

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Раджабов Андрей Евгеньевич

**Адронные процессы в вакууме, горячей и плотной
среде, поправки к аномальному магнитному моменту
мюона в низкоэнергетической модели КХД**

01.04.02 – Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Иркутск – 2019

Оглавление

Введение	4
Глава 1: Нелокальная кварковая модель и процессы в вакууме	26
1.1 Построение модели в вакууме	27
1.2 Пионное рассеяние	41
1.3 $1/N_c$ поправки	49
1.4 $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$	63
1.5 $\rho(\omega) \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma, \rho(\omega) \rightarrow \eta \pi^0 \gamma$	68
1.6 Форм-фактор Паули кварка	74
Глава 2: Исследование поведения в среде	82
2.1 Мезонные корреляции в модели с петлей Полякова и давление	85
2.2 Мезонные корреляции в схеме строгого $1/N_c$ разложения	92
2.3 Аномальные моды мезонов	104
2.4 Двухфотонные распады векторных мезонов и дилептонные распады скалярных мезонов	125
Глава 3: Адронный вклад в аномальный магнитный момент мюона	139
3.1 Адронная поляризация вакуума	141

3.2	Процесс рассеяния света-на-свете	150
3.2.1	Общие соображения	150
3.2.2	Псевдоскалярный вклад	155
3.2.3	Скалярный вклад	171
3.2.4	Кварковая петля	178
3.3	Выводы к главе	185
Приложения		189
А	Правила Фейнмана для нелокальных вершин взаимодействия .	189
Б	Метод Кролла	192
В	Четырехкварковые константы связи, поляризационные операторы и углы смешивания	201
Г	$1/N_c$ поправки к пропагатору пиона и константа слабого распада	202
Д	Амплитуда перехода мезона в два фотона	203
Е	Локальный предел амплитуды $\gamma^*\gamma^* \rightarrow S^*$	206
Литература		207

Введение

Теоретическое квантово-полевое описание сильных взаимодействий является одной из наиболее интересных и сложных задач современной теоретической физики. Благодаря свойству асимптотической свободы [1–4] при больших передачах импульса константа связи α_s мала, и поэтому могут быть использованы хорошо разработанные методы теории возмущений квантовой хромодинамики (КХД). В области низких энергий α_s уже не является малым параметром и поэтому требуется применение существенно пертурбативных методов. По-видимому, единственным пертурбативным подходом к КХД исходя «из первых принципов» теории является вычисление в рамках решёточной формулировки КХД. Несмотря на впечатляющий прогресс достигнутый в рамках решёточных вычислений в последние годы, решёточные вычисления всё ещё ограничены в области применения. Также актуальным является вопрос теоретической интерпретации решёточных вычислений.

Поэтому является оправданным применении различных эффективных подходов к моделированию КХД в пертурбативной области.

Одной из наиболее известных моделей основанных на киральной симметрии сильных взаимодействий является модель, предложенная в 1961 Намбу¹ и Иона-Лазинио (НИЛ) [5,6]. В исходной формулировке модели масса нуклона появлялась в результате спонтанного нарушения данной симметрии. Позднее была предложена формулировка модели на кварковом уровне [7,8]. Как было показано позднее, несмотря на свою простоту, модель имела большой потенциал для возможных расширений: включения странных частиц и новых

¹В 2008 году «за открытие механизма спонтанного нарушения симметрии в субатомной физике» Йоитиро Намбу, Макото Кобаяши и Тосихидэ Маскава получили Нобелевскую премию по физике.

секторов взаимодействия, процессов мезонных распадов и рассеяния, моделирования поведения сильновзаимодействующей материи в экстремальных состояниях, происходящих в столкновениях тяжёлых ионов или астрофизических условиях [9–22]. Модель НИЛ является неперенормируемой, ввиду локального четырехфермионного взаимодействия, а также в ней отсутствует конфайнмент кварков. Параметр модели, который вводится для регуляризации петлевых интегралов обычно называют параметром «обрезания» Λ , имея ввиду обрезание петлевых импульсов в ультрафиолетовой области. Этот параметр имеет порядок 1 ГэВ и соответствует энергетическому масштабу области, в которой происходит спонтанное нарушение симметрии. При этом для расчётов в зависимости от области применения могут использоваться разнообразные схемы регуляризации: обрезание в трёхмерном или четырёхмерном пространствах, различные варианты регуляризации Паули-Вилларса, метод реального времени, размерная регуляризация. Основным преимуществом модели НИЛ является достаточная простота расчётов и небольшое количество модельных параметров. Существенные недостатки локальной модели НИЛ также связаны с её простотой: ультрафиолетовой расходимостью петлевых интегралов и отсутствием конфайнмента кварков. Эти проблемы могут быть решены в нелокальных моделях. Существует множество моделей такого типа [23–33]. С другой стороны расширения локальной модели НИЛ связаны с попыткой микроскопической интерпретации источника подобного нелокального взаимодействия.

На микроскопическом уровне взаимодействие $2N_f$ кварков появляется в модели вакуума КХД как жидкости инстантонов. Инстантоны играют очень важную роль в физике адронов (см., например, обзоры [34–36]). Инстантон представляет собой хорошо известное решение уравнения движения полей Янга–Миллса в евклидовом пространстве-времени, которое имеет ненулевой топологический заряд [37]. Средний размер инстантона оценивается величиной $\rho \sim 1/3$ фм, в то время как плотность имеет средний порядок 1 фм⁻⁴ [38]. При таких параметрах ансамбля инстантонов воспроизводятся значения для кваркового и глюонного конденсатов, полученные в правилах сумм КХД [39, 40]. Инстантоны индуцируют аномальное хромомангнитное кварк-глюонное взаимодействие, что может приводить к различным спи-

новым эффектам сильных взаимодействий [36]. Сила этого взаимодействия определяется динамической массой кварка в инстантонном вакууме [35, 41] и связана со спонтанным нарушением киральной симметрии, которое является одним из основных источников наблюдаемых масс лёгких и частично странных адронов и приводит к различным аномалиям, наблюдаемым в спин-зависимых сечениях [36, 42–47].

Поэтому представляется актуальным нелокальное обобщение модели НИЛ с нелокальным ядром взаимодействия в форме, мотивированное моделью вакуума КХД как жидкости инстантонов. Взаимодействие можно выбрать в более общей форме по сравнению с инстантонной моделью, дополнив необходимыми каналами взаимодействия (например, векторным и аксиально-векторным). Саму форму нелокальности можно выбрать в более простом виде, обеспечивающем сходимость петлевых интегралов в ультрафиолетовой области. Спонтанное нарушение киральной симметрии приводит к появлению динамической массы кварка, зависящей от импульса. В результате, при нулевой виртуальности кварки имеют массу порядка конституэнтной, а при большой виртуальности переходят в токовые. Похожая ситуация имеет место и для взаимодействия динамических кварков с внешними (частично-) сохраняющимися токами ввиду соотношений Уорда-Такахаши: при нулевой виртуальности существуют дополнительные нелокальные поправки к вершинам, а при большой виртуальности вершина имеет стандартный вид взаимодействия с токовым кварком. В результате нелокального характера взаимодействия и подходящем выборе форм-фактора модель является суперперенормируемой: в ней отсутствуют расходящиеся интегралы для любого количества кварковых петель.

Наиболее близким к нелокальной модели является подход к КХД на основе уравнений Дайсона–Швингера и Бете–Солпитера, см., например, [48–54]. При построении систем этих уравнений на каком-то этапе уравнения обрываются, чтобы было возможным получить решение системы уравнений. Часто используется анзац для произведения эффективного глюонного пропагатора с кварк-глюонной вершиной [55, 56].

Областью практического применения локальных и нелокальных кварко-

вых моделей являются разнообразными процессы в вакууме, в среде при конечной температуре и плотности.

Можно поставить вопрос: в случае каких процессов можно ожидать, что нелокальная модель будет предпочтительней локальной модели? Стандартным способом работы в локальной модели НИЛ является градиентное разложение эффективного лагранжиана. Константы перенормировки мезонных полей определяются на их массовой поверхности. Поэтому процессы, в которых участвуют мезоны вне массовой поверхности, должны рассматриваться в локальной модели с некоторой осторожностью. Частично эту проблему можно решить рассматривая локальную модель НИЛ с зависящими от импульса константами перенормировки мезонных полей [57–59]. При этом не нарушаются соотношения Гольдбергера–Треймана, Гелл-Мана–Окса–Реннера и теорема Вайнберга для пионного рассеяния, связанные со спонтанным и явным нарушением киральной симметрии и составляющие основу модели НИЛ. При малых виртуальностях, такая схема хорошо работает, однако при рассмотрении $1/N_c$ поправок уже требуется интегрирование выражений содержащих пропагаторы мезонов, как связанных состояний кварка и антикварка. При больших импульсах вершинные функции мезонных состояний в локальной модели падают недостаточно быстро, чтобы сделать интегралы конечными и требуется введение дополнительной регуляризации. В результате, становится весьма затруднительно ответить на вопросы, связанные с зависимостью предсказаний модели НИЛ от схем регуляризаций в разных порядках $1/N_c$ разложения. Другим примером является взаимодействие с сохраняющимися токами с заметной виртуальностью, поскольку в локальной модели кварки всегда являются конституэнтными. В нелокальной модели при большой виртуальности кварки переходят токовые, и вершины взаимодействия становятся стандартными точечными. Физическими примерами таких процессов является адронная поляризация вакуума и тензор рассеяния фотона на фотоне.

В первой главе рассматривается формулировка кварковых моделей и изучаются процессы в вакууме.

В §1.1 приводятся детали локальной модели Намбу–Иона-Лазинио и её

нелокального расширения на основе четырехфермионного взаимодействия. Обсуждаются следующие вопросы: переход от кварковых степеней свободы к мезонным с помощью континуального интеграла, разные типы нелокальности, низкоэнергетические теоремы, связанные со спонтанным нарушением киральной симметрии, расширение модели на дополнительные сектора взаимодействий. При введении странных частиц требуется дополнить лагранжиан детерминантом т'Хоофта для решения $U_A(1)$ проблемы. В противном случае спектр масс частиц будет содержать два псевдоскалярных изоскалярных мезона, один из которых будет нестранным и имеет массу пиона, а второй чисто странным. В результате добавления взаимодействия т'Хоофта происходит смешивание состояний, и псевдоскалярный изоскалярный мезон η становится тяжелее изовекторного π , а в секторе скалярных состояний изовекторный a_0 становится тяжелее изоскалярного σ . Обсуждается получение форм-фактора кварка на основе идей «аналитического конфайнмента». Основная идея заключается в том, чтобы задавать не сам нелокальный форм-фактор, а потребовать, чтобы скалярная или векторная часть пропагатора кварка с массой, зависящей от импульса, представляла собой целую функцию. После этого в кварковом пропагаторе отсутствуют полюса. Похожие идеи аналитической структуры кваркового пропагатора использовались в модели конфайнированных кварков [25].

В §1.2 изучается пионное рассеяние в рамках нелокальной киральной кварковой модели. Теоретическое исследование $\pi\pi$ рассеяния имеет давнюю историю. Одна из первых работ, которые, безусловно, способствовали развитию кирально-симметричных моделей были связаны с Вайнбергом [60]. В этой работе методы алгебры токов [61, 62] были успешно использованы для вычисления низкоэнергетических длин $\pi\pi$ -рассеяния. После этого интенсивно разрабатывались модели сильных взаимодействий адронов с использованием лагранжианов с линейной [63] и нелинейной [64–66] реализацией киральной симметрии. В рамках этих исследований были описаны различные низкоэнергетические свойства адронов, например $\pi\pi$ -рассеяние (см., например [67–69]). Киральная теория возмущений была разработана на основе нелинейных лагранжинов. Эта эффективная теория поля описывает низкоэнергетическую структуру различных амплитуд с точки зрения разложения

по степеням энергии, импульсов и токовых масс кварков [70, 71]. Киральная симметрия определяет низкоэнергетическое поведение амплитуды рассеяния $\pi\pi$ в пределах очень малых неопределенностей [72, 73]. Для такой теории считается, что киральная симметрия спонтанно нарушена по определению. В рамках нелокальной модели с линейной реализацией киральной симметрии проводится построение амплитуды рассеяния $\pi\pi$. На основе механизма кирального разложения для пионного рассеяния показывается выполнение формулы Вайнберга. Вычисляются s -, p -, и d - длины рассеяния во всех изотопических каналах, а также параметр наклона в s -волне, которые оказываются в удовлетворительном согласии с известными феноменологическими данными.

В §1.3 рассматривается построение нелокальной киральной кварковой модели типа НИЛ с учётом мезонных флуктуаций в схеме строго $1/N_c$ разложения. Обычно кварковые модели формулируются в приближении среднего поля. При этом спонтанное нарушение киральной симметрии приводит к появлению динамической массы кварка, а из кварков возникают мезонные связанные состояния. Эффекты влияния мезонов на динамические кварки и другие мезоны отсутствуют в таком приближении. Однако существуют физические проблемы, когда формулировка на уровне среднего поля недостаточна. Можно ожидать больших поправок к поведению среднего поля, например, при описании широких резонансов ввиду их сильной связи с промежуточными мезонными состояниями². Другим примером, который будет рассматриваться в следующей главе, является уравнение состояния в адронной фазе, когда кварковые и глюонные степени свободы «заморожены» в конденсатах, а адронные связанные состояния отражают всю динамику и представляют физические степени свободы.

Существуют различные схемы выхода за пределы среднего поля [75–85]. Один из наиболее многообещающих подходов основан на строгом разложении по обратному числу цветов кварков, $1/N_c$, которое является естественным параметром разложения для калибровочных теорий [86]. В схеме строго

² σ -мезон с шириной распада порядка его массы является самым ярким пример такого состояния. См., например, «Scalar Mesons below 2 GeV» в [74].

$1/N_c$ разложения различные наблюдаемые представляются в виде ряда Тейлора по малому параметру $1/N_c$. Локальная модель НИЛ является неперенормируемой, и поэтому требуется введение дополнительной регуляризации мезонных петель. Эта проблема отсутствует в нелокальных версиях модели НИЛ, когда нелокальность взаимодействия приводит к эффективной регуляризации, в результате которой кварковые (много)петлевые диаграммы являются сходящимися.

Параметры нелокальной модели переопределяются с учётом поправок таким образом, чтобы получить физические значения массы пиона и константы слабого распада пиона. Величина $1/N_c$ поправок к кварковому конденсату сравнивается с расчётами в локальной модели Намбу–Иона-Лазинио. Установлено, что даже знак данной поправки может быть разным, что объясняется влиянием регуляризации в локальной модели.

В §1.4 изучается процесс $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ в рамках локальной модели НИЛ. Экспериментальные исследования этого процесса начались в 1966 году³ [88]. Первые экспериментальные результаты привели к большому значению вероятности процесса. Теоретические оценки, полученные в модели векторной доминантности (VDM) [89], нелинейной киральной теории⁴ [90], а позднее в киральной кварковой модели [13, 91, 92], предсказывали заметно меньшую величину.

Настоящий прорыв в исследовании этого процесса произошёл в эксперименте ГАМС в 1981 году в Протвино [93], где большие энергии рождаемых η -мезонов резко подавляли фон. В ходе последующего анализа было получено значение $\Gamma_{\eta \rightarrow \pi \gamma \gamma} = 0.84 \pm 0.18$ эВ. [94]. Позднее в эксперименте VEPP-2М коллаборация СНД подтвердила, что значение 1 эВ является верхним пределом для ширины процесса [87]. В 2005 году были опубликованы результаты, полученные коллаборацией Crystal Ball в BNL AGS; результат $\Gamma_{\eta \rightarrow \pi \gamma \gamma} = 0.45 \pm 0.12$ эВ [95] был заметно меньше результатов коллаборации

³Обзор теоретических и экспериментальных работ можно найти в [87].

⁴Заметим, что аналогичный результат для ширины порядка 10^{-2} эВ, был получен в киральной теории возмущений для вклада пионной петли на уровне $O(p^4)$.

ГАМС. Современное значение, полученное коллаборацией Crystal Ball/TAPS на установке МАМІ [96]: 0.33 ± 0.03 эВ.

С теоретической точки зрения этот процесс был исследован во многих теоретических моделях: модели векторной доминантности [88], нелинейной киральной теории [90], различных кварковых моделях [13, 91, 92, 97, 98], моделях с обменами резонансами [99, 100], киральной теории возмущений (КТВ) [101–105], киральном унитарном подходе [106], киральном лагранжиане с векторными мезонами [107]. В КТВ основной вклад происходит из членов низкоэнергетического разложения порядка $O(p^6)$, поскольку члены древесного приближения порядка $O(p^2)$ и $O(p^4)$ отсутствуют, а однопетлевые вклады порядка $O(p^4)$ очень малы. Контрчлены порядка $O(p^6)$ не определяются из самой теории и должны быть зафиксированы с использованием экспериментальной информации, исходя из предположения о их насыщении мезонными обменами (векторный мезонный обмен даёт доминирующий вклад) или рассчитаны из модели (например НИЛ). В [101] использовалось насыщение мезонами с результатом $\Gamma_{\eta \rightarrow \pi \gamma \gamma} = 0.18$ эВ, что существенно меньше экспериментального значения. При сохранении зависимости от импульса в векторных мезонных пропагаторах получается оценка около 0.31 эВ [101], в соответствии с предсказанием VDM [89]. Принимая во внимание скалярные и тензорные мезонные вклады (знаки вкладов которых не могут быть однозначно определены) и однопетлевой вклад при $O(p^8)$, окончательная оценка равна $\Gamma_{\eta \rightarrow \pi \gamma \gamma} = 0.42 \pm 0.20$ эВ [101], в удовлетворительном согласии с результатом Crystal Ball. В [103] контрчлены $O(p^6)$ вычислялись в рамках модели НИЛ, и был получен похожий результат 0.58 ± 0.3 эВ. Следует отметить, что существуют разные оценки на основе контрчленов, извлечённых из модели НИЛ разными методами, а именно 0.1 эВ [104] и $0.27^{+0.18}_{-0.07}$ эВ [105].

Оценки работы [101] являются сигналом того, что желательно сохранение полной импульсной зависимости. Отметим, что в [13, 92] используется простая модель НИЛ без учёта импульсной зависимости кварковых петель. В кварковых моделях [97, 98] рассматривается полная импульсная зависимость диаграммы типа кварковый бокс, тогда как диаграмма с промежуточным скалярным мезоном $a_0(980)$ отбрасывается. Векторный сектор модели также не был принят во внимание.

В данной работе процесс $\eta \rightarrow \pi\gamma\gamma$ рассматривается в рамках локальной модели НИЛ со скалярно–псевдоскалярным и векторным–аксиально-векторным секторами. Вклад кваркового бокса рассматривается вместе с вкладом диаграмм со скалярными и векторными промежуточными мезонами (как в [13, 92]). Следуя работам [57, 58, 108] учитывается импульсная зависимость кварковых петель и смешивание псевдоскалярных и аксиально-векторных мезонов.

В §1.5 изучаются процессы редких распадов $\rho(\omega) \rightarrow \pi^0(\eta)\pi^0\gamma$. Эти процессы очень интересны для изучения механизма нарушения киральной симметрии сильного взаимодействия адронов.

Редкие распады ρ и ω мезонов на пару пионов и фотон были измерены с хорошей точностью коллаборациями СНД [109] и КМД2 [110] на e^+e^- коллайдере ВЭПП-2М. Ситуация для распадов с η мезоном в конечном состоянии хуже. Существует лишь оценка верхнего предела распада ω -мезона $\mathcal{B}(\omega \rightarrow \eta\pi^0\gamma) < 3.3 \times 10^{-5}$ [110]. Поэтому теоретические предсказания распада векторных мезонов на $\eta\pi^0\gamma$ представляют большой интерес.

Существует множество теоретических работ в которых изучаются эти процессы в разных моделях. В одной из первых работ, посвящённых расчётам этих распадов использовалась модель векторной доминантности [111, 112]. Учитывались только диаграммы с промежуточными векторными мезонами и были получены лишь приблизительные оценки этих процессов. В 1992 году в рамках аналогичной модели эти процессы были оценены более точно и было установлено, что модель векторной доминантности приводит к слишком низким значениям [113]. Позднее [114–117] было обнаружено, что включение диаграмм со скалярным мезонным обменом увеличивает вероятность распада, что приводит к лучшему согласованию с экспериментом. Существуют различные методы учёта эффекта скалярного мезонного обмена. Один из них связан с феноменологическим включением скалярной обменной диаграммы с массой и шириной, фиксированной из эксперимента [115, 116, 118]. Такой способ включения скалярного мезона приводит к нарушению киральной симметрии. Другие методы, учитывающие скалярные эффекты, связаны с динамической генерацией скалярного мезона после унитаризации псевдо-

скалярных мезонных петлевых диаграмм [114] или на основе линейной сигма-модели [117, 119]. Отметим, что в большинстве этих моделей для описания упомянутых выше редких распадов вектора необходимо было использовать дополнительные параметры мезонов.

В диссертационной работе используется локальная $U(3) \times U(3)$ модель НИЛ для описания распадов ρ , ω мезонов в пару нейтральных псевдоскалярных мезонов и фотон. Преимущество модели заключается в том, что для описания этих процессов не требуется вводить дополнительный параметр. Учитываются три типа диаграмм: кварковая петля и полюсные диаграммы с промежуточными скалярными (σ , $a_0(980)$) и векторными (ρ , ω) мезонами. Полученные результаты для процессов распада $\rho(\omega) \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, а предсказания для $\rho(\omega) \rightarrow \eta\pi^0\gamma$ не противоречат существующим экспериментам.

В § 1.6 рассматривается непертурбативный вклад в электромагнитный форм-фактор Паули кварка, на основе диаграмм с эффективной кварк-глюонной вершиной, индуцированной инстантонами. Следует отметить, что аномальное хромомангнитное кварк-глюонное взаимодействие является одной из основ инстантонной теории спиновых эффектов в сильных взаимодействиях [120]. Сила этого взаимодействия определяется динамической массой кварка в инстантонном вакууме [35, 41], которая напрямую связана со спонтанным нарушением киральной симметрии. Первая попытка оценить влияние инстантонов на этот форм-фактор была сделана в [121], где использовалась так называемая инстантонная теория возмущений, разработанная в работах [122–124] для получения эффекта инстантонов малого размера в глубоко неупругом рассеянии при больших передачах импульса $Q^2 = -q^2$. Однако конечный результат для их вклада в глубоко неупругом рассеянии при больших Q^2 оказался очень маленьким. Похожий вывод был получен в работе [121]. В диссертации используется другой способ расчёта вклада инстантонов в форм-фактор Паули. Этот подход основан на эффективной кварк-глюонной вершине, индуцированной инстантонами. В результате оказывается возможным получить форм-фактор в широком интервале Q^2 , включая даже случай реального фотона, $Q^2 = 0$.

Во второй главе рассматриваются процессы в среде при конечной температуре и плотности.

В §2.1 обсуждается эффективная низкоэнергетическая модель, способная описывать фазовые переходы восстановления киральной симметрии и деконфайнмента. В качестве основы используется модель Намбу–Иона-Лазинио с петлей Полякова (НИЛП) [125–131], которая обобщает известную модель НИЛ [5, 6] для киральной кварковой динамики. В этой модели существует связь кварков с цветным фоновым полем, записываемым в виде петли Полякова, которая служит параметром порядка перехода деконфайнмента. В значительной степени это устраняет одну из наиболее неприятных особенностей исходной модели НИЛ, а именно существование в адронной фазе свободных (неконфаймированных) кварков, которые дают вклад в давление. Несмотря на простоту модели [125], было получено хорошее согласие с результатами термодинамических расчетов в рамках КХД решетки [132, 133].

Следует отметить, что это сравнение не было полностью согласованным: нефизически большие значения токовых масс кварков были использованы в решёточных расчётах [132, 133], а в модели НИЛП использовались физические значения [125]. Более того, после успешного подавления большей части нефизических кварковых степеней свободы в конфаймированной фазе модель НИЛП, рассматриваемая в приближении среднего поля, не содержит никаких степеней свободы в этой фазе. Очевидно, что результатом этого было довольно плохое описание адронной фазы при конечной температуре, где мезоны должны играть главную роль. Следовательно, хорошее согласие результатов НИЛП с данными решёточных вычислений может быть частично случайным, так как в анализе НИЛП пренебрегают мезонными корреляциями, в то время как в расчётах на решётке они подавляются большими токовыми массами кварков. Таким образом, чтобы получить согласованную картину, важно выйти за рамки приближения среднего поля и включить мезонные корреляции. Рассмотрена модель НИЛП с $1/N_c$ поправками, необходимыми для учета адронных вкладов вблизи и ниже фазового перехода восстановления киральной симметрии и деконфайнмента. Более того, существование связанных состояний выше T_c может иметь решающее значение для понимания свойств сильно связанной кварк-глюонной плазмы [134]. Таким образом,

последовательный учёт вкладов адронного газа должно включать диссоциацию адронов, являющихся связанными состояниями кварков и антикварков ниже перехода в резонансные корреляции континуума после фазового перехода. Рассмотрен случай конечной температуры и нулевого химического потенциала.

В §2.2 нелокальная модель типа Намбу–Иона-Лазинио с учетом $1/N_c$ поправок, полученная в §1.3 систематически расширяется на случай конечных температур с добавлением связи с петлей Полякова. Изучается роль поправок при разных температурах.

В §2.3 исследуется роль аномальных мод мезонов в рамках локальной модели НИЛ с петлей Полякова при конечной температуре и химическом потенциале. Модель НИЛ способна описать фазовый переход восстановления киральной симметрии в горячей и плотной среде, когда динамически генерируемые (конституэнтные) массы кварков уменьшаются в зависимости от температуры и химических потенциалов, тем самым восстанавливая вырождение по массе состояний киральных партнёров. В то же время пороги континуума для каналов кварк-антикваркового рассеяния уменьшаются, что приводит к снижению энергии связи для связанных состояний псевдоскалярных мезонов и, наконец, к их диссоциации при входе в континуум и изменению их характера на резонансы с конечным временем жизни (эффект Мотта). Основываясь на релятивистском подходе Бет–Уленбека (БУ) к диссоциации пионов в кварковой материи в моделях НИЛ [135–138] и НИЛП [139–143], получено единообразное описание мезонных состояний с помощью функции фазового сдвига для каждого мезонного канала $\delta_i(s)$, которая зависит от квадрата энергии центра масс s в системе кварк-антикварк и термодинамических параметров среды температуры T и химических потенциалов $\mu_u = \mu_d = \mu$ и μ_s для легких и странных кварков. Поведение фазового сдвига на пороге может быть использовано в качестве индикатора для перехода Мотта, т.е. для перехода связанного состояния в континуум состояний рассеяния. Фазовый сдвиг обращается в ноль на бесконечности, в то время как на пороге континуума он имеет значение π , пока связанное состояние существует и находится ниже порога континуума. Когда связанное состояние сливается с континуумом состояний рассеяния, фазовый сдвиг принимает

нулевое значение в соответствии с теоремой Левинсона. В результате в рамках настоящего подхода уравнение состояния и термодинамические свойства системы согласуются с поведением адронного газа пионов и каонов при малых температурах, а при высоких температурах с кварк-глюонной плазмой. При конечной температуре и плотности возможно возникновение аномальных мод мезонов, в случае если имеется различие в химических потенциалах кварка и антикварка, составляющих мезон.

В §2.4 рассматриваются процессы которые могут иметь место в только в случае, когда средой индуцируется нарушение лоренц-инвариантности. Примером таких процессов является смешивание скалярных и векторных мезонов, таких как σ - ω , ρ - a_0 и ϕ - $f_0(980)$. Роль перехода σ - γ в усилении рождения e^+e^- из-за запрещенного в вакууме распада $\sigma \rightarrow e^+e^-$ вблизи порога двух пионов обсуждалась в [144]. Эффекты смешивания σ - ω и ρ - a_0 изучались в [145], где показано, что дополнительные пики появляются в спектре дилептонов в достаточно плотной барионной материи. С другой стороны, скалярно-векторное смешивание может вызвать двухфотонный распад векторных мезонов, когда векторный мезон сначала переходит в нейтральный скалярный мезон, который затем распадается на два фотона. В случае смешивания ρ - a_0 может произойти дополнительное резонансное усиление из-за вырождения масс ρ и a_0 мезонов.

Как правило, аннигиляция двух пионов рассматривается в качестве основного механизма двухфотонного и дилептонного рождения (см., например, [146]), в то время как прямые распады мезонов менее интересны. За счёт модификации скалярных и векторных мезонов в горячей и плотной среде спектр образующихся частиц как при аннигиляции, так и при прямых распадах может измениться. Так за счёт модификации σ возможно усиление рождения фотонных пар в процессе $\pi\pi \rightarrow \gamma\gamma$ [147]. Особенностью пионной аннигиляции через σ является то, что ее усиление ожидается в очень узкой области фазовой диаграммы. В экспериментах с тяжёлыми ионами полученные спектры частиц должны быть усреднены по всем состояниям вещества во время столкновения и условия, необходимые для усиления, существуют очень короткое время. Наоборот, увеличение рождения двух фотонов или дилептонов от смешивания σ - ω , ρ - a_0 и ϕ - f_0 сохраняется в более широком

диапазоне температуры и барионной плотности, что повышает вероятность их наблюдения.

Третья глава посвящена вычислению адронного вклада в аномальный магнитный момент мюона.

Аномальный магнитный момент (АММ) заряженных лептонов ($l = e, \mu, \tau$) равен

$$a_l = \frac{g_l - 2}{2}, \quad (1)$$

где g_l является гиромагнитным отношением магнитного момента лептона к его спину в единицах магнетона Бора. Для свободного точечного фермиона в соответствии с уравнением Дирака $g_l = 2$. Отклонение от двойки появляются при учёте взаимодействий, ведущих к появлению субструктуры у фермионов и таким образом, к ненулевому a_l .

В течение первых лет исследований лептонных аномальных магнитных моментов основной задачей была проверка квантовой теории поля и в частности квантовой электродинамики (КЭД). В настоящее время измерения лептонных аномальных магнитных моментов являются один из основных низкоэнергетических тестов стандартной модели (СМ) и играют важную роль в поиске ещё неизвестных взаимодействий, то что коротко называют «Новой физикой».

Ненулевое значение лептонного аномального магнитного момента индуцируется радиационными поправками за счёт взаимодействия спина лептона с виртуальными полями. В Стандартной Модели эти вклады порождаются электромагнитными, слабыми и сильными взаимодействиями⁵

$$a^{\text{SM}} = a^{\text{QED}} + a^{\text{weak}} + a^{\text{hadr}}. \quad (2)$$

Аномальные магнитные моменты электрона и мюона являются одними из наиболее точно измеренных величин в физике элементарных частиц.

В 2008 году были проведены уникальные измерения в Гарварде с использованием одноэлектронного квантового циклотрона, где был получен элек-

⁵Подробный обзор можно найти в работах [148–151].

тронный аномальный магнитный момент с беспрецедентной точностью [152]

$$a_e^{\text{Harvard}} = 1\,159\,652\,180.73 (0.28) \times 10^{-12} \quad [0.24 \text{ ppb}], \quad (3)$$

что приводит к следующему определению константы тонкой структуры α [153, 154]

$$\alpha^{-1} = 137.035\,999\,1727 (341) \quad [0.25 \text{ ppb}]. \quad (4)$$

Последнее стало возможным после вычисления полного вклада КЭД в электронный аномальный магнитный момент с точностью до десятого порядка по константе связи численно [153] (последние исправления см. в [155]). Заметим, что в ошибке (4) доминирует неопределенность в измерении a_e^{Harvard} .

Значение в (4) имеет самую высокую точность среди измерений значения α полученных в настоящее время [156]. Новое измерение [157] отношения h/m_{Rb} между постоянной Планка и массой атома ^{87}Rb , изучаемое по отдачи атома приводит к значению константы тонкой структуры [158] $\alpha^{-1}(\text{Rb}) = 137.035\,999\,049 (90) \quad [0.66 \text{ ppb}]$. Используя это значение постоянной тонкой структуры α , можно получить для электронного аномального магнитного момента

$$a_e^{\text{SM}}(\text{Rb}) = 1\,159\,652\,181.78 (0.77) \times 10^{-12} \quad [0.66 \text{ ppb}], \quad (5)$$

что находится в согласии с измерениями (3).

В 2006 году были опубликованы результаты измерения аномального магнитного момента мюона коллаборацией E821 в Брукхейвенской Национальной Лаборатории [159]

$$a_\mu^{\text{BNL}} = 116\,592\,08.0 (6.3) \times 10^{-10} \quad [0.54 \text{ ppm}]. \quad (6)$$

Позднее это значение было скорректировано [158] за счёт сдвига в соотношении магнитных моментов мюона и протона

$$a_\mu^{\text{BNL,corr}} = 116\,592\,09.1 (6.3) \times 10^{-10}. \quad (7)$$

В настоящее время идёт активная работа по повышению точности измерений в новом эксперименте в Лаборатории Ферми (США) [160] и ускорительном комплексе J-PARC(Япония) [161].

В Стандартной Модели лидирующий вклад в АММ мюона вносит КЭД. Полный результат для численных оценок вклада КЭД 10 порядка: ⁶ [163]

$$a_\mu^{\text{QED}} = 11\,658\,471.8951 (0.0080) \times 10^{-10}. \quad (8)$$

Точность этих расчётов достаточна для любых экспериментов в ближайшем будущем.

Вклад слабых взаимодействий подавлен фактором $\alpha/\pi \cdot m_\mu^2/M_w^2 \sim 10^{-9}$, где M_w – масса тяжёлых W^\pm , Z и H бозонов. Вычисления этих вкладов на уровне одно- и двух-петлевых вычислений известны с достаточной точностью [164, 165]

$$a_\mu^{\text{weak}} = 15.36 (0.10) \times 10^{-10}, \quad (9)$$

где теоретическая ошибка связана с адронным вкладом в двухпетлевых диаграммах и неизвестным трех-петлевым вкладом. Новые оценки значительно увеличили теоретическую точность с использованием результата для массы бозона Хиггса, измеренной на LHC в коллаборациях ATLAS [166] и CMS [167].

Сильное взаимодействие даёт относительно небольшие вклады в a_μ , однако они известны с точностью, сравнимой с экспериментальной ошибкой в (6). Вклад лидирующего порядка по постоянной тонкой структуры от адронной поляризации вакуума может быть извлечён на основе требований унитарности и причинности (оптическая теорема) [168]

$$a_\mu^{\text{HVP}} = \frac{\alpha}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{dt}{t} K(t) \rho_V^{(\text{H})}(t), \quad (10)$$

как свёртка адронной спектральной функции

$$\rho_V^{(\text{H})}(t) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \Pi^{(\text{H})}(t) \quad (11)$$

с известным кинематическим фактором КЭД

$$K(t) = \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)t/m_\mu^2}. \quad (12)$$

⁶Можно отметить, что есть оценки этого вклада на основе подхода ренормгруппы [162].

Кинематический фактор КЭД быстро убывает при малых t и интеграл, определяющий a_μ^{HVP} , чувствителен к деталям спектральной функции $\rho_V^{(\text{H})}(t)$ при малых t . В настоящее время нет теоретических инструментов, которые позволяют вычислить спектральную функцию при малых t с требуемой точностью. К счастью, адронная спектральная функция $\rho_V^{(\text{H})}(t)$ связана с полным сечением $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow$ в адроны

$$\sigma^{e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}}(t) = \frac{4\pi\alpha}{t} \rho_V^{(\text{H})}(t). \quad (13)$$

Оценка адронной поляризации вакуума на основе экспериментальных данных оказывается наиболее точным способом определения данного вклада. Результаты недавних оценок разных групп:

$$a_\mu^{\text{HVP}, e^+e^-} = \begin{cases} 693.1 (3.4) \times 10^{-10}, & [169] \\ 693.26 (2.46) \times 10^{-10}. & [170] \end{cases} \quad (14)$$

Существуют также оценки поправок более высокого порядка по постоянной тонкой структуры к адронной поляризации вакуума

$$a_\mu^{\text{HVP}, \text{NLO}} = -9.82(0.04) \times 10^{-10} \quad [170], \quad (15)$$

$$a_\mu^{\text{HVP}, \text{NNLO}} = 1.24(0.01) \times 10^{-10} \quad [171]. \quad (16)$$

Другим способом определения спектральной функции являются адронные распады τ -лептона, измеренные коллаборациями ALEPH [172–174], OPAL [175], CLEO [176], Belle [177]. Однако для получения оценки вклада в аномальный магнитный момент на основе адронных распадов τ требуется корректный учёт эффектов нарушения изоспиновой симметрии смешивания, в частности, привлечение модели $\rho - \gamma$ перехода [178], что может вносить дополнительную неопределённость.

Как ожидается, новые экспериментальные прецизионные измерения КМДЗ и СНД на ускорителе ВЭПП-2000 в Новосибирске, BES III в Пекине и KLOE-2 на ускорителе DAΦNE в Фраскати позволят заметно увеличить точность предсказаний вклада адронной поляризации вакуума.

