. 60. — P. 1103–1106.
- [15] Pegg D.T. Complement of the Hamiltonian // Phys. Rev. A. — 1998. — Vol. 58. — P. 4307.
- [16] Rastegin A.E. Trace distance from the viewpoint of quantum operation techniques // J. Phys. A: Math. Theor. — 2007. Vol. 40. — P. 9533–9549.
- [17] Rastegin A.E. Partitioned trace distances // Quantum Inf. Process. — 2010. — Vol. 9. — P. 61–73.
- [18] Rastegin A.E. Some properties of partial fidelities // Quantum Inf. Comput. — 2009. — Vol. 9. — P. 1069–1080.
- [19] Fan K. On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations I // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1949. — Vol. 35. — P. 652–655.
- [20] Uhlmann A. The “transition probability” in the state space of a *-algebra // Rep. Math. Phys. — 1976. — Vol. 9. — P. 273–279.
- [21] Jozsa R. Fidelity for mixed quantum states // J. Mod. Opt. — 1994. — Vol. 41. — P. 2315–2323.
- [22] Uhlmann A. On “partial” fidelities // Rep. Math. Phys. — 2000. — Vol. 45. — P. 407–418.

- [23] Miszczak J.A., Puchala Z., Horodecki P., Uhlmann A., Życzkowski K. Sub- and super-fidelity as bounds for quantum fidelity // *Quantum Inf. Comput.* — 2009. Vol. 9. — P. 0103–0130.
- [24] Fuchs C.A., van de Graaf J. Cryptographic distinguishability measures for quantum mechanical states // *IEEE Trans. Inf. Theory.* — 1999. — Vol. 45. P. 1216–1227.
- [25] Watrous J. *Theory of quantum information.* — Cambridge University Press, 2018. — viii+590 p.
- [26] Bengtsson I., Życzkowski K. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement.* — Cambridge University Press, 2017. — xv+619 p.
- [27] Barnum H., Caves C.M., Fuchs C.A., Jozsa R., Schumacher B. Noncommuting mixed states cannot be broadcast // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 76. — P. 2818–2821.
- [28] Rastegin A.E. Continuity and stability of partial entropic sums // *Lett. Math. Phys.* — 2010. — Vol. 94. — P. 229–242.
- [29] Fannes M. A continuity property of entropy density for spin lattice systems // *Commun. Math. Phys.* — 1973. — Vol. 31. — P. 291–294.
- [30] Lesche B. Instability of Rényi entropies // *J. Stat. Phys.* — 1982. — Vol. 27. — P. 419–422.
- [31] Bhatia R. *Matrix analysis.* — Springer, 1997. — xi+347 p.
- [32] Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann–Gibbs statistics // *J. Stat. Phys.* — 1988. — Vol. 52. — P. 479–487.
- [33] Havrda J., Charvát F. Quantification methods of classification processes: concept of structural α -entropy // *Kybernetika.* — 1967. — Vol. 3. — P. 30–35.
- [34] Raggio G.A. Properties of q -entropies // *J. Math. Phys.* — 1995. — Vol. 36. — P. 4785–4791.

- [35] Audenaert K. Subadditivity of q -entropies for $q > 1$ // J. Math. Phys. — 2007. — Vol. 48. — P. 083507.
- [36] Furuichi S., Yanagi K., Kuriyama K. A generalized Fannes inequality // J. Inequal. Pure Appl. Math. — 2007. — Vol. 8. — P. 13.
- [37] Zhang Z. Uniform estimates on the Tsallis entropies // Lett. Math. Phys. — 2007. — Vol. 80. — P. 171–181.
- [38] Davies E.B. Information and quantum measurement // IEEE Trans. Inf. Theory. — 1978. — Vol. 24. — P. 596–599.
- [39] Ohya M., Petz D. Quantum entropy and its use. — Springer, 1993. — viii+335 p.
- [40] Abe S. Stability of Tsallis entropy and instabilities of Rényi and normalized Tsallis entropies: a basis of q -exponential distributions // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 66. — P. 046134.
- [41] Rastegin A.E. Some general properties of unified entropies // J. Stat. Phys. — 2011. — Vol. 143.— P. 1120–1135.
- [42] Rényi A. On measures of entropy and information // Proceedings of 4th Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, ed. Neyman J., Vol. I. — P. 547–561. — University of California Press, 1961.
- [43] Hu X., Ye Z. Generalised quantum entropies // J. Math. Phys. — 2006. — Vol. 47. — P. 023502.
- [44] Hughston L.P., Jozsa R., Wootters W.K. A complete classification of quantum ensembles having a given density matrix // Phys. Lett. A. — 1993. — Vol. 183. — P. 14–18.
- [45] Wehrl A. General properties of entropy // Rev. Mod. Phys. — 1978. — Vol. 50. — P. 221–260.
- [46] Rastegin A.E. Fano type quantum inequalities in terms of q -entropies // Quantum Inf. Process. — 2012. — Vol. 11. — P. 1895–1910.