Важным вкладом сильных взаимодействий подавленным на постоянную тонкую структуру по сравнению с адронной поляризацией вакуума является вклад от процесса рассеяния света на свете через непertурбативный вакуум КХД. Если взять его оценку из работы [179], так называемый «Glasgow

consensus»

$$a_{\mu}^{\text{HLbL}} = 10.5(2.6) \cdot 10^{-10}, \quad (17)$$

то в результате общий вклад Стандартной Модели можно оценить как

$$a_{\mu}^{\text{SM}} = 116\,591\,82.4(0.1)_{\text{EW}}(2.46)_{\text{HVP}}(2.6)_{\text{HVP,NLO}}(0.04)_{\text{HLbL}}. \quad (18)$$

Для наглядности в скобках указаны ошибки теоретических оценок электро-слабых взаимодействий (EW), адронной поляризации вакуума (HVP) и поправки к ней (HVP,NLO), а также от процесса рассеяния света на свете (HLbL).

Разница между экспериментальным измерением (7) и вкладом Стандартной Модели

$$a_{\mu}^{\text{BNL,corr}} - a_{\mu}^{\text{SM}} = 26.7 (7.2) \times 10^{-10}, \quad (19)$$

что говорит о расхождении между теорией и экспериментом на уровне 3.7σ , что может свидетельствовать о существовании новых взаимодействий. В теоретической ошибке доминирует вклад сильных взаимодействий, а ошибка вклада от процесса рассеяния света на свете, несмотря на подавление дополнительной степенью α , соизмерима с ошибкой от адронной поляризации вакуума.

В общем случае амплитуда рассеяния света на свете является крайне сложным непертурбативным объектом для вычислений. Она представляет собой сумму различных диаграмм, включая петли с динамическими кварками, мезонные обмены, мезонные петли и их всевозможные итерации. Удачно, что уже в первых работах, посвящённых вычислению этого вклада [180–182] была обнаружена иерархия всех этих вкладов ввиду существования двух малых параметров: обратное число цветов кварков $1/N_c$ и отношение характерного внутреннего импульса к параметру киральной симметрии $m_{\mu}/(4\pi f_{\pi}) \sim 0.1$. Первый из них подавляет многопетлевые вклады, и основной вклад даётся суммой кварковой петлевой диаграммы и двухпетлевой диаграммы с мезоном в промежуточном состоянии.

Существуют предварительные оценки вклада от процесса рассеяния света на свете в рамках КХД на решётке [183, 184], но как утверждают авторы этих работ возможны большие систематические погрешности за счёт эффектов

конечного размера и шага решётки.

В отсутствие результатов расчётов, исходя из первых принципов КХД были предложены различные подходы к расчёту вкладов от процесса рассеяния света на свете в a_μ^{HLbL} . Эти подходы можно разбить на несколько типов. Первый состоит из различных расширений модели векторной доминантности (VMD), дополненной идеями киральной теории со скрытой локальной симметрией (HLS) [181], модели с набором векторных мезонов и дополнительными условиями на поведение форм-факторов (LMD) [185–187] и киральная теория возмущений, дополненная резонансами ((R)χpT) [188–190]. Подходы второго типа основаны на рассмотрении эффективных моделей КХД, в которых динамические кварки используются в качестве эффективных степеней свободы. Сюда можно отнести различные версии (расширенной) модели Намбу–Иона-Лазинио [182], кварковых моделей с конституэнтными кварками и локальным взаимодействием [191–195], модели, основанные на непертурбативной кварк-глюонной динамике, такие как рассмотренная в диссертации нелокальная киральная кварковая модель [196–202], модель на основе уравнений Дайсона-Швингера в КХД [203] или голографические АдС/КХД модели [204, 205]. В последнее время большой прогресс достигнут в оценках a_μ^{HLbL} в рамках дисперсионного подхода на основе требований унитарности и аналитичности [206–209], когда амплитуда рассеяния света на свете насыщается пионными петлями.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Существенно развита нелокальная киральная модель. Дано ее калибровочно-инвариантное обобщение на случай взаимодействия спинорных и скалярных частиц с произвольным числом фотонов. На основе кирального разложения показано выполнение низкоэнергетических теорем: соотношений Голбердера-Треймана, Гелл-Мана-Окса-Реннера и формулы Вайнберга.
2. Предложенная модель систематически расширена за рамки приближения среднего поля на основе схемы строгого $1/N_c$ разложения. Показано, что в таком расширении пион остаётся голдстоуновской частицей. Переопределены параметры модели с учётом $1/N_c$ поправок и показано их малое влияние на кварковый конденсат и свойства пиона. Впервые выполнено обобщение нелокальной модели с учётом $1/N_c$ поправок на случай конечных температур. Показана согласованность результата с вычислениями в КХД на решетке в области фазового перехода и выше, а также с киральной теорией возмущений в области малых температур.
3. В рамках нелокальной киральной кварковой модели исследованы адронные вклады в аномальный магнитный момент мюона от адронной поляризации вакуума и процесса рассеяния света на свете. В процессе рассеяния света на свете учтён полный набор диаграмм: от петли кварков и обменов псевдоскалярными и скалярными мезонами. Показано, что петля с динамическими кварками даёт наибольший вклад в процесс рассеяния света на свете, а в диаграммах с обменом мезоном оказывается важным учёт зависимости переходных форм-факторов от виртуальности мезона (эффектов немассовости частиц). Нелокальная модель предсказывает более высокое значение для вклада от процесса рассеяния света на свете, чем используемое в большинстве оценок. Несмотря на это, полный вклад Стандартной Модели существенно расходится с экспериментальными измерениями.
4. Для рассеяния пионов в нелокальной модели вычислены s-, p-, и d- длины рассеяния во всех изотопических каналах, а также параметр наклона

в s-волне. В рамках локальной модели Намбу–Иона-Лазинио исследованы процессы редких распадов $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ и $\rho(\omega) \rightarrow \pi^0(\eta) \pi^0 \gamma$. Учтены вклады от петли кварков и диаграмм с обменом промежуточными скалярными и векторными мезонами.

5. В непертурбативной модели с эффективной кварк-глюонной вершиной, индуцированной инстантонами, вычислен электромагнитный форм-фактор кварка. Показано, что аномальное кварк-глюонное хромагнитное взаимодействие, индуцированное инстантонами, приводит к большому магнитному моменту для u- и d-кварков.
6. В среде при конечной температуре и плотности в локальной модели изучены двухфотонные распады векторных мезонов и дилептонные распады скалярных мезонов, индуцированные нарушением лоренц-инвариантности. Показан возможный механизм возникновения пика в отношении выходов K/π в результате появления аномальных мод каонов в случае, когда химические потенциалы странного и нестранного кварка различны.

Содержание работы.

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения, приложения, списка литературы и содержит 238 страниц и 77 рисунков. Список литературы включает 346 наименований.

В первой главе рассматривается формулировка кварковых моделей и изучаются процессы в вакууме. Приводится лагранжиан киральных кварковых моделей для групп симметрий $SU(2) \times SU(2)$ и $SU(3) \times SU(3)$, обсуждается введение внешних сохраняющихся полей, низкоэнергетические теоремы, выбор нелокальности на основе идей конфайнмента кварков, пионное рассеяние и учёт мезонных поправок в схеме строгого $1/N_c$ разложения. В рамках локальной модели НИЛ рассмотрены процессы редких распадов $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ и $\rho(\omega) \rightarrow \pi^0(\eta) \pi^0 \gamma$.

Во второй главе рассматриваются процессы в среде при конечных температуре и/или плотности. В рамках локальной модели НИЛ изучены двухфотонные распады векторных мезонов и дилептонные распады скалярных ме-

зонов, индуцированные нарушением лоренц-инвариантности. На основе формализма Бет–Уленбека исследованы аномальные моды каонов, появляющиеся в случае, когда химические потенциалы странного и нестранного кварков различны. Обсуждается их возможное отношение к эффекту пика в отношении выходов K/π . Исследована роль мезонных флуктуаций при фазовых переходах восстановления киральной симметрии и деконфайнмента в рамках нелокальной модели НИЛ с петлей Полякова.

Третья глава посвящена вычислению адронного вклада в аномальный магнитный момент мюона. В рамках нелокальной модели оценены вклады лидирующего порядка по постоянной тонкой структуры от адронной поляризации вакуума и следующего за лидирующим вкладом от процесса рассеяния света на свете. Показано, что в процессе рассеяния света на свете большой вклад даёт петля с динамическими кварками. Проведены оценки ошибки с использованием разных параметризаций модели.

В Заключение кратко перечислены основные направления развития исследований представленных в диссертационной работе.

В Приложении приведены: правила Фейнмана для нелокальных вершин взаимодействия, метод Кролла получения эффективных вершин взаимодействия в нелокальной модели, выражения для четырех-кварковых констант связи, полученные при бозонизации лагранжиана с взаимодействием 'т Хоофта, $1/N_c$ поправки к пропагатору пиона и константе слабого распада, амплитуда перехода мезона в два фотона и локальный предел амплитуды $\gamma^*\gamma^* \rightarrow S^*$.

Результаты, изложенные в настоящей диссертации, опубликованы в работах [21, 29, 56, 59, 201, 202, 210–225].

Я благодарен всем моим соавторам, а также коллегам по ОИЯИ, ИДСТУ СО РАН и кафедры теоретической физики ИГУ за ценные указания, острую критику и жаркие дискуссии по исследованиям по теме диссертации. Особо хотел бы отметить роль моих учителей А.Е. Калошина, М.К. Волкова и А.Е. Дорохова, которые помогли определиться в тематике и вдохновили на проведение исследований.

Глава 1

Нелокальная кварковая модель и процессы в вакууме

В данной главе рассматривается построение нелокальной киральной кварковой модели в вакууме и её приложения к физике частиц. Последовательно излагаются вопросы построения нелокальной модели. На основе киральной группы $SU(2) \times SU(2)$ показывается получение эффективного лагранжиана с помощью тождественных преобразований в производящем функционале функций Грина с помощью введения вспомогательных мезонных полей, которые затем отождествляются с физически наблюдаемыми мезонами. Спонтанное нарушение киральной симметрии приводит к появлению массы кварка. Далее обсуждается получение пропагаторов мезонов и калибровочно-инвариантное введение внешних полей, которое ввиду нелокальности неизбежно приводит к нелокальным вершинам взаимодействия кварков с внешними полями. Приводится получение крайне важных для физики пионов низкоэнергетических соотношений: соотношений Гольдбергера–Треймана, Гелл-Манна–Окса–Реннера и формулы Вайнберга для пионного рассеяния. Обсуждается расширение модели на случай группы $U(3) \times U(3)$, векторный–аксиально-векторный сектора взаимодействия, а также возможность реализации в модели так называемого «аналитического конфаймента», когда кварковый пропагатор не имеет полюсных особенностей. Особое внимание уделяется расширению модели за пределы приближения среднего поля с учётом мезонных поправок. Это проделано на основе $1/N_c$ разложения – при этом получены поправки к массовой функции и константе перенормировки кварка, поправки к пропагатору пиона и константе его слабого распада. Проведено

переопределение параметров модели с учётом поправок. В локальной модели НИЛ изучены процессы редких распадов $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ и $\rho(\omega) \rightarrow \pi^0(\eta) \pi^0 \gamma$. На основе эффективной инстантонной вершины получен электромагнитный форм-фактор кварка.

Изложение основывается на работах [21, 29, 59, 210, 212–214, 216, 217, 219, 220, 225].

1.1 Построение модели в вакууме

$SU(2) \times SU(2)$ модель в псевдоскалярном–скалярном секторе

Рассмотрим формулировку $SU(2) \times SU(2)$ нелокальной модели с скалярным–псевдоскалярными четырехфермионным взаимодействием. Основой модели является $SU(2) \times SU(2)$ действие

$$\mathcal{S}(\bar{q}, q) = \int d^4x \left\{ \bar{q}(x)(i\hat{\partial}_x - m_c)q(x) + \frac{G_1}{2} (J_\pi^a(x)J_\pi^a(x) + J_\sigma(x)J_\sigma(x)) \right\}, \quad (1.1)$$

где $\bar{q}(x) = (\bar{u}(x), \bar{d}(x))$ есть поля u и d кварков, m_c – диагональная матрица токовых кварковых масс, G_1 – константа связи скалярных и псевдоскалярных кварковых токов. В оригинальной версии модели Намбу–Иона-Лазинио фермионные токи (изначально барионные) были локальными [5, 6]

$$J_I(x) = \bar{q}(x) \Gamma_I q(x), \quad (1.2)$$

и спин-флейворные матрицы Γ_I определяются следующим выражением

$$\Gamma_\sigma = \mathbf{1}, \quad \Gamma_\pi^a = i\gamma^5 \tau^a, \quad (1.3)$$

где τ^a матрицы Паули и γ^μ, γ^5 матрицы Дирака. В отсутствие массового члена m_c действие (1.1) симметрично относительно киральных преобразований вида $q \rightarrow \exp(-i\tau \cdot \theta \gamma_5/2)q$.

Хорошо известно модель с локальным четырехфермионным взаимодействием является неперенормируемой. В нелокальной версии модели кварко-

вые токи $J_I(x)$ являются могут быть записаны в виде

$$J_I(x) = \int d^4x_1 d^4x_2 f(x_1) f(x_2) \bar{q}(x - x_1) \Gamma_I q(x + x_2), \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} J_I(x) &= \int d^4x_1 d^4x_2 \delta\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) f((x_1 - x_2)^2) \bar{q}(x_1) \Gamma_I q(x_2) = \\ &= \int d^4x_1 f(x_1^2) \bar{q}(x + x_1/2) \Gamma_I q(x - x_1/2), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $f(x)$ есть нелокальные форм-факторы. Структура нелокальности типа может (1.4) быть мотивирована инстантонными взаимодействиями, поскольку оно индуцирует нелокальное сепарабельное взаимодействие $2N_f$ кварков. При этом нелокальные форм-факторы, характеризующие такое взаимодействие зависят от виртуальности кварков. В тоже время структура нелокальных токов вида (1.5) может быть мотивирована глюонными обмeнами [24, 31–33]. В основном в диссертации будет использоваться «инстантонная» структура нелокальности.

Наиболее удобный способ перехода от четырехкваркового действия к действию, описывающему физические поля мезонов, состоит в использовании производящего функционала. При этом явным образом выделяются коллективные переменные соответствующие мезонным полям. Производящий функционал функций Грина имеет вид:

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \exp\left(i\mathcal{S}(\bar{q}, q) + i \int d^4x [\eta \bar{q} + \bar{\eta} q]\right), \quad (1.6)$$

где η и $\bar{\eta}$ внешние источники.

Идея дальнейших преобразований состоит в изменении полей в лагранжиане таким образом, чтобы после введения коллективных (мезонных) полей четырехкварковый лагранжиан стал билинейным по кварковым полям. Для введения вспомогательных полей Φ , которые отождествится с физическими мезонными полями, используется тождество (или преобразование Хаббарда-Стратоновича), основанное на том, что функциональный интеграл от гауссовых функций может быть взят аналитически:

$$\int \mathcal{D}\Phi \exp\left(i \int d^4x (\pm A\Phi - B\Phi^2)\right) = \frac{1}{N'} \exp\left(i \int d^4x \frac{A^2}{4B}\right), \quad (1.7)$$

где N' нормировочная константа (бесконечная).

С помощью данного тождества производящий функционал (1.6) можно переписать в виде

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = \frac{1}{N''} \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \prod_{\Phi_I=\sigma,\pi} \mathcal{D}\Phi_I \exp \left(i\mathcal{S}(q, \bar{q}, \sigma, \pi) + i \int d^4x [\eta\bar{q} + \bar{\eta}q] \right), \quad (1.8)$$

где бозонизованное действие имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(q, \bar{q}, \sigma, \pi, \rho, a_1) = & \int d^4x \left\{ \bar{q}(x)(i\hat{\partial}_x - m_c)q(x) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2G_1} (\pi^a(x)^2 + \tilde{\sigma}(x)^2) + \sum_{\Phi_I=\tilde{\sigma},\pi} \Phi_I(x)J_I(x) \right\}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\tilde{\sigma}, \pi$ есть поля σ -, π - мезонов, соответственно. Поле $\tilde{\sigma}$ имеет ненулевое вакуумное среднее $\langle \tilde{\sigma} \rangle_0 = \sigma_0 \neq 0$. Для того чтобы получить физическое скалярное поле с нулевым вакуумным средним, необходимо произвести сдвиг скалярного поля $\tilde{\sigma} = \sigma + \sigma_0$. Варьируя действие по σ

$$\left\langle \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \right\rangle_0 = 0 \quad (1.10)$$

можно получить уравнение на динамическую массу кварка, уравнение "щели" которое в импульсном пространстве для «инстантонных» токов (1.2) имеет вид¹

$$m(p^2) = m_c + G_1 f^2(p^2) S, \quad S = iN_f N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f^2(k^2) \text{Tr} [S(k)] \quad (1.11)$$

где N_f и N_c - число кварковых ароматов и цветов, соответственно. Для простоты Фурье-образ форм фактора $f(p^2)$ обозначается той же буквой, только теперь он имеет зависимость от импульса p^2 . Это уравнение имеет формальное решение

$$m(p^2) = m_c + m_{\text{dyn}}(p^2) = m_c - \sigma_0 f^2(p^2) = m_c + (m_q - m_c) f^2(p^2), \quad (1.12)$$

где m_q есть размерный параметр играющий роль составляющей массы кварка. Нетривиальное решение уравнения щели (1.11) означает спонтанное нарушение киральной симметрии. В результате вместо токовой кварковой массы

¹Для токов вида (1.5) следует заменить $f^2 \rightarrow f$ в уравнении щели.

m_c возникает нелокальная кварковая масса $m(p^2)$, а кварковый пропагатор $S(p)$ в лидирующем порядке $1/N_c$ разложения принимает вид

$$S(p) = (\hat{p} - m(p))^{-1}. \quad (1.13)$$

Киральный конденсат для одного флейвора в лидирующем порядке $1/N_c$ разложения

$$\langle \bar{q}q \rangle^{\text{MF}} = -i \frac{N_f N_c}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [S^{np}(k)], \quad (1.14)$$

получается из непертурбативной части пропагатора кварка, $S^{np}(p) = S(p) - S^c(p)$, т. е. после вычитания пертурбативной части $S^c(p) = (\hat{p} - m_c)^{-1}$.

Легко видеть, что поведение массовой функции кварка почти полностью определяется форм-фактором $f(p^2)$. Если для простоты предположить, что форм фактор имеет вид Гауссовой экспоненты, убывающей в Евклидовом пространстве $\exp(-p^2/\Lambda^2)$, то параметр Λ будет соответствовать эффективной области нелокального взаимодействия. При возрастании Λ все большая область импульсов будет участвовать во взаимодействии и предел $\Lambda \rightarrow \infty$ будет соответствовать локальной модели НИЛ [13, 14, 16, 18]. Напомним, что в локальной модели НИЛ уравнение щели обычно записывается в виде²

$$m = m_c + 8mGI_1(m), \quad (1.15)$$

где $I_1(m)$ – квадратично расходящийся интеграл. Для того чтобы сделать его конечным, проводят дополнительную регуляризацию с характерным параметром «обрезания» Λ . В локальной модели НИЛ используются различные варианты регуляризации Паули–Вилларса, обрезания импульсов в трех- и четырех- мерном пространстве, метод реального времени. Поэтому для однозначного задания локальной модели следует дополнить Лагранжиан методом работы с расходящимися интегралами.

Отметим, что в лидирующем порядке $1/N_c$ разложения отсутствует перенормировка кваркового пропагатора. Для появления нетривиальной перенормировки кваркового пропагатора в лидирующем порядке следует допол-

²Легко видеть из уравнений (1.11) и (1.15), что при переходе к локальной модели имеет место следующее правило $S \rightarrow 8mI_1(m)$.

нительно рассмотреть токи с производной, например [226] вида

$$j_P(x) = \int d^4z f(z) \bar{\psi} \left(x + \frac{z}{2} \right) \frac{i \overleftrightarrow{\partial}}{2\mathcal{K}_p} \psi \left(x - \frac{z}{2} \right). \quad (1.16)$$

Мезоны

Для получения мезонных состояний необходимо рассмотреть T-матрицу кварк-антикваркового рассеяния с учётом четырехфермионного взаимодействия. Массы и вершинные мезонов функции как связанные состояния кварк-антикварка могут быть найдены из уравнения Бете–Солпитера. Ввиду сепарабельного характера взаимодействия выражение для матрицы рассеяния имеет следующий вид в мезонном канале a

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \hat{\mathbf{T}}(p^2) \delta^4(p_1 + p_2 - (p_3 + p_4)) \prod_{i=1}^4 f(p_i^2), \\ \hat{\mathbf{T}}_a(p^2) &= \bar{V}_a(p^2) \left(\frac{1}{-G_1^{-1} + \Pi_a(p^2)} \right) V_a(p^2), \end{aligned} \quad (1.17)$$

где p_i – импульсы внешних кварковых линий, p – импульс мезона ($p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$), а $\Pi_a(p^2)$ поляризационный оператор мезона в канале a . Вершинные функции $V_a \equiv \Gamma_a$ из уравнения (1.3) и ($\bar{V}_a(p^2) = \gamma^0 V_a^\dagger(p^2) \gamma^0$). Поляризационные операторы мезонов имеют следующий вид для кварковых токов (1.4) и (1.5)

$$\Pi_a(p^2) = i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int d^4k f^2(k_+^2) f^2(k_-^2) \text{Tr} [S(k_-) \Gamma_{\sigma,\pi} S(k_+) \Gamma_{\sigma,\pi}], \quad (1.18)$$

$$\Pi_a(p^2) = i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int d^4k f^2(k^2) \text{Tr} [S(k_-) \Gamma_{\sigma,\pi} S(k_+) \Gamma_{\sigma,\pi}]. \quad (1.19)$$

где $k_\pm = k \pm p/2$. В результате пропагатор пиона или σ -мезона может быть представлен в виде

$$D_a(p^2) = \frac{g_a^2(p^2)}{p^2 - M_a^2} \quad (1.20)$$

При этом массы мезонов являются полюсами пропагаторов $p^2 = M_a^2$, полученных путём решения

$$-G^{-1} + \Pi_a(M_a^2) = 0, \quad (1.21)$$

а константы связи пион–кварк–антикварк $g_a(p^2)$ определяются выражением

$$g_a^2(p^2) = \frac{p^2 - M_a^2}{-G_1^{-1} + \Pi_a(p^2)} \quad (1.22)$$

и на массовой поверхности равны

$$g_a^{-2}(M_a^2) = \left. \frac{\partial \Pi_a(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=M_a^2} \quad (1.23)$$

Введение внешних полей

Для калибровочно инвариантного введения внешних можно добавить в кварковому полю дополнительный фазового фактора Швингера $q(y) \rightarrow Q(x, y)$

$$Q(x, y) = P \exp \left\{ -i \int_x^y dz^\mu (V_\mu^a + A_\mu^a(z) \gamma_5) T^a \right\} q(y) = E(x, y) q(y), \quad (1.24)$$

$$\bar{Q}(x, y) = \bar{q}(x) P \exp \left\{ -i \int_x^y dz^\mu (V_\mu^a(z) - A_\mu^a(z) \gamma_5) T^a \right\} = \bar{q}(x) \bar{E}(x, y),$$

$V_\mu^a(z)$ и $A_\mu^a(z)$ – внешние векторные и аксиально-векторные поля (здесь введено обозначение $\hat{V} = V^\mu \gamma_\mu = V_\mu^a \gamma^\mu T^a$), T^a являются генераторами группы флейворов, P - оператор упорядочения генераторов T^a вдоль пути интегрирования в каждом члене разложения экспоненты в ряд Тейлора. Кварковые токи (1.4) в присутствии внешних полей приобретают вид

$$J_I(x) = \int d^4x_1 d^4x_2 f(x_1) f(x_2) \bar{q}(x - x_1) \bar{E}(x - x_1, x) \Gamma_I E(x, x + x_2) q(x + x_2), \quad (1.25)$$

После разложения экспонент в ряд возникают дополнительные нелокальные вершины взаимодействия с произвольным количеством калибровочных полей. При этом существуют как просто вершины взаимодействия динамического кварка с произвольным количеством калибровочных полей возникающие из членов Лагранжиана (1.9) вида $\sigma_0 J_S(x)$ показанные на рисунке 1.1(a-d), так и вершины возникающие из взаимодействия мезонного поля с нелокальным кварковым током, в которых дополнительно участвует мезонное поле показанные на рисунке 1.1(e-f).

Однозначным образом определяются продольные проекции вершин с участием внешних полей, поскольку они связаны с тождествами Уорда. Для

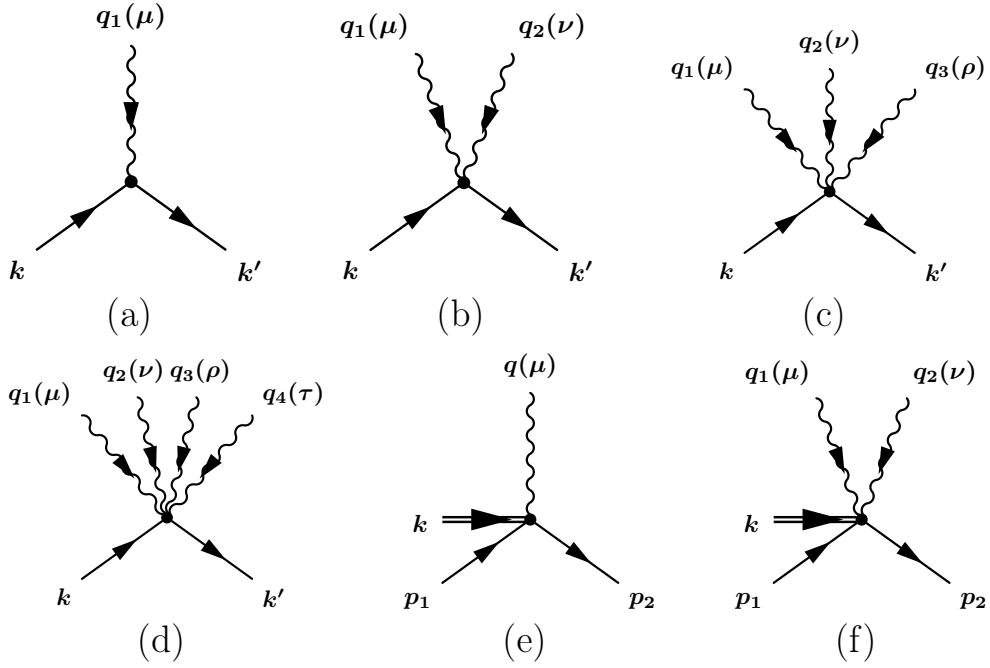


Рис. 1.1: Вершины взаимодействия кварков с одним $\Gamma_\mu^{(1)}(q)$ (a), двумя $\Gamma_{\mu\nu}^{(2)}(q_1, q_2)$ (b), тремя $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{(3)}(q_1, q_2, q_3)$ (c) и четырьмя $\Gamma_{\mu\nu\rho\tau}^{(3)}(q_1, q_2, q_3)$ (d) фотонами. Вершины взаимодействия кварков с мезоном и одним (e) и двумя (f) фотонами.

получения поперечных компонент требуется дополнительно доопределить методику работы с контурным интегралом в фазовом множителе. В работах [26, 30, 227] использовался формализм «прямой линии», когда в путь контурном интеграле есть $z^\mu = x^\mu + \alpha(y^\mu - x^\mu)$, при $0 \leq \alpha \leq 1$. Альтернативной является схема, применённая к нелокальным моделям в работе [228] и используемая в диссертационной работе. Она основывается на правилах, согласно которым производная контурного интеграла не зависит от формы пути и явный вид пути оказывается не важным

$$\frac{\partial}{\partial y^\mu} \int_x^y dz^\nu F_\nu(z) = F_\mu(y), \quad \delta^{(4)}(x - y) \int_x^y dz^\nu F_\nu(z) = 0.$$

Возможные неминимальные члены взаимодействия при этом отсутствуют. Явный вид нелокальных вершин взаимодействия, полученный таким способом приводится в приложении А, а в приложении Б обсуждается альтернативный способ вывода вершин на основе работы [229]. Отметим, что простейшая кварк-фотонная вершина имеет обычную локальную часть, а также нелокальную часть, которая выражается через конечно-разностную произ-

водную $m^{(1)}(k, k')$

$$\Gamma_{\mu}^{(1)}(q_1) = \gamma_{\mu} + \Delta\Gamma_{\mu}^{(1)}(q_1), \quad \Delta\Gamma_{\mu}^{(1)}(q_1) = -(k + k')_{\mu} m^{(1)}(k, k'), \quad (1.26)$$

и удовлетворяет тождеству Уорда-Такахаша. Все остальные вершины с более чем один внешним полем и вершины с мезоном и внешними полями являются чисто нелокальными.

Киральное разложение и соотношения Гольдбергера–Треймана и Гелл-Манна–Окса–Реннера

При низких энергиях поведение распада пионов или амплитуд рассеяния можно описать в терминах разложения Тейлора по импульсам и токовой массе кварка. Уравнение щели (1.11) и (1.12) дают первые соотношения в этом приближения. Киральное разложение динамической массы кварка имеет вид

$$m_d = M_q + \alpha m_c + \mathcal{O}(m_c^2), \quad \alpha = \left. \frac{\partial m_d}{\partial m_c} \right|_{m_c=0}, \quad (1.27)$$

где M_q является массой динамического кварка в кирально-симметричном случае ($m_c = 0 \rightarrow m_{\pi} = 0$). Далее из уравнения (1.12) получается

$$m(p^2) = M(p^2) + m_c [1 + (\alpha - 1)f^2(p^2)] + \mathcal{O}(m_c^2). \quad (1.28)$$

где $M(p^2) = M_q f^2(p^2)$ –зависящая от импульса масса кварка в киральном пределе³.

Подставляя это разложение в уравнение щели (1.11) и извлекая члены вплоть до первого порядка по m_c , можно получить два уравнения:

$$1 = 4iGN_c N_f \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{f^4(k^2)}{k^2 - M^2(k^2)} \quad (1.29)$$

и

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{M^3(k^2) [1 + (\alpha - 1)f^2(k^2)]}{[k^2 - M^2(k^2)]^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{M(k^2)}{k^2 - M^2(k^2)}. \quad (1.30)$$

Теперь перейдём к основным результатам физики пионов, вытекающим из уравнений в киральном пределе. Чтобы найти константу f_{π} , следует вычислить амплитуду слабого распада пиона $a_{(\pi \rightarrow \mu\nu)}^{\mu}(p) = ip^{\mu} f_{\pi}$, рисунок 1.2. По-

³Для кварковых токов вида (1.5) необходимо сделать замену $f^2 \rightarrow f$

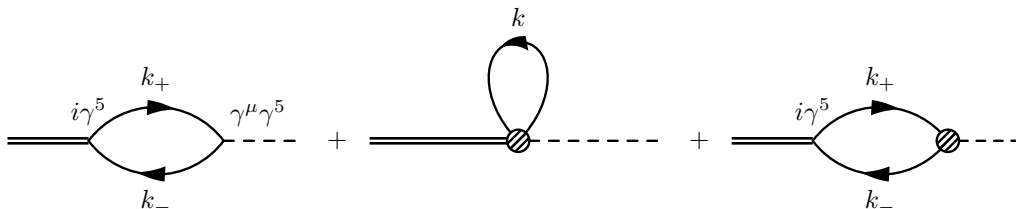


Рис. 1.2: Диаграммы соответствующие слабому распаду пиона.

мимо обычной локальной вершины дополнительные вклады дают нелокальные вершины взаимодействия с аксиально-векторным полем (104) и (107) (или (109) и (110))⁴. В результате выполняя киральное разложение, f_π в киральном пределе $f_\pi|_{m_c=0} = F_\pi$ для токов вида (1.4) в евклидовом пространстве имеет вид полученный в модели вакуума КХД как жидкости инстантонов [230]

$$F_\pi^2 = \frac{N_c}{(2\pi)^2} \int_0^\infty du u \frac{M^2(u) - uM(u)M'(u) + u^2M'^2(u)}{(u + M^2(u))^2}, \quad (1.31)$$

а для токов вида (1.5) определяется по формуле впервые предложенной в [231]:

$$F_\pi^2 = \frac{N_c}{(2\pi)^2} \int_0^\infty du u M(u) \frac{M(u) - \frac{u}{2}M'(u)}{[u + M^2(u)]^2}. \quad (1.32)$$

Поскольку модель фиксируется по значению константы слабого распада пиона, то разница в разных определениях f_π для токов вида (1.4) и (1.5) приводит к различным параметризациям модели.

Выполняя разложение поляризационного оператора пиона (1.18) (или (1.19)), чтобы получить константу связи пиона-кварка-антикварка $g_\pi^{-2}(m_\pi^2)$

$$g_\pi^{-2}(0)|_{m_c=0} = \Pi'_\pi(0)|_{m_c=0}, \quad (1.33)$$

можно показать выполнение соотношения

$$g_\pi(0)|_{m_c=0} = \frac{M_q}{F_\pi}. \quad (1.34)$$

Эта формула является кварковой версией известного соотношения Гольдбергера–Треймана из теории β распада нейтрона, которая связывает пион-нуклонную константу связи $g_{\pi NN}$ с f_π и массой нуклона M_N .

⁴Отметим, что продольную проекцию можно получить основываясь на аксиально-векторном тождестве Уорда-Такахаша.

Уравнение на массы частиц

$$\Pi_{\sigma,\pi}(m_{\sigma,\pi}^2) = G^{-1}. \quad (1.35)$$

после разложения до первого порядка в m_c , приводит к соотношению Гелл-Манна–Окса–Реннера

$$M_\pi^2 F_\pi^2 = -2 m_c \langle \bar{q}q \rangle, \quad (1.36)$$

где $\langle \bar{q}q \rangle$ – кварковый конденсат в киральном пределе, т. е.,

$$\langle \bar{q}q \rangle = -4iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{M(k^2)}{k^2 - M^2(k^2)}. \quad (1.37)$$

$U(3) \times U(3)$ модель

В случае расширения модели на группу $U(3) \times U(3)$ для включения странных частиц следует рассмотреть матрицы Гелл-Манна (3×3) вместо матриц Паули (2×2), матрица токовых масс m_c при этом будет иметь диагональные элементы $m_{c,u}, m_{c,d}, m_{c,s}$ и в случае изоспиновой симметрии $m_{c,u} = m_{c,d} \neq m_{c,s}$. Кроме того дополнительно следует добавить взаимодействие 'т Хоофта [86] вида

$$\mathcal{L}_{Hoof} = -H (\det[\bar{q}(1 + \gamma_5)q] + \det[\bar{q}(1 - \gamma_5)q]), \quad (1.38)$$

для решения $U_A(1)$ проблемы [14, 15, 17, 19, 21] и правильного описания масс η, η' мезонов. Часть этого шестикваркового взаимодействия в скалярном–псевдоскалярном секторах можно переписать в виде

$$-\frac{H}{4} T_{abc} [J_S^a(x) J_S^b(x) J_S^c(x) - 3 J_S^a(x) J_P^b(x) J_P^c(x)], \quad (1.39)$$

со структурными константами вида

$$T_{abc} = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnl} (\lambda_a)_{im} (\lambda_b)_{jn} (\lambda_c)_{kl}.$$

В этом случае можно выполнить бозонизацию модели только приближённо в с помощью метода стационарной фазы [232], что приводит к системе уравнений щели для динамических масс кварков различных флейворов $m_{d,i} (i = u, d, s)$

$$\begin{aligned} m_{d,u} + GS_u + \frac{H}{2} S_u S_s &= 0, \\ m_{d,s} + GS_s + \frac{H}{2} S_u^2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.40)$$

и S определяемое в (1.11) теперь имеет зависимость от флейвора. Четырехкварковые константы связи в разных каналах переопределяются с учётом вклада от взаимодействия 'т Хоофта.

Ввиду синглет-октетного смешивания для нахождения физических псевдоскалярных $(\eta - \eta')$ и скалярных $(\sigma - f_0)$ мезонов следует провести диагонализацию физических состояний (в выражении для T -матрицы (1.17) константы связи и поляризационные операторы становятся матрицами и необходимо выделить два независимых полюса). Явный вид четырехкварковых констант связи и подробности диагонализации приводятся в приложении.