- [47] Jizba P., Arimitsu T. The world according to Rényi: thermodynamics of multifractal systems // *Ann. Phys.* — 2004. — Vol. 312. — P. 17–59.
- [48] Audenaert K.M.R., Eisert J. Continuity bounds on the quantum relative entropy // *J. Math. Phys.* — 2005. — Vol. 26. — P. 102104.
- [49] Naudts J. Continuity of a class of entropies and relative entropies // *Rev. Math. Phys.* — 2004. — Vol. 16. — P. 809–822.
- [50] Cao X., Luo S. On the stability of generalized entropies // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2009. — Vol. 42. — P. 075205.
- [51] Luo S. Notes on superadditivity of Wigner–Yanase–Dyson information // *J. Stat. Phys.* — 2007. — Vol. 128. — P. 1177–1188.
- [52] Hansen F. The Wigner–Yanase entropy is not subadditive // *J. Stat. Phys.* — 2007. — Vol. 126. — P. 643–648.
- [53] Seiringer R. On the failure of subadditivity of the Wigner–Yanase entropy // *Lett. Math. Phys.* — 2007. — Vol. 80. — P. 285–288.
- [54] Cai L., Hansen F. Metric-adjusted skew information: convexity and restricted forms of superadditivity // *Lett. Math. Phys.* — 2010. — Vol. 93. — P. 1–13.
- [55] Furuichi S. Information theoretical properties of Tsallis entropies // *J. Math. Phys.* — 2006. — Vol. 47. — P. 023302.
- [56] Araki H., Lieb E.H. Entropy inequalities // *Commun. Math. Phys.* — 1970. — Vol. 18. — P. 160–170.
- [57] Bhatia R. Positive definite matrices. — Princeton University Press, 2007. — ix+254 p.
- [58] Rastegin A.E. Upper continuity bounds on the relative q -entropy for $q > 1$ // *J. Math. Phys.* — 2011. — Vol. 52. — P. 062203.
- [59] Rastegin A.E. Bounds of the Pinsker and Fannes types on the Tsallis relative entropy // *Math. Phys. Anal. Geom.* — 2013. — Vol. 16. — P. 213–228.

- [60] Gell-Mann M., Tsallis C., ed. Nonextensive entropy – interdisciplinary applications. — Oxford University Press, 2004. — xv+422 p.
- [61] Hiai F., Mosonyi M., Petz D., Bény C. Quantum f -divergences and error correction // *Rev. Math. Phys.* — 2011. — Vol. 23. — P. 691–747.
- [62] Jenčová A., Ruskai M.B. A unified treatment of convexity of relative entropy and related trace functions, with conditions for equality // *Rev. Math. Phys.* — 2010. — Vol. 22. — P. 1099–1121.
- [63] Kullback S., Leibler R.A. On information and sufficiency // *Ann. Math. Stat.* — 1951. — Vol. 22. — P. 79–86.
- [64] Csiszár I. Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations // *Studia Sci. Math. Hungar.* — 1967. — Vol. 2. — P. 299–318.
- [65] Csiszár I. Axiomatic characterizations of information measures // *Entropy.* — 2008. — Vol. 10. — P. 261–273.
- [66] Petz D. From f -divergence to quantum quasi-entropies and their use // *Entropy.* — 2010. — Vol. 12. — P. 304–325.
- [67] Csiszár I. A note on Jensen’s inequality // *Studia Sci. Math. Hungar.* — 1966. — Vol. 1. — P. 227–230.
- [68] Gilardoni G. On Pinsker’s and Vajda’s type inequalities for Csiszár’s f -divergence // *IEEE Trans. Inf. Theory.* — 2010. — Vol. 56. — P. 5377–5386.
- [69] Ruskai M.B. Inequalities for quantum entropy: A review with conditions for equality // *J. Math. Phys.* — 2002. — Vol. 43. — P. 4358–4375.
- [70] Borland L., Plastino A.R., Tsallis C. Information gain within nonextensive thermostatics // *J. Math. Phys.* — 1998. — Vol. 39. — P. 6490–6501.