Расширение на сектор с векторными–аксиально векторными полями

Векторные и аксиально-векторные мезоны вводят в модель добавляя соответствующие каналы взаимодействия в четырехкварковый лагранжиан

$$\mathcal{L} = +\frac{G_2}{2} \sum_{i=0}^n [J_V^i(x) J_V^i(x) + J_{AV}^i(x) J_{AV}^i(x)], \quad (1.41)$$

где G_2 является соответствующей константой связи в векторном–аксиально-векторном каналах. Векторный и аксиально-векторные токи имеют вид, сходный с (1.2) (в локальной модели) или (1.4), (1.5) (в нелокальной) с соответствующей заменой матриц Γ . Токи симметричны относительно киральных преобразования каждый по отдельности, тем не менее константу обычно выбирают одинаковой, поскольку в этом случае можно связать между собой массы векторных и аксиально–векторных частиц⁵. Векторные пропагаторы мезонов имеют поперечную и продольную части

$$D_{V,AV}^{\mu\nu}(p) = T^{\mu\nu} D_{V,AV}^T(p) + L^{\mu\nu} D_{V,AV}^L(p) \quad (1.42)$$

где поперечный и продольный проекторы есть

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / p^2, \quad L^{\mu\nu} = p^\mu p^\nu / p^2, \quad (1.43)$$

а пропагаторы

$$D_{V,AV}^T(p) = \frac{1}{-G_2^{-1} + \Pi_{V,AV}^T(p)}, \quad D_{V,AV}^L(p) = \frac{1}{-G_2^{-1} + \Pi_{V,AV}^L(p)}, \quad (1.44)$$

⁵В локальной модели НИЛ это связь имеет совсем простой вид, например для a_1 мезона [13, 21], $M_{a_1}^2 = M_\rho^2 + 6m_u^2$.

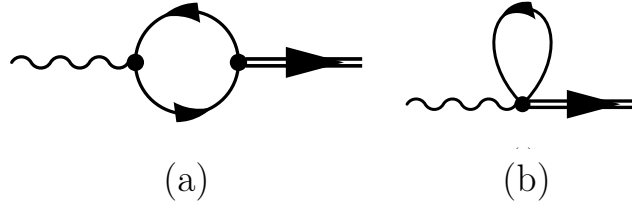


Рис. 1.3: Диаграммы для $\gamma - \rho$ смешивания.

и $\Pi_{V,AV}^T(p)$, $\Pi_{V,AV}^L(p)$ – поперечная и продольная части кварковой петли. При физических значениях масс поперечные векторные мезоны имеют полюса

$$\Pi_{V,AV}^T(M_{V,AV}) = G_2^{-1}. \quad (1.45)$$

Важным эффектом, связанным с введением векторных полей и аксиально-векторных является смешивание состояний с одинаковыми квантовыми числами.

В векторном секторе появляется смешивание фотона с полями векторных мезонов. Вершина фотон–векторный мезон в определяется суммой двух диаграмм 1.3

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma \rightarrow \rho_0, \omega}^{\mu\nu}(q) = iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \{ \text{Tr} [S_+ \Gamma^\mu(k_+, k_-) S_- \Gamma_{\rho_0, \omega}^\nu(k_+, k_-)] + \\ + \text{Tr} [\Gamma_{\rho_0, \omega}^{\mu\nu}(k, q, -q) S_k] \}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

где вершины $\Gamma_{\rho_0, \omega}^\nu(k_+, k_-)$ и $\Gamma_{\rho_0, \omega}^{\mu\nu}$ определяются выражениями (97) и (101), соответственно. Вершина (1.46) имеет поперечную структуру

$$q_\mu \Gamma_{\gamma \rightarrow \rho_0, \omega}^{\mu\nu}(q) = 0, \quad (1.47)$$

и соответствующая поперечная проекция имеет вид ⁶

$$\begin{aligned} B_v(q) = 4iN_c C_{\rho_0, \omega} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{f_+ f_-}{D_+ D_-} \left(m_+ m_- - k_+ k_- + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3} k_\perp^2 \left[1 - (m^2)^{(1)}(k_+, k_-) \right] \right) - \frac{4}{3} k_\perp^2 \frac{f_k}{D_k} f^{(1)}(k, k+q) \right], \end{aligned} \quad (1.48)$$

$C_{\rho_0, \omega}$ является результатом взятия следа по флейворным матрицам 1 для ρ_0 -мезона и $1/3$ для ω -мезона. Отметим, что $B_v(0) = 0$. Это легко показать

⁶Для компактности выражений импульсные аргументы показаны как нижние индексы, т.е. $f(k) \rightarrow f_k$ и $f(k_+) \rightarrow f_+$.

следующим образом. После перехода к евклидову пространству в (1.48) и выполнения интегрирования по угловым переменным имеет место следующее соотношение

$$B_v(0) \sim \int_0^\infty dk^2 k^2 \left[\frac{f_k^2}{D_k^2} \left(m_k^2 + k^2 - \frac{1}{2} k^2 [1 + 2m_k m'_k] \right) + k^2 \frac{f_k}{D_k} f'_k \right]. \quad (1.49)$$

Третий член под интегралом может быть проинтегрирован по частям, используя $D'_k = 1 + 2m_k m'_k$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dk^2 (k^2)^2 \frac{f_k f'_k}{D_k} &= - \int_0^\infty f_k^2 d \left(\frac{(k^2)^2}{2} \frac{1}{D_k} \right) = \\ &= - \int_0^\infty dk^2 \frac{k^2}{D_k} f_k^2 + \int_0^\infty dk^2 f_k^2 \frac{(k^2)^2}{2} \frac{1 + 2m_k m'_k}{D_k^2}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

После подстановки в (1.49) можно показать, что третий член тождественно сокращается с двумя первыми и подынтегральное выражение тождественно равно нулю. В результате такое смешивание не приводит к появлению массы у фотона, а в локальной модели можно показать появление механизма векторной доминантности [13].

В аксиально-векторном канале происходит смешивание псевдоскалярных и продольной компоненты аксиально-векторных полей благодаря дополнительному недиагональному переходу кварковой петли

$$\Pi_{\pi a_1}^\mu(p) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f^2(k_-) f^2(k_+) \text{Tr} [S(k_-) \Gamma_\pi S(k_+) \Gamma_{a_1}^\mu]. \quad (1.51)$$

Для нахождения физических состояний требуется решить матричную систему уравнений для полных пропагаторов частиц [210]

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\pi(p^2) &= d_\pi - \mathcal{D}_\pi(p^2) \Pi_\pi(p^2) d_\pi - \mathcal{D}_{\pi a_1}^\mu(p^2) \Pi_{\pi a_1}^\mu(p^2) d_\pi \\ \mathcal{D}_{\pi a_1}^\mu(p^2) &= -\mathcal{D}_\pi(p^2) \Pi_{\pi a_1}^\mu(p^2) d_{a_1} - \mathcal{D}_{\pi a_1}^\mu(p^2) \Pi_{a_1}^L(p^2) d_{a_1}^L \\ \mathcal{D}_{a_1}^L(p^2) &= d_{a_1}^L - \mathcal{D}_{\pi a_1}^\mu(p^2) \Pi_{\pi a_1}^\mu(p^2) d_{a_1} - \mathcal{D}_{a_1}^L(p^2) \Pi_{a_1}^L(p^2) d_{a_1}^L, \end{aligned}$$

где затравочные d пропагаторы представляют собой четырехкварковые константы связи

$$d_\pi = -G_1, \quad d_{a_1} = G_2, \quad (1.52)$$

а $\mathcal{D}(p^2)$ – полные пропагаторы. Вводя скалярные функции

$$\Pi_{\pi, a_1}^\mu(p^2) = p^\mu \Pi_{\pi a_1}(p^2), \quad \mathcal{D}_{\pi a_1}^\mu(p^2) = p^\mu \mathcal{D}_{\pi a_1}(p^2) \quad (1.53)$$

решение системы можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\pi(p^2) &= \frac{(d_{a_1}^L)^{-1} + \Pi_{a_1}^L(p^2)}{\mathcal{D}(p^2)}, \quad \mathcal{D}_{\pi a_1}(p^2) = \frac{\Pi_{\pi a_1}(p^2)}{\mathcal{D}(p^2)}, \quad \mathcal{D}_{a_1}^L(p^2) = \frac{(d_\pi)^{-1} + \Pi_\pi(p^2)}{\mathcal{D}(p^2)}, \\ \mathcal{D}(p^2) &= [(d_\pi)^{-1} + \Pi_\pi(p^2)] [(d_{a_1}^L)^{-1} + \Pi_{a_1}^L(p^2)] - p^2 \Pi_{\pi a_1}^2(p^2) \end{aligned} \quad (1.54)$$

Выбор форм-фактора и конфайнмент

В инстантонной модели вакуума КХД функции $f(p^2)$, определяющие нелокальное четырехкварковое взаимодействие, выражаются через профильную функцию кварковой нулевой моды:

$$f^I(p^2) = 2x \left(I_0(x)K_1(x) - I_1(x)K_0(x) - \frac{1}{x}I_1(x)K_1(x) \right) \Big|_{x=\frac{|p|\rho}{2}}, \quad (1.55)$$

где $I(x)$, $K(x)$ – модифицированные функции Бесселя, ρ – средний размер инстантона $\rho \sim 1/3$ фм. Прямое использование таких функций для вычислений наталкивается на трудности, связанные с необходимостью продолжения данных функций в комплексную плоскость. Можно выбрать эти функции из соображений простоты. Наиболее простым вариантом является использование форм-фактора в виде функции Гаусса

$$f(p^2) = Q(p^2) = e^{-\frac{p^2}{\Lambda^2}}. \quad (1.56)$$

Случай, когда знаменатель кваркового пропагатора с зависящей от импульса массой не имеет решения для действительных p^2 часто интерпретируется как проявление конфайнмента кварков [26, 233].

Другой способ задания форм-фактора, основывается на предположении о том, что массовые функции кварков $m(p)$ представляют собой решение

уравнений вида⁷

$$1. \quad \frac{m(p^2) - m_c}{m^2(p^2) + p^2} \equiv \frac{1}{2\mu} Q(p^2), \quad (1.57)$$

$$2. \quad \frac{m^2(p^2) - m_c^2}{m^2(p^2) + p^2} \equiv Q(p^2 + m_c^2). \quad (1.58)$$

Очевидно, что при таком выборе массовой функции, у кварка будет отсутствовать массовая поверхность. Как показано в работах [29, 212–214, 216] при таком выборе форм-фактора возможно разумно описать сильные распады $\sigma \rightarrow \pi\pi$ и $\rho \rightarrow \pi\pi$, отношение D/S в распаде $a_1 \rightarrow \rho\pi$, электромагнитный радиус и форм-фактор заряженного пиона, переходный радиус и форм-фактор нейтрального пиона. Также были даны оценки поляризуемости пиона. При этом дополнительные условия на поведение массовой функции кварка (1.57) и (1.58) уменьшают количество возможных параметров модели, т.к. при нулевой виртуальности $p^2 = 0$ оказываются связанными между собой токовая и динамическая массы кварка, а также параметр нелокальности Λ . На практике это уменьшает возможности изучения предсказаний модели от возможных параметризаций. Для получения явного вида массовой кварка на основе уравнений (1.57), (1.58) требуется решить квадратное уравнения и в результате оказывается массовая функция кварка имеет разрезы в комплексной плоскости и аналитическое продолжение поляризационных операторов для масс частиц больше 1.2 ГэВ становится неоднозначным.

1.2 Пионное рассеяние

Амплитуда процесса описывается двумя типами диаграмм, показанными на рисунке 1.4. Используя обозначения Чу и Мандельстама, можно записать матричный элемент $\pi\pi$ рассеяния

$$\begin{aligned} \langle i_1 i_2 | \mathcal{A} | i_3 i_4 \rangle &= \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} A(s, t, u) + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} A(t, s, u) + \\ &+ \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} A(u, t, s) \end{aligned} \quad (1.59)$$

⁷Приведём явный вид параметра μ , $\mu^2 = \Lambda^2 e^{-\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)$, где $\epsilon = \left(1 - \frac{m_c^2}{\Lambda^2} - \frac{m_c}{\Lambda} \sqrt{2 + \frac{m_c^2}{\Lambda^2}}\right)$.

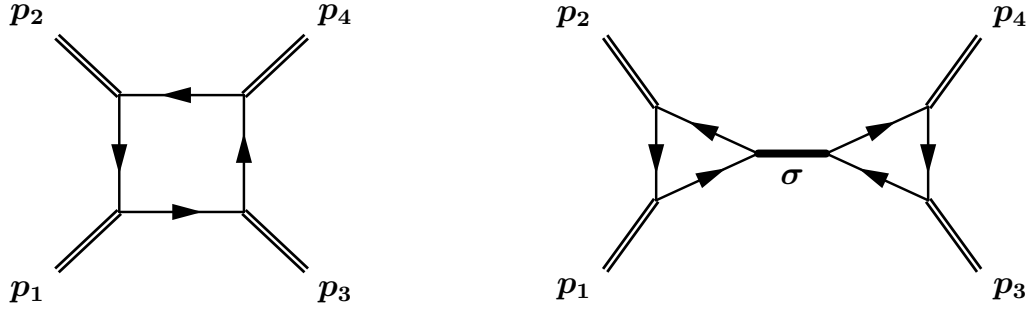


Рис. 1.4: Диаграммы соответствующие амплитуде $\pi\pi$ рассеяния.

в терминах трех кинематических инвариантов

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2. \quad (1.60)$$

Для амплитуд с определённым значением изоспина $I = 0, 1, 2$ имеются следующие соотношения

$$\begin{aligned} T^0 &= 3A(s, t, u) + A(t, s, u) + A(u, t, s), \\ T^1 &= A(t, s, u) - A(u, t, s), \\ T^2 &= A(t, s, u) + A(u, t, s). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Диаграмма с σ мезоном содержит вершину $\sigma\pi\pi$, которая имеет следующую структуру в случае кварковых токов вида (1.5):

$$A_{\sigma \rightarrow \pi\pi} = 2g_\sigma(p^2)g_\pi(p_1^2)g_\pi(p_2^2)g_{\sigma\pi\pi}(p^2, p_1^2, p_2^2), \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned} g_{\sigma\pi\pi}(p^2, p_1^2, p_2^2) &= iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f\left(\left(k + \frac{p_1}{2}\right)^2\right) f\left(\left(k - \frac{p_2}{2}\right)^2\right) \times \\ &\times f\left(\left(k + \frac{p_1 - p_2}{2}\right)^2\right) \text{Tr} [S(k + p_1)\Gamma_\sigma S(k - p_2)\Gamma_\pi S(k)\Gamma_\pi], \end{aligned} \quad (1.63)$$

Квадратная петлевая диаграмма имеет вид

$$A_{\text{box}}(s, t, u) = 2g_\pi^4(m_\pi^2) [J_4(s, t, u) + J_4(s, u, t) - J_4(u, t, s)], \quad (1.64)$$

где

$$\begin{aligned} J_4(s, t, u) &= iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f\left(\left(k + \frac{p_1}{2}\right)^2\right) f\left(\left(k - \frac{p_2}{2}\right)^2\right) \times \\ &\times f\left(\left(k + \frac{2p_1 - p_3}{2}\right)^2\right) f\left(\left(k + \frac{p_1 - p_2 - p_3}{2}\right)^2\right) \times \\ &\times \text{Tr} [S(k)\Gamma_\pi S(k - p_2)\Gamma_\pi S(k + p_1 - p_3)\Gamma_\pi S(k + p_1)\Gamma_\pi], \end{aligned} \quad (1.65)$$

В результате амплитуда $\pi\pi$ рассеяния может быть записана как

$$A(s, t, u) = A_{\text{box}}(s, t, u) + 4g_\pi^4(m_\pi^2) \frac{g_{\sigma\pi\pi}^2(s, m_\pi^2, m_\pi^2)}{G^{-1} - \Pi_\sigma(s)}. \quad (1.66)$$

Рассмотрим киральные разложения диаграмм составляющих амплитуду $\pi\pi$ рассеяния. Удобно разделить элементы расчёта на в три группы, т.е. киральные разложения для $g_{\sigma\pi\pi}^2$, пропагатора σ -мезона $[G^{-1} - \Pi_\sigma(s)]^{-1}$, и для кваковой петли $J_4(s, t, u)$. Также понадобится фактор $g_\pi(m_\pi^2)$, который будет вносить вклад только в ведущем порядке, т.е. как $g_\pi(0)|_{m_c=0} = M_q/F_\pi$. В конце будет показано, как эти элементы собираются в соотношение Вайнберга.

В соответствии с приведёнными выше замечаниями можно получить⁸

$$\begin{aligned} g_{\sigma\pi\pi}^2(s, M_\pi^2, M_\pi^2) &= \left(4iN_cN_f \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{Mf^3}{(k^2 - M^2)^2} \right) \times \\ &\times 4iN_cN_f \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{Mf^3}{(k^2 - M^2)^2} \left\{ 1 + 2\frac{m_c}{M} [1 + (\alpha - 1)f] \left(1 + \frac{4M^2}{k^2 - M^2} \right) + \right. \\ &+ 2k^2 (4M_\pi^2 - s) \frac{f'}{f} \left(\frac{f'}{f} - 2\frac{1 - 2MM'}{k^2 - M^2} \right) + \left(\frac{f'}{f} + \frac{k^2 f''}{2f} \right) \left(7M_\pi^2 - \frac{s}{2} \right) + \\ &+ 4M_\pi^2 \left(\frac{k^2[(M')^2 + MM''] - 1 + 2MM'}{k^2 - M^2} \right) + (6M_\pi^2 - s) \frac{k^2(1 - 2MM')^2}{(k^2 - M^2)^2} + \\ &+ \left. \frac{s - 2M_\pi^2}{k^2 - M^2} \left[1 - k^2 \frac{M'}{M} (1 - MM') \right] + \frac{k^2}{2} \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \left(5M_\pi^2 - \frac{3s}{2} \right) \right\} + \\ &+ \mathcal{O}(s^2, M_\pi^4, m_c^2). \end{aligned} \quad (1.67)$$

Для σ -мезонного пропагатора имеется следующее соотношение

$$\frac{1}{\Pi_\sigma(s) - G^{-1}} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{m_c b}{a} - \frac{sc}{a} \right) + \mathcal{O}(m_c^2, s^2), \quad (1.68)$$

где

$$a = 8iN_cN_f \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{M^2 f^2}{(k^2 - M^2)^2}, \quad (1.69)$$

$$b = 8iN_cN_f \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{Mf^2}{(k^2 - M^2)^3} [1 + (\alpha - 1)f] (3k^2 + M^2), \quad (1.70)$$

⁸Для компактности опущен аргумент у функций, так $M(k) \rightarrow M$ и т.д.

$$\begin{aligned}
c = & 2iN_c N_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f^2}{(k^2 - M^2)^2} \left\{ k^2 M M'' - (1 - 2M M') \left(1 - \frac{k^2 f'}{2f} \right) + \right. \\
& + \frac{2M^2}{k^2 - M^2} (k^2 [(M')^2 + M M''] - 1 + 2M M') + \\
& \left. + \frac{k^2 M^2 (1 - 2M M')^2}{(k^2 - M^2)^2} \right\}. \tag{1.71}
\end{aligned}$$

Слагаемое f'' в правой части уравнения (1.67) может быть проинтегрировано по частям. После этого собирая уравнения (1.67) и (1.68), можно получить

$$\begin{aligned}
\frac{4g_{\sigma\pi\pi}^2}{G^{-1} - \Pi_\sigma(s)} = & -8iN_c N_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f^4}{(k^2 - M^2)^2} \left\{ 1 - \frac{m_c}{M} [1 + (\alpha - 1)f] \times \right. \\
& \times \left(1 - \frac{4M^2}{k^2 - M^2} \right) + \frac{s}{4M^2} \left(1 - \frac{k^2 f'}{2f} \right) - s k^2 \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \\
& + \frac{3k^2 (1 - 2M M')}{(k^2 - M^2)} (s - 3M_\pi^2) \frac{f'}{f} + \left(6M_\pi^2 - \frac{5s}{4} \right) \frac{k^2 (1 - 2M M')^2}{(k^2 - M^2)^2} + \\
& + \left(4M_\pi^2 - \frac{s}{2} \right) \left(\frac{k^2 [(M')^2 + M M''] - 1 + 2M M'}{k^2 - M^2} \right) + \\
& \left. + \frac{s - 2M_\pi^2}{k^2 - M^2} \left[1 - k^2 \frac{M'}{M} (1 - M M') \right] \right\} + \mathcal{O}(s^2, M_\pi^4, m_c^2). \tag{1.72}
\end{aligned}$$

Если проинтегрировать по частям часть членов с более высокой степенью $k^2 - M^2$ в знаменателе интеграла можно получить

$$\begin{aligned}
\frac{4g_{\sigma\pi\pi}^2}{G^{-1} - \Pi_\sigma(s)} = & -8iN_c N_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f^4}{(k^2 - M^2)^2} \left\{ 1 - \frac{m_c}{M} [1 + (\alpha - 1)f] \times \right. \\
& \times \left(1 - \frac{4M^2}{k^2 - M^2} \right) + \frac{s}{4M^2} \left(1 - \frac{k^2 f'}{2f} \right) - s k^2 \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \\
& + \frac{M' k^2 (1 - 2M M')}{M (k^2 - M^2)} (s + M_\pi^2) - \frac{s k^2 (1 - 2M M')^2}{2(k^2 - M^2)^2} + \\
& \left. + \frac{s - 2M_\pi^2}{k^2 - M^2} [1 - k^2 (M')^2] \right\} + \mathcal{O}(s^2, M_\pi^4, m_c^2). \tag{1.73}
\end{aligned}$$

Теперь можно сделать аналогичные разложения для интеграла $J_4(s, t, u)$:

$$\begin{aligned}
 J_4(s, t, u) = & 4iN_c N_f \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{f^4}{(k^2 - M^2)^2} \left\{ 1 + \frac{4m_c M}{k^2 - M^2} [1 + (\alpha - 1)f] + \right. \\
 & + \frac{k^2}{2} \left(\frac{f'}{f} \right)^2 (u - 4M_\pi^2) + \frac{k^2 f'}{2f} (1 - 2MM') \frac{s - t - 2M_\pi^2}{k^2 - M^2} + \\
 & + \frac{k^2(1 - 2MM')^2}{2(k^2 - M^2)^2} \left(3M_\pi^2 + t - \frac{s}{2} \right) + \frac{k^2(M')^2 u + s - 6M_\pi^2}{2(k^2 - M^2)} + \\
 & \left. + \frac{k^2[(M')^2 + MM''] + 2MM'}{2(k^2 - M^2)} (t + 2M_\pi^2) \right\} + \mathcal{O}(M_\pi^4, m_c^2, p^4). \quad (1.74)
 \end{aligned}$$

где p^4 обозначает любую комбинацию второго порядка в переменных Мандельштама. Выражение, необходимое для вычисления $J_{\text{box}} = 2(J_4(s, t, u) + J_4(s, u, t) - J_4(u, t, s))$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 J_{\text{box}} = & 8iN_c N_f \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{f^4}{(k^2 - M^2)^2} \left\{ 1 + \frac{4m_c M}{k^2 - M^2} [1 + (\alpha - 1)f] - \right. \\
 & - sk^2 \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k^2 f'}{f} (1 - 2MM') \frac{s + M_\pi^2}{k^2 - M^2} - \frac{sk^2(1 - 2MM')^2}{2(k^2 - M^2)^2} + \\
 & \left. + \frac{k^2(M')^2 - 1}{(k^2 - M^2)} (2M_\pi^2 - s) \right\} + \mathcal{O}(M_\pi^4, m_c^2, p^4). \quad (1.75)
 \end{aligned}$$

Формально интеграл J_{box} содержит член пропорциональный u . Можно показать, что коэффициент перед этой переменной равен нулю.

Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned}
 J_{\text{box}} + \frac{4g_{\sigma\pi\pi}^2}{G^{-1} - \Pi_\sigma(s)} = & \\
 = & -8iN_c N_f \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{f^4}{(k^2 - M^2)^2} \left\{ \frac{s}{4M^2} \left(1 - \frac{k^2 f'}{2f} \right) - \frac{m_c}{M} [1 + (\alpha - 1)f] \right\} \\
 = & \frac{F_\pi^2}{M_q^4} (s - M_\pi^2). \quad (1.76)
 \end{aligned}$$

На последнем шаге были использованы уравнения (1.30) и (1.32). Умножив этот результат на $g_\pi^4(0)|_{m_c=0} = M_q^4/F_\pi^4$, приходим к результату Вайнберга

$$A(s, t, u) = \frac{s - M_\pi^2}{F_\pi^2} + \mathcal{O}(p^4, m_c^2). \quad (1.77)$$

Эта знаменитая низкоэнергетическая теорема должна быть верна в любой теории с правильной реализацией киральной симметрии и схемы ее нарушения.

Длины рассеяния a_l^I и параметры наклона b_l^I являются первыми членами в разложении амплитуд парциальных волн для орбитального углового момента l и изоспина I :

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} \frac{1}{64\pi m_\pi k^{2l}} \int_{-1}^1 dx P_l(x) T^I(s, t, u) = a_l^I + k^2 b_l^I + O(k^4). \quad (1.78)$$

где $s = 4(M_\pi^2 + k^2)$, $t = -2k^2(1 - x)$, $u = -2k^2(1 + x)$; k это трехмерный импульс в системе центра масс, $x = \cos \theta$, θ – угол рассеяния между пионами и $P_l(x)$ полиномы Лежандра.

Длины рассеяния и параметры наклона обычно получаются с использованием импульсного расширения амплитуды $\pi\pi$ рассеяния. Точный результат можно получить, если численно вычислить амплитуду (и ее производные) на пороге для каналов s , t и u . Для этого разложим подынтегральную функцию уравнения (1.78) по степеням k^2 . Последующее интегрирование по x приводит к следующим выражениям для длин рассеяния и параметров наклона:

$$\begin{aligned} a_0^2 &= \frac{1}{32\pi m_\pi} \left(A(0, 4m_\pi^2, 0) + A(0, 0, 4m_\pi^2) \right), \\ (a_0^0 - a_0^2) &= \frac{3}{32\pi m_\pi} A(4m_\pi^2, 0, 0), \\ a_1^1 &= \frac{1}{48\pi m_\pi} \left(A^{(s)}(0, 4m_\pi^2, 0) + A^{(s)}(0, 0, 4m_\pi^2) - A^{(t)}(0, 0, 4m_\pi^2) - \right. \\ &\quad \left. - A^{(u)}(0, 4m_\pi^2, 0) \right), \\ a_2^2 &= \frac{1}{120\pi m_\pi} \left(A^{(u,u)}(0, 4m_\pi^2, 0) + A^{(t,t)}(0, 0, 4m_\pi^2) - 2A^{(s,u)}(0, 4m_\pi^2, 0) - \right. \\ &\quad \left. - 2A^{(s,t)}(0, 0, 4m_\pi^2) + A^{(s,s)}(0, 0, 4m_\pi^2) + A^{(s,s)}(0, 4m_\pi^2, 0) \right), \\ (a_2^0 - a_2^2) &= \frac{1}{40\pi m_\pi} \left(A^{(u,u)}(4m_\pi^2, 0, 0) - 2A^{(t,u)}(4m_\pi^2, 0, 0) + A^{(t,t)}(4m_\pi^2, 0, 0) \right), \\ b_0^2 &= \frac{1}{16\pi m_\pi} \left(2A^{(u)}(0, 0, 4m_\pi^2) + 2A^{(t)}(0, 4m_\pi^2, 0) - A^{(u)}(0, 4m_\pi^2, 0) - \right. \\ &\quad \left. - A^{(t)}(0, 0, 4m_\pi^2) - A^{(s)}(0, 4m_\pi^2, 0) - A^{(s)}(0, 0, 4m_\pi^2) \right), \\ (b_0^0 - b_0^2) &= \frac{3}{16\pi m_\pi} \left(2A^{(s)}(4m_\pi^2, 0, 0) - A^{(t)}(4m_\pi^2, 0, 0) - A^{(u)}(4m_\pi^2, 0, 0) \right), \end{aligned}$$

где

$$A^{(x)}(a, b, c) = \frac{\partial}{\partial x} A(s, t, u)|_{s=a, t=b, u=c},$$

$$A^{(x,y)}(a, b, c) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A(s, t, u)|_{s=a, t=b, u=c}.$$

Для численных оценок используется параметризация нелокальной модели с форм-фактором в виде функции Гаусса. Модель имеет три параметра m_c , Λ , G . После использования значений массы пиона $m_\pi = 140$ МэВ и слабой константы распада пиона $f_\pi = 92$ МэВ в качестве входных параметров остаётся только один свободный параметр m_c . Этот параметр можно выбрать в интервале 4.1–7.4 МэВ на типичном адронном масштабе 1 ГэВ [234]. Дополнительное ограничение можно получить, например, из длины рассеяния в d -волне a_2^2 . В результате параметры модели: $m_c = 5.1$ МэВ, $\Lambda = 840$ МэВ и $G = 26.22$ ГэВ⁻². Таким образом, можно найти, что $m_d = 365$ МэВ и $\langle \bar{q}q \rangle = (-250 \text{ МэВ})^3$. Для массы и ширины скалярного мезона получаем $M_\sigma = 595$ МэВ, $\Gamma_\sigma = 250$ МэВ. Пропагаторы кварков при такой параметризации имеют комплексно сопряжённые полюса. Вычисление петлевых интегралов с зависящей от импульса кварковой массой требует правильного аналитического продолжения от пространства Минковского к пространству Евклидова (где форм-факторы являются хорошо определёнными убывающими функциями). Это продолжение может быть нетривиальным (см., например, [26,30,233]), но аналитическое продолжение в области низких энергий, не встречает никаких проблем. Все интегралы можно легко вычислить численно или путём построения разложения в ряд по внешним импульсам. Это разложение быстро сходится в низкоэнергетической области. Для иллюстрации этого можно оценить мезонные массы по разложению в ряд $\Pi_\sigma(p^2)$ и $\Pi_\pi(p^2)$ по импульсам с разным числом членов: два, три или четыре. В результате значения σ -мезонной массы составляют 611 МэВ, 599 МэВ и 595 МэВ. Для пиона ситуация намного лучше, здесь серия имеет вид 140.02 МэВ, 140 МэВ и 140 МэВ.

Полученные значения длин рассеяния волн s, p и d во всех изотопических каналах, а также длина рассеяния s -волне приведены в таблице 1.1. Для сравнения также приводятся величины, полученные в рамках локальной модели НИЛ [57]. Эмпирические данные взяты из работ [235] (время жизни

Таблица 1.1: Длины рассеяния и параметры наклона системы $\pi\pi$ полученные в нелокальной модели (НМ). Столбцы LNJL, PY, и EXP соответствуют результатам, полученным в локальной модели НИЛ [57], из феноменологического анализа экспериментальных данных [238], данные, извлечённым из времени жизни $\pi^+\pi^-$ мезоатома [239], из $K \rightarrow 3\pi$ распада [236] и распада $K^\pm \rightarrow \pi^+\pi^- e^\pm \nu_e(\bar{\nu}_e)$ [238].

	НМ	LNJL	PY	EXP
$a_0^0 m_\pi$	0.196	0.190	0.230 ± 0.015	0.216 ± 0.017 [237]
$a_0^2 m_\pi$	-0.047	-0.044	-0.048 ± 0.005	-0.0454 ± 0.0049 [237] -0.041 ± 0.036 [236]
$(a_0^0 - a_0^2) m_\pi$	0.243	0.234	0.277 ± 0.014	$0.2533_{-0.0078}^{+0.0080} _{stat} \pm 0.0073_{-0.0073}^{+0.0078} _{syst}$ [239] 0.268 ± 0.027 [236]
$a_1^1 \times 10^{-3} m_\pi^3$	37	34	38.4 ± 0.8	
$a_2^0 \times 10^{-4} m_\pi^5$	15.6	16.7	18.7 ± 0.41	
$a_2^2 \times 10^{-4} m_\pi^5$	2.2	3.2	2.78 ± 0.37	
$b_0^0 m_\pi^3$	0.25	0.27	0.312 ± 0.014	
$b_0^2 m_\pi^3$	-0.085	-0.079	-0.090 ± 0.006	

$\pi^+\pi^-$ мезоатома), [236] (распад $K \rightarrow 3\pi$), [237] (распад $K^\pm \rightarrow \pi^+\pi^- e^\pm \nu_e(\bar{\nu}_e)$) и феноменологического анализ данных [238].

Для проверки результата, исследован локальный предел вычислений с помощью $\Lambda \rightarrow \infty$ в нелокальных форм-факторах. После этого воспроизводятся результаты вычислений в локальной модели [57].

В заключение можно отметить, что амплитуда $\pi\pi$ рассеяния получена в приближении Хартри-Фока нелокальной модели и использована для вычисления пороговых характеристик. Результаты для длин рассеяния в волнах s , p и d и для параметров наклона s -волны удовлетворительно согласуются с эмпирическими данными.

Основной вклад в значения длин рассеяния s , p дают p^2 члены амплитуд. В силу отношения Вайнберга они менее чувствительны к структуре форм-фактора. d -волны в основном определяются членами порядка p^4 амплитуды, а достаточные предсказания для d -волн являются нетривиальным результатом наших вычислений. Эти члены, полученные диаграммами типа квадрат и от обмена σ -мезоном, аддитивны для длины рассеяния a_2^0 и имеют противоположные знаки в случае a_2^2 . На значение длин рассеяния a_2^2 сильно влияет величина предсказанной моделью σ -мезонной массы.

Возвращаясь к проблеме фиксации параметров модели, отметим, что хо-

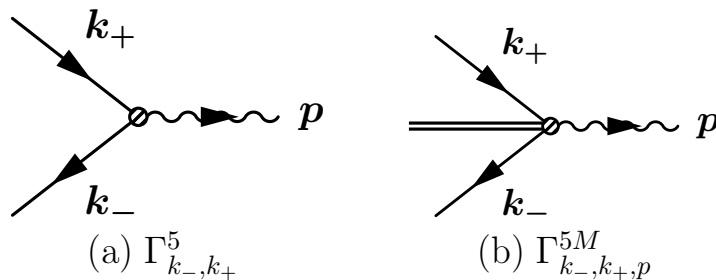


Рис. 1.5: Кварк-антикварковая вершины со слабым током (волнистые линии) (слева) и нелокальным вершинам кварк-мезонов (справа).

рошее согласие с экспериментальным a_2^2 достигается при $m_c = 5.1$ МэВ ($a_2^2 = 2.2 \times 10^{-4} m_\pi^{-5}$). Для токовой кварковой массы, равной 4.4 и 5.2 МэВ, эта длина рассеяния равна $3.5 \times 10^{-4} m_\pi^{-5}$ и $2 \times 10^{-4} m_\pi^{-5}$ соответственно.

1.3 $1/N_c$ поправки

Рассмотрим нелокальную модель с псевдоскалярным–скалярном каналами взаимодействия в следующем за лидирующим порядке разложения по $1/N_c$. В схеме строго $1/N_c$ разложения считается, что четырёхкварковая константа связи G имеет порядок $1/N_c$. В этом случае поведение свойств пионов, как функция числа цветов N_c рассчитанное в модели совпадает с расчётами в лидирующем порядке КХД ($f_\pi \sim \sqrt{N_c}$). В результате любой мезонный пропагатор в диаграммах приводит к коэффициент подавления $1/N_c$. В КХД реализуется похожий механизм $1/N_c$ счёта [86].

На уровне среднего поля для вычисления константы слабого распада пиона нам нужна только продольная проекция вершины, которая может быть получена на основе аксиальных тождеств Уорда-Такахаши и поэтому не зависит от способа введения нелокальных вершин. Результаты для продольных проекций вершин показанных на рисунке 1.5, кварковых токов вида (1.4), могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{k_-,k_+}^{5,L} &= -\frac{1}{p^2} \left(S_{k_-}^{-1} \gamma_5 T^a + \gamma_5 T^a S_{k_+}^{-1} + 2(m_c + m_d f_{k_-} f_{k_+}) \gamma_5 T^a \right), \quad (1.79) \\ \Gamma_{k_-,k_+}^{5M,L} &= -\frac{1}{p^2} \left[(f_{k_+} - f_{k_+-p}) f_{k_-} \gamma_5 T^a \mathbf{\Gamma}_M + (f_{k_-} - f_{k_-+p}) f_{k_+} \mathbf{\Gamma}_M \gamma_5 T^a \right]. \end{aligned}$$

Константа распада пиона на уровне среднего поля состоит из двух частей:

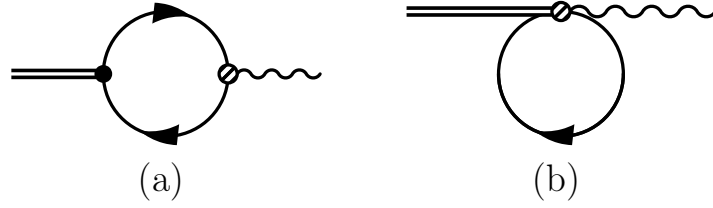


Рис. 1.6: Слабый распад пиона в приближении среднего поля.

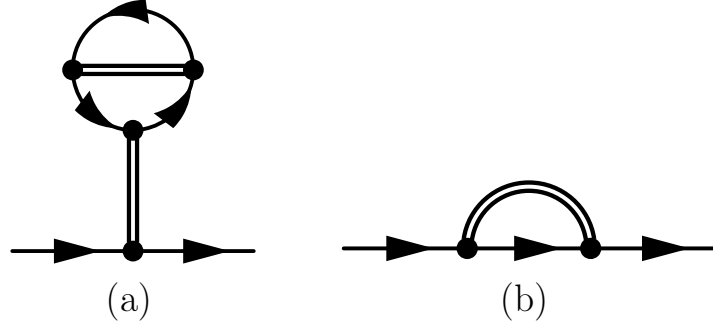


Рис. 1.7: $1/N_c$ поправки к собственной энергии кварков.

$f_\pi^{\text{MF}}(p^2) = f_{\pi,1}^{\text{MF}}(p^2) + f_{\pi,2}^{\text{MF}}(p^2)$, которые показаны на рисунке 1.6. Вычисляя эти диаграммы можно получить следующие выражения

$$\begin{aligned} f_{\pi,1}^{\text{MF}}(p^2) &= g_\pi^{\text{MF}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma_{k_+,k_-}^\pi S_{k_-} \Gamma_{k_-,k_+}^{5,L} S_{k_+} \right] \\ f_{\pi,2}^{\text{MF}}(p^2) &= g_\pi^{\text{MF}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma_{k,k}^{5\pi,L} S_k \right], \end{aligned} \quad (1.80)$$

Поправка к собственной энергии кварка $\Sigma_p^{\text{N}_c}$ в следующем за лидирующем порядке $1/N_c$ соответствует диаграммам, показанным на рис. 1.7 [79–81]. На основе этих диаграмм можно получить

$$\Sigma_p^{\text{N}_c} = C f_p^2 - \sum_{M=\sigma,\pi} i \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} [D_l^M \Gamma_{p,p-l}^M S_{p-l} \Gamma_{p-l,p}^M],$$

где

$$C = D_0^\sigma \zeta, \quad \zeta = \sum_{M=\sigma,\pi} i \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} D_l^M \Gamma_{l,l}^{\sigma\text{MM}}, \quad (1.81)$$

и $\Gamma_{q_1,q_2}^{\alpha\beta\gamma}$ - кварковая треугольная диаграмма с тремя мезонными вершинами. Для внешних мезонов α , β и γ кварковый треугольник имеет следующий вид

$$\Gamma_{q_1,q_2}^{\alpha\beta\gamma} = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma_{k+q_1,k+q_2}^\alpha S_{k+q_2} \Gamma_{k+q_2,k}^\beta S_k \Gamma_{k,k+q_1}^\gamma S_{k+q_1} \right]. \quad (1.82)$$

Когда $q_1 = q_2 = l$, вершина с тремя мезонами в евклидовом пространстве имеет вид

$$\Gamma_{l,l}^{\sigma\text{MM}} = -4N_c N_f \int \frac{d_E^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f_k^2 f_{k+l}^4}{D_k D_{k+l}^2} \times \quad (1.83)$$

$$\times \left[2k \cdot (k+l) m_{k+l} \pm m_k \left((k+l)^2 + m_{k+l}^2 \right) \right],$$

где верхний знак соответствует $M = \sigma$, нижний знак $M = \pi$, и $D_k = k^2 + m_k^2$ – знаменатель пропагатора кварка.

Из $1/N_c$ поправок к собственной энергии кварков следует, что кварковый пропагатор имеет вид

$$S_p^{\text{MF}+N_c} = (S_p^{-1} - \Sigma_p^{N_c})^{-1} = S_p + S_p \Sigma_p^{N_c} S_p + \dots, \quad (1.84)$$

где троеточие обозначает вклады более высокого порядка по $1/N_c$. В свою очередь такой кварковый пропагатор приводит к $1/N_c$ поправкам к кварковому конденсату (можно сравнить с уравнением (1.14)). Из двух поправок к собственной энергии, показанным на рисунке 1.7, следует два вклада для кваркового конденсата: $\langle \bar{q}q \rangle^{N_c} = \langle \bar{q}q \rangle^{N_c,a} + \langle \bar{q}q \rangle^{N_c,b}$, которые задаются как

$$\langle \bar{q}q \rangle^{N_c,a} = -\text{C}\Pi_0^{\sigma,a}, \quad \langle \bar{q}q \rangle^{N_c,b} = \zeta^b, \quad (1.85)$$

где $\Pi_p^{\sigma,a} \equiv \Pi_\sigma(p^2)$ можно получить из уравнения (1.18) для Π_p^σ путем замены с формфакторами в числителях вида $f_{k_+}^2 f_{k_-}^2 \rightarrow f_{k_+} f_{k_-}$, и ζ^b можно получить из ζ сделав замену формфакторов вида $f_{k+l}^4 \rightarrow f_{k+l}^2$ в числителе функции $\Gamma_{l,l}^{\sigma\text{MM}}$ в уравнении (1.83).

Пропагатор полного пиона состоит из части соответствующей лидирующему вкладу среднего поля плюс $1/N_c$ поправки (подробности приведены в приложении)

$$\Pi_\pi^{\text{Full}}(p^2) = \Pi_\pi^{\text{MF}}(p^2) + \Pi_\pi^{N_c}(p^2) \quad (1.86)$$

и масса пиона может быть найдена путем решения уравнения

$$-G^{-1} + \Pi_\pi^{\text{Full}}((M_\pi^{\text{Full}})^2) = 0. \quad (1.87)$$

Константу связи кварк-мезон следует разделить на часть соответствующую среднему полю и поправку $1/N_c$. Это разделение можно сделать единственным образом только для пиона в киральном пределе. В случае конечной m_c

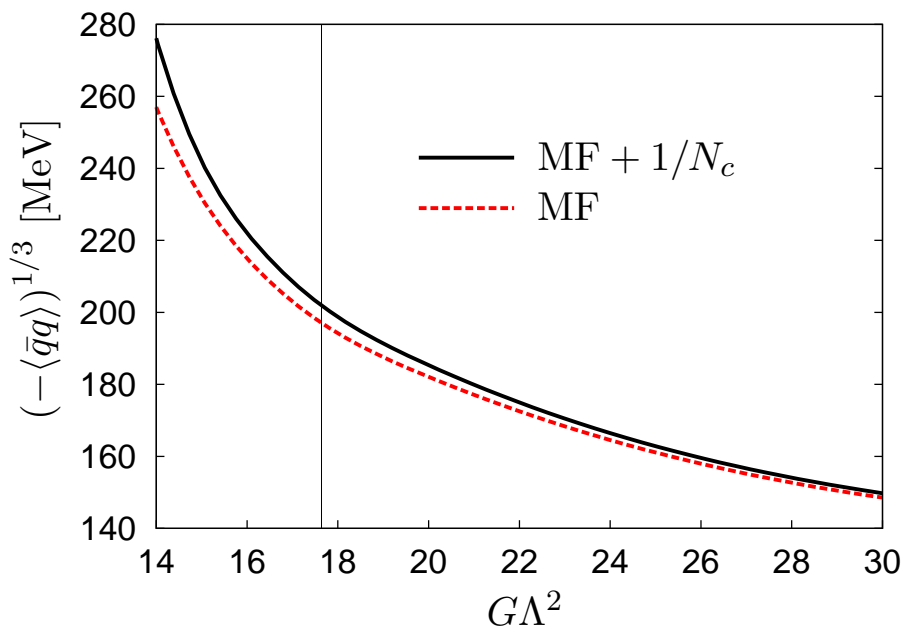


Рис. 1.8: Кварковый конденсат как функция $G\Lambda^2$. Полный результат с учётом $1/N_c$ поправок (черная сплошная линия) сравнивается с вкладом среднего поля (красная пунктирная линия). Вертикальная линия соответствует набору параметров No. 4.

существуют различные возможности учесть члены более высокого порядка $1/N_c$ как функции от p^2 . Поэтому используется следующее соотношение

$$\begin{aligned} (g_\pi^{\text{Full}})^{-2} &= \left. \frac{\partial \Pi_\pi^{\text{Full}}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=(M_\pi^{\text{Full}})^2}, \\ (g_\pi^{\text{MF}})^{-2} &= \left. \frac{\partial \Pi_\pi^{\text{MF}}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=(M_\pi^{\text{MF}})^2}. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Есть два источника $1/N_c$ поправок для поправок к константе слабого распада пиона. Одним из них является поправка к мезон-кварковой константе связи, которая может быть получена из выражения для среднего поля (1.80) путём подстановки $g_\pi^{\text{MF}} \rightarrow g_\pi^{\text{N}_c} = g_\pi^{\text{Full}} - g_\pi^{\text{MF}}$. Другой тип вкладов связан с появлением новых диаграмм в подлидирующем порядке $1/N_c$. Детали расчёта этих вкладов приводятся в приложении Г.

С учётом $1/N_c$ поправок к свойствам мезонов необходимо переопределить параметры модели (Λ , m_c , $G\Lambda^2$). Используется схема, когда параметры модели выбираются таким образом, чтобы воспроизводить физические значения для массы заряженного пиона $M_{\pi^\pm} = 139.57$ МэВ и константы слабого распада пиона $f_\pi = 92.42$ МэВ. При этом остаётся свободным один безразмерный параметр $G\Lambda^2$. Различные параметризации нелокальной модели с

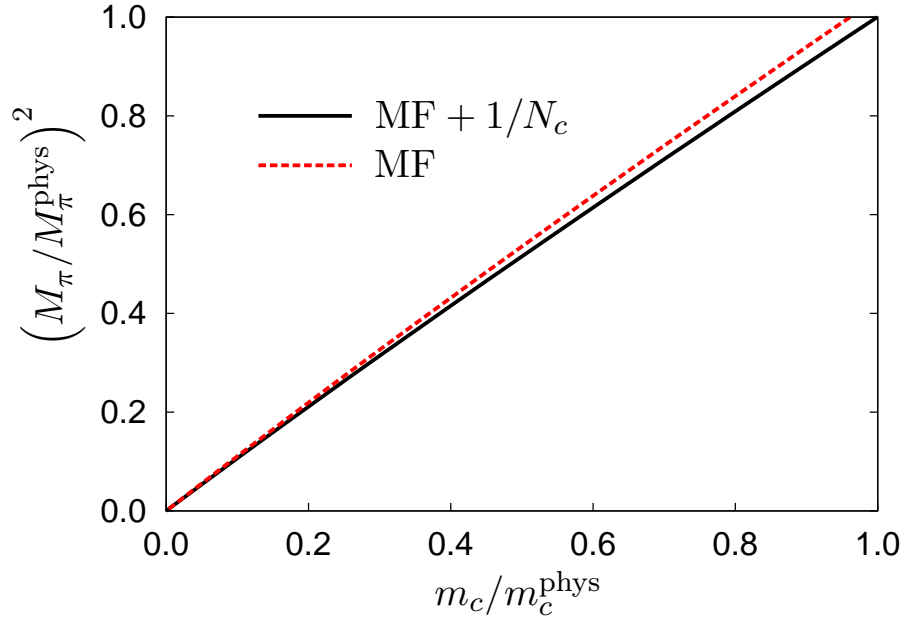


Рис. 1.9: Квадрат массы пиона, нормированный на физическое значение $(M_\pi/M_\pi^{\text{phys}})^2$ в зависимости от массы токового кварка нормированной на физическое значение m_c/m_c^{phys} в приближении среднего поля (красная пунктирная линия) и полный расчёт с поправкой $1/N_c$ (черная сплошная линия). Выбран набор параметров No. 4.

учёт $1/N_c$ поправок за пределами среднего поля приведены в таблице 1.2. Соответствующее поведение кваркового конденсата как функции безразмерного параметра $G\Lambda^2$ представлено на рис. 1.8.

Одной из важных проверок расчётов является доказательство голдстоуновской природы пиона. В случае точной киральной симметрии пион должен быть безмассовым. Эта проверка показана на рисунке 1.9, где M_π^{Full} и M_π^{MF} отображается как функция токовой массы кварка для Λ и G , вычисленных для набора параметров 4.

Таблица 1.2: Различные параметризации нелокальной модели: токовая масса кварка m_c , параметр нелокальности Λ и безразмерный параметр $G\Lambda^2$, динамическая масса кварка m_d , положение первых двух полюсов и соответствующий (псевдо)-порог в пропагаторе кварков на уровне среднего поля, значения массы пиона и константы слабого распада без $1/N_c$ поправок. Набор с самым высоким пороговым значением $\bar{q}q$ выделен жирным шрифтом. Псевдо-пороговые значения показаны курсивом.

№.	$G\Lambda^2$	Λ	m_c	m_d	первые полюса	(псевдо)-порог	M_π^{MF}	f_π^{MF}
размерность		МэВ	МэВ	МэВ	$\Gamma\text{эВ}^2$	МэВ	МэВ	МэВ
1	13.35	1479.2	2.82	139.2	$-0.0205, -6.331$	286.7, 5032.3	155.5	71.5
2	14.89	934.8	5.58	211.2	$-0.0529, -1.545$	459.8, 2486.0	144.6	83.4
3	17.06	705.9	8.64	269.1	$-0.1262, -0.447$	710.6, 1337.2	142.4	87.1
4	17.64	670.3	9.38	281.9	$-0.2291 \pm i0$	957.3	142.2	87.6
5	19.72	580.5	11.78	322.5	$-0.1082 \pm i0.1763$	<i>793.7</i>	141.7	88.7
6	22.83	500.8	14.95	373.8	$-0.0289 \pm i0.1832$	<i>654.7</i>	141.4	89.5
7	26.33	445.3	18.15	424.0	$+0.0117 \pm i0.1692$	<i>562.0</i>	141.2	90.0
8	30.20	404.4	21.37	473.4	$+0.0344 \pm i0.1536$	<i>496.0</i>	141.2	90.3

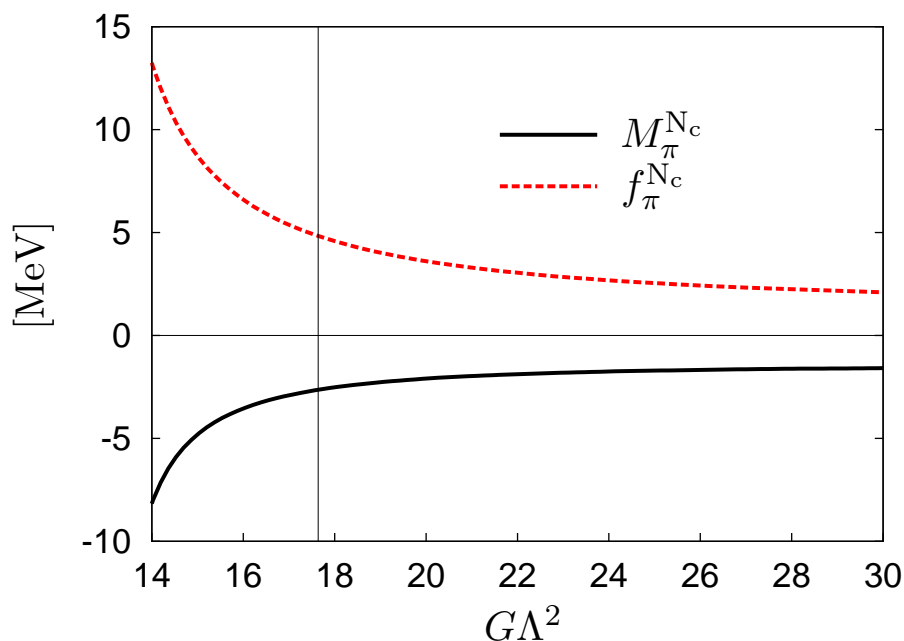


Рис. 1.10: $1/N_c$ поправки к массе пиона (черная сплошная линия) и константе слабого распада пиона (красная пунктирная линия).

Вклады среднего поля в массу пиона и константу слабого распада также перечислены в таблице 1.2 для различных наборов параметров. Соответствующие $1/N_c$ поправки показаны на рисунке 1.10. Для наименьшего значения $G\Lambda^2 \sim 14$ эти поправки составляют -15 МэВ для массы пиона и 20 МэВ для f_π . Для набора параметров 4 поправки составляют всего около -2 МэВ и 5 МэВ соответственно.

Область применимости модели тесно связана с полюсной структурой пропагатора кварков в приближении среднего поля и зависит от параметров. При больших значениях Λ пропагатор имеет два полюса на вещественной оси p^2 , тогда как при уменьшении Λ эти полюсы в конечном итоге объединяются, а затем переходят в пару комплексно-сопряжённых полюсов. Всегда существует бесконечное число дополнительных комплексно-сопряжённых полюсов, которые, однако, играют лишь второстепенную роль в данной области энергий. Если пропагатор имеет действительные полюса, в диаграммах кварковых петель существует реальный порог, т. е. для внешних импульсов $p > p_{\text{threshold}}$ петли имеют мнимые части. Комплексно-сопряжённых полюса, с другой стороны, приводят к псевдо-порогу. В отсутствие реальных полюсов кварковые петли тогда являются чисто действительными, но имеют излом при прохождении псевдо-порога. Обычно отсутствие полюсов на дей-

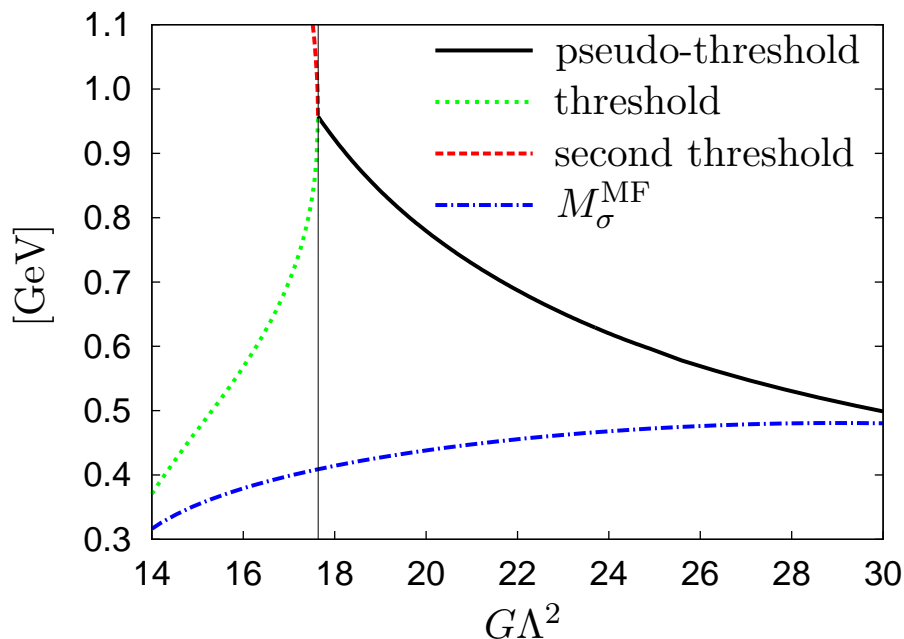


Рис. 1.11: (Псевдо) порог $\bar{q}q$ соответствующий особенностям пропагатора кварка наиболее близко лежащих к началу координат. Ниже критического значения $G\Lambda^2$ (тонкая сплошная линия) на диаграммах с кварковыми петлями имеются реальные пороги (зелёная пунктирная линия для первой особенности и красная пунктирная линия для второй). Выше этого критического значения нижние особенности пропагатора кварка являются комплексно-сопряжёнными, и мнимой части кварковых петель нет. Однако кварковые петли содержат псевдо-порог (жирная сплошная линия). Синяя пунктирная линия обозначает массу σ -мезона в приближении среднего поля.

ствительной оси p^2 рассматривается как возможный критерий конфайнмента кварков [233]. Однако из-за излома в реальной части диаграмм петли кварка применимость модели выше псевдо-порога по крайней мере сомнительна.

Положения двух нижних полюсов кварков (наиболее близко лежащих к началу координат) и соответствующие им (псевдо-)пороги поляризационной кварковой петли приведены в таблице. (Псевдо) пороги также показаны на рисунке 1.11. Из рисунка видно, что набор параметров 4 соответствует максимальному пороговому значению. По этой причине будет использоваться набор параметров 4 далее в разделе посвящённом расчётам при конечной температуре T .

Результаты для расчетов $1/N_c$ поправок для кваркового конденсата и константы распада пиона весьма неожиданны. Наивно можно было ожидать, что учёт мезонных петель должен уменьшить силу спонтанного нарушения киральной симметрии и, таким образом, уменьшить значения $|\langle\bar{q}q\rangle|$ и f_π .

Действительно, это было обнаружено в [80, 81] для локальной модели НИЛ. Однако, как видно из рисунков 1.8 и 1.10, в нелокальной модели оказывается абсолютно противоположное поведение для всех наборов параметров модели. Очевидно, что это различие между локальной и нелокальной моделью требует некоторого пояснения.

Как указывалось ранее, в нелокальной модели после введения гауссовского форм-фактора все диаграммы в любом порядке автоматически становятся конечными. Это существенно отличается от локальной модели НИЛ, где ввиду ее неперенормируемости необходимо вводить новые независимые параметры регуляризации (обрезания) для кварковых петель и для мезон-кварковых петель. В [80, 81] использовалась регуляризация Паули-Вилларса для кварковых петель и трехмерное обрезание Λ_M для мезон-кварковых петель. Для изучения перехода от нелокальной модели к локальной построим нелокальную модель с тремя параметрами:

- нелокальности – Λ
- регуляризации кварковой петли – Λ_q
- регуляризации мезонной петли – Λ_M

Локальная модель соответствует пределу

$$\Lambda \rightarrow \infty \quad \Lambda_q = \Lambda_q^{\text{fit}} \quad , \quad \Lambda_M = \Lambda_M^{\text{fit}} \quad , \quad (1.89)$$

в то время как нелокальная модель без регуляризации может быть получена с помощью предельного перехода

$$\Lambda = \Lambda^{\text{fit}} \quad , \quad \Lambda_q \rightarrow \infty \quad \Lambda_M \rightarrow \infty \quad . \quad (1.90)$$

Для определённости сравним локальную модель [80, 81] с нелокальной из [218] с параметрами параметризованными на наблюдаемые в приближении среднего поля. Отметим, что для данных параметризаций кварковый конденсат в локальной и нелокальной моделях согласуется в пределах менее 0,5 %.

Следующим шагом является рассмотрение $1/N_c$ поправок и изучение роли мезонного трехмерного обрезания Λ_M . Для этого очень наглядно изучить отношение полного кваркового конденсата к вкладу среднего поля $\langle \bar{q}q \rangle / \langle \bar{q}q \rangle^{\text{MF}}$.

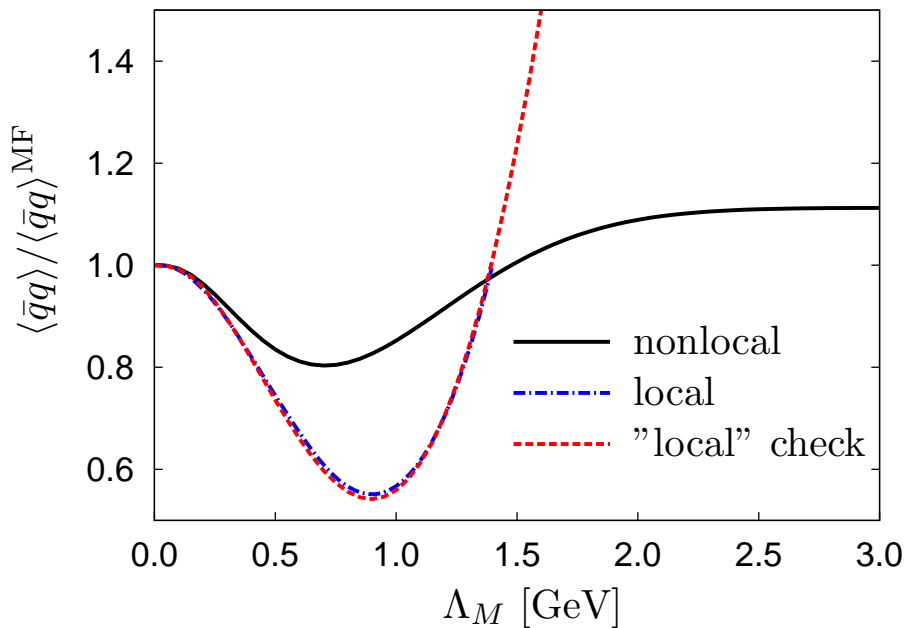


Рис. 1.12: Отношение $\langle \bar{q}q \rangle / \langle \bar{q}q \rangle^{\text{MF}}$ как функция трехмерного обрезания Λ_M . Полный нелокальный результат показан черной сплошной линией. Локальный результат (синяя пунктирная линия) взят из рисунка 3а [80]. «Локальная» проверка (красная пунктирная линия) является локальным пределом нелокальных вычислений по уравнению (1.89).

На рисунке 1.12 сравнивается зависимость этого отношения как функция Λ_M для локальной модели НИЛ из работы [80] (пунктирная линия), с нелокальной моделью (жирная сплошная линия) и ее локальным пределом (пунктирная линия).⁹ Очень интересно, что в области ниже ~ 1.5 ГэВ эти модели предсказывают отрицательный знак для поправки $1/N_c$, тогда как для больших Λ_M знак получается положительным. Однако в нелокальной модели абсолютное значение поправки полностью насыщается для Λ_M , превышающего ~ 2.5 ГэВ, что значительно выше фактических параметризаций для Λ_q и Λ_M в работе [81]. Фактически, в работе [80] было обнаружено, что уже при $\Lambda_M \approx 1250$ МэВ пропагатор пионов приобретает нефизические полюсы, что интерпретируется как нарушение $1/N_c$ разложения. В нелокальной модели таких нефизических эффектов не наблюдается.

Чтобы изучить зависимость знака $1/N_c$ поправки к кварковому конденса-

⁹Заметим, что в работе [80] был вычислен полный кварковый конденсат, включая её пертурбативную часть (с обрезанием ПВ), тогда как в нелокальной модели и её локальном пределе рассматривается только непертурбативная часть. Однако для локальной модели различие для нестранного конденсата мало.

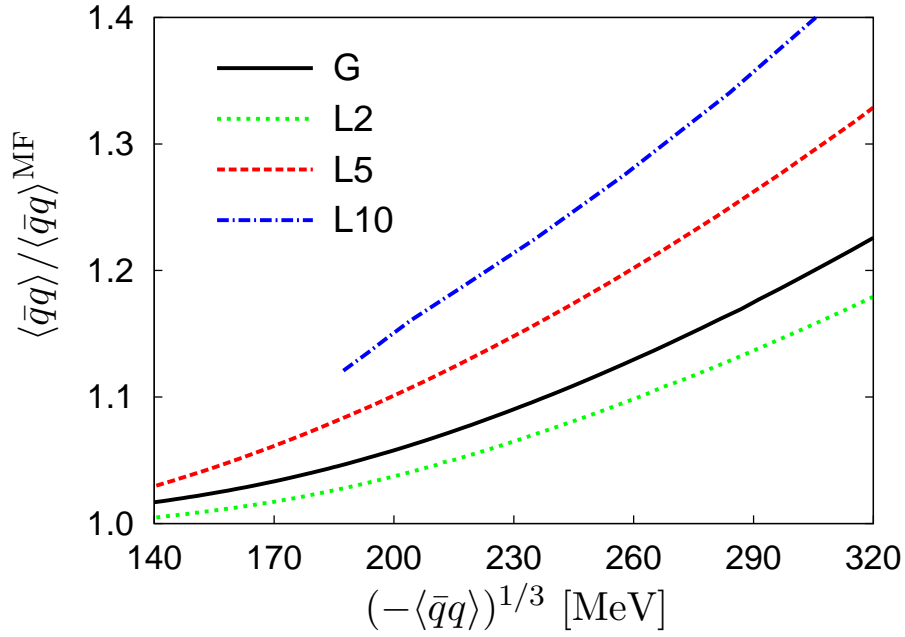


Рис. 1.13: Соотношение $\langle \bar{q}q \rangle / \langle \bar{q}q \rangle^{MF}$ как функция кваркового конденсата для различных форм-факторов: гауссова (G) и «лоренцевского» (L2, L5, L10) с $n = 2, 5, 10$.

ту от форм-фактора, рассмотрим формфактор «лоренцевского» типа $f(p_E^2) = 1/(1 + (p_E^2/\Lambda^2)^n)$ с $n = 2, 5$ или 10 использованный в работах [240, 241]. Обнаружено, что знак поправки $1/N_c$ положителен для всех возможных параметризаций. Это показано на рисунке 1.13.

Похожий вопрос касается $1/N_c$ поправок для функций кварка $A(p^2)$ и $B(p^2)$, определённым как

$$S_p^{-1} = A(p^2)\not{p} - B(p^2), \quad (1.91)$$

или, что эквивалентно, перенормировки волновой функции $Z(p^2) = 1/A(p^2)$ и массовой функции $M(p^2) = B(p^2)/A(p^2)$ кварка. В приближении среднего поля выполняются соотношения $A^{MF}(p^2) \equiv 1$ и $B^{MF}(p^2) = m_c + m_d f^2(p^2)$. После учёта $1/N_c$ поправок оказывается, что «векторная» функция $A(p^2)$ усиливается, что соответствует уменьшению $Z(p^2)$. Однако «скалярная» функция $B(p^2)$ увеличивается ещё сильнее, так что массовая $M(p^2)$ функция также увеличивается.

На рисунке 1.14 представлено сравнение поведения массовой функции и константы перенормировки волновой функции в модели с $1/N_c$ поправками для двух наборов параметров № 2 и № 4 с данными решеточных вычислений, экстраполированными в киральный предел [242]. Видно, что есть качествен-

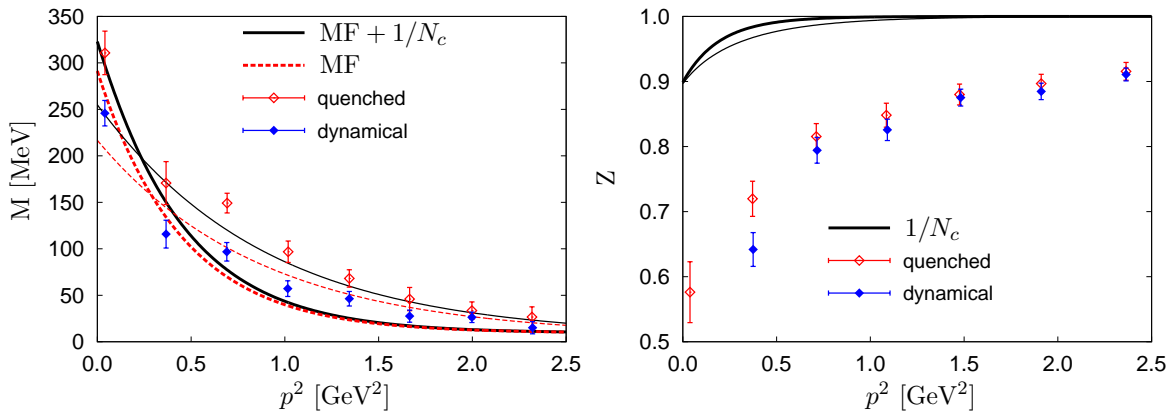


Рис. 1.14: Поведение массовой функции кварка (левая часть) и константы перенормировки волновой функции (правая часть) для набора № 4 (жирные линии) и набора № 2 (тонкие линии). Результаты полных расчётов с $1/N_c$ поправками (черные сплошные линии) и вклада среднего поля (красные пунктирные линии) сравниваются с решёточными данными quenched (открытые символы) и unquenched (полные символы) [242] экстраполированными в киральный предел.

ное согласие импульсной зависимости массовой функции кварка, вычисленной в КХД на решётке с расчётами в нелокальной кварковой модели. Более того результат для массовой функции кварка для параметризации № 2 (тонкая черная сплошная линия) согласуется с решёточной массой кварка при нулевом импульсе, но оказывается выше данных решётки для динамических кварков при конечном импульсе. Набор параметров № 4 (жирная чёрная сплошная линия) приводит к большим значениям массовой функции кварка при малых импульсах $p^2 \leq 0.5 \text{ ГэВ}^2$ примерно на 25 % и ниже данных решётки приблизительно на такую же величину в промежуточном диапазоне импульсов $0.5 \leq p^2 [\text{ГэВ}^2] \leq 2$.

Как видно из рисунка 1.14, согласие результатов модели для функции перенормировки волновой функции $Z(p)$ с данными решётки довольно плохое. Этого можно было ожидать, поскольку в расчётах в подходе уравнений Дайсона–Швингера обнаруживается уменьшение $Z(p)$ на 30 % при низких импульсах уже в приближении без учёта мезонных эффектов [243], тогда как настоящей модели $Z \equiv 1$ в приближении среднего поля. Нетривиальное среднее значение для $Z(p)$ можно получить в нелокальной модели НИЛП, введя подходящую сепарабельную форму взаимодействия с векторными токами с производной (1.16) (или взаимодействие ранга 2) [226, 244–246]. В настоящей модели используется сепарабельный анзац в скалярно-

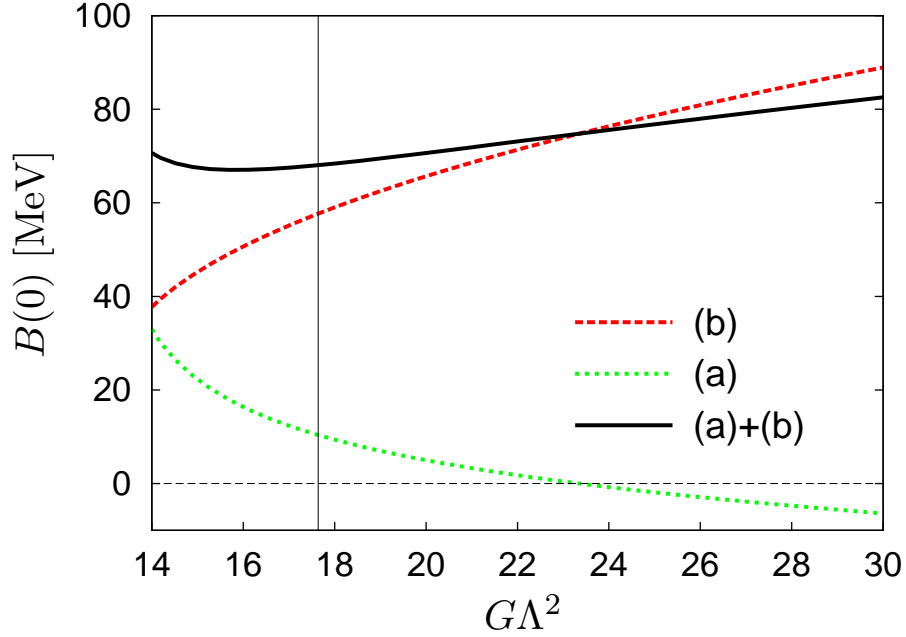


Рис. 1.15: $1/N_c$ поправка в «скалярную» кварковую функцию $B(p^2)$ при $p^2 = 0$ как функция безразмерной комбинации $G\Lambda^2$. Также показаны отдельные вклады диаграмм (a) и (b) показанных на рисунке 1.7.

псевдоскалярном канале (взаимодействие первого ранга), и нетривиальная перенормировка волновой функции возникает только из поправок $1/N_c$. Поскольку эти вклады обычно не превышают уровень 10 % по сравнению с приближением среднего поля, не стоит ожидать хорошего количественного описания $Z(p)$ при низких импульсах.

На рис. 1.15 показана $1/N_c$ поправка к $B(0)$ как функция безразмерной комбинации параметров $G\Lambda^2$. Помимо полного вклада (черная сплошная линия), который практически не зависит от выборов параметров, также указаны отдельно показаны вклады диаграмм (a) и (b) изображённых на 1.7. Как видно, доминирующий вклад даёт диаграмма (б), которая всегда положительна.

В евклидовом пространстве вклад диаграммы (b) в B -функцию принимает вид

$$B^{N_c, (b)}(p_E^2) = f^2(p_E^2) \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{f^2(q_+^2) m(q_+^2)}{q_+^2 + m^2(q_+^2)} \times \left[\frac{3g_\pi^2(q_E^2)}{q_E^2 + M_\pi^2} - \frac{g_\sigma^2(q_E^2)}{q_E^2 + M_\sigma^2} \right], \quad (1.92)$$

где определено $q_+ = q_E + p_E$ и

$$g_M^2(q_E^2) = \frac{q_E^2 + M_M^2}{G^{-1} - \Pi_M(q_E^2)}. \quad (1.93)$$

Последнее является прямым расширением формул (1.20) и (1.22) до (евклидовых) немассовых импульсов. В частности, g_M^2 строго положительно. Следовательно, пион даёт положительный вклад в $B^{N_c, (b)}(p_E^2)$, а вклад σ -мезона отрицательный из-за дополнительного знака минус. Поскольку пионы более важны, как из-за их меньшей массы, так и из-за фактора вырождения, равного 3, общий вклад является положительным, как легко видеть на рисунке 1.15.

Пренебрегая форм-факторами и импульсными зависимостями масс кварков и констант связи, уравнение (1.92) имеет естественную интерпретацию в терминах простой модели, в которой кварки связаны с пионами и σ -мезоном с помощью Юкавовского взаимодействия,

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -\bar{q}(x) [g_\sigma \sigma(x) + g_\pi i \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(x)] q(x). \quad (1.94)$$

С этой точки зрения наблюдаемое усиление B -функции при учёте пионных петель должно быть ожидаемым результатом. Это похоже не согласуется с анализом уравнений Дайсона–Швингера в работе [243], где пионные петли дают отрицательный вклад в B -функцию кварка. Однако при таком подходе пионы были введены несколько иначе, а именно путём изменения кварк-глюонной вершины. Интересно, что такое введение пионов приводит к противоположному знаку и анализ такого поведения заслуживает дальнейшего изучения.