- [71] Furuichi S., Yanagi K., Kuriyama K. Fundamental properties of Tsallis relative entropy // *J. Math. Phys.* — 2004. — Vol. 45. — P. 4868–4877.
- [72] Uhlmann A. Relative entropy and the Wigner–Yanase–Dyson–Lieb concavity in an interpolation theory // *Commun. Math. Phys.* — 1977. — Vol. 54. — P. 21–32.
- [73] Busch P. Stochastic isometries in quantum mechanics // *Math. Phys. Anal. Geom.* — 1999. — Vol. 2. — P. 83–106.
- [74] Vedral V. The role of relative entropy in quantum information theory // *Rev. Mod. Phys.* — 2002. — Vol. 74. — P. 197–234.
- [75] Hiai F., Ohya M., Tsukada M. Sufficiency, KMS condition and relative entropy in von Neumann algebras // *Pacific J. Math.* — 1981. — Vol. 96. — P. 99–109.
- [76] Audenaert K.M.R., Eisert J. Continuity bounds on the quantum relative entropy — II // *J. Math. Phys.* — 2011. — Vol. 52. — P. 112201.
- [77] Ruskai M.B., Stillinger F.M. Convexity inequalities for estimating free energy and relative entropy // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1990. — Vol. 23. — P. 2421–2437.
- [78] Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Поляк Г. Неравенства. — М.: ИЛ, 1948. — 456 с.
- [79] Fedotov A., Harremoës P., Topsøe F. Refinements of Pinsker inequality // *IEEE Trans. Inf. Theory.* — 2003. — Vol. 49. — P. 1491–1498.
- [80] Bratteli O., Robinson D.W. Operator algebras and quantum statistical mechanics 2. — Springer, 2002. — xiii+517 p.
- [81] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 472 с.
- [82] Фано Р. Передача информации. Статистическая теория связи. — М.: Мир, 1965. — 440 с.
- [83] Petz D. Quantum information theory and quantum statistics. — Springer, 2008. — ix+214 p.

- [84] Lindvall T. Lectures on the coupling method. — John Wiley & Sons, 1992. — xii+257 p.
- [85] Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. — 896 с.
- [86] Horodecki M., Oppenheim J. Fundamental limitations for quantum and nanoscale thermodynamics // Nat. Commun. — 2013. — Vol. 4. — P. 2059.
- [87] Rodríguez-Rosario C., Frauenheim T., Aspuru-Guzik A. Thermodynamics of quantum coherence. E-print arXiv:1308.1245 [quant-ph] (2013).
- [88] Lostaglio M., Jennings D., Rudolph T. Description of quantum coherence in thermodynamic processes requires constraints beyond free energy // Nat. Commun. — 2015. — Vol. 6. — P. 6383.
- [89] Lostaglio M., Korzekwa K., Jennings D., Rudolph T. Quantum coherence, time-translation symmetry, and thermodynamics // Phys. Rev. X. — 2015. — Vol. 5. — P. 021001.
- [90] Narasimhachar V., Gour G. Low-temperature thermodynamics with quantum coherence // Nat. Commun. — 2015. — Vol. 6. — P. 7689.
- [91] Gour G., Spekkens R.W. The resource theory of quantum reference frames: manipulations and monotones // New J. Phys. — 2008. — Vol. 10. — P. 033023.
- [92] Brandão F.G.S.L., Horodecki M., Oppenheim J., Renes J.M., Spekkens R.W. Resource theory of quantum states out of thermal equilibrium // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Vol. 111. — P. 250404.
- [93] Baumgratz T., Cramer M., Plenio M.B. Quantifying coherence // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Vol. 113. — P. 140401.
- [94] Cheng S., Hall M.J.W. Complementarity relations for quantum coherence // Phys. Rev. A. — 2015. — Vol. 92. — P. 042101.