На первый взгляд результаты вычислений в нелокальной модели также противоречат анализу, проведённому в работе [85] в локальной модели НИЛ, где было обнаружено, что B -функция уменьшается, когда включены петли мезонов. Однако в отличие от настоящего подхода в схеме строгого $1/N_c$ разложения в работе [85] учитываются обратное влияние мезонных петель на собственно-энергетическую функцию среднего поля. При ближайшем рассмотрении [85] обнаруживается, что сами мезонные петли дают положительный вклад в B -функцию, а их обратное влияние сильно уменьшает вклад Хартри, так что общий эффект представляет собой уменьшение $B(0)$. В свою

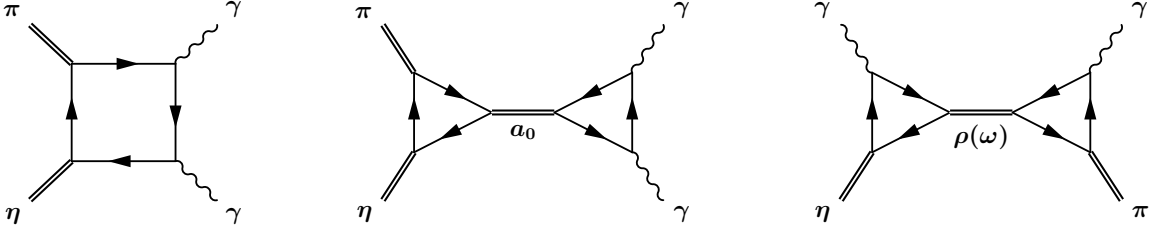


Рис. 1.16: Диаграммы для амплитуды процесса $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$.

очередь, это говорит о том, что увеличение $B(0)$, полученное модели, может быть связано с пертурбативной схемой учёта $1/N_c$ поправок. С другой стороны, хорошо известна проблема, что в схеме с обратным влиянием мезонов на уравнения среднего поля, пионы в петлях оказываются слишком тяжёлыми, так что в [85] положительный вклад петель пионов занижен.

1.4 $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$

Амплитуда распада $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ содержит две независимые тензорные структуры [247]

$$T = T^{\mu\nu} \epsilon_\mu^1 \epsilon_\nu^2, \quad T^{\mu\nu} = A(x_1, x_2)(q_1^\nu q_2^\mu - q_1 \cdot q_2 g^{\mu\nu}) + B(x_1, x_2) \left[-M_\eta^2 x_1 x_2 g^{\mu\nu} - \frac{q_1 \cdot q_2}{M_\eta^2} p^\mu p^\nu + x_1 q_2^\mu p^\nu + x_2 p^\mu q_1^\nu \right], \quad (1.95)$$

p , q_1 , q_2 — импульс η мезона и фотонов, ϵ_μ^1 и ϵ_ν^2 — векторы поляризации фотонов, а $x_i = p \cdot q_i / M_\eta^2$.

Ширина распада $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ имеет вид

$$\Gamma = \frac{M_\eta^5}{256\pi^2} \int_0^{(1-y)/2} dx_1 \int_{x_2^{\min}}^{x_2^{\max}} dx_2 \left\{ \left| A(x_1, x_2) + \frac{1}{2} B(x_1, x_2) \right|^2 [2(x_1 + x_2) + y - 1]^2 + \frac{1}{4} |B(x_1, x_2)|^2 [4x_1 x_2 - [2(x_1 + x_2) + y - 1]]^2 \right\}, \quad (1.96)$$

$$x_2^{\min} = (1 - 2x_1 - y)/2, \quad x_2^{\max} = (1 - 2x_1 - y)/2(1 - 2x_1), \quad y = M_\pi^2 / M_\eta^2.$$

В модели НИЛ амплитуда процесса распада $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ описывается тремя типами диаграмм, показанными на рисунке 1.16: кварковая петля (квадрат,

«box» или другими словами контактный член) и обмен скалярными (a_0) и векторными (ρ, ω) резонансами. Рассмотрим эти вклады подробнее.

Скалярный мезонный обмен даёт вклад только в $A(x_1, x_2)$. Он состоит из трех частей и может быть записан в виде [59]:

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2) &= \frac{g_{a_0\eta\pi}(2q_1 \cdot q_2)g_{a_0\gamma\gamma}(2q_1 \cdot q_2)}{G_{a_0}^{-1} - \Pi_{SS}^{uu}(2q_1 \cdot q_2)}, \quad q_1 \cdot q_2 = M_\eta^2 \left(x_1 + x_2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{M_\pi^2}{2} \\ g_{a_0\gamma\gamma}(p^2) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \frac{m_u(1 - 4x_1x_2)}{(p^2x_1x_2 - m_u^2 - \Lambda^2)^2(p^2x_1x_2 - m_u^2)} \quad (1.97) \\ g_{a_0\eta\pi}(p^2) &= -i2N_cN_f \int \frac{d_\Lambda^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \{V_{a_0}S_u(k + q_1)V_\pi S_u(k)V_\eta S_u(k - q_2)\}. \end{aligned}$$

здесь Tr_D – след от матриц Дирака, индекс Λ в мере интегрирования означает регуляризацию интеграла типа Паули–Вилларса и $S_j(p) = (\hat{p} - m_j)^{-1}$.

Амплитуда с обменом векторным мезонным (ρ, ω) состоит из двух кварковых треугольников аномального типа и пропагатора векторного мезона, явный вид которых приводится в работе [59]. Её вклады

$$\begin{aligned} B(x_1, x_2) &= \sum_{j=\rho,\omega} \sum_{i=1,2} \frac{g_{\eta j\gamma}(M_\eta^2, M_\eta^2(1 - 2x_i), 0)g_{\pi j\gamma}(M_\pi^2, M_\eta^2(1 - 2x_i), 0)}{G_2^{-1} - \Pi_{VV}^{uu}(M_\eta^2(1 - 2x_i))}, \\ A(x_1, x_2) &= \sum_{j=\rho,\omega} \sum_{i=1,2} \times \quad (1.98) \\ &\times \frac{g_{\eta j\gamma}(M_\eta^2, M_\eta^2(1 - 2x_i), 0)g_{\pi j\gamma}(M_\pi^2, M_\eta^2(1 - 2x_i), 0)M_\eta^2(1 - x_i)}{G_2^{-1} - \Pi_{VV}^{uu}(M_\eta^2(1 - 2x_i))}. \end{aligned}$$

Кварковая петлевая диаграмма имеет более сложную структуру, она состоит из трёх типов диаграмм (и трех перекрестных) и содержит псевдоскалярные и аксиально-векторные компоненты π и η мезонов

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -ie^2 \int \frac{d_\Lambda^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left(\right. \\ &V_\pi S(k)V_\eta S(k + p - q_1 - q_2)\gamma_\nu S(k + p - q_1)\gamma_\mu S(k + p) + \\ &+ V_\pi S(k)V_\eta S(k + q_2)\gamma_\nu S(k + p - q_1)\gamma_\mu S(k + p) \quad (1.99) \\ &\left. + V_\pi S(k)\gamma_\nu S(k + q_2)\gamma_\mu S(k + q_1 + q_2)V_\eta S(k + p) + \{q_1 \leftrightarrow q_2, \mu \leftrightarrow \nu\} \right) \end{aligned}$$

Диаграммы вычисляются численно. Для дополнительной проверки корректности вычислений все коэффициенты перед тензорными структурами вычис-

ляются независимо и выполняется проверка, что они составляют калибровочно-инвариантное выражение (1.95).

Модель имеет шесть параметров: константы связи G_1 , G_2 , H , параметр ПВ регуляризации Λ и конституэнтные массы кварков m_u и m_s . Используются две схемы параметризации. В первом случае параметры модели определяются с использованием масс пиона, каона, ρ и η мезонов и константы слабого распада пиона f_π . Поскольку количество входных параметров больше, чем количество физических наблюдаемых на единицу, то следуя работе [58] можно выбрать массу u -кварка чуть больше половины массы ρ -мезона. В результате имеет следующий набор параметров модели (Параметризация I): $m_u = 390$ МэВ, $m_s = 496$ МэВ, $G_1 = 6.62$ ГэВ⁻², $G_2 = -11.29$ ГэВ⁻², $H = 123$ ГэВ⁻⁵, $\Lambda = 1$ ГэВ. Значения токовых масс кварков m_u^0, m_s^0 определяются из уравнений щели (1.40) $m_u^0 = 3.9$ МэВ и $m_s^0 = 70$ МэВ ($m_u^0/m_s^0 = 18$). Для этого набора параметров модели ширина двух фотонного распада η мезона $\Gamma_{\eta \rightarrow \gamma\gamma} = 0.37$ КэВ оказывается меньше экспериментальной: $\Gamma_{\eta \rightarrow \gamma\gamma}^{\text{exp}} = 0.515 \pm 0.018$ [74].

Для параметризации модели II параметры выбираются таким образом, чтобы воспроизвести ширину двухфотонного распада η мезона вместо его массы (масса в этом случае слегка занижена $M_\eta = 530$ МэВ) : $m_u = 390$ МэВ, $m_s = 506$ МэВ, $G_1 = 8.04$ ГэВ⁻², $G_2 = -11.29$ ГэВ⁻², $H = 77$ ГэВ⁻⁵, $\Lambda = 1$ ГэВ. Токовые массы кварков составляют $m_u^0 = 3.9$ МэВ и $m_s^0 = 78$ МэВ ($m_u^0/m_s^0 = 20$).

Полученные результаты для ширины распада приведены в таблице 1.3 для двух наборов параметров модели. Основной вклад в этот процесс даёт диаграмма типа квадрат. Вклад векторных мезонов имеет конструктивную интерференцию, в то время как вклад скалярного a_0 имеет деструктивную интерференцию. Результаты находятся в удовлетворительном согласии с данными Crystal Ball 0.45 ± 0.12 эВ [95], и больше недавних измерений Crystal Ball/TAPS 0.33 ± 0.03 эВ [96] .

Полезно рассмотреть дифференциальную вероятность распада. На рисунке 1.17 дифференциальная вероятность распада как функция инвариантной массы фотонов показана для вкладов скалярных мезонов, векторных мезо-

Вклад	Параметризация I	Параметризация II
векторные мезоны	0.17	0.20
скалярные мезоны	0.03	0.12
векторные+скалярные мезоны	0.10	0.12
контактный	0.28	0.35
контактный+векторные мезоны	0.78	0.95
полный	0.53	0.45

Таблица 1.3: Ширина распада $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$.

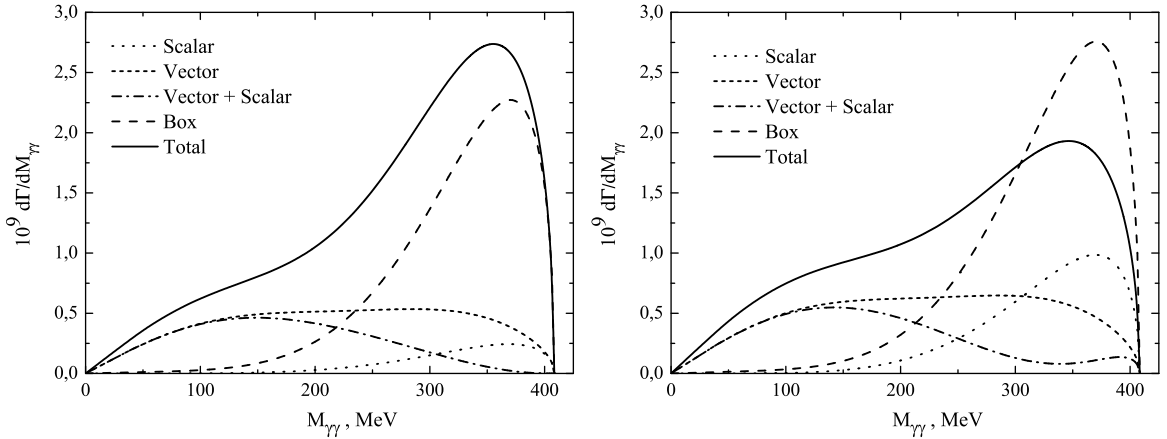


Рис. 1.17: Дифференциальная вероятность распада как функция инвариантной массы фотонов для вкладов скалярных мезонов(точки), векторных мезонов(короткое тире), скалярных+векторных мезонов(точка-тире), квадрат (длинное тире) и полный(сплошная линия) для набора I (слева) и II (справа).

нов, скалярных+векторных мезонов, кваркового квадрата и полный вклад для двух параметризаций модели. На рисунке 1.18 результаты наших расчётов сравниваются с расчётами в киральном унитарном подходе [106]. Следует отметить, что во время написания оригинальной работы [59] не было экспериментальных измерений дифференциальной вероятности, они появились позднее [96]. На рисунке 1.18 приводится сравнение результатов расчётов в модели с экспериментальными измерениями дифференциальной вероятности распада как функции квадрата инвариантной массы фотонов. Видно, что параметризация II имеет лучшее согласие с экспериментальными данными.

В заключение можно напомнить, что ранние вычисления процесса $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ в модели НИЛ не включают в себя импульсную зависимость кварковых петель и смешивания псевдоскалярно-аксиально-векторных состояний и поэтому удовлетворительно согласуются с экспериментом ГАМС.

В экспериментальных измерениях этого распада коллаборацией Crystal

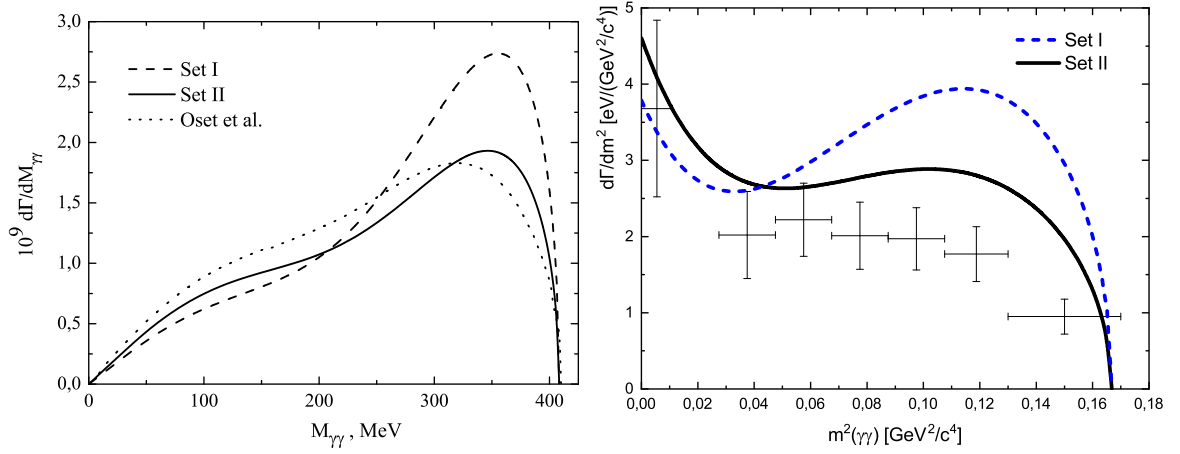


Рис. 1.18: (Слева) Дифференциальная вероятность распада как функция инвариантной массы фотонов для параметризаций I(тире), II (линия) вместе с результатами кирального унитарного подхода [106] (точки). (Справа) Дифференциальная вероятность распада как функция квадрата инвариантной массы фотонов для параметризаций I(синие тире), II (чёрная линия) вместе с экспериментальным результатом [96].

	$\rho \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma, 10^{-5}$	$\omega \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma, 10^{-5}$
СНД [109]	$4.1^{+1.0}_{-0.9} \pm 0.3$	$6.6^{+1.4}_{-1.3} \pm 0.6$
КМД-2 [110]	$5.2^{+1.5}_{-1.3} \pm 0.6$	$6.4^{+2.4}_{-2.0} \pm 0.8$
PDG [248]	4.4 ± 0.8	6.7 ± 1.1
[113]	1.1	2.8
[114]	4.2	4.7
[117]	3.8	4.5 ± 1.1
[119]	4.2	$3.5 - 4.6$
Настоящая работа	4	8.3

Таблица 1.4: Брэнчинги процессов $\rho \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ и $\omega \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ полученные в эксперименте (верхняя часть) и в теоретических работах(нижняя часть).

Валл 2005 г. значение ширины распада оказалось почти в два раза меньше. В более поздних измерениях ширина распада оказалась ещё меньше, а также было получена дифференциальная вероятность распада. Известны теоретические оценок в разных моделях, и по-видимому для правильного описания этого процесса важна импульсная зависимость амплитуд. В диссертационной работе рассматриваются вклады кваркового квадрата, скалярной и векторной полюсных диаграмм с полной импульсной зависимостью. Учитывается также смешивание псевдоскалярных–аксиально-векторных мезонов.

Таблица 1.5: Брэнчинги процессов $\rho \rightarrow \eta\pi^0\gamma$ и $\omega \rightarrow \eta\pi^0\gamma$ полученные в теоретических работах.

	$\rho \rightarrow \eta\pi^0\gamma$	$\omega \rightarrow \eta\pi^0\gamma$
[113]	4×10^{-10}	1.6×10^{-7}
[114]	7.5×10^{-10}	3.3×10^{-7}
[118]	2.3×10^{-8}	5.72×10^{-7}
[119]	5.2×10^{-10}	9.7×10^{-8}
Настоящая работа	1.64×10^{-9}	3.65×10^{-7}

1.5 $\rho(\omega) \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma, \rho(\omega) \rightarrow \eta\pi^0\gamma$

Для расчёта процессов редких распадов в два псевдоскалярных мезона и фотон применяется локальная модель НИЛ, полученная с помощью градиентного разложения [13, 17, 19–21]. Параметры модели: конституентные массы нестранного $m_u = m_d = 263$ МэВ и странного $m_s = 407$ МэВ кварков, параметр $O(4)$ обрезания $\Lambda = 1.27$ ГэВ, четырех кварковые константы связи в скалярно-псевдоскалярном $G_1 = 4.16$ ГэВ⁻² и векторном–аксиально-векторном $G_2 = -14.66$ ГэВ⁻² секторах, и константа шесть-кваркового взаимодействия $K = 12.5$ ГэВ⁻⁵ фиксируются [20, 21] используя экспериментальные значения масс пиона, каона и ρ -мезона, разница масс $\eta - \eta'$ мезонов, константа слабого распада пиона $f_\pi = 92.4$ МэВ и ширина сильного распада $\rho \rightarrow \pi\pi$ ($g_\rho = 5.94$).

Константа связи скалярного мезона с кварками имеет вид [8, 13, 21]

$$g_{a_0} = g_{\sigma_u} = [4I_2^\Lambda(m_u)]^{-1} = \frac{g_\rho}{\sqrt{6}}, \quad (1.100)$$

где $I_2^\Lambda(m)$ – логарифмически расходящийся интеграл

$$I_2^\Lambda(m) = \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int d_e^4k \frac{\theta(\Lambda^2 - k^2)}{(k^2 + m^2)^2}. \quad (1.101)$$

После учёта $\pi - a_1$ смешивания, волновая функция пиона приобретает аксиально-векторную компоненту и происходит дополнительная перенормировка пионного поля

$$g_\pi = g_{\eta_u} = g_{a_0} Z^{1/2}, \quad Z = \left(1 - \frac{6m_u^2}{M_{a_1}^2}\right)^{-1}. \quad (1.102)$$

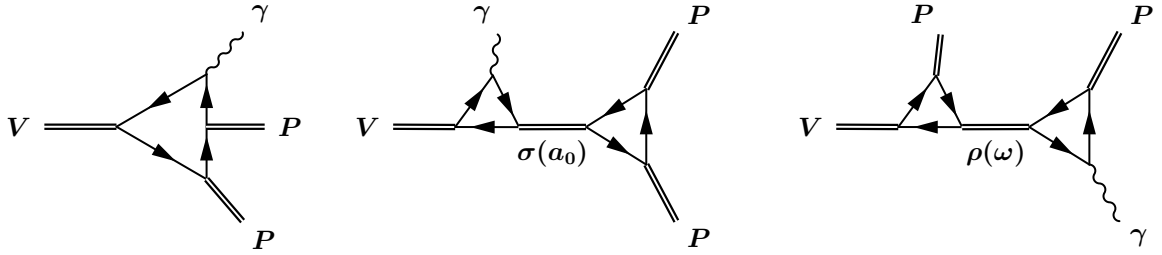


Рис. 1.19: Диаграммы соответствующие амплитудам распадов векторных мезонов на пару псевдоскалярных мезонов и фотон.

Из слабого распада пиона $\pi \rightarrow \mu\nu$ следует отношение Гольдбергера–Треймана $f_\pi = m/g_\pi$. Физические изоскалярные мезоны являются смешанными состояниями чистых нестраничных и странных состояний, и взаимодействие 'т Хоофта позволяет равномерно описать это смешение. Физические состояния определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \eta &= -\eta_u \sin \bar{\theta} + \eta_s \cos \bar{\theta}, \\ \eta' &= \eta_u \cos \bar{\theta} + \eta_s \sin \bar{\theta}, \quad \bar{\theta} = \theta - \theta_0 \\ \sigma &= \sigma_u \cos \bar{\phi} - \sigma_s \sin \bar{\phi}, \\ f_0 &= \sigma_u \sin \bar{\phi} + \sigma_s \cos \bar{\phi}, \quad \bar{\phi} = \theta_0 - \phi \end{aligned} \quad (1.103)$$

где $\theta_0 \approx 35.3^\circ$ является идеальным углом смешивания ($\text{ctg } \theta_0 = \sqrt{2}$), $\theta = -18.1$ и $\phi = 23.4$ являются синглет-октетными углами смешивания для псевдоскалярных и скалярных мезонов [20].

Процессы редких распадов векторных мезонов описываются тремя типами диаграмм, показанными на рисунке 1.19: кварковая петля (квадрат) и диаграммы с промежуточными скалярными и векторными мезонами. Рассмотрим вершины, содержащиеся в резонансных диаграммах, и рассчитаем соответствующие физические процессы. Амплитуда процессов сильного распада скалярных мезонов $a_0(980) \rightarrow \eta\pi$ и $\sigma \rightarrow \pi\pi$ выражается через расходящийся интеграл $I_2^\Lambda(m)$ и имеет вид

$$\begin{aligned} g_{\sigma\pi\pi} &= 8 \cos \bar{\phi} g_{\sigma_u} g_\pi^2 I_2^\Lambda(m_u) = \cos \bar{\phi} \frac{2m_u^2 Z^{1/2}}{f_\pi}, \\ g_{a_0\eta\pi} &= -8 \sin \bar{\theta} g_{a_0} g_{\eta_u} g_\pi I_2^\Lambda(m_u) = -\sin \bar{\theta} \frac{2m_u^2 Z^{1/2}}{f_\pi}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Соответствующие сильные ширины распада скалярных мезонов принимают

вид

$$\Gamma_\sigma(s) = \frac{3g_{\sigma\pi\pi}^2}{8\pi s} \sqrt{1 - \frac{4M_\pi^2}{s}}, \quad \Gamma_{a_0}(s) = \frac{g_{a_0\eta\pi}^2}{4\pi s} \times \quad (1.105)$$

$$\times \sqrt{\left(1 - \frac{(M_\eta + M_\pi)^2}{s}\right) \left(1 - \frac{(M_\eta - M_\pi)^2}{s}\right)}$$

В результате ширины распадов $a_0(980) \rightarrow \eta\pi$ и $\sigma \rightarrow \pi\pi$ находятся в согласии с экспериментом (см. таблицу 1.6). Зависящая от импульса ρ -мезона ширина равна

$$\Gamma_\rho(s) = \frac{g_\rho^2 s}{48\pi} \left(1 - \frac{4M_\pi^2}{s}\right)^{3/2}$$

Распады $\rho(\omega) \rightarrow \pi\gamma$, $\rho(\omega) \rightarrow \eta\gamma$ описываются аномальной треугольной кварковой петлей, их амплитуды имеют вид

$$A(VP\gamma) = C_{VPV} \frac{g_\rho}{8\pi f_\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu q_1^\alpha q_2^\beta, \quad (1.106)$$

где q_1, q_2 и $\epsilon_\mu^1, \epsilon_\nu^2$ - импульс и вектор поляризации векторного мезона и фотона соответственно. Факторы C_{VPV} есть $C_{\rho\pi\gamma} = e$, $C_{\rho\eta\gamma} = -3 \sin \bar{\theta} e$, $C_{\omega\pi\gamma} = 3e$, $C_{\omega\eta\gamma} = -\sin \bar{\theta} e$, $C_{\rho\pi\omega} = g_\rho$, $C_{\rho\eta\omega} = -\sin \bar{\theta} g_\rho$, $C_{\omega\eta\omega} = -\sin \bar{\theta} g_\rho$. Заметим, что распады $\rho(\omega) \rightarrow \pi\gamma$ хорошо согласуются с экспериментом, тогда как $\rho(\omega) \rightarrow \eta\gamma$ находятся в качественном согласии с экспериментом. Основной распад ω -мезона $\omega \rightarrow 3\pi$ немного больше экспериментальных данных. В [249] этот процесс вычисляется с использованием форм-фактора в вершине $\rho\pi\pi$, что приводит к лучшему согласованию с экспериментом. Результаты расчётов в модели для ширины различных процессов распада приведена в таблице 1.6 вместе с экспериментальными результатами.

Амплитуды процессов распада $\rho(\omega) \rightarrow \pi^0(\eta)\pi^0\gamma$ описываются тремя типами диаграмм, показанными на рисунке 1.19. Возможные комбинации промежуточных состояний для диаграмм с мезонными обменами:

- $\rho \rightarrow (\sigma\gamma \text{ и } \omega\pi^0) \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$
- $\omega \rightarrow (\sigma\gamma \text{ и } \rho\pi^0) \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$
- $\rho \rightarrow (a_0\gamma \text{ и } \omega\pi^0 \text{ и } \rho\eta) \rightarrow \eta\pi^0\gamma$

	theory	experiment
$\rho \rightarrow \pi\pi$, MeV	149	149.4 ± 1.0
$\sigma \rightarrow \pi\pi$, MeV	582	600 – 1000
$a_0 \rightarrow \eta\pi$, MeV	105	50 – 100
$\omega \rightarrow 3\pi$, MeV	9.05	7.56 ± 0.07
$\rho^0 \rightarrow \pi^0\gamma$, KeV	86	90 ± 13
$\rho^0 \rightarrow \eta\gamma$, KeV	69	44 ± 5
$\omega \rightarrow \pi\gamma$, KeV	771	755^{+30}_{-26}
$\omega \rightarrow \eta\gamma$, KeV	7.68	4.16 ± 0.46

Таблица 1.6: Мезонные распады, полученные в модели по сравнению с экспериментальными данными [248] .

- $\omega \rightarrow (a_0\gamma \text{ и } \rho\pi^0 \text{ и } \omega\eta) \rightarrow \eta\pi^0\gamma$

Кварковая петлевая диаграмма типа квадрат имеет вид [92]

$$A_{\text{box}}^{\mu\nu} = C_{VPP\gamma} \frac{5eg_\rho}{(6\pi f_\pi)^2} (g^{\mu\nu}(p \cdot q_1) - p^\nu q_3^\mu),$$

где p, q_3 - импульс векторного мезона и фотона; коэффициенты $C_{VPP\gamma}$ имеют вид $C_{\rho\pi^0\pi^0\gamma} = 1$, $C_{\omega\pi^0\pi^0\gamma} = 1/3$, $C_{\rho\eta\pi^0\gamma} = -\sin\bar{\theta}/3$, $C_{\omega\eta\pi^0\gamma} = -\sin\bar{\theta}$.

Скалярные диаграммы обмена имеют ту же тензорную структуру, что и кварковый квадрат. Поэтому удобно скомбинировать эти амплитуды

$$A_{\text{box+scalar}}^{\mu\nu} = C_{VPP\gamma} \frac{5eg_\rho}{(6\pi f_\pi)^2} (g^{\mu\nu}(p \cdot q) - p^\nu q^\mu) \times \left(1 - \frac{4m_u^2 C_S}{m_S^2 - s - im_S \Gamma_S(s)} \right), \quad (1.107)$$

где σ означает скалярный σ или $a_0(980)$ мезон; коэффициенты $C_S - C_{a_0} = 1$, $C_\sigma = \cos\bar{\phi}$; $s = (p - q_3)^2 = (q_1 + q_2)^2$, где q_1 и q_2 являются импульсами псевдоскалярных мезонов.

Амплитуды с векторным мезонным (ρ, ω) обменом состоят из двух кварковых треугольников аномального типа и пропагатора векторного мезона:

$$A_{\text{vector}}^{\mu\nu} = \frac{g_\rho}{(8\pi f_\pi^2)^2} \epsilon_{\mu\delta\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\nu\tau\lambda} g^{\delta\gamma} p^\alpha q_3^\lambda \times \left[\frac{C_{VP_1V'} C_{V'P_2\gamma} l_1^\beta l_1^\tau}{m_{V'}^2 - l_1^2 - im_{V'} \Gamma_{V'}(l_1^2)} + \frac{C_{VP_1V''} C_{V''P_2\gamma} l_2^\beta l_2^\tau}{m_{V''}^2 - l_2^2 - im_{V''} \Gamma_{V''}(l_2^2)} \right], \quad (1.108)$$

где V', V'' -промежуточные мезоны и $l_1 = p - q_1$, $l_2 = p - q_2$. Возможные комбинации факторов для различных распадов

- $\rho \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$

$$C_{VP_1V'} = C_{VP_1V''} = C_{\rho\pi\omega}, \quad C_{V'P_2\gamma} = C_{V''P_2\gamma} = C_{\omega\pi\gamma}$$

- $\omega \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$

$$C_{VP_1V'} = C_{VP_1V''} = C_{\rho\pi\omega}, \quad C_{V'P_2\gamma} = C_{V''P_2\gamma} = C_{\rho\pi\gamma}$$

- $\rho \rightarrow \eta \pi^0 \gamma$

$$\begin{aligned} C_{VP_1V'} &= C_{\rho\pi\omega}, \quad C_{VP_1V''} = C_{\rho\eta\rho}, \\ C_{V'P_2\gamma} &= C_{\omega\eta\gamma}, \quad C_{V''P_2\gamma} = C_{\omega\pi\gamma} \end{aligned}$$

- $\omega \rightarrow \eta \pi^0 \gamma$

$$\begin{aligned} C_{VP_1V'} &= C_{\rho\pi\omega}, \quad C_{VP_1V''} = C_{\omega\eta\omega}, \\ C_{V'P_2\gamma} &= C_{\rho\pi\gamma}, \quad C_{V''P_2\gamma} = C_{\omega\pi\gamma} \end{aligned}$$

Ширина ρ мезона задаётся уравнением (1.106), а шириной ω мезона пренебрегается.

В результате ширина редких распадов имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{V\pi^0 P\gamma} &= \frac{1}{192\pi^3 M_V} \int_0^{E_\gamma^{\max}} dE_\gamma \int_{E_\pi^{\min}}^{E_\pi^{\max}} dE_\pi |A_{V\pi^0 P\gamma}|^2, \\ E_\gamma^{\max} &= \frac{M_V^2 - (M_\pi + M_P)^2}{2M_V}, \\ E_\pi^{\min, \max} &= \frac{1}{2M_V(2E_\gamma - M_V)} \times \\ &\times \left[(M_V - E_\gamma)(M_V(2E_\gamma - M_V) + (M_\pi^2 - M_P^2)) \pm E_\gamma \times \right. \\ &\times (M_V(2E_\gamma - M_V) + (M_\pi - M_P)^2)^{1/2} \times \\ &\left. \times (M_V(2E_\gamma - M_V) + (M_\pi + M_P)^2)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (1.109)$$

где E_γ , E_π - энергии фотона и пиона, P означает пион или η -мезон (в случае дополнительного фактора пиона требуется дополнительный фактор 1/2).

процесс	квадрат+скаляр	вектор	интерференция	полный
$\rho \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma, 10^{-5}$	2.36	1.37	0.27	4.0
$\omega \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma, 10^{-5}$	4.97	2.86	0.47	8.3
$\rho \rightarrow \eta\pi^0\gamma, 10^{-9}$	0.56	0.85	0.23	1.64
$\omega \rightarrow \eta\pi^0\gamma, 10^{-7}$	1.22	1.92	0.51	3.65

Таблица 1.7: Различные вклады в брэнчинги для процессов редкого распада векторных мезонов.

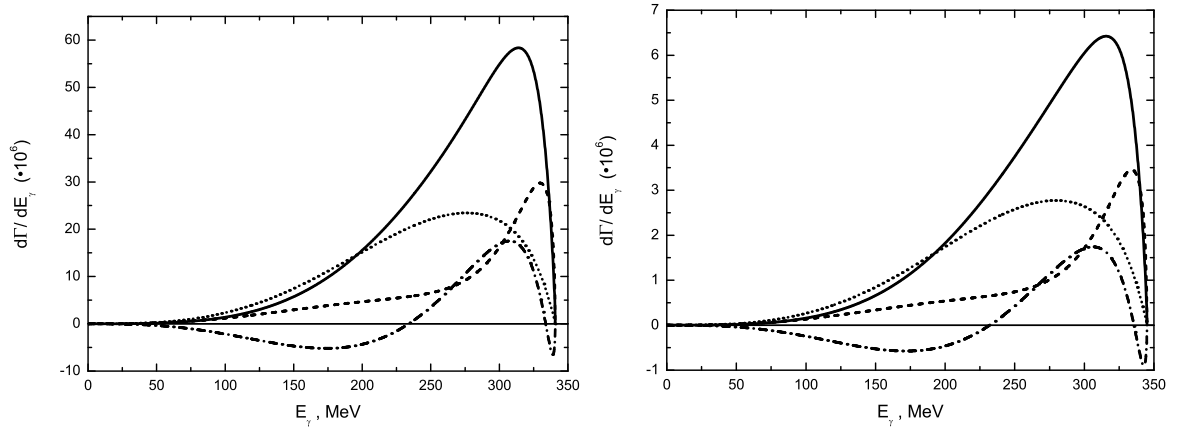


Рис. 1.20: Спектры фотонов для дифференциальных вероятностей распадов $\rho \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ (слева) и $\omega \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ (справа). Показаны различные вклады: квадрат+скалярные мезоны (точки), векторные мезоны(короткая тире), интерференционные(тире-точка) и полный результат (непрерывная линия).

Полученные брэнчинги для редких распадов векторных мезонов приведены в таблице 1.7. Спектры фотонов для дифференциальных вероятностей распадов $\rho \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$, $\omega \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$, $\rho \rightarrow \eta\pi^0\gamma$, $\omega \rightarrow \eta\pi^0\gamma$ показаны на рисунках 1.20 и 1.21.

Проведённые расчёты показывают, что ширины распадов процессов $\rho(\omega) \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ удовлетворительно согласуются с существующими экспериментальными данными. Брэнчинг для процесса $\omega \rightarrow \eta\pi^0\gamma$ также не противоречит существующему экспериментальному пределу. Сравнивая наш результат с предсказаниями различных теоретических моделей, мы видим, что ширина распада с η -мезоном значительно отличается. Поэтому получение экспериментальных данных по этим процессам является весьма актуальной задачей. Подчеркнём, что при расчёте редких процессов в рамках локальной модели НИЛ не используются дополнительные параметры.

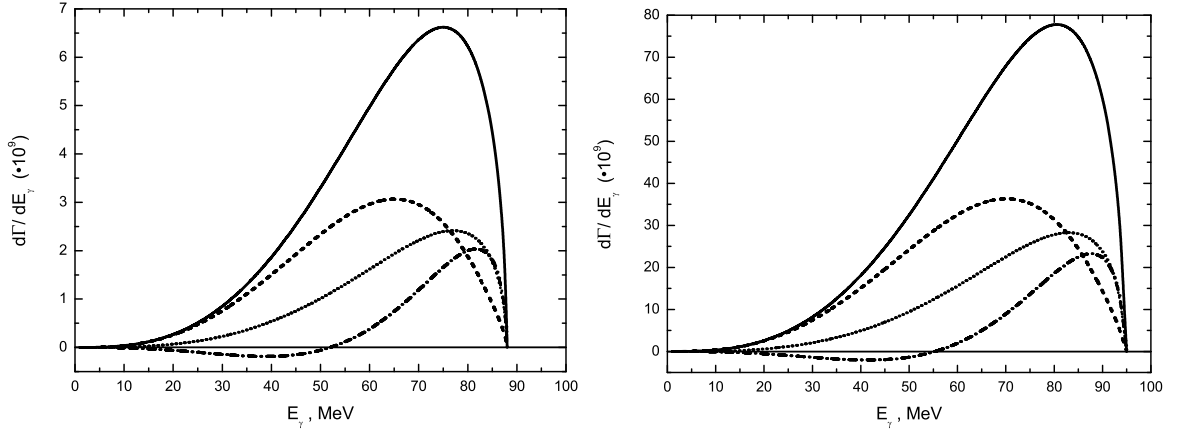


Рис. 1.21: Спектры фотонов для дифференциальных вероятностей распадов $\rho \rightarrow \eta\pi^0\gamma$ (слева) и $\omega \rightarrow \eta\pi^0\gamma$ (справа). оказаны различные вклады: квадрат+скалярные мезонны (точки), векторные мезоны(короткая тире), интерференционные(тире-точка) и полный результат (непрерывная линия).