- [95] Bera M.N., Qureshi T., Siddiqui M.A., Pati A.K. Duality of quantum coherence and path distinguishability // Phys. Rev. A. — 2015. — Vol. 92. — P. 012118.
- [96] Bagan E., Bergou J.A., Cottrell S.S., Hillery M. Relations between coherence and path information // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 116. — P. 160406.
- [97] Hillery M. Coherence as a resource in decision problems: the Deutsch-Jozsa algorithm and a variation // Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 93. — P. 012111.
- [98] Bromley T.R., Cianciaruso M., Adesso G. Frozen quantum coherence // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 114. — P. 210401.
- [99] Yadin B., Ma J., Girolami D., Gu M., Vedral V. Quantum processes which do not use coherence // Phys. Rev. X. — 2016. — Vol. 6. — P. 041028.
- [100] Xu J. Quantifying coherence of Gaussian states // Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 93. — P. 032111.
- [101] Zhang Y.-R., Shao L.-H., Li Y., Fan H. Quantifying coherence in infinite-dimensional systems // Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 93. — P. 012334.
- [102] Rastegin A.E. Quantum-coherence quantifiers based on the Tsallis relative α entropies // Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 93. — P. 032136.
- [103] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 656 с.
- [104] Rana S., Parashar P., Lewenstein M. Trace-distance measure of coherence // Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 93. — P. 012110.
- [105] Streltsov A., Singh U., Dhar H.S., Bera M.N., Adesso G. Measuring quantum coherence with entanglement // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 115. — P. 020403.

- [106] Liese F., Vajda I. On divergences and informations in statistics and information theory // IEEE Trans. Inf. Theor. — 2006. — Vol. 52. — P. 4394–4412.
- [107] Vedral V., Plenio M.B. Entanglement measures and purification procedures // Phys. Rev. A. — 1998. — Vol. 57. — P. 1619–1633.
- [108] Brukner Č., Zeilinger A. Operationally invariant information in quantum measurements // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Vol. 83. — P. 3354–3357.
- [109] Peters N.A., Wei T.-C., Kwiat P.G. Mixed-state sensitivity of several quantum-information benchmarks // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 70. — P. 052309.
- [110] Singh U., Bera M.N., Dhar H.S., Pati A.K. Maximally coherent mixed states: complementarity between maximal coherence and mixedness // Phys. Rev. A. — 2015. — Vol. 91. — P. 052115.
- [111] Levi F., Mintert F. A quantitative theory of coherent delocalization // New J. Phys. — 2014. — Vol. 16. — P. 033007.
- [112] Müller-Lennert M., Dupuis F., Szehr O., Fehr S., Tomamichel M. On quantum Rényi entropies: a new generalization and some properties // J. Math. Phys. — 2013. — Vol. 54. — P. 122203.
- [113] Rastegin A.E. Coherence quantifiers from the viewpoint of their decreases in the measurement process // J. Phys. A: Math. Theor. — 2018. — Vol. 51 — P. 414011.
- [114] Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания. — М.: Мир, 1979. — 344 с.
- [115] Холево А.С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
- [116] Kraus K. States, effects, and operations: fundamental notions of quantum theory // Lecture notes in physics, Vol. 190. — P. 1–152. — Springer, 1983.

- [117] Ильичев Л.В. Экстремальное “распутывание” квантовой операции // ЖЭТФ. — 2003. — Т. 123. — С. 1113–1116.
- [118] Życzkowski K. Rényi extrapolation of Shannon entropy // Open Sys. Inf. Dyn. — 2003. — Vol. 10. — P. 297–310.
- [119] Ferraro A., Galbiati M., Paris M.G.A. Cloning of observables // J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — Vol. 39. — P. L219–L228.
- [120] Прескилл Дж. Квантовая информация и квантовые вычисления, Том 1. — М.–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008. — 464 с.
- [121] Carmichael H.J. An open systems approach to quantum optics // Lecture notes in physics, Vol. m18. — P. 1–179. — Springer, 1993.
- [122] Breslin J.K., Milburn G.J. Optimal quantum trajectories for discrete measurements // J. Mod. Optics. — 1997. — Vol. 44. — P. 2469–2484.
- [123] Aptekarev A.I., Dehesa J.S., Sánchez-Moreno P., Tulyakov D.N. Asymptotics of L_p -norms of Hermite polynomials and Rényi entropy of Rydberg oscillator states // Contemporary Mathematics. — 2012. — Vol. 578. — P. 19–29.
- [124] Aptekarev A.I., Tulyakov D.N., Toranzo I.V., Dehesa J.S. Rényi entropies of the highly-excited states of multidimensional harmonic oscillators by use of strong Laguerre asymptotics // Eur. Phys. J. B. — 2016. — Vol. 89. — P. 85.
- [125] Aptekarev A.I., Belega E.D., Dehesa J.S. Rydberg multidimensional states: Rényi and Shannon entropies in momentum space // J. Phys. A: Math. Theor. — 2021. — Vol. 54. — P. 035305.
- [126] Аптекарев А.И., Буюров В.С., Дегеза И.С. Асимптотическое поведение L^p -норм и энтропии для общих ортогональных многочленов // Матем. сб. — 1994. — Т. 185. — С. 3–30.

- [127] Aptekarev A.I., Dehesa J.S., Martinez-Finkelshtein A. Asymptotics of orthogonal polynomial's entropy // *J. Comput. Appl. Math.* — 2010. — Vol. 233. — P. 1355–1365.
- [128] Krishna M., Parthasarathy K.R. An entropic uncertainty principle for quantum measurements // *Sankhyā, Ser. A.* — 2002. — Vol. 64. — P. 842–851.
- [129] Rastegin A.E. Entropic uncertainty relations for extremal unravelings of super-operators // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2010. — Vol. 43. — P. 155302.
- [130] Aczél J., Daróczy Z. On measures of information and their characterizations. — Academic Press, 1975. — xii+234 p.
- [131] Białynicki-Birula I. Formulation of the uncertainty relations in terms of the Rényi entropies // *Phys. Rev. A.* — 2006. — Vol. 74. — P. 052101.
- [132] Rajagopal A.K. The Sobolev inequality and the Tsallis entropic uncertainty relation // *Phys. Lett. A.* — 1995. — Vol. 205. — P. 32–36.
- [133] Majernik V., Majernikova E. The determination of bounds of the β -entropic sum of two noncommuting observables // *Rep. Math. Phys.* — 2001. — Vol. 47. — P. 381–392.
- [134] Majernik V., Majernikova E., Shpyrko S. Uncertainty relations expressed by Shannon-like entropies // *Cent. Eur. J. Phys.* — 2003. — Vol. 3. — P. 393–420.
- [135] Zhan X. *Matrix inequalities.* — Springer, 2002. — vii+116 p.
- [136] Kraus K. Complementary observables and uncertainty relations // *Phys. Rev. D.* — 1987. — Vol. 35. — P. 3070–3075.
- [137] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Том II. — М.: Мир, 1965. — 538 с.
- [138] Beckner W. Inequalities in Fourier analysis // *Ann. Math.* — 1975. — Vol. 102. — P. 159–182.