1.6 Форм-фактор Паули кварка

Общий вид вершины для взаимодействия фотона и кварка, в случае когда кварк находится на массовой поверхности

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(Q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2M_q} F_2(Q^2) \quad (1.110)$$

где F_1, F_2 электромагнитные форм-факторы Дирака и Паули, соответственно, M_q динамическая масса кварка и $\sigma_{\mu\nu} = i(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)/2$. Аномальная кварк-глюонная хромомангнитная (АКГХ) вершина, индуцированная инстантонами, может быть записана в виде [35, 36, 41]

$$V_\mu^a(k_1^2, k_2^2, t^2) = \frac{ig_s\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2M_q} F_2(k_1^2, k_2^2, t^2)t^a, \quad (1.111)$$

где k_1^2 и k_2^2 -виртуальность начального и конечного кварков соответственно, $t = k_1 - k_2$ и рассматривается общий случай ненулевых виртуальностей кварков и глюона. Форм-фактор $F_2(k_1^2, k_2^2, t^2)$ подавляет вершину АКГХ на коротких расстояниях, когда соответствующие виртуальности велики. В рамках инстантонной модели он связан с преобразованным Фурье от кварковой нулевой моды и поля инстантона, поэтому его можно записать в виде

$$F_2(k_1^2, k_2^2, t^2) = \mu_a F_q(|k_1|\rho/2) F_q(|k_2|\rho/2) F_g(|t|\rho), \quad (1.112)$$

где

$$\begin{aligned} F_q(z) &= -z \frac{d}{dz} (I_0(z)K_0(z) - I_1(z)K_1(z)) \\ F_g(z) &= \frac{4}{z^2} - 2K_2(z), \end{aligned} \quad (1.113)$$

$I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ – модифицированные функции Бесселя, ρ – размер инстантона, $\mu_a = F_2(0, 0, 0)$ аномальной хромагнитный момент кварка (АХМК). В рамках модели жидкости инстантонов [34], [35], где все инстантоны имеют одинаковый размер $\rho_c \approx 1/3$ фм, АХМК есть [35, 41]

$$\mu_a = -\frac{3\pi(M_q\rho_c)^2}{4\alpha_s(\rho_c)}. \quad (1.114)$$

Первая отличительная особенность АХМК заключается в том, что константа сильной связи входит в знаменатель, показывающий чёткое непертурбативное происхождение. Второй отличительной чертой является отрицательный знак АХМК. Как мы увидим ниже, этот знак АХМК приводит к положительному знаку аномального магнитного момента кварка. Значение АХМК сильно зависит от динамической массы кварка, которая составляет $M_q = 170$ МэВ в приближении среднего поля (МФА) [34] и $M_q = 350$ МэВ в модели Дьяконова-Петрова (DP) [35]. Поэтому для значения константы сильной связи в инстантонной модели $\alpha_s(\rho_c) \approx 0.5$ и среднего размера инстантонов $\rho_c = 1/600$ МэВ⁻¹ [35] получаем

$$\mu_a^{\text{MFA}} = -0.4 \quad \mu_a^{\text{DP}} = -1.6 \quad (1.115)$$

Вклад в электромагнитный форм-фактор Паули, поступающий от вершины АКГХ, получен при рассмотрении диаграмм, представленных на рисунке 1.22. Для выполнения аналитических расчётов используется гауссовское приближение для форм-факторов в уравнении (1.113)

$$F_g(k_E^2) \approx F_q(k_E^2) \approx e^{-k_E^2/\Lambda^2}, \quad (1.116)$$

с $\Lambda = 2/\rho_c$.

Вклад от рисунка 1.22((b)) совпадает с вкладом рисунка 1.22((a)).Общий

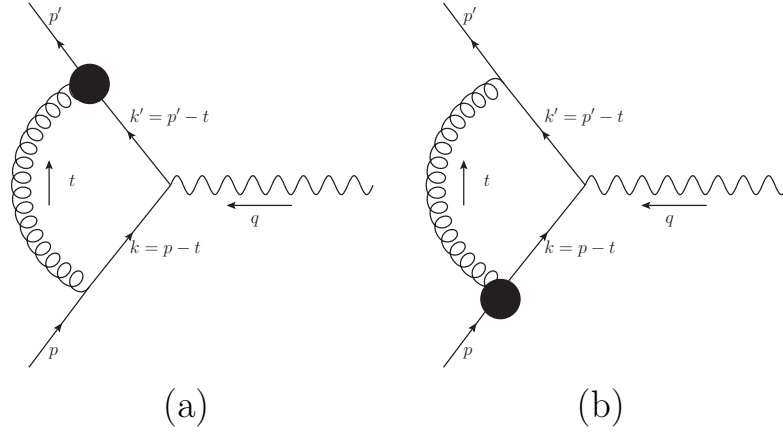


Рис. 1.22: Диаграммы с аномальной кварк-глюонной хромомгнитной вершиной, индуцированной инстантонами, которые дают вклад в электромагнитный форм-фактор кварка. Инстантонная вершина обозначается сплошным блоком.

матричный элемент имеет вид

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &\equiv -e_q C_F g_s^2 \frac{\mu_a}{M_q} \int \frac{d^4 t}{(2\pi)^4} \frac{F_g(t^2) F_q(k'^2) N}{(k'^2 - M_q^2)(k^2 - M_q^2)t^2} \\
 &= -ie_q \bar{u}(p') \Gamma^\mu(p, p') u(p),
 \end{aligned} \tag{1.117}$$

где $C_F = \text{tr}(t^a T^a) = \frac{4}{3}$ - цветовой фактор, а e_q - электрический заряд кварка и

$$N \equiv -i\bar{u}(p') \sigma^{\alpha\rho} (\not{k}' + M_q) \gamma^\mu (\not{k} + M_q) \gamma_\rho t_\alpha u(p). \tag{1.118}$$

Один из способов извлечь форм-фактор Паули $F_2(Q^2)$ из $i\mathcal{M}$ - переупорядочить гамма-матрицы в уравнении (1.118) и найти слагаемое, пропорциональное $i\sigma^{\mu\nu}/2M_q$. Однако есть более простой способ – использовать проекционный оператор [185, 250], используя тождество

$$F_2(q^2) = \text{tr} \left\{ (\not{p}' + M_q) \Lambda_\rho^{(2)}(p', p) (\not{p}' + M_q) \Gamma^\rho(p', p) \right\}, \tag{1.119}$$

где $q^2 = (p' - p)^2 \equiv -Q^2$ и

$$\Lambda_\rho^{(2)}(p', p) \equiv \frac{M_q^2}{k^2(4M_q^2 - k^2)} \left[\gamma_\rho + \frac{k^2 + 2M_q^2}{M_q(k^2 - 4M_q^2)} (p' + p)_\rho \right].$$

Работая в евклидовом пространстве-времени, с помощью параметризации Фейнмана и соотношения

$$\frac{1}{k^n} = \int_0^\infty d\alpha \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha k}, \tag{1.120}$$

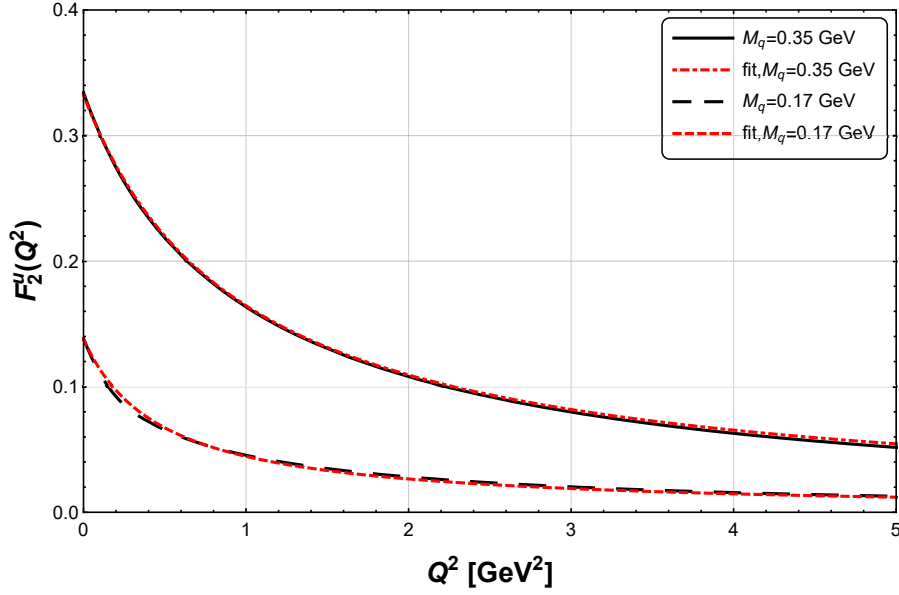


Рис. 1.23: Форм-фактор F_2 как функция Q^2 для различной динамической кварковой массы M_q в сравнении с фитом уравнения (1.124).

МОЖНО ПОЛУЧИТЬ

$$\begin{aligned}
 F_2(Q^2) &= \frac{\mu_a e_q g_s^2}{12\pi^2} \int d^3x \int_0^\infty d\alpha \frac{\alpha^2}{\Delta^2} e^{-M_q^2[\Delta(v_1+v_2)^2 - \frac{1}{\Lambda^2}] - Q^2 \Delta v_1 v_2} \times \\
 &\times \left\{ \frac{3v_1 + 6v_2 - 7}{\Delta} - Q^2 v_1 v_2 (v_1 + 2v_2 - 3) - \right. \\
 &\quad \left. - M_q^2 (v_1 + v_2) ((v_1 + v_2)(v_1 + 2v_2) - 2v_2) \right\}, \tag{1.121}
 \end{aligned}$$

где $\int d^3x \equiv 2 \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(1 - x_1 - x_2 - x_3)$ и

$$\Delta \equiv \alpha + \frac{2}{\Lambda^2}, \quad v_1 \equiv x_2 \frac{\alpha}{\Delta}, \quad v_2 \equiv x_1 \frac{\alpha}{\Delta} + \frac{1}{\Lambda^2 \Delta}. \tag{1.122}$$

В модели форм-фактор $F_2(Q^2)$ пропорционален заряду кварка. Следовательно, существует связь между форм-факторами u- и d-кварков вида

$$F_2^d(Q^2) = -\frac{1}{2} F_2^u(Q^2). \tag{1.123}$$

Для простоты ниже на рисунках представлен только результат для случая u-кварка. На рисунке 1.23 представлен результат вычисления электромагнитного форм-фактора как функции Q^2 для двух различных масс u-кварка. Численный результат хорошо аппроксимируется формулой

$$F_2(Q^2, M_q) = \frac{F_2(0, M_q)}{1 + \rho_c Q^2 / (4.7 M_q)}. \tag{1.124}$$

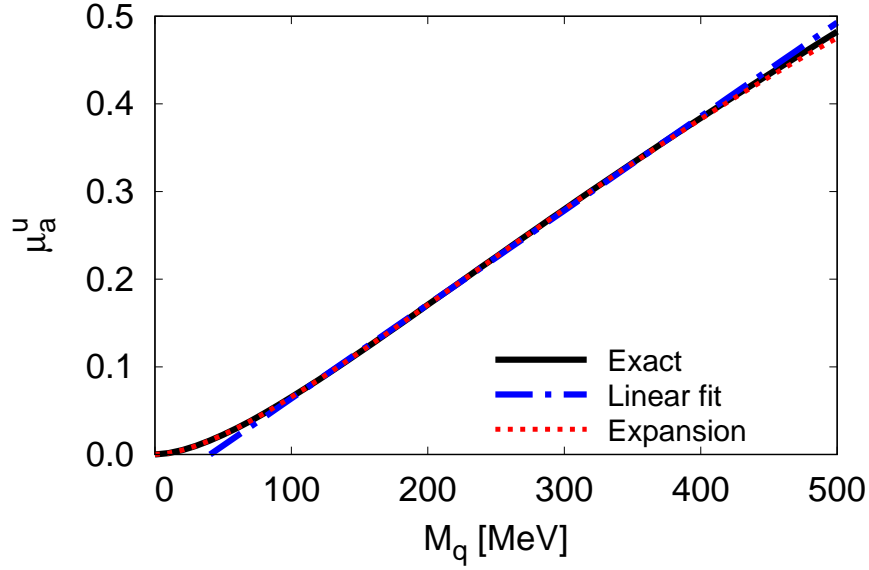


Рис. 1.24: Поведение μ_a^u как функция массы кварка: точное выражение (черная сплошная линия), линейный фит (синяя пунктирная точка), разложение уравнения (1.131) (красная точка).

Необходимо подчеркнуть, что положительный знак форм-фактора F_2 для u -кварка, фиксируется отрицательным знаком АХМК из уравнения (1.114). На рисунке 1.24 показана зависимость величины магнитного момента u -кварка от величины его динамической массы. Поведение μ_a^u как функция массы кварка в диапазоне от 80 до 500 МэВ может быть хорошо аппроксимировано линейной функцией

$$\mu_a^u \approx \frac{2}{3} (-0.065 + 0.97(M_q \rho_c)). \quad (1.125)$$

Результаты для $\mu_a^{e,u} = F_2^u(Q^2 = 0)$ при двух различных значениях динамических масс кварков, полученных в приближении среднего поля [34] и в модели Дьяконова-Петрова [35]

$$\begin{aligned} \mu_a^{e,u} &= 0.33 \text{ for } M_q = 350 \text{ МэВ,} \\ \mu_a^{e,u} &= 0.14 \text{ for } M_q = 170 \text{ МэВ.} \end{aligned} \quad (1.126)$$

Значение магнитного момента кварка при $M_q = 350$ МэВ находится в качественном согласии с результатом расчёта в рамках другого подхода, основанного на уравнениях Дайсона–Швингера [251]. Хотелось бы подчеркнуть, что в работе [251] не рассматривается зависимость от Q^2 . Эта зависимость Q^2 в инстантонной модели представлена на рисунке 1.23. Можно

отметить довольно сильную зависимость от виртуальности фотона, ввиду форм-факторов кварков и глюонов, представленных в уравнении (1.116).

Асимптотическое разложения форм-фактора при больших $Q^2 \gg M_q^2$ имеет вид

$$F_2(Q^2) \approx -\frac{1}{Q^2} \frac{e_q C_F g_s^2 \mu_a}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk^2 \frac{k^{2(n+2)}}{n!(n+2)!} M_q^{2n} \times \\ \times [F_g D_g]_{n+1} \left(2[F_q D_q]_{n-1} - M_q^2 \frac{k^2}{(n+3)} [F_q D_q]_{n+1} \right),$$

где

$$[F_q D_q]_{-1} = - \int_{k^2}^{\infty} dl^2 F_q(l^2) D_q(l^2) \\ [F_q D_q]_0 = F_q(k^2) D_q(k^2) \\ [F_q D_q]_{+1} = - \left(\frac{d}{dk^2} \right) (F_q(k^2) D_q(k^2)) \\ \dots \\ [F_q D_q]_{+n} = \left(-\frac{d}{dk^2} \right)^n (F_q(k^2) D_q(k^2)), \quad (1.127)$$

и похожие формулы для $[F_g D_g]_i$ с соответствующим изменением индекса $q \rightarrow g$. Используя выражения для форм-факторов в глюонном и кварковом секторах из уравнения (1.116) и $D_g(k^2) = 1/k^2$, $D_q(k^2) = 1/(k^2 + M_q^2)$ можно переписать в виде

$$F_2(Q^2) \approx \frac{1}{Q^2} \frac{e_q C_F g_s^2 \mu_a}{4\pi^2} \left\{ \int_0^{\infty} dk^2 \frac{e^{-k^2/\Lambda^2}}{k^2 + M_q^2} \left[2\Lambda^2 - e^{-k^2/\Lambda^2} (k^2 + 2\Lambda^2) \right] \times \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk^2 \frac{k^{2(n+2)} M_q^{2n}}{(n-1)!(n+2)!} \right. \quad (1.128) \\ \left. \times \left(\frac{2}{n} (F_g D_g)_{n+1} (F_q D_q)_{n-1} - (F_g D_g)_n (F_q D_q)_n \right) \right\}$$

и показать, что основной вклад исходит от первого члена в скобках. Кроме того, можно выполнить дополнительное разложение для M_q^2/Λ^2 . В этом приближении и игнорируя второй член в уравнении (1.128), можно записать

ведущие порядки в M_q^2/Λ^2 разложения в виде

$$F_2(Q^2) \approx 4e_q \frac{M_q^2}{Q^2} \left(2 \ln(2) - \frac{1}{2} \frac{M_q^2}{\Lambda^2} \left[\ln \left(8 \frac{M_q^2}{\Lambda^2} \right) - 2 + \gamma_E \right] \right). \quad (1.129)$$

где γ_E - постоянная Эйлера. Используя отношение $\Lambda \approx 2/\rho_c$, его можно переписать как

$$F_2(Q^2) \approx 4e_q \frac{M_q^2}{Q^2} \left(2 \ln(2) - \frac{1}{2} + \frac{(M_q \rho_c)^2}{4} [\ln(2(M_q \rho_c)^2) - 2 + \gamma_E] \right). \quad (1.130)$$

При больших Q^2 форм-фактор ведёт себя как $F_2(Q^2) \sim 1/Q^2$.

Можно показать, что в пределе $Q^2 \rightarrow 0$ форм-фактор равен

$$F_2(0) \approx e_q (M_q \rho_c)^2 \left(y + \frac{(192y + 211)}{288} (M_q \rho_c)^2 + \frac{(1536y + 3089)}{9216} (M_q \rho_c)^4 + \dots \right), \quad (1.131)$$

где

$$y = \ln \left(\frac{2}{(M_q \rho_c)^2} \right) - \gamma_E - \frac{1}{4}.$$

Разложение в уравнении 1.131 хорошо описывает точный результат в области малых $M_q \rho_c < 1$, см. рисунок 1.24. Видно, что $F_2(0)$ исчезает в пределе $M_q \rightarrow 0$. Это означает, что этот вклад в форм-фактор напрямую связан с явлением спонтанного нарушения киральной симметрии.

В заключение можно отметить, что в этом разделе был рассмотрен электромагнитный форм-фактор Паули кварка в рамках непертурбативного подхода на основе модели вакуума КХД как жидкости инстантонов. Показано, что аномальное кварк-глюонное хромомангнитное взаимодействие индуцированное инстантонами приводит к большому магнитному моменту *u* и *d* кварков. Электромагнитный форм-фактор Паули кварка приводит к перевороту спина. Поэтому он должен вносить вклад в различные спин-зависимые фотон-адронные сечения, включая поляризованное полуинклюзивное глубоко-неупругое рассеяние. Другим возможным применением является исследование влияния ненулевого значения аномального кваркового магнитного момента на динамику кварк-глюонной плазмы в сильном магнитном поле, см.

[252]. Можно подчеркнуть, что предложенный тип фотонного взаимодействия с кварком чувствителен к топологической структуре вакуума КХД, которая может быть существенно изменена во время перехода деконфайнмента [253–255]. Это явление может привести, например, к подавлению прямого рождения фотонов, индуцированного аномальной кварк-фотонной вершиной в КГП.

Глава 2

Исследование поведения в среде

В данной главе рассматриваются процессы в среде. Напомним, что есть два формализма «реального» и «мнимого» времени для проведения исследований в кварковых моделях в горячей и плотной материи [256–258]. В формализме «реального времени» кварковой пропагатор в локальной модели НИЛ в среде имеет вид [256, 259]

$$S(p, T, \mu) = (\hat{p} + m) \left[\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + i2\pi\delta(p^2 - m^2)(\theta(p^0)n(\vec{p}, \mu) + \theta(-p^0)n(\vec{p}, -\mu)) \right], \quad (2.1)$$

где

$$n(\vec{p}, \mu) = \left(1 + \exp \frac{E - \mu}{T} \right)^{-1} \quad (2.2)$$

есть функция Ферми-Дирака для кварков, $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. С использованием трёхмерного обрезания можно использовать следующий способ вычисления квадратично- и логарифмически-расходящихся интегралов $I_1^{\Lambda_3}(m, T, \mu)$, $I_2^{\Lambda_3}(m, T, \mu)$, имеющих отношение к уравнению щели и константе перенормировки мезонного поля. Сначала выполняется интегрирование в плоскости комплексного p_0 , после чего вводится регуляризация оставшегося интеграла с использованием трёхмерного обрезания Λ_3 . В результате расходящиеся

интегралы принимают вид

$$I_1^{\Lambda_3}(m, T, \mu) = \frac{N_c}{(2\pi)^2} \int_0^{\Lambda_3} dp \frac{p^2}{E} (1 - \eta(\vec{p}, \mu) - \eta(\vec{p}, -\mu)),$$

$$I_2^{\Lambda_3}(m, T, \mu) = \frac{N_c}{2(2\pi)^2} \int_0^{\Lambda_3} dp \frac{p^2}{E^3} (1 - \eta(\vec{p}, \mu) - \eta(\vec{p}, -\mu)). \quad (2.3)$$

Не совсем очевидно как такой формализм может быть применим для нелокальных моделей, т.к. вместо конституэнтной массы кварка появляется массовая функция и уравнение $p^2 = m^2(p^2)$ может не иметь решений для вещественных p^2 , а иметь множество решений в комплексной плоскости.

Поэтому в нелокальных моделях предпочтительным является использование формализма «мнимого времени» Мацубары, где происходит замена интегрирования по нулевой компоненте импульса на суммирование по частотам

$$p^0 \rightarrow (i\omega_n + \mu) \quad (2.4)$$

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \rightarrow iT \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \quad (2.5)$$

где ω_n Мацубаровские частоты, $\omega_n = (2n+1)\pi T$ для фермионов и $\omega_n = 2n\pi T$ для бозонов; μ – химический потенциал и T – температура.

При вычислениях в среде предполагается используется стандартное предположение [259], что от температуры и химического потенциала зависят только динамические массы, а параметры модели такие как константы четырех и шестикварковых взаимодействий, токовые массы кварков и параметр нелокальности (обрезания) имеют те же значения, что и в вакууме. В результате по уравнениям щели оказывается возможным однозначно определить значения динамических масс кварков при любом значении температуры и химического потенциала.

Предлагается усовершенствование модели нелокальной модели с дополнительным потенциалом петли Полякова с учётом $1/N_c$ поправок, которые необходимы для рассмотрения адронных вкладов вблизи и ниже фазовых переходов деконфайнмента и восстановления киральной симметрии. Более

того, существование связанных состояний выше T_c может иметь решающее значение для понимания свойств сильно связанной кварк-глюонной плазмы [134]. Таким образом, последовательное включение вкладов адронного газа должно включать диссоциацию адронов, являющихся связанными состояниями кварков и антикварков ниже температуры перехода в резонансные корреляции континуума при большей температуре. Этот процесс является адронным переходом Мотта [260] и впервые обсуждался в работах [261, 262] и был сформулирован в рамках модели НИЛ в [135, 136], с использованием концепции спектральных функций и фазовых сдвигов рассеяния в среде в рамках подхода Бет–Уленбека, см. [263]. Подобный анализ трудно провести в нелокальной модели, поэтому диссоциация пионов и каонов рассматривается в локальной модели Намбу–Иона-Лазинио с петлей Полякова (НИЛП). В этом приближении оцениваются изменения фазовых сдвигов от температуры и химического потенциала в псевдоскалярном, скалярном и векторных мезонных каналах. Показано, что изменение характера псевдоскалярных связанных состояний в резонансный континуум при температуре перехода Мотта сигнализируется скачком фазового сдвига на пороге от π до нуля в соответствии с теоремой Левинсона. Продемонстрирована важность учёта состояний рассеяния, которые обеспечивают полное исчезновение фазового сдвига в каждом из каналов мезонов при больших энергиях, таким образом исключая мезонные корреляции из термодинамики при высоких температурах. Таким образом настоящий подход обеспечивает единообразное рассмотрение процесса перехода от мезонного газа к кварк-глюонной плазме. Обсуждается возникновение аномальной моды для мезонов, состоящих из кварков с неравными массами, что особенно заметно для состояний K^+ и κ^+ при конечной плотности вещества, что является возможным механизмом для объяснения эффекта «рога» для отношения K^+/π^+ в столкновениях тяжёлых ионов.

Также в качестве возможных сигналов образования новых состояний вещества исследуются электромагнитные и сильные распады скалярных и векторных мезонов, которые происходят из-за смешивания σ - ω , ρ - a_0 и ϕ - f_0 в плотной барионной материи. В отличие от [144], где учитывались только вклады пионных петель, используется локальная версия модели НИЛ с тре-

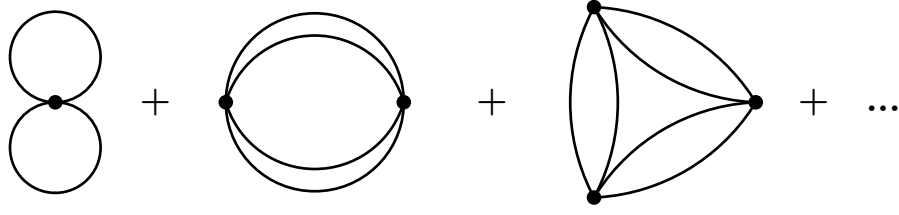


Рис. 2.1: Диаграмма типа «кольцевая сумма» .

мя флейворами и взаимодействием 'т Хоофта в приближении среднего поля для оценки вклада кварковых петель в скалярно-векторное смешивание, поскольку кварковые петли дают ведущий по $1/N_c$ вклад. Рассчитаны парциальные ширины, соответствующие прямым распадам скалярных и векторных мезонов в адронной фазе, вблизи перехода в фазу с восстановленной киральной симметрией.

Изложение основывается на работах [56, 215, 218, 220, 224].

2.1 Мезонные корреляции в модели с петлей Полякова и давление

Рассмотрим случай нулевого химического потенциала. Центральной величиной для анализа является термодинамический потенциал при конечной температуре, который можно записать в виде суммы части среднего поля и части, которая описывает мезонные корреляции,

$$\Omega(T) = \Omega_{\text{mf}}(T) + \Omega_{\text{corr}}(T) - \Omega_0 . \quad (2.6)$$

Как обычно, вводится константа вычитания Ω_0 , которая выбирается из условия $\Omega(0) = 0$. Технически корреляционная часть $\Omega_{\text{corr}}(T)$ соответствует «кольцевой сумме» кварк-антикварковых петель, показанной на рисунке 2.1 (см. [135, 136, 264]).

Для оценки (2.6) рассмотрим нелокальное обобщение модели Намбу–Иона-Лазинио с дополнительным(цветным) потенциалом, представляющим собой потенциал петли Полякова. Нелокальное четырехкварковое взаимодействие выбирается в сепарабельной форме с кварковыми токами вида (1.4), мотивированной моделью инстантонной жидкости [38, 230, 265], где оно возникает из внутренней нелокальной структуры непертурбативного вакуума КХД. В

модели инстантонной жидкости нелокальность представлена профилем нулевой моды кварка в поле инстантонов и зависит от калибровки. Для простоты используется гауссовский анзац в качестве одной из простейших функциональных форм нелокальности, которая ведёт себя аналогично профилю нулевой моды, полученному калибровочно-инвариантным образом [266]. Этот выбор гарантирует сходимость во всех порядках разложения без дополнительной процедуры регуляризации.

Кварковый сектор нелокальной киральной кварковой модели описывается лагранжианом (1.1), а взаимодействие с фоновым полем $A_\mu \equiv A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} = \delta_{\mu 0} A_0$ вводится путём замены обычной производной на ковариантную $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$. Для анализа в данной статье используется набор параметров из работы [240] для $-\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} = 240$ МэВ: $m_c = 5.8$ МэВ, $\Lambda = 902.4$ МэВ и $G\Lambda^2 = 15.82$.

Термодинамический потенциал в приближении среднего поля имеет вид

$$\Omega_{\text{mf}}(T) = -4 \sum_{i=0,\pm} \int_{k,n} \log \left[(\omega_n^i)^2 + \vec{k}^2 + M^2((\omega_n^i)^2) \right] + \frac{m_d^2}{2G} + \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}), \quad (2.7)$$

где введено обозначение $\int_{k,n} = T \sum_n \int d^3k / (2\pi)^3$. Φ обозначает значение петли Полякова, которая задаётся как $\Phi = \frac{1}{3} \text{Tr}_c e^{i\phi/T}$, где $\phi \equiv A_4 = iA_0$ относится к (евклидову) фоновому калибровочному полю. В калибровке Полякова поле диагонально в цветовом пространстве, то есть $\phi = \phi_3 \lambda_3 + \phi_8 \lambda_8$. Следуя работе [131], накладывается условие, чтобы $\Phi = \bar{\Phi}$ было реальным с действительными ϕ_3, ϕ_8 . Как следствие, $\phi_8 = 0$, и остаётся только одна переменная ϕ_3 [131]. Благодаря связи с петлей Полякова фермионные частоты Мацубары $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ оказываются сдвинуты:

$$\omega_n^\pm = \omega_n \pm \phi_3, \quad \omega_n^0 = \omega_n. \quad (2.8)$$

Для потенциала петли Полякова $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi})$ используется логарифмическая форма из работы [131], которая нормировалась на данные решёточных расчётов для чистой глюодинамики, полученными в [267]. Параметры порядка (средние значения полей для m_d и ϕ_3) получены путём минимизации части среднего поля термодинамического потенциала $\frac{\partial \Omega_{\text{mf}}}{\partial m_d} = 0, \frac{\partial \Omega_{\text{mf}}}{\partial \phi_3} = 0$. На рисунке 2.2 показана результирующая температурная зависимость кваркового конденсата $\langle \bar{q}q \rangle^T$ (нормированная на вакуумное значение) и ожидания петли

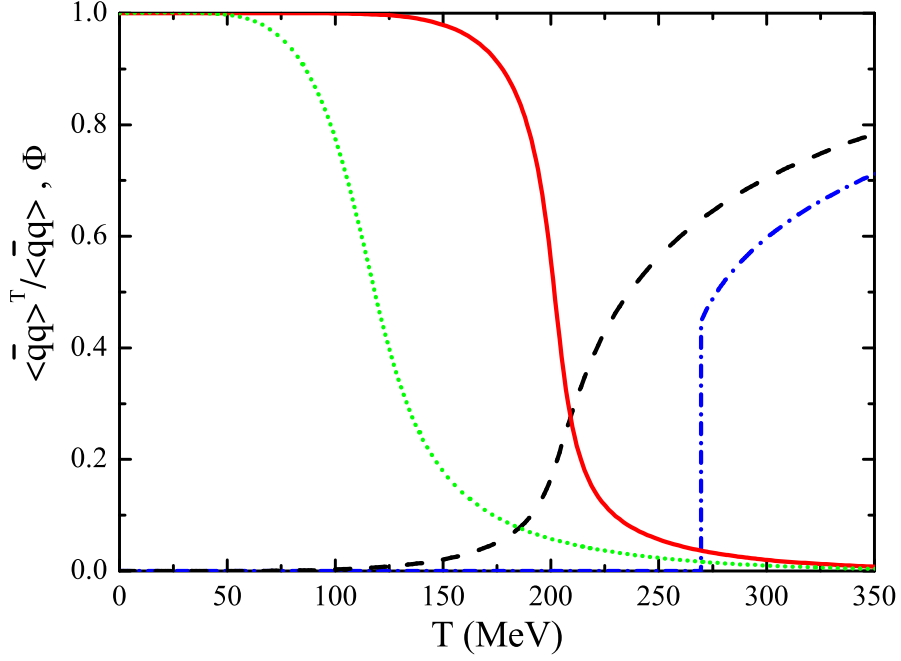


Рис. 2.2: Кварковый конденсат (нормированный к его вакуумному значению) в нелокальной модели НИЛ (зеленая пунктирная линия) и нелокальной модели НИЛП (красная сплошная линия) по сравнению с петлей Полякова в чистой калибровочной теории (синяя пунктирная линия) и в нелокальной НИЛП модель (черная пунктирная линия).

Полякова. Также показаны соответствующие результаты для случая несвязанных кварковых и глюонных секторов. В отсутствие связи между секторами модели критическая температура кирального восстановления составляет $T_c = 116 \text{ МэВ}$, тогда как калибровочный сектор имеет критическую температуру для деконфайнмента $T_d = 270 \text{ МэВ}$, зафиксированной по данным решётки для петли Полякова. Когда кварковый и глюонный секторы связаны через ковариантную производную, эти температуры синхронизируются так, что $T_c \approx T_d \approx 200 \text{ МэВ}$. Следующим элементом является включение Ω_{corr} для изучения эффекта мезонных корреляций. Ключевыми элементом являются кварк-антикварковые поляризационные операторы Π_M . Используя обозначения $D(k^2) = k^2 + M^2(k^2)$, $k_{n+}^i = (\omega_n^i + \nu_m, \vec{k} + \vec{p})$ и $k_n^i = (\omega_n^i, \vec{k})$ они могут быть записаны как

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi,\sigma}(\vec{p}, \nu_m) &= 4N_f \sum_{i=0,\pm} \int_{k,n} \times \\ &\times \frac{f^2((k_{n+}^i)^2) f^2((k_n^i)^2)}{D((k_{n+}^i)^2) D((k_n^i)^2)} [k_{n+}^i \cdot k_n^i \pm M((k_{n+}^i)^2) M((k_n^i)^2)]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Тогда мезонные вклады в термодинамический потенциал определяются «коль-

цевой суммой» [135, 136], показанной на рисунке 2.1

$$\Omega_{\text{corr}}(T) = \sum_{M=\pi,\sigma} \frac{d_M}{2} \int_{p,m} \ln [1 - G\Pi_M(\vec{p}, \nu_m)] \quad (2.10)$$

где d_M – фактор вырождения мезонов. Сумма по фермионным частотам Мацубары, интегрирование по трёхмерному импульсу и сумма по трем цветным модам $i = 0, +, -$ в (2.9) выполняется численно и конечный результат для $\Pi_\pi(\vec{p}, \nu_m)$ вставляется в формулу (2.10). Бозонная сумма Мацубары в (2.10) и интеграл по трёхмерному импульсу также выполняются численно. Модельные предсказания для давления $P(T) = -\Omega(T)$, нормированного на предел Стефана-Больцмана, представлены на рисунке 2.3. Для сравнения на рисунке также показаны: полный результат, результат приближения среднего поля, результат приближения среднего поля плюс вклад пиона, а также результат для идеального газа пионов и σ -мезона с массами, зафиксированными на их вакуумные значения. При низких температурах вклад среднего поля (то есть кварковый) подавляется взаимодействием с фоновым полем, и давление может быть хорошо описано свободным газом пионов. Вблизи критической температуры σ -мезон даёт дополнительный видимый вклад, тогда как уже после $T > 1.5 T_c$ мезонные вклады пренебрежимо малы, и среднее кварк-глюонное поле даёт доминирующий вклад в давление.

До сих пор использовался набор параметров из [240] с $m_c = 5.8$ МэВ, что соответствует физической массе пиона ~ 140 МэВ в вакууме. С другой стороны имеются вычисления в рамках КХД на решетке с большими значениями массы пиона. Таким образом, чтобы провести количественное сравнение с результатами решётки, необходимо повторить модельные вычисления, используя массы кварков, аналогичные решёточным. А именно, токовая масса кварка масштабируется с температурой как $m_c = 0.4 T$, имитируя ситуацию в решёточных расчётах [268], где похожим образом ведут себя массы лёгких кварков. Результаты для давления нормированного на предел Стефана-Больцмана показаны на рисунке 2.4, где для сравнения приведены результаты, полученные при $m_c = 5.8$ МэВ (жирные линии). При $m_c = 0.4 T$ (тонкие линии) качественное поведение остаётся неизменным: выше T_c полное давление (черная сплошная линия) быстро сходится к результату среднего поля (зеленая пунктирная линия), тогда как ниже T_c в давлении главным являет-

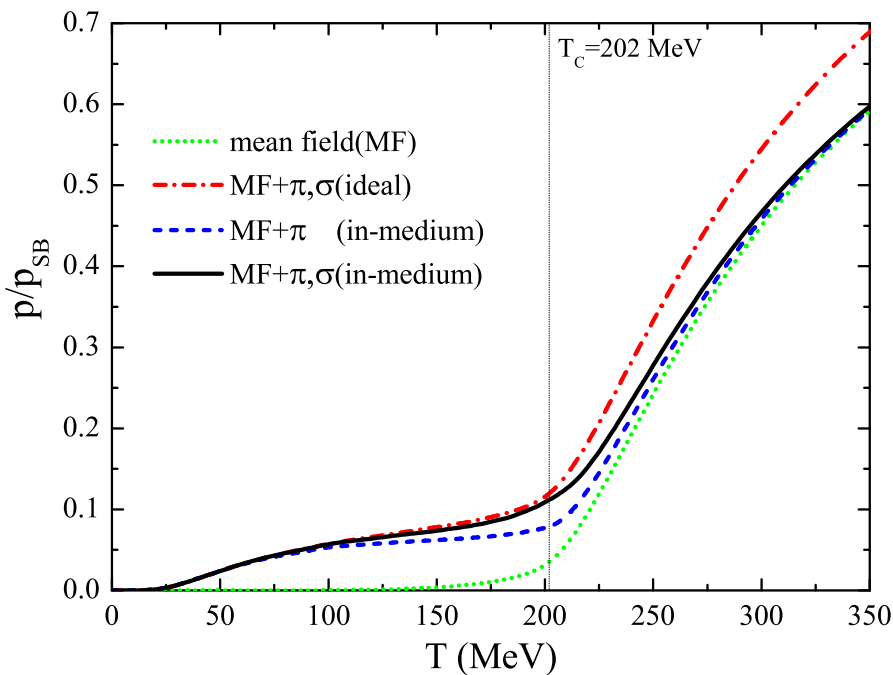


Рис. 2.3: Давление, делённое на предел Стефана-Больцмана p/p_{SB} в нелокальной модели НИЛП с физической массой пиона: вклад среднего поля (зеленая пунктирная линия), среднее поле+пион (синяя пунктирная линия), среднее поле+пион+ σ (черная сплошная линия). Красная пунктирная линия обозначает p/p_{SB} идеального газа пионов+ σ с фиксированными массами.