- [139] Brascamp H.J., Lieb E.H. Best constants in Young's inequality, its conversion, and its generalization to more than three functions // *Adv. Math.* — 1976. — Vol. 20. — P. 151–173.
- [140] Hirschman I.I. A note on entropy // *Amer. J. Math.* — 1957. — Vol. 79. — P. 152–156.
- [141] Berta M., Christandl M., Colbeck R., Renes J.M., Renner R. The uncertainty principle in the presence of quantum memory // *Nature Phys.* — 2010. — Vol. 6. — P. 659–662.
- [142] Rastegin A.E. Uncertainty relations for MUBs and SIC-POVMs in terms of generalized entropies // *Eur. Phys. J. D.* — 2013. — Vol. 67. — P. 269.
- [143] Bennett C.H., Brassard G. Quantum cryptography: public key distribution and coin tossing // *Proceedings of IEEE international conference on computers, systems, and signal processing, Bangalore.* — P. 175–179. — IEEE, 1984.
- [144] Schwinger J. Unitary operator bases // *Proc. Natl. Acad. Sci.* — 1960. — Vol. 46. — P. 570–579.
- [145] D'Ariano G.M., Paris M.G.A., Sacchi M.F. Quantum Tomography. — *Advances in Imaging and Electron Physics*, vol. 128. — Elsevier, Academic Press, 2003, P. 205–308.
- [146] Gottesman D. Class of quantum error-correcting codes saturating the quantum Hamming bound // *Phys. Rev. A.* — 1996. — Vol. 54. — P. 1862–1868.
- [147] Calderbank A.R., Rains E.M., Shor P.W., Sloane N.J.A. Quantum error correction and orthogonal geometry // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 78. — P. 405–408.
- [148] Spengler C., Huber M., Brierley S., Adaktylos T., Hiesmayr B.C. Entanglement detection via mutually unbiased bases // *Phys. Rev. A.* — 2012. — Vol. 86. — P. 022311.

- [149] Durt T., Englert B.-G., Bengtsson I., Życzkowski K. On mutually unbiased bases // *Int. J. Quantum Inf.*— 2010. — Vol. 8. — P. 535–640.
- [150] Ivanovic I.D. An inequality for the sum of entropies of unbiased quantum measurements // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1995. — Vol. 25. — P. L363–L364.
- [151] Sánchez J. Entropic uncertainty and certainty relations for complementary observables // *Phys. Lett. A.* — 1993. — Vol. 173. — P. 233–239.
- [152] Sánchez-Ruiz J. Improved bounds in the entropic uncertainty and certainty relations for complementary observables // *Phys. Lett. A.* — 1995. — Vol. 201. —P. 125–131.
- [153] Ballester M.A., Wehner S. Entropic uncertainty relations and locking: Tight bounds for mutually unbiased bases // *Phys. Rev. A.* — 2007. — Vol. 75. — P. 022319.
- [154] Renes J.M., Blume-Kohout R., Scott A.J., Caves C.M. Symmetric informationally complete quantum measurements // *J. Math. Phys.* — 2004. — Vol. 45. — P. 2171–2180.
- [155] Wu S., Yu S., Mølmer K. Complementarity of information sent via different bases // *Phys. Rev. A.* — 2009. — Vol. 79. — P. 022320.
- [156] Rastegin A.E. Tests for quantum contextuality in terms of q -entropies // *Quantum Inf. Comput.* — 2014. — Vol. 14. — P. 0996–1013.
- [157] Bruß D. Optimal eavesdropping in quantum cryptography with six states // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 81. — P. 3018–3021.
- [158] Wootters W.K., Fields B.D. Optimal state-determination by mutually unbiased measurements // *Ann. Phys.* — 1989. — Vol. 191. — P. 363–381.
- [159] Bandyopadhyay S., Boykin P.O., Roychowdhury V., Vatan F. A new proof for the existence of mutually unbiased bases // *Algorithmica.* — 2002. — Vol. 34. — P. 512–528.