ся мезонный вклад. При количественных оценка вклады мезонов, конечно, сильно подавлены в случае более тяжёлых масс кварков. Отметим также, что результат среднего поля также изменился, в частности, T_c возрастает с 202 МэВ для $m_c = 5.8$ МэВ до 231 МэВ для $m_c = 0.4 T$.

На рисунке 2.5 сравнивается результат нелокальной модели с данными решётки для давления, делённого на предел Стефана-Больцмана. Результаты нелокальной модели обозначены чёрной сплошной линией и синей пунктирной линией, которые соответствуют физической параметризации ($m_c = 5.8$ МэВ) и случаю $m_c = 0.4 T$ соответственно. Обе кривые содержат мезонные корреляции и идентичны чёрным сплошным линиям на рисунке 2.4. Однако на оси абсцисс указано отношение T/T_c , причём T_c различается для двух параметризаций.

Красная пунктирная линия указывает на результат работы [268], полученный на решётке $16^3 \times 4$ с «staggered» действием фермионов для двух флейворов. Как упоминалось выше, при этом масса кварка нефизически велика и изменяется с температурой $m_{u,d}/T = 0.4$. При $T \gtrsim 2T_c$ результа-

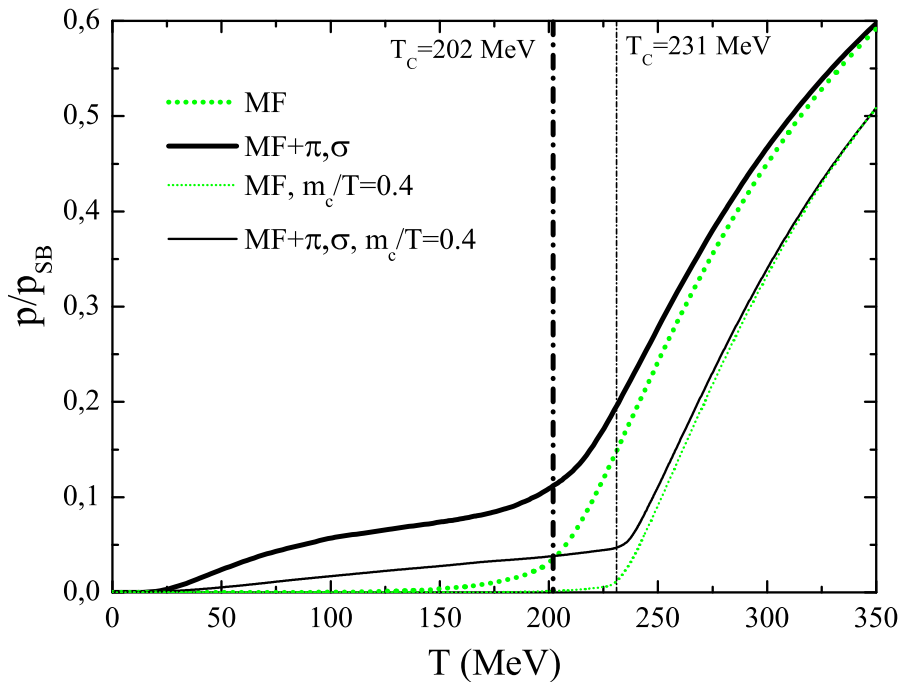


Рис. 2.4: Давление, делённое на предел Стефана-Больцмана p/p_{SB} в нелокальной модели НИЛП с физической массой пиона (жирные линии) и $m_c/T = 0.4$ (тонкие линии): вклад среднего поля (зелёная пунктирная линия), среднее поле+пион+ σ (чёрная сплошная линия).

ты нелокальной модели систематически превышают данные решётки. Поскольку последние получены только для $N_t = 4$, и это, вероятно, является артефактом решёточных вычислений. Эта интерпретация подтверждается результатами работы [133] для фермионов Вильсона с $N_t = 4$ (зеленые символы) и $N_t = 6$ (белые символы). В то время как первые почти совпадают с результатами [268], последние указывают на более высокие давления при больших T . Хотя данные для вильсоновских фермионов были извлечены по «линиям постоянной физики», т. е. для T -независимых масс кварков, и, следовательно, их сравнение не полностью согласовано с данными «staggered» фермионов. Авторы работы [268] попытались провести экстраполяцию данных в континуум для безмассовой КХД (заштрихованная область), что находится в хорошем согласии с результатами нелокальной модели для разных параметризаций как с физической токовой массой, так и для случая, когда токовая масса зависит от температуры.

В нелокальной модели даже при $m_c = 0.4 T$ остаётся видимый вклад пиона в давление вплоть до $T/T_c \approx 0.2$, в расчётах на решётке [268] давление обращается в нуль при $T/T_c = 0.6$. Это имеет тривиальное объяснение,

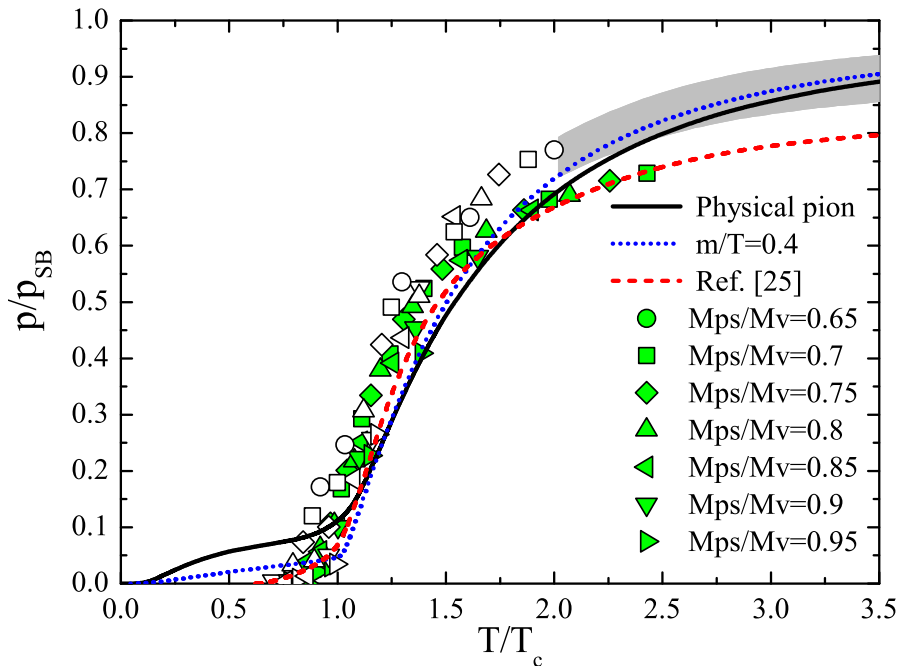


Рис. 2.5: Давление, делённое на предел Стефана-Больцмана p/p_{SB} как функция T/T_c : нелокальная модель НИЛП с физической массой пиона (черная сплошная линия) и с $m_c/T = 0.4$ (синяя пунктирная линия). Красная пунктирная линия: решёточные данные для двухцветной КХД с «staggered» кварками [268]. Затенённая область является континуальной экстраполяцией этих данных для безмассовой КХД [268]. Точки: данные решетки для двухцветной КХД с кварками типа Вильсона [133] для $N_t = 6$ (белые символы) и $N_t = 4$ (зелёные символы). Данные для давления [133] разделены на предел Стефана-Больцмана для $N_t = 6$ и $N_t = 4$ соответственно, как указано в [133].

т.к. давление в решётке было получено «интегральным методом», в результате который остаётся одна неопределённая константа интегрирования. В работе [268] эта константа была зафиксирована таким образом, что давление равно в нулю при $T/T_c = 0.6$. С другой стороны, в киральной теории возмущений при очень низкой температуре давление хорошо описывается идеальным пиона газом, что согласуется с нашими расчётами. Следовательно, если бы константа интегрирования на решётке определялась в согласии с КТВ, вместо фиксирования давления в ноль при $T = 0.6 T_c$, то это было бы в хорошем согласии и с результатами нелокальной модели. С другой стороны, результаты нелокальной модели систематически ниже данных решётки для температур в области $0.9 \lesssim T/T_c \lesssim 1.6$. Это может быть связано с тем, что модели рассмотрены только π и σ мезоны.

Таким образом, предыдущие исследования по термодинамики в низкоэнергетических моделях КХД с петлей Полякова расширены, чтобы вклю-

чить мезонные корреляции. На основе «кольцевой суммы» оценены вклады пиона и σ -мезона в давление. Пионный вклад доминирует в давлении в области низких температур. В этом режиме давление совершенно нечувствительно к деталям взаимодействия и почти точно совпадает с давлением идеального пионового газа. С другой стороны, при температурах $\gtrsim T_c$ мезонные вклады исчезают. Для нефизических масс пионов, полученных в части современных расчётов на решётки, мезонные корреляции играют лишь незначительную роль, даже ниже T_c .

2.2 Мезонные корреляции в схеме строгого $1/N_c$ разложения

В предыдущем разделе исследовалось простейшее расширение нелокальной модели в случае конечных температур, для вычисления вклада в давление. Более последовательное и согласованное расширение может быть сделано с помощью анзаца с вспомогательным Φ функционалом (см., например [264]), дополненного $1/N_c$ разложением. Центральной величиной для анализа является термодинамический потенциал на объем

$$\Omega = i\mathbf{Tr} \ln(\mathbf{S}^{-1}) + i\mathbf{Tr}(\Sigma\mathbf{S}) + \Psi(\mathbf{S}) + U(\Phi, \bar{\Phi}) - \Omega_0, \quad (2.11)$$

где \mathbf{S} и $\Sigma = (S^c)^{-1} - \mathbf{S}^{-1}$ представляют собой полный пропагатор и собственную энергию кварка, а \mathbf{Tr} обозначает след по всем степеням свободы, внутренним и 4-импульсу. При ненулевой температуре также учитывается динамика петли Полякова, которую больше нельзя отделить от кваркового сектора. Для этого постоянное фоновое калибровочное поле $\phi \equiv \langle A_4 \rangle = \langle iA_0 \rangle$ минимально связано с кварками и дополнительно добавлен потенциал петля Полякова $U(\Phi, \bar{\Phi})$ в уравнении (2.11) для термодинамического потенциала. Здесь $\Phi = \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c e^{i\phi/T}$ обозначает ожидание петли Полякова, а $\bar{\Phi}$ сопряжённая петля Полякова. Во избежание путаницы с функционалом Φ последний обозначена как Ψ . В точном случае Ψ содержит все двухчастично-неприводимые диаграммы. Также вводится константа вычитания Ω_0 , которая выбрана так, что вакуум ($T = 0$) имеет нулевое давление.

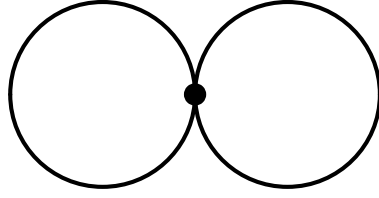


Рис. 2.6: Диаграмма типа «очки» для Ψ .

Термодинамическое равновесие соответствует (глобальному) минимуму термодинамического потенциала относительно полного пропагатора кварков и петли Полякова, так что должны быть выполнены следующие условия (или уравнения щели)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{S}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\Phi}} = 0. \quad (2.12)$$

Выбрана калибровка Полякова, где фоновое калибровочное поле является диагональным в цветовом пространстве, то есть $\phi = \phi_3 \lambda_3 + \phi_8 \lambda_8$. Следуя [131], накладываются дополнительные условия, чтобы $\Phi = \bar{\Phi}$ было вещественным с вещественными ϕ_3, ϕ_8 . Вследствие этого, $\phi_8 = 0$, и у нас остаётся одна переменная ϕ_3 . Таким образом, второе и третье уравнения сводятся к $\partial \Omega / \partial \phi_3 = 0$. Более того, из первого уравнения следует, что $\Sigma = i \delta \Psi / \delta \mathbf{S}$. На диаграммном уровне это означает, что собственная энергия кварков может быть получена из Ψ , путём разрезания одной кварковой линии во всех возможных местах.

Последующие приближения могут быть получены путём отбрасывания Ψ в определённом порядке. Результаты среднего поля, соответствующие главному порядку в $1/N_c$, могут получены из диаграммы типа «очки», показанной на рисунке 2.6. Сплошные линии представляют собой полные кварковые пропагаторы В нелокальной модели потенциал «очков» принимает вид

$$\Psi_{\text{glasses}} = - \sum_{M=\pi, \sigma} \frac{G}{2} [-\text{Tr}(\Gamma^M i \mathbf{S})]^2, \quad (2.13)$$

и термодинамический потенциал становится

$$\Omega^{\text{MF}} = \frac{m_d^2}{2G} + U(\Phi, \bar{\Phi}) - \sum_{i=0, \pm} 4 \int_{k, n} \ln [k_{n,i}^2 + M^2(k_{n,i}^2)],$$

где $k_{n,i}^2 = (\omega_n^i)^2 + \mathbf{k}^2$ и используется обозначение $\int_{k, n} \equiv T = \sum_n \int d^3 k / (2\pi)^3$.

Следует обратить внимание, что ввиду связи с петлей Полякова фермионные

частоты Мацубары $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ частично сдвинуты: $\omega_n^\pm = \omega_n \pm \phi_3$, $\omega_n^0 = \omega_n$. Помимо этого сдвига, изменение пропагатора кварка зависит только от динамической массы m_d . Поэтому в приближении среднего поля уравнения щели (2.12), принимают вид

$$\frac{\partial \Omega^{\text{MF}}}{\partial m_d} = 0, \quad \frac{\partial \Omega^{\text{MF}}}{\partial \phi_3} = 0. \quad (2.14)$$

Вклад следующего за лидирующим порядком в Ψ -потенциал задаётся «кольцевой суммой» показанной на рисунке 2.6.

$$\Psi_{\text{ring}} = - \sum_{M=\pi,\sigma} \frac{d_M}{2} i \text{Tr} \ln [1 - G\Pi^M]. \quad (2.15)$$

Здесь Π^M обозначает кварк-антикварковые поляризаационные операторы, построенные с полными кварковыми пропагаторами, а d_M - фактор мезонного вырождения.

На этом уровне возникает проблема, заключающаяся в том, что при полностью самосогласованном вычислении диаграмм более высокого порядка в уравнении щели появляются вклады произвольных более высоких по $1/N_c$ порядков. В результате, могут быть предложены различные схемы приближенных вычислений. Предлагается использовать «строгое $1/N_c$ » разложение, где все вклады, более высокого порядка чем следующий за лидирующим, отбрасываются. В отсутствие фонового глюонного поля эта схема реализуется следующим образом: сначала решается уравнение щели в приближении среднего поля для m_d (первое уравнение из (2.14)), а затем оценивается «кольцевая сумма», используя полученные пропагаторы среднего поля. Таким образом термодинамический потенциал принимает вид

$$\Omega = \Omega^{\text{MF}} + \Omega^{\text{Nc}}, \quad (2.16)$$

с $1/N_c$ поправкой вида

$$\Omega^{\text{Nc}} = \sum_{M=\pi,\sigma} \frac{d_M}{2} \int_{p,m} \ln [1 - G\Pi_M(\vec{p}, \nu_m)] \quad (2.17)$$

где поляризаационные операторы Π^M вычисляются с кварковыми пропагаторами среднего поля, а суммирование осуществляется по бозонным частотам Мацубары.

Для включения фонового глюонного поля необходимо определить зависимость потенциал петли Полякова от N_c . В принципе потенциал $U(\Phi, \bar{\Phi})$ пропорционален количеству глюонов, $N_c^2 - 1$ [269, 270]. Поэтому его лидирующий вклад в термодинамический потенциал имеет порядок $O(N_c^2)$, тогда как кварки дают вклад только в порядке $O(N_c)$, а поправки имеют порядок $O(N_c^0)$ для кварков и глюонов. Однако, поскольку в практических расчётах форма потенциала U основывается не на $1/N_c$ разложении, а на феноменологической параметризации основываясь на данных решеточных расчётов в глюодинамике, то по-видимому более целесообразно рассматривать, что $U(\Phi, \bar{\Phi})$ не имеет зависимости от N_c . Тогда термодинамический потенциал в схеме «строго $1/N_c$ » разложения соответствует вычислению (2.16) с одновременным решением уравнений щели

$$\frac{\partial \Omega^{\text{MF}}}{\partial m_d} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \phi_3} = 0. \quad (2.18)$$

Заметим, что ϕ_3 определяется путём минимизации полного термодинамического потенциала, тогда как m_d получается только из части соответствующей среднему полю. Тем не менее, поскольку Ω^{MF} также зависит от ϕ_3 , значение m_d также изменяется по сравнению с вычислением среднего поля из-за изменённого значения ϕ_3 .

Можно также отметить, что изложенная выше схема немного отличается от схемы в предыдущей главе, где оба значения, m_d и ϕ_3 , вычислялись на уровне среднего поля перед их использованием в Ω^{N_c} . Однако в численных расчётах эта разница оказывается небольшой.

Обсудим теперь численные результаты модели при конечной температуре. В кварковом секторе выбираются параметры набора № 4 из таблицы 1.2. Для потенциала петли Полякова $U(\Phi, \bar{\Phi})$ используется логарифмическая параметризация из работы [131], которая была подогнана данные решёточных расчётов из [267]. Единственное исключение касается параметра T_0 , который соответствует температуре фазового перехода деконфайнмента в глюодинамике. Хотя в работе [131] использовалось эмпирическое значение $T_0 = 270$ МэВ, в статье [271] утверждается, что T_0 зависит от числа активных флейворов и было предложено значение $T_0 = 208$ МэВ для $N_f = 2$. Поэтому наши вычисления будут выполняться с использованием двух значений T_0 .

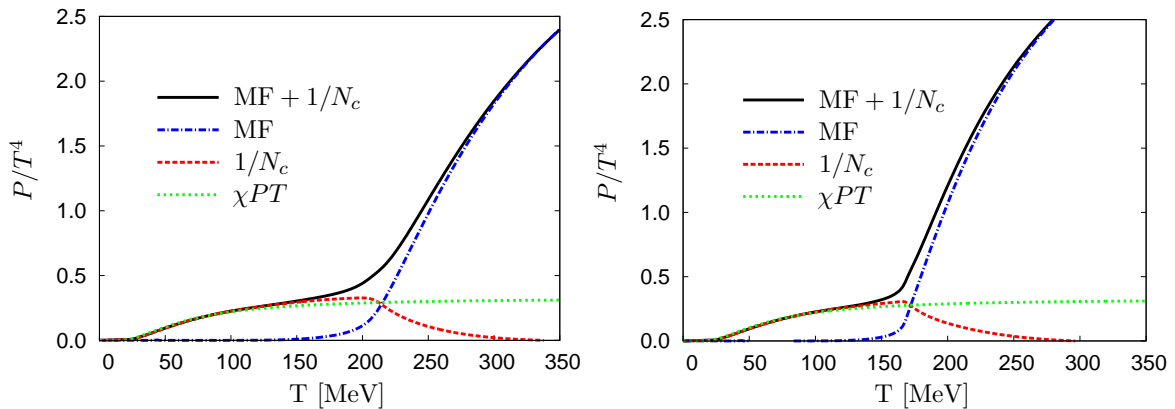


Рис. 2.7: Температурная зависимость давления делённого на температуру в четвёртой степени P/T^4 для $T_0 = 270$ МэВ и для $T_0 = 208$ МэВ : вклад среднего поля MF (синие пунктирные линии), $1/N_c$ поправка (красные пунктирные линии), полный вклад $MF+1/N_c$ (черные сплошные линии). Зеленые пунктирные линии соответствуют результатам киральной теории возмущений NLO (КТВ) уравнение (2.19) [272].

Предсказания модели для давления в зависимости от температуры показаны на рис. 2.7 для $T_0 = 270$ МэВ и 208 МэВ. Вместе с полным результатом (сплошные линии) также показаны частичные вклады в давление в приближении среднего поля (штрихпунктирные линии), $P^{\text{MF}} = -\Omega^{\text{MF}}$ и $1/N_c$ поправки (пунктирные линии) $P^{N_c} = -\Omega^{N_c}$. В соответствии с более ранними результатами в НИЛП-подобных моделях обнаружено, что при низких температурах вклад среднего поля, соответствующий возбуждениям кварков, сильно подавляется петлей Полякова. В этом режиме термодинамика определяется вкладом от «кольцевой суммы», в которой преобладают пионные степени свободы как самые легкие частицы в спектре масс. Поэтому полезно сравнить наш результат с предсказаниями киральной теории возмущений (КТВ). КТВ описывает низкоэнергетическую структуру различных амплитуд в терминах разложения по степеням энергий, импульсов и токовых кварковых масс. Результат для давления при конечной температуре имеет вид [272]

$$\begin{aligned}
 P_{\chi PT} &= \frac{N_f^2 - 1}{2} \left(g_0 - \frac{1}{N_f} \frac{M_\pi^2}{2F^2} g_1^2 \right) + O(p^8), \\
 g_0 &= -2T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left(1 - e^{-E_\pi/T} \right), \\
 g_1 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_\pi (e^{E_\pi/T} - 1)}, \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

где F - константа слабого распада пиона в киральном пределе, энергия пи-

она $E_\pi = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M_\pi^2}$, а $O(p^8)$ относится к схеме кирального счета, где M_π и T считаются величинами порядка p . Член, пропорциональный g_0 , представляет собой давление свободного релятивистского газа пионов, а член g_1 вызван взаимодействиями и приводит к небольшому понижению давления¹. Опущенные члены порядка $O(p^8)$ также обусловлены взаимодействиями.

Вспоминая, что константа распада пиона имеет порядок $\sqrt{N_c}$, легко видеть, что члены g_0 и g_1^2 имеют порядок N_c^0 и $1/N_c$ соответственно. Сравнивая это с нелокальной моделью, где вклады среднего поля и «кольцевой суммы» в давление имеют порядок N_c и N_c^0 соответственно, мы приходим к выводу, что наши модельные расчёты должны соответствовать только нижнему порядку, т.е. результату КТВ с вкладом g_0 . Тем не менее, поскольку вклад g_1^2 имеет небольшую величину (он исчезает в киральном пределе), результаты расчётов в нелокальной модели хорошо согласуются с предсказаниями КТВ даже при включении этого члена, как можно видеть из рисунка 2.7. Более того, низкотемпературное поведение предсказаний в нелокальной модели почти нечувствительно к конкретной функциональной зависимости форм-фактора и различных параметризаций. Конечно, результаты модели начинают отклоняться от предсказаний КТВ, когда температура приближается к киральному фазовому переходу. Вблизи критической температуры σ -мезон даёт дополнительный заметный вклад, а уже при $T > 1.5 T_c$ мезонные вклады пренебрежимо малы, а среднее кварк-глюонное поле доминирует в давлении.

Сравнивая вклады для различных T_0 на рисунке 2.7, легко видеть, что понижение T_0 также приводит к понижению температуры перехода. Однако, помимо этого тривиального эффекта, результаты остаются качественно неизменными.

На рисунке 2.8 показана температурная зависимость кваркового конденсата $\langle \bar{q}q \rangle_T$ (черная сплошная линия) и петли Полякова (красная пунктирная

¹В киральном пределе g_0 и g_1 равны

$$g_0 = \frac{\pi^2 T^4}{45}, \quad g_1 = \frac{T^2}{12}. \quad (2.20)$$

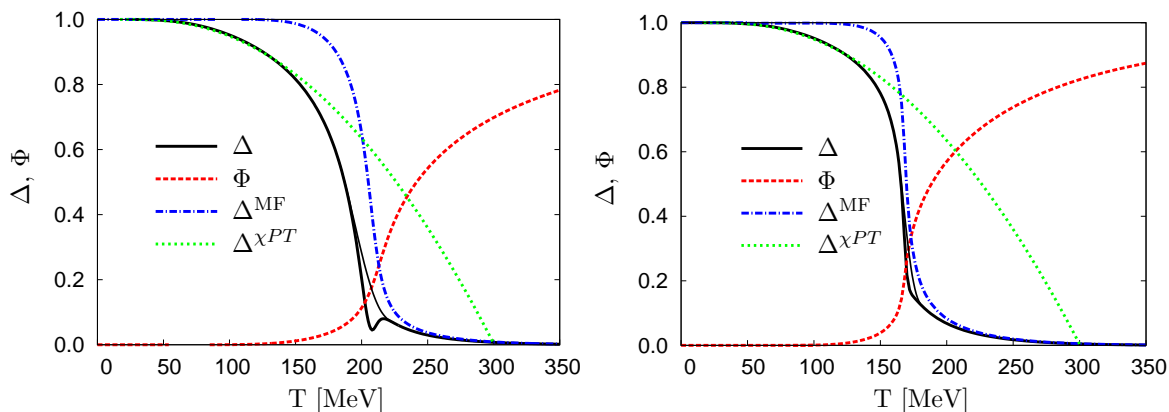


Рис. 2.8: Температурная зависимость кваркового конденсата, нормированного на его вакуумное значение $\Delta = \langle \bar{q}q \rangle_T / \langle \bar{q}q \rangle$ (черные сплошные линии) и петля Полякова (красные пунктирные линии) в нелокальной модели НИЛП за пределами среднего поля. Кроме того, показаны результаты для кваркового конденсата в приближении среднего поля Δ^{MF} (синие пунктирные линии), результат киральной теории возмущения низшего порядка (КТВ) (зелёными пунктирными линиями) и наивной полиномиальной интерполяцией в нестабильной области $1/N_c$ разложения (тонкие чёрные сплошные линии). Модельные расчёты были выполнены с $T_0 = 270$ МэВ и с $T_0 = 208$ МэВ (нижняя панель).

линия) в нелокальной модели с учётом $1/N_c$ поправок. Для сравнения также показаны кварковый конденсат в приближении среднего поля (синяя пунктирная линия). Результаты приведены для $T_0 = 270$ и 208 МэВ. Как и в случае давления, $1/N_c$ поправки в основном влияют на поведение кирального конденсата ниже и около критической области. В частности, при низких температурах уменьшение кирального конденсата почти полностью обусловлено динамикой пионов, которая отсутствует в приближении среднего поля. Поэтому снова интересно сравнить результаты модели с прогнозом КТВ, предсказания которой имеют вид

$$\langle \bar{q}q \rangle_T = \langle \bar{q}q \rangle \left\{ 1 - \frac{N_f^2 - 1}{N_f} \frac{g_1}{F^2} + O(p^4) \right\}, \quad (2.21)$$

и ведущий температурный эффект имеет порядок $O(1/N_c)$. Результаты нелокальной модели полностью согласуются с этим поведением: конденсат среднего поля ($O(1/N_c^0)$) остаётся практически постоянным при низких значениях T , $1/N_c$ поправки хорошо согласуются с предсказаниями КТВ (зеленая пунктирная линия). Следует отметить, что схема кирального разложения очень похожа, но не совсем эквивалентна $1/N_c$ счету : в КТВ поправка в ведущем порядке к киральному конденсату зависит от константы слабого распада пиона в киральном пределе F , тогда как в $1/N_c$ разложении это

зависит от постоянной распада пиона недели для массивных пионов в приближении среднего поля f_π^{MF} . Формально для членов более высокого порядка в p или N_c , это может привести к количественным различиям даже при низких температурах. Однако для выбранных параметров разница между F и f_π^{MF} оказывается численно малой.

В соответствии с другими работами [81,85,273] дополнительное восстановление киральной симметрии с помощью $1/N_c$ поправок обычно также приводит к снижению температуры кирального фазового перехода по сравнению с результатом среднего поля. Этот эффект наиболее отчётливо виден для результата с $T_0 = 270$ МэВ на рисунке 2.8. К сожалению, из-за пертурбативной природы схемы «строгого $1/N_c$ » разложения модель не может быть применена для изучения самого фазового перехода. Из рисунка легко видеть, что существует нестабильная область, которая выглядит на рисунке как волнистая линия. Происхождение этого поведения можно объяснить $1/N_c$ поправкой к собственной энергии кварков независимой от импульса, рисунок 1.7 а. В окрестности фазового перехода эта диаграмма существенно усиливается благодаря восстановлению киральной симметрии и соответствующему снижению массы промежуточного σ -мезона. (Фактически, в киральном пределе этот вклад был бы равен минус бесконечности при T_c .) В качестве грубой оценки предлагается определять нестабильную область как режим, в котором относительная поправка к кварковому конденсату больше, чем $1/N_c$. В данном примере это соответствует температурам от 183 до 223 МэВ. Поскольку нашим результатам нельзя доверять в этой области, то предлагается использовать простую полиномиальную интерполяцию между стабильными областями при более низких и более высоких температурах. Полученная температурная зависимость показана на рисунке 2.8 тонкой чёрной сплошной линией.

Ситуация несколько отличается для $T_0 = 208$ МэВ. Хотя $1/N_c$ поправки снова важны при низких температурах (в соответствии с результатами КТВ), их влияние на киральную критическую температуру практически незначительно. Это связано с тем, что для этого более низкого значения T_0 переход среднего поля происходит раньше. В связи с этим киральный конденсат

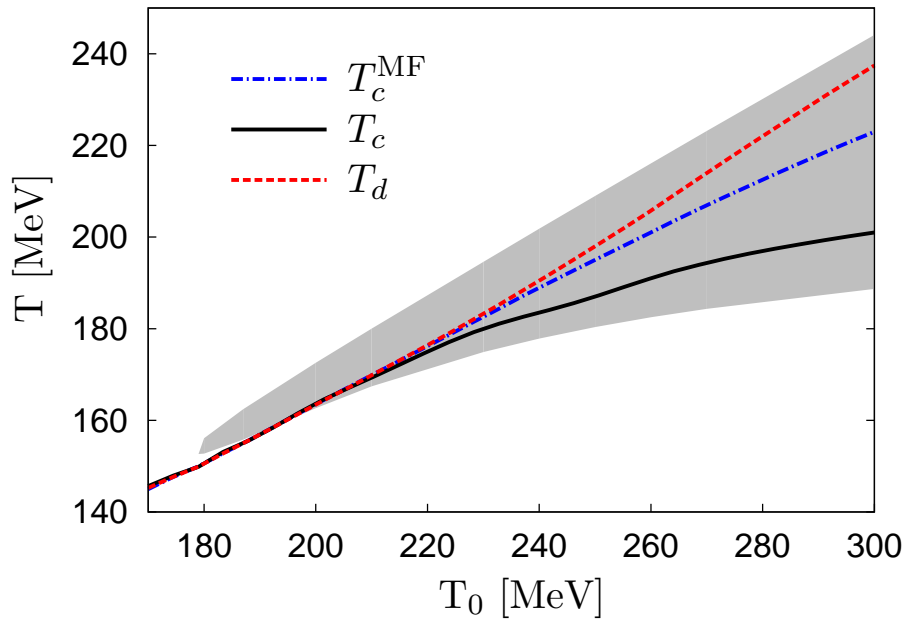


Рис. 2.9: Критические температуры в зависимости от параметра T_0 потенциала петли Полякова: деконфайнмент (красная пунктирная линия), киральное восстановление в приближении среднего поля (синяя пунктирная линия), киральное восстановление с мезонными вкладами (черная сплошная линия). Область с $|\langle \bar{q}q \rangle_T^{N_c} / \langle \bar{q}q \rangle_T^{MF}| > 1/N_c$ обозначается заштрихованной областью.

среднего поля падает более круто². «Неустойчивая область», где относительная поправка к кварковому конденсату больше, чем $1/N_c$, довольно узка, и поведение кваркового конденсата не похоже на волнистую линию вблизи кирального фазового перехода для $T_0 = 208$ МэВ.

Зависимость от T_0 псевдокритических температур для деконфайнмента (красная пунктирная линия) и кирального восстановления (сплошная черная линия) приведена на рисунке 2.9. В качестве определения этих температур нами были выбраны максимумы температурных производных соответствующих параметров порядка: величина ожидания петли Полякова и кирального кваркового конденсата. В нестабильном режиме (обозначенном заштрихованной областью) последний был получен из полиномиальной интерполяции. Также показан результат среднего поля для температуры кирального восстановления (синяя пунктирная линия).

На этом рисунке можно грубо выделить три режима: при больших значениях T_0 результат для T_c в приближении среднего поля уже меньше чем T_d , и

²Для $T_0 \lesssim 150$ МэВ фазовый переход даже становится переходом первого рода. Подобное наблюдение было также сделано в работе [245].

Таблица 2.1: Критические температуры кирального восстановления и деконфайнмента в МэВ для двух значений параметра T_0 потенциала петли Полякова и различные параметризаций нелокальной модели.

No.	$T_0 = 270$ МэВ			$T_0 = 208$ МэВ		
	T_c	T_c^{MF}	T_d	T_c	T_c^{MF}	T_d
1	191	205	213	164	162	162
2	193	206	214	166	165	166
3	193	207	214	168	167	168
4	194	207	214	169	168	169
5	197	208	213	170	169	170
6	200	208	213	170	170	170
7	202	208	212	171	171	171
8	203	208	211	172	171	172

за счёт включения $1/N_c$ поправок T_c ещё больше снижается. Затем в некотором промежуточном режиме T_d и T_c приблизительно равны в приближении среднего поля, но все ещё наблюдается видимое уменьшение последнего с помощью $1/N_c$ поправок. Наконец, для $T_0 \lesssim 220$ МэВ все три линии практически совпадают³.

Для понимания подобного рода поведения необходимо напомнить, что в отсутствие связи между кварковым сектором и петлей Полякова T_0 соответствует температуре деконфайнмента фазового перехода первого рода, в то время как киральный фазовый переход (кроссовер) в нелокальной модели имеет место при низкой температуре, $T_c^{MF} = 116$ МэВ. С этой точки зрения весьма примечательно, что даже при $T_0 = 270$ МэВ наличие взаимодействия между секторами уменьшает разницу между T_c^{MF} и T_d до менее чем 10 МэВ. Тем не менее, очевидно, что переходы становятся лучше синхронизованы, когда T_0 уменьшается, и в конечном итоге для $T_0 \lesssim 220$ МэВ они имеют одинаковые значения. В связи с этим переходы становятся более

³Согласно таблице 2.1 $1/N_c$ поправки могут даже увеличить значение T_c на 1 или 2 МэВ при $T_0 = 208$ МэВ. Однако, поскольку температуры перехода не определены однозначным образом и используется дополнительная полиномиальная интерполяция в данной области, то не стоит сильно полагаться на этот результат. Например если определить T_c как температуру, при которой конденсат достигает половины своего вакуумного значения, то $1/N_c$ поправки всегда будут приводить к снижению T_c .

резкими с уменьшением T_0 , и относительное влияние поправок $1/N_c$ на T_c также уменьшается.

Следует отметить, что динамика петли Полякова и, следовательно, переход деконфайнмента весьма нечувствителен к $1/N_c$ поправкам. Скорее всего, это является артефактом модели, в которой петля Полякова имеет обратную связь с мезонами только косвенным образом. В принципе, мезонные флуктуации должны также непосредственно влиять на потенциал петли Полякова. Однако неясно, как включить это в НИЛП и подобные ей модели, где потенциал получается из феноменологического соответствия данных решёточной глюодинамики, где пренебрегают даже эффектами динамических кварков (за исключением изменений параметра T_0). В этом контексте, безусловно, было бы интересно сравнить поведение петли Полякова с так называемой «одетой» петлей Полякова, связанной с дуальным кварковым конденсатом [274, 275]. Последний может быть рассчитан в НИЛП-подобных моделях [276] (и даже в модели НИЛ [277]), где также есть возможность изучить роль $1/N_c$ поправок.