- [160] Klappenecker A., Rötteler M. Constructions of mutually unbiased bases // Finite fields and applications. Lecture notes in computer science, Vol. 2948. — P. 137–144. — Springer, 2004.
- [161] Wocjan P., Beth T. New construction of mutually unbiased bases in square dimensions // Quantum Inf. Comput. — 2005. — Vol. 5. — P. 093–101.
- [162] Bengtsson I., Bruzda W., Ericsson Å., Larsson J.-Å., Tadej W., Życzkowski K. Mutually unbiased bases and Hadamard matrices of order six // J. Math. Phys. — 2007. — Vol. 48. — P. 052106.
- [163] Prugovečki E. Information-theoretical aspects of quantum measurement // Int. J. Theor. Phys. — 1977. — Vol. 16. — P. 321–331.
- [164] Busch P. Informationally complete sets of physical quantities // Int. J. Theor. Phys. — 1991. — Vol. 30. — P. 1217–1227.
- [165] D’Ariano G.M., Perinotti P., Sacchi M.F. Informationally complete measurements and group representation // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. — 2004. — Vol. 6. — P. S487–S491.
- [166] Fuchs C.A., Hoang M.C., Stacey B.C. The SIC question: history and state of play // Axioms. — 2017. — Vol. 6. — P. 21.
- [167] Klappenecker A., Rötteler M., Shparlinski I., Winterhof A. On approximately symmetric informationally complete positive operator-valued measures and related systems of quantum states // J. Math. Phys. — 2005. — Vol. 46. — P. 082104.
- [168] Wu S., Yu S., Mølmer K. Entropic uncertainty relation for mutually unbiased bases // Phys. Rev. A. — 2009. — Vol. 79. — P. 022104.
- [169] Ng H.Y.N., Berta M., Wehner S. Min-entropy uncertainty relation for finite-size cryptography // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 86. — P. 042315.

- [170] Mandayam P., Wehner S., Balachandran N. A transform of complementary aspects with applications to entropic uncertainty relations // *J. Math. Phys.* — 2010. — Vol. 51. — P. 082201.
- [171] Ben-Bassat M., Raviv J. Rényi's entropy and error probability // *IEEE Trans. Inf. Theory.* — 1978. — Vol. 24. — P. 324–331.
- [172] Chaves R., Fritz T. Entropic approach to local realism and noncontextuality // *Phys. Rev. A.* — 2012. — Vol. 85. — P. 032113.
- [173] Rastegin A.E. Notes on entropic uncertainty relations beyond the scope of Riesz's theorem // *Int. J. Theor. Phys.* — 2012. — Vol. 51. — P. 1300–1315.
- [174] Harremoës P., Topsøe F. Inequalities between entropy and index of coincidence derived from information diagrams // *IEEE Trans. Inf. Theory.* — 2001. — Vol. 47. — P. 2944–2960.
- [175] Rastegin A.E. On uncertainty relations and entanglement detection with mutually unbiased measurements // *Open Sys. & Inf. Dyn.* — 2015. — Vol. 22. — P. 1550005.
- [176] Coles P.J., Colbeck R., Yu L., Zwolak M. Uncertainty relations from simple entropic properties // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 108. — P. 210405.
- [177] Rajagopal A.K. The Sobolev inequality and the Tsallis entropic uncertainty relation // *Phys. Lett. A.* — 1995. — Vol. 205. — P. 32–36.
- [178] Ghiglieri J., Paris M.G.A. Quantum state reconstruction by entangled measurements // *Eur. Phys. J. D.* — 2006. — Vol. 40. — P. 139–146.
- [179] Werner R.F. Quantum states with Einstein–Podolsky–Rosen correlations admitting a hidden-variable model // *Phys. Rev. A.* — 1989. — Vol. 40. — P. 4277–4281.
- [180] Massar S. Uncertainty relations for positive-operator-valued measures // *Phys. Rev. A.* — 2007. — Vol. 76. — P. 042114.

- [181] Rastegin A.E. On entropic uncertainty relations for measurements of energy and its “complement” // *Ann. Phys. (Berlin)*. — 2019. — Vol. 531. — P. 1800466.
- [182] Busch P. On the energy-time uncertainty relation: Part I: Dynamical time and time indeterminacy // *Found. Phys.* — 1990. — Vol. 20. — P. 1–32.
- [183] Busch P. On the energy-time uncertainty relation: Part II: Pragmatic time versus energy indeterminacy // *Found. Phys.* — 1990. — Vol. 20. — P. 33–43.
- [184] Pegg D.T. Time in a quantum mechanical world // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1991. — Vol. 24. — P. 3031–3040.
- [185] Паули В. Общие принципы волновой механики. — М.: ОГИЗ, 1947. — 332 с.
- [186] Dodonov V.V., Dodonov A.V. Energy-time and frequency-time uncertainty relations: exact inequalities // *Phys. Scr.* — 2015. — Vol. 90. — P. 074049.
- [187] Мандельштам Л.И., Тамм И.Е. Соотношение неопределённости энергия-время в нерелятивистской квантовой механике // *Изв. АН СССР, сер. физич.* — 1945. — Т. 9. — С. 122–128.
- [188] Крылов Н.С., Фок В.И. О двух основных толкованиях соотношения неопределённости для энергии и времени // *ЖЭТФ*. — 1947. — Т. 17. — С. 93–107.
- [189] Grabowski M. A proof of the indeterminacy relation of lifetime and energy // *Lett. Math. Phys.* — 1984. — Vol. 8. — P. 455–458.
- [190] Miyadera T. Energy-time uncertainty relations in quantum measurements // *Found. Phys.* — 2016. — Vol. 46. — P. 1522–1550.
- [191] Coles P.J., Katariya V., Lloyd S., Marvian I., Wilde M.M. Entropic energy-time uncertainty relation // *Phys. Rev. Lett.* — 2019. — Vol. 122. — P. 100401.

- [192] Hall M.J.W. Almost-periodic time observables for bound quantum systems // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2008. — Vol. 41. — P. 255301.
- [193] Carruthers P., Nieto M.M. Phase and angle variables in quantum mechanics // *Rev. Mod. Phys.* — 1968. — Vol. 40. — P. 411–440.
- [194] Pegg D.T., Barnett S.M. Unitary phase operator in quantum mechanics // *Europhys. Lett.* — 1988. — Vol. 6. — P. 483–487.
- [195] Barnett S.M., Pegg D.T. On the Hermitian optical phase operator // *J. Mod. Optics.* — 1989. — Vol. 36. — P. 7–19.
- [196] Pegg D.T., Barnett S.M. Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field // *Phys. Rev. A.* — 1989. — Vol. 39. — P. 1665–1675.
- [197] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. 1. — М.: Мир, 1977. — 474 с.
- [198] Wigner E.P. Relativistic invariance and quantum phenomena // *Rev. Mod. Phys.* — 1957. — Vol. 29. — P. 255–268.
- [199] Unruh W.G., Wald R.M. Time and the interpretation of canonical quantum gravity // *Phys. Rev. D.* — 1989. — Vol. 40. — P. 2598–2614.
- [200] Galapon E.A. Self-adjoint time operator is the rule for discrete semi-bounded Hamiltonians // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 2002. — Vol. 458. — P. 2671–2689.
- [201] Beckner W. Inequalities in Fourier analysis // *Ann. Math.* — 1975. — Vol. 102.— P. 159–182.
- [202] Bialynicki-Birula I., Mycielski J. Uncertainty relations for information entropy in wave mechanics // *Commun. Math. Phys.* 1975. — Vol. 44. — P. 129–132.

- [203] Grabowski M. Entropic uncertainty relations for “phase-number of quanta” and “time-energy” // *Phys. Lett. A.* — 1987. — Vol. 124. — P. 19–21.
- [204] Dirac P.A.M. The quantum theory of the emission and absorption of radiation // *Proc. R. Soc. A.* — 1927. — Vol. 114. — P. 243–265.
- [205] Lynch R. The quantum phase problem: a critical review // *Phys. Rep.* — 1995. — Vol. 256. — P. 367–436.
- [206] Riesz M. Sur les maxima des forms bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires // *Acta Math.* — 1927. — Vol. 49. — P. 465–497.
- [207] Rastegin A.E. Uncertainty relations for general canonically conjugate observables in terms of unified entropies // *Found. Phys.* — 2015. — Vol. 45. — P. 923–942.
- [208] Miyadera T., Imai H. Generalized Landau–Pollak uncertainty relation // *Phys. Rev. A.* — 2007. — Vol. 76. — P. 062108.
- [209] de Vicente J.I., Sánchez-Ruiz J. Separability conditions from the Landau–Pollak uncertainty relation // *Phys. Rev. A.* — 2005. — Vol. 71. — P. 052325.