На рисунке 2.10 показано сравнение результатов расчётов в нелокальной модели температурной зависимости кваркового конденсата и петли Полякова с данными вычислений в КХД на решётке [278, 279]. Модельные расчёты выполнены при $T_0 = 208$ МэВ, что соответствует более реалистичным температурам перехода. Следует отметить, что расчёты в КХД на решётке [278, 279] выполняются для случая двух легких кварков и одного странного $N_f = 2 + 1$. Для исследования кваркового конденсата авторами используются комбинация нестранных (l) и странных (s) кварковых конденсатов, называемая кварковым конденсатом с вычитанием,

$$\Delta_{l,s} = \frac{\langle \bar{q}q \rangle_T^l - \frac{m_c^l}{m_c^s} \langle \bar{q}q \rangle_T^s}{\langle \bar{q}q \rangle^l - \frac{m_c^l}{m_c^s} \langle \bar{q}q \rangle^s}. \quad (2.22)$$

Расчёты в нелокальной модели выполнены только для двух легких флейворов. Тем не менее, сравнение нашего расчёта температурной зависимости кваркового конденсата, нормированного на его вакуумное значение $\Delta = \langle \bar{q}q \rangle_T / \langle \bar{q}q \rangle$, с решёточными расчетами для кваркового конденсата с вычитанием имеет смысл. Причина в том, что непертурбивная часть кваркового

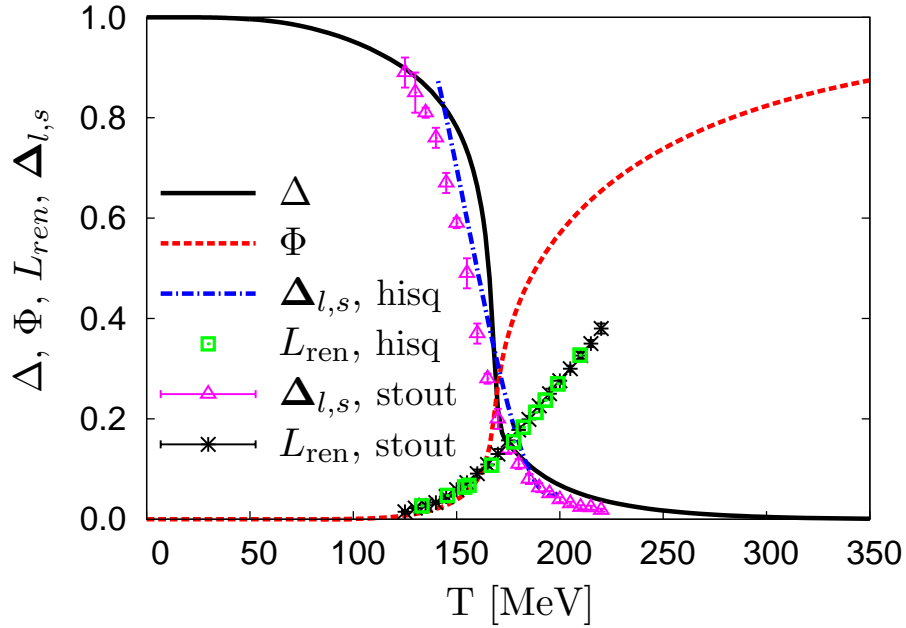


Рис. 2.10: Температурная зависимость кваркового конденсата, нормированного на его вакуумное значение $\Delta = \langle \bar{q}q \rangle_T / \langle \bar{q}q \rangle$ (черная сплошная линия) и петли Полякова (красная пунктирная линия) в нелокальной НИЛП модели с $T_0 = 208$ МэВ за пределами среднего поля по сравнению с данными вычислений в КХД на решётке для кваркового конденсата с вычитанием $\Delta_{l,s}$ и для перенормированной петли Полякова L_{ren} . Точки для расчётов в КХД на решётке взяты из [278] (действие hisq коллаборация «HotQCD») и [279] (действие stout коллаборация «Wuppertal-Budapest»).

конденсата в уравнении (1.14) конечна, и вклад странного кварка в уравнение (2.22) подавляется в нелокальной модели двумя факторами: отношение непертурбивной части странного кваркового конденсата к таковому для странного кварка составляет 0.8, а отношение токовых масс кварков лёгкого к странному составляет приблизительно $1/20$. С другой стороны, основную роль при низкотемпературных изменениях кваркового конденсата играют пионы – эффект, который правильно учтён в нашей модели.

Действительно, как легко видеть из рисунка 2.10 $\Delta_{l,s}$ довольно хорошо согласуется с модельными вычислениями для Δ . С другой стороны, петля Полякова хорошо согласуется только в адронной фазе, тогда как вблизи температуры деконфайнмента, $T \approx 170$ МэВ, модельный расчёт растёт быстрее, чем данные решётки.

2.3 Аномальные моды мезонов

В данной главе используется киральная кварковая модель с двумя легкими и одним странным флейворами (2 + 1) и ядром взаимодействия типа Намбу–Иона-Лазинио, основанная на модели ранее использованной в работах по исследованию спектра скалярных и псевдоскалярных мезонов [280–283] и соответствующего обобщения с включением динамики петли Полякова [130, 284]. Лагранжиан модели имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{q} (i\gamma^\mu D_\mu + \hat{m}_0) q + \frac{G_1}{2} \sum_{a=0}^8 \left[(\bar{q}\lambda^a q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\lambda^a q)^2 \right] \\ & - \mathcal{U} (\Phi[A], \bar{\Phi}[A]; T). \end{aligned} \quad (2.23)$$

где q – кварковое поле с тремя флейворами, $f = u, d, s$ и тремя цветами, $N_c = 3$; λ^a – флейворные матрицы Гелл-Манна ($a = 0, 1, 2, \dots, 8$), а G_S – константа связи. Скалярно–псевдоскалярные каналы взаимодействия в Лагранжиане (2.23) являются цветовыми синглетами и отвечают требованию киральной симметрии. Ковариантная производная определяется как $D^\mu = \partial^\mu - iA^\mu$, с $A^\mu = \delta_0^\mu A^0$ (калибровка Полякова); при переходе к Евклидовым переменным $A^0 = -iA_4$. Константа сильной связи g_s учитывается в определении $A^\mu(x) = g_s \mathcal{A}_a^\mu(x) \frac{\lambda_a}{2}$, где \mathcal{A}_a^μ – калибровочное поле ($SU_c(3)$), а λ_a – матрицы Гелл-Манна в цветовом пространстве $SU_c(3)$.

Поле петли Полякова Φ , фигурирующее в потенциальном члене (2.23), связано с калибровочным полем через калибровочно-инвариантное среднее от линии Полякова [125]

$$\Phi(\vec{x}) = \langle \langle l(\vec{x}) \rangle \rangle = \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c \langle \langle L(\vec{x}) \rangle \rangle, \quad L(\vec{x}) = \mathcal{P} \exp \left[i \int_0^\beta d\tau A_4(\vec{x}, \tau) \right]. \quad (2.24)$$

Для эффективного потенциала (комплексного) поля Φ используется полиномиальная форма и параметризация предложенные в работе [125]. Альтернативной является параметризация с использованием логарифмическую формы этого потенциала [131].

Производящий функционал функций Грина в этом порядке может быть

получен следующим образом⁴

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \exp \left\{ \int_{\beta} d^4x \mathcal{L}(\vec{x}, \tau) \right\}. \quad (2.25)$$

После преобразования Хаббарда-Стратоновича, т. е. введения в (2.23) вспомогательного интеграла

$$1 = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\sigma \exp \left\{ \int_{\beta} d^4x \left[(\phi^a - G_1 \bar{q} \lambda^a q)^2 - (\pi^a - G_1 \bar{q} i \gamma_5 \lambda^a q)^2 \right] \frac{1}{2G_1} \right\} \quad (2.26)$$

производящий функционал становится гауссовым интегралом по путям спиновых полей кварков

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\sigma \exp \left\{ - \int_{\beta} d^4x \left[\frac{\phi_a^2 + \pi_a^2}{2G} + \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}) \right] \right\} \times \\ \times \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \exp \left\{ \int_{\beta} d^4x \bar{q} S_E^{-1}(\phi, \pi; A_4) q \right\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

где обратный пропагатор кварка в Евклидовом пространстве принимает вид

$$S_E^{-1}(\phi, \pi; A_4) = i \hat{D}_E(A_4) + m + \Sigma[\phi, \pi] \quad (2.28)$$

где $\hat{D}_E(A_4) = \vec{\gamma} \vec{\nabla} + \gamma_4 (\partial_{\tau} + ig A_4)$ и $\Sigma[\phi, \pi] = -\lambda^a (\phi^a + i \gamma_5 \pi^a)$. Теперь интегралы по полям кварков можно взять, что приводит к бозонизированной форме производящего функционала

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\sigma \exp^{-\mathcal{A}[\phi, \pi; \Phi, \bar{\Phi}]} \quad (2.29) \\ \mathcal{A}[\phi, \pi; \Phi, \bar{\Phi}] &= \int_{\beta} d^4x \left[\frac{\phi_a^2 + \pi_a^2}{2G_1} + \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}) \right] - \text{tr}_q \ln \{ \beta S_E^{-1}(\phi, \pi; A_4) \}, \end{aligned}$$

который является тождественным к (2.25). В результате действие (2.29) представляет собой сильно нелинейный функционал мезонных полей. Чтобы оценить интеграл от мезонных полей аналитически, и, таким образом, получить результат для вклада мезонных корреляций в производящий функционал (и соответственно в термодинамический потенциал) системы, выполняется разложение в ряд Тейлора эффективного действия (2.29) до второго порядка флуктуаций вблизи стационарной точки $\varphi_a = \phi_a - \bar{\phi}_a$

$$\mathcal{A}[\phi, \pi] = \mathcal{A}_0 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \phi_a \delta \phi_b} \Big|_{\phi=\bar{\phi}} \varphi_a \varphi_b + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \pi_a \delta \pi_b} \Big|_{\phi=\bar{\phi}} \pi_a \pi_b + \dots \quad (2.30)$$

⁴Используется обозначение $\int_{\beta} d^4x = \int_0^{\beta} d\tau \int_{\beta} d^3x$

где $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}[\bar{\phi}, \pi = 0; \Phi, \bar{\Phi}]$ со стационарной точкой, определяемой из условия $\delta\mathcal{A}/\delta\phi_a|_{\phi=\bar{\phi}} = 0$ (уравнение щели для массы кварка $\bar{\phi} = m_f - m_{0,f}$), а стационарные значения для псевдоскалярных полей равны нулю.

Ограничившись мезонными флуктуациями второго порядка, можно взять гауссовский интеграл по мезонным полям и получить термодинамический потенциал

$$\Omega_{\text{Gau}\beta} = -\frac{T}{V} \ln \mathcal{Z}_{\text{Gau}\beta} = -\frac{T}{V} \left(\mathcal{A}_0 + \frac{1}{2} \sum_M \text{Tr}_M \ln D_M^{-1} \right) \quad (2.31)$$

Пропагатор мезона $D_{ff'}^{M_a}$, состоящего из кварковых ароматов f и f' в канале аромата a , определяется как

$$D_{ff'}^{M_a}(z, \vec{q}) = \frac{1}{G_1^{-1} - \Pi_{ff'}^{M_a}(z, \vec{q})} \quad (2.32)$$

Аналитические свойства пропагаторов мезонов определяются матричными элементами поляризованного оператора. После аналитического продолжения с бозонных частот Мацубары на действительную ось q_0 поляризованный оператор имеет вид [15]

$$\begin{aligned} \Pi_{ff'}^{M_a}(q_0, \vec{q}) = & 2N_c T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{tr}_D [S_f(p_n, \vec{p}) \Gamma_{ff'}^{M_a} \\ & \times S_{f'}(p_n + q_0, \vec{p} + \vec{q}) \Gamma_{ff'}^{M_a}], \end{aligned} \quad (2.33)$$

tr_D - след от матриц Дирака, сумма по n обозначает сумму по фермионным частотам Мацубары $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ и пропагатор кварка с динамической массой m_f и химическим потенциалом μ_f для флейвора f имеет вид $S_f(p_n, \vec{p}) = [\gamma_0(i\omega_n + \mu_f + A^0) - \vec{\gamma}\vec{p} - m_f]^{-1}$. При этом проведено унитарное преобразование из исходных флейворных вершин $\lambda_{ff'}^a$ в физические псевдоскалярные (P^a) и скалярные (S^a) состояния, которые представляют собой линейные комбинации, обозначаемые как $T_{ff'}^a$. Таким образом, вершинные

функции в (2.33) имеют вид

$$\Gamma_{ff'}^{Pa} = i\gamma_5 T_{ff'}^a, \quad \Gamma_{ff'}^{Sa} = T_{ff'}^a, \quad (2.34)$$

$$T_{ff'}^a = \begin{cases} (\lambda_3)_{ff'}, \\ (\lambda_1 \pm i\lambda_2)_{ff'}/\sqrt{2}, \\ (\lambda_4 \pm i\lambda_5)_{ff'}/\sqrt{2}, \\ (\lambda_6 \pm i\lambda_7)_{ff'}/\sqrt{2}, \end{cases} \quad (2.35)$$

для $P^a = \pi^0, \pi^\pm, K^\pm, K^0, \bar{K}^0$, обозначающих псевдоскалярные мезонные состояния и $S^a = a_0^0, a_0^\pm, \kappa^\pm, \kappa^0, \bar{\kappa}^0$ скалярные мезонные состояния. Поскольку в Лагранжиан взаимодействия не входит 'т Хоофтовский член, то в модели нельзя рассматривать η и η' состояния и соответствующие им скалярные партнёры. Обсуждение поведения η и η' проводится в работе [56].

Матричные элементы поляризованного оператора можно представить в виде двух интегралов, которые после суммирования по частотам Мацубары для мезонов в покое в среде ($\vec{q} = \vec{0}$) определяются как

$$\begin{aligned} \Pi_{ff'}^{Pa, Sa}(z, \vec{0}) &= 4\{I_1^f(T, \mu_f) + I_1^{f'}(T, \mu_{f'}) \\ &\mp [(z + \mu_{ff'})^2 - (m_f \mp m_{f'})^2] I_2^{ff'}(z, T, \mu_{ff'})\}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где $\mu_{ff'} = \mu_f - \mu_{f'}$.

Обсудим интегралы, которые возникли в уравнении (2.36). Первый из них является однопетлевым интегралом, который не зависит от энергии z и имеет вид

$$I_1^f(T, \mu_f) = \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{dp p^2}{E_f} (n_f^- - n_f^+), \quad (2.37)$$

где $E_f = \sqrt{p^2 + m_f^2}$ – энергия кварка. Второй интеграл зависит от комплексной переменной энергии z и может быть разделен на два вклада

$$I_2^{ff'}(z, T, \mu_{ff'}) = I_{2,\text{pair}}^{ff'}(z, T, \mu_{ff'}) + I_{2,\text{scatt}}^{ff'}(z, T, \mu_{ff'}). \quad (2.38)$$

Первый из них

$$\begin{aligned} I_{2,\text{pair}}^{ff'}(z, T, \mu_{ff'}) &= \\ & \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{dp p^2}{E_f E_{f'}} \left[\frac{1 - f_\Phi^+(E_{f'}) - f_\Phi^-(E_f)}{z - E_f - E_{f'} - \mu_{ff'}} + \frac{1 - f_\Phi^+(E_f) - f_\Phi^-(E_{f'})}{z + E_f + E_{f'} - \mu_{ff'}} \right], \end{aligned} \quad (2.39)$$

имеет полюсы в подынтегральном выражении, которые соответствуют парным модам кварковых возбуждений (т. е. в знаменателях находится сумма одночастичных энергий), в то время как второй,

$$I_{2,\text{scatt}}^{ff'}(z, T, \mu_{ff'}) = \quad (2.40)$$

$$\frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{dp p^2}{E_f E_{f'}} \left[\frac{f_\Phi^+(E_{f'}) - f_\Phi^+(E_f)}{z + E_f - E_{f'} - \mu_{ff'}} + \frac{f_\Phi^-(E_f) - f_\Phi^-(E_{f'})}{z - E_f + E_{f'} - \mu_{ff'}} \right],$$

имеет полюсы в подынтегральном выражении, которые соответствуют модам рассеяния (т. е. с разностью одночастичных энергий в знаменателях), см. также [137, 141].

Обобщённые функции распределения фермионов $f_\Phi^\pm(E_f)$ [142, 284] для кварков флейвора f с положительным (отрицательным) энергиями при наличии петли Полякова Φ и $\bar{\Phi}$ имеют вид

$$f_\Phi^+(E_f) = \frac{(\bar{\Phi} + 2\Phi Y)Y + Y^3}{1 + 3(\bar{\Phi} + \Phi Y)Y + Y^3}, \quad (2.41)$$

$$f_\Phi^-(E_f) = \frac{(\Phi + 2\bar{\Phi}\bar{Y})\bar{Y} + \bar{Y}^3}{1 + 3(\Phi + \bar{\Phi}\bar{Y})\bar{Y} + \bar{Y}^3}, \quad (2.42)$$

где введены сокращения $Y = e^{-(E_f - \mu_f)/T}$ и $\bar{Y} = e^{-(E_f + \mu_f)/T}$. Функции (2.41) и (2.42) удовлетворяют соотношению $f_\Phi^+(-E_f) = 1 - f_\Phi^-(E_f)$, и переходят в обычные функциям Ферми $f_1^\pm(E_f)$ для $\Phi = \bar{\Phi} = 1$

$$f_1^\pm(E_f) = \frac{1}{1 + e^{\beta(E_f \mp \mu_f)}}. \quad (2.43)$$

Массы кварков m_f находятся из уравнения щели

$$m_f = m_{0,f} + 8 m_f G_1 I_1^f(T, \mu), \quad (2.44)$$

а спектр масс мезонов находится по положению полюса

$$\mathcal{P}_{ff'}^{M^a}(M_{M^a} + i\eta, \mathbf{0}) = 1 - G_1 \Pi_{ff'}^{M^a}(M_{M^a} + i\eta, \mathbf{0}) = 0. \quad (2.45)$$

Для параметризации модели с использованием известных псевдоскалярных масс мезонов в поляризационном операторе (2.36) используются вакуумные выражения интегралов (2.37) и (2.38). Их легко получить если устремить функций кварковых распределений в ноль в (2.37) и (2.38). При расширении расчётов на конечные температуры и химические потенциалы решение

уравнения щели (2.44) приводит к уменьшению масс кварков (частичное восстановление киральной симметрии), так что порог для состояний континуума кварк-антикварк снижается. Значения Γ и μ , где связанное состояние сливается с континуумом, определяют переход Мотта диссоциации мезонов. Тогда в знаменателе в интеграле (2.39) появляется ноль, и в результате поляризационный оператор (2.36) становится комплексным с мнимой частью, которая соответствует ширине распада мезона в состояния из кварк-антикваркового континуума. После перехода Мотта все ещё можно попробовать искать резонанс вблизи порога, если его ширина достаточно мала в приближении Брейта–Вигнера для комплексного полюса.

Наиболее общим образом, свойства состояний континуума полностью описываются спектральной функцией, которая соответствует мнимой части пропагатора мезона (2.36), подробнее см. например [130]. Эквивалентным образом, можно выбрать полярное представление для комплексного пропагатора мезонов

$$D_{ff'}^{M_a}(\omega + i\eta, \vec{q}) = \left| D_{ff'}^{M_a}(\omega + i\eta, \vec{q}) \right| e^{i\delta_M(\omega, \vec{q})} \quad (2.46)$$

и рассмотреть спектральные свойства в мезонном канале M с помощью фазовых сдвигов [137, 138]

$$\delta_M(\omega, \vec{q}) = -\arctan \left\{ \frac{\text{Im} D_{ff'}^{M_a}(\omega + i\eta, \vec{q})}{\text{Re} D_{ff'}^{M_a}(\omega + i\eta, \vec{q})} \right\} = -\text{Im} \ln D_{ff'}^{M_a}(\omega + i\eta, \vec{q}) \quad (2.47)$$

Рассмотрим термодинамику связанную с мезонными корреляциями. Полное давление кварк-глюон-мезонной плазмы может быть представлено в следующем виде

$$p_{\text{tot}} = -\Omega_{\text{Gau}\beta} = p_g + p_q + p_m, \quad (2.48)$$

где глюонное давление в приближении среднего поля определяется потенциалом петель Полякова

$$p_g = \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}), \quad (2.49)$$

а кварковое давление есть

$$p_q = \sum_{f=u,d,s} p_f \quad (2.50)$$

$$p_f = -\frac{(m_f - m_{0,f})^2}{8G} + \frac{N_c}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 E_f + \frac{N_c}{3\pi^2} \int_0^\infty \frac{dp p^4}{E_f} [f_\Phi^+(E_f) + f_\Phi^-(E_f)] .$$

Мезонное давление

$$p_m = \sum_M p_M \quad (2.51)$$

может быть получено из второго члена в уравнении (2.31), где суммируются вклады от всех псевдоскалярных и скалярных мезонных каналов M , а шпур берётся по всем мезонным квантовым числам: интеграл по трехмерному импульсу \vec{q} и сумма по всем мезонным частотам Мацубары $\nu_m = 2m\pi T$. Суммирование можно провести с использованием спектрального представления

$$\ln D_{ff'}^{M_a}(i\nu_m, \vec{q}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{2}{i\nu_m - \omega} \ln D_{ff'}^{M_a}(\omega + i\eta, \vec{q}) \quad (2.52)$$

и полярного представления для того чтобы получить мезонное давления в представлении Бет–Уленбека с фазовыми сдвигами

$$p_M = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} g(\omega - \mu_M) \delta_M(\omega, \mathbf{q}) =$$

$$= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left\{ g(\omega - \mu_M) + g(\omega + \mu_M) \right\} \delta_M(\omega, \mathbf{q}) , \quad (2.53)$$

где $g(E)$ - функция Бозе

$$g(E) = \frac{1}{e^{\beta E} - 1} . \quad (2.54)$$

На последнем этапе преобразований использована нечётность фазовых сдвигов $\delta(-\omega) = -\delta(\omega)$, для функций Бозе использовано соотношение $g(-\omega - \mu) = -(1 + g(\omega + \mu))$, а также отброшен расходящийся вакуумный вклад (приближение по-sea). Этот достаточно грубый шаг может быть оправдан сравнением результатов расчётов в моделях, где для учёта подобного вклада вводится дополнительная регуляризация с результатами, где он отброшен. Его роль для оказывается пренебрежимо мала, см. например [141].

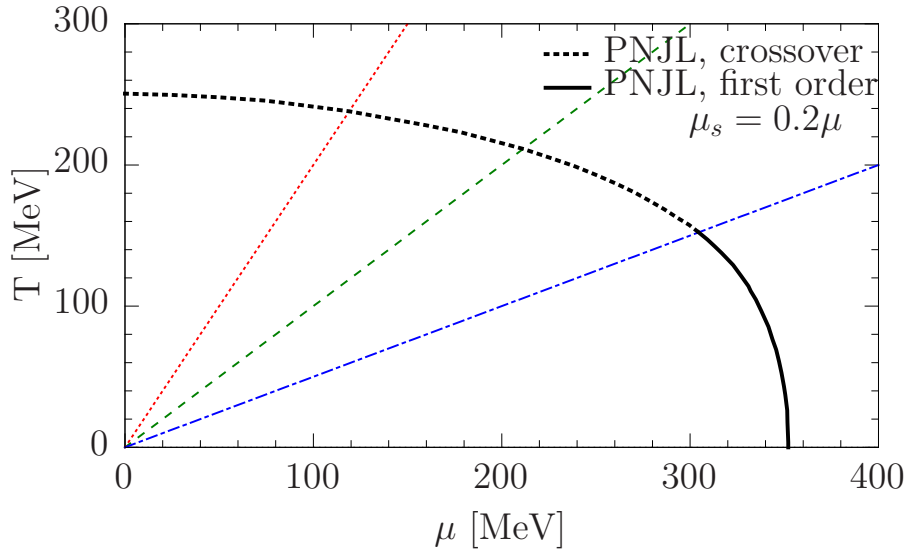


Рис. 2.11: Фазовая диаграмма модели НИЛП: чёрная сплошная линия соответствует фазовому переходу первого рода, который переходит в кроссовер, показанный чёрной пунктирной линией. Три тонких линии соответствуют фиксированным отношениям $\mu/T = 0.5$ (красная пунктирная линия), $\mu/T = 1.0$ (зелёная пунктирная линия) и $\mu/T = 2.0$ (синяя пунктирная линия).

Отметим, что физические мезоны являются цветовыми синглетными состояниями и поэтому их функции распределения не зависят от петли Полякова. Это отличается от случая дикварков, которые являются цветными объектами, и их распределение сильно подавляется связью с петлей Полякова в области конфаймента. При деконфайменте дикварки также подавляются диссоциацией Мотта на их кварковые составляющие [142]. Поэтому в настоящей работе они не учитываются. Параметры, использованные для численных оценок: массы токового кварка $m_{0(u,d)} = 5.5$ МэВ и $m_{0s} = 138.6$ МэВ, параметр трехмерного обрезания импульсов $\Lambda = 602$ МэВ и четырех-кварковая константа связи в скалярном-псевдоскалярном канале $G_1\Lambda^2 = 4.634$. В результате составляющая масса для легких кварков равна в вакууме 367 МэВ, а масса пиона константа слабого распада пиона равны 135 МэВ и $f_\pi = 92.4$ МэВ, соответственно. Наши результаты вычислены вдоль траекторий на фазовой диаграмме в модели НИЛП, показанной на рисунке 2.11. Каждая траектория соответствует постоянному отношению $\mu/T = 0, 0.5, 1.0, 2.0$, где $\mu = \mu_u = \mu_d$ - химический потенциал легкого кварка. Для странного кваркового химического потенциала используется соотношение $\mu_s = 0.2 \mu$ [285], см. также [286].

На рисунке 2.11 показана фазовая диаграмма модели НИЛП. Для её построения находится положение минимума производной температуры массы

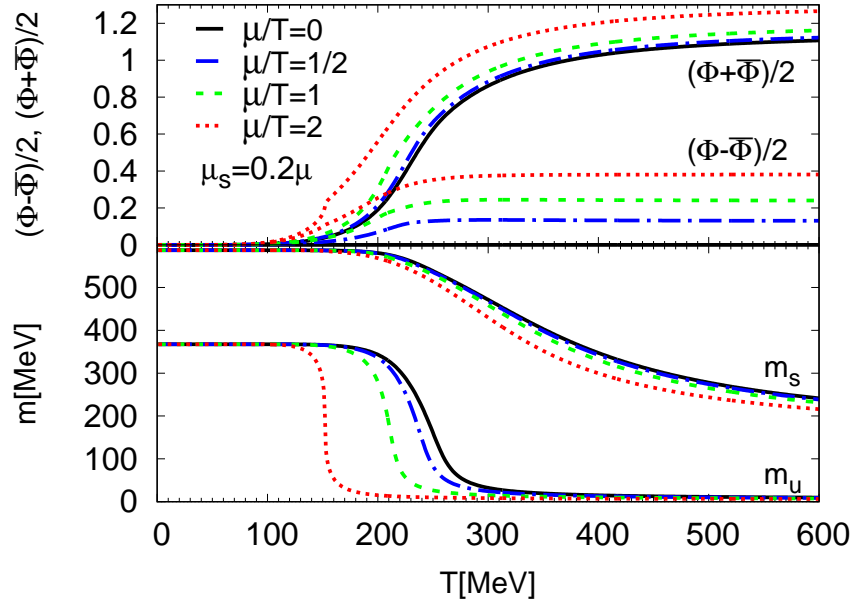


Рис. 2.12: Температурная зависимость динамических масс для лёгких кварков $m_u = m_d$ и для странного кварка m_s (нижняя часть рисунка) вместе с суммой и разностью петли Полякова Φ и сопряжённой петли $\bar{\Phi}$ (верхняя часть) вдоль различных траекторий на фазовой диаграмме: $\mu/T = 0$ (сплошная чёрная линия), $\mu/T = 0.5$ (синяя пунктирная линия), $\mu/T = 1.0$ (зелёная пунктирная линия) и $\mu/T = 2.0$ (красная пунктирная линия). Значение химического потенциала странного кварка равно $\mu_s = 0.2\mu$.

кварка как параметра кирального порядка dm/dT в плоскости $T - \mu$, что отображено пунктирной линией. Эти псевдокритические температуры переходят в критические температуры фазового перехода первого рода, характеризующегося скачком массы кварка в соответствующей точке плоскости $T - \mu$.

Характерной особенностью фазовой диаграммы является то, что при понижении отношения $T/\mu \rightarrow 0$ фазовый переход превращается из кроссовера в фазовый переход первого рода. Киральное восстановление является результатом заполнения фазового пространства и принципа запрета Паули, который эффективно снижает силу взаимодействия в уравнении щели.

На рисунке 2.12 показаны массы кварков вместе с суммой и разностью петли Полякова Φ и её сопряжённой $\bar{\Phi}$ по различным траекториям $\mu/T = \text{const}$ в плоскости $T - \mu$. Отметим, что восстановление киральной симметрии в секторе легких кварков коррелировано с ростом петли Полякова, которая благодаря полиномиальной форме потенциала петли Полякова превышает значение 1. Для конечных химических потенциалов $\Phi \neq \bar{\Phi}$ имеет место в областях, где $\Phi \neq 0$. На рисунке 2.13 представлены массы псевдоскалярных

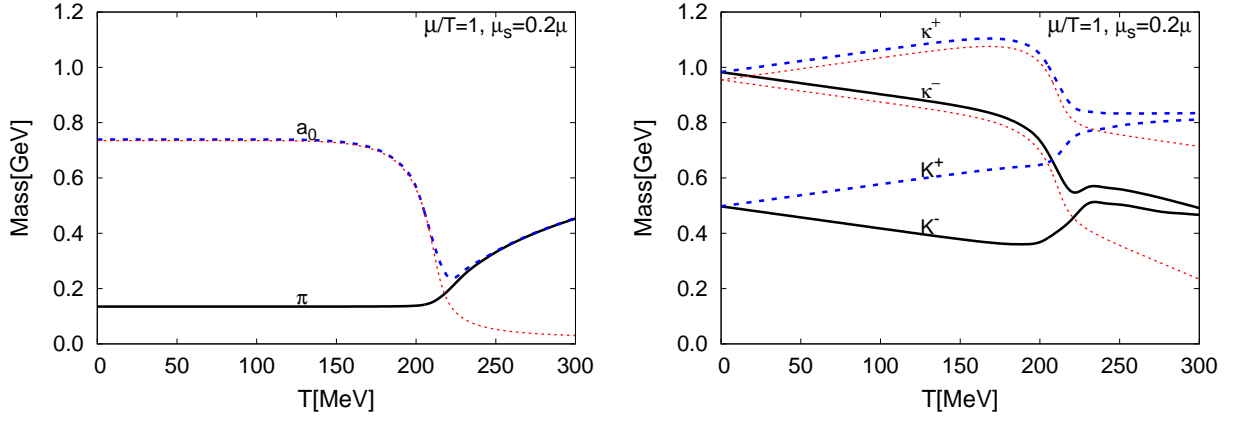


Рис. 2.13: (Слева) Температурная зависимость масс для пиона (черная пунктирная линия с двумя точками) и a_0 мезона (красная пунктирная линия с двумя штрихами) вместе с пороговыми значениями континуума $m_{\text{thr},\pi} = m_u + m_d$ (красная пунктирная линия) для $\mu/T = 1$. a_0 -мезон не является связанным состоянием, так как он находится выше порога при всех температурах, пион является связанным состоянием вплоть до перехода Мотта в континуум кварк-антикварк при температуре около 220 МэВ с почти постоянной массой. При температурах выше 230 МэВ массы пиона и a_0 мезона становятся вырожденными, что указывает на восстановление киральной симметрии. (Справа) Температурная зависимость масс для для каонов $K^+(K^-)$ и их киральных партнёров $\kappa^+(\kappa^-)$ мезонов. Порог континуума имеет вид $m_u + m_s + \mu_{us}$ ($m_u + m_s + \mu_{su}$).

π и K -мезонов, а также их скалярных партнеров, a_0 и κ мезонов. Когда частицы становятся нестабильными, существуют разные способы определения массы.

Первый заключается в решении однородного уравнения Бете-Солпитера, где масса получается соответствует полюсу пропагатора мезона. Этот метод хорошо работает, пока частица является связанным состоянием, то есть ниже температуры Мотта (T_{Mott}^M) для мезона M , когда поляризационные операторы не имеют мнимой части. Выше температуры Мотта мезон переходит в несвязанное состояние, и определение массы осложняется тем, что полюс становится комплексным. Поэтому для нахождения приближенного решения в этом случае обычно используется форма пропагатора Брейта–Вигнера с шириной, определяемой как $\Gamma = \text{Im}(q_0)$. Однако это приближение действительно только при температурах близких к T_{Mott}^M , см. [137].

Второй метод нахождения масс мезонов заключается в анализе фазового сдвига в рассматриваемом канале мезонного взаимодействия. Для определения массы определяется энергию ω , при которой фазовый сдвиг принимает

значение $\pi/2$. В системе покоя мезона эта энергия соответствует массе. Ниже температуры Мотта фазовый сдвиг в этой позиции изменяется от нуля до π , так что его производная является дельта-функцией, характерной для стабильного связанного состояния. Мы не рассматриваем положительную моду при низкой энергии, которая возникает в странном секторе для K, κ . Когда фазовый сдвиг остаётся ниже $\pi/2$, «масса» может быть определена положением максимума фазового сдвига. Поведение фазовых сдвигов показано на рисунках 2.14 - 2.16.

Третий метод определения массы мезона также включает анализ фазового сдвига. Значение массы можно найти из положения максимума производной фазового сдвига. Для стабильного связанного состояния производная фазового сдвига соответствует дельта-функции, а для резонанса в континууме — это гладкая функция [137, 139]. Для мезона, покоящегося в среде, положение пика производной по энергии фазового сдвига соответствует значению массы мезона.

Конечный химический потенциал в случае ненулевого μ/T устраняет вырождение масс мезонов в странных каналах. Разница в массе возникает между K^+ и K^- , а также между их киральными партнерами κ^+ и κ^- . Химический потенциал сдвигает полюс в пропагаторе, что приводит к снижению псевдокритической температуры T_c и, следовательно, также к снижению температуры Мотта T_{Mott}^M .

Поведение фазовых сдвигов мезонов при конечной температуре показаны на рисунках 2.14-2.16 как функции энергии ω для разных температур и значений отношения μ/T . Как и в работе [137] нами сделано предположение, что даже в среде фазовые сдвиги являются Лоренц инвариантными⁵ и зависят от ω и \mathbf{q} только через переменную Мандельстама $s = \omega^2 - \mathbf{q}^2$ в форме $\delta_M(\omega, \mathbf{q}) = \delta_M(\sqrt{s}, \mathbf{q} = 0) \equiv \delta_M(\sqrt{s}; T, \mu_M)$ при заданной температуре и химическом потенциале среды. Тогда формула БУ для мезонного давления

⁵Это необходимо ввиду того, что в модели используется обрезание по трехмерному импульсу, которое уже в вакууме приводит к нарушению Лоренц инвариантности и использование этого предположения позволяет частично избежать последствий такого нарушения.

имеет следующий вид

$$P_M = d_M \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{ds}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{s+q^2}} \left\{ g(\sqrt{s+q^2} - \mu_M) + g(\sqrt{s+q^2} + \mu_M) \right\} \delta_M(\sqrt{s}; T, \mu). \quad (2.55)$$

Масса связанного состояния находится при скачке фазового сдвига от 0 до π , и этот скачок соответствует дельта-функции в формулах БУ (2.55) для корреляций. В случае, когда континуумом состояний рассеяния можно пренебречь, то есть когда он отделен достаточно большой энергетической щелью от связанного состояния, в этом пределе получается термодинамика статистического ансамбля корреляций на своей массовой поверхности (газ резонансов).

На рисунке 2.14 показаны фазовые сдвиги для нестранных мезонов π и a_0 . Как и ожидалось для псевдоскалярных и скалярных изовекторных состояний, их фазовые сдвиги отражают нарушение киральной симметрии при низких температурах (и низких химических потенциалах) с связанным пионом и состоянием a_0 чуть выше порога континуума, отделенным от пиона на две массы кварка. При высокой температуре $T = 300$ МэВ эти фазовые сдвиги становятся неразличимыми, что соответствует восстановлению киральной симметрии.

На рисунке 2.15 показаны фазовые сдвиги для заряженных каонов. Для $\mu = 0$ их изменение с ростом температуры схоже с соответствующим поведением у пионов, при этом промежуток между связанным состоянием и континуумом уменьшается с температурой и становится равным нулю при $T = 300$ МэВ выше температуры Мотта для каона, когда каон становится резонансом в континууме. При конечных химических потенциалах каоны с разными электрическими зарядами имеют расщепление массы, и в спектре появляется новая низкоэнергетическая мода из-за конечной разности масс, см. также [141].

На рисунке 2.16 показаны фазовые сдвиги для состояний κ -мезонов являющихся киральными партнёрами каонов. Сравнение этих результатов с результатами для каонов аналогично сравнению скалярного a_0 -мезона с пионом. Массовое расщепление состояний с разными зарядами с увеличением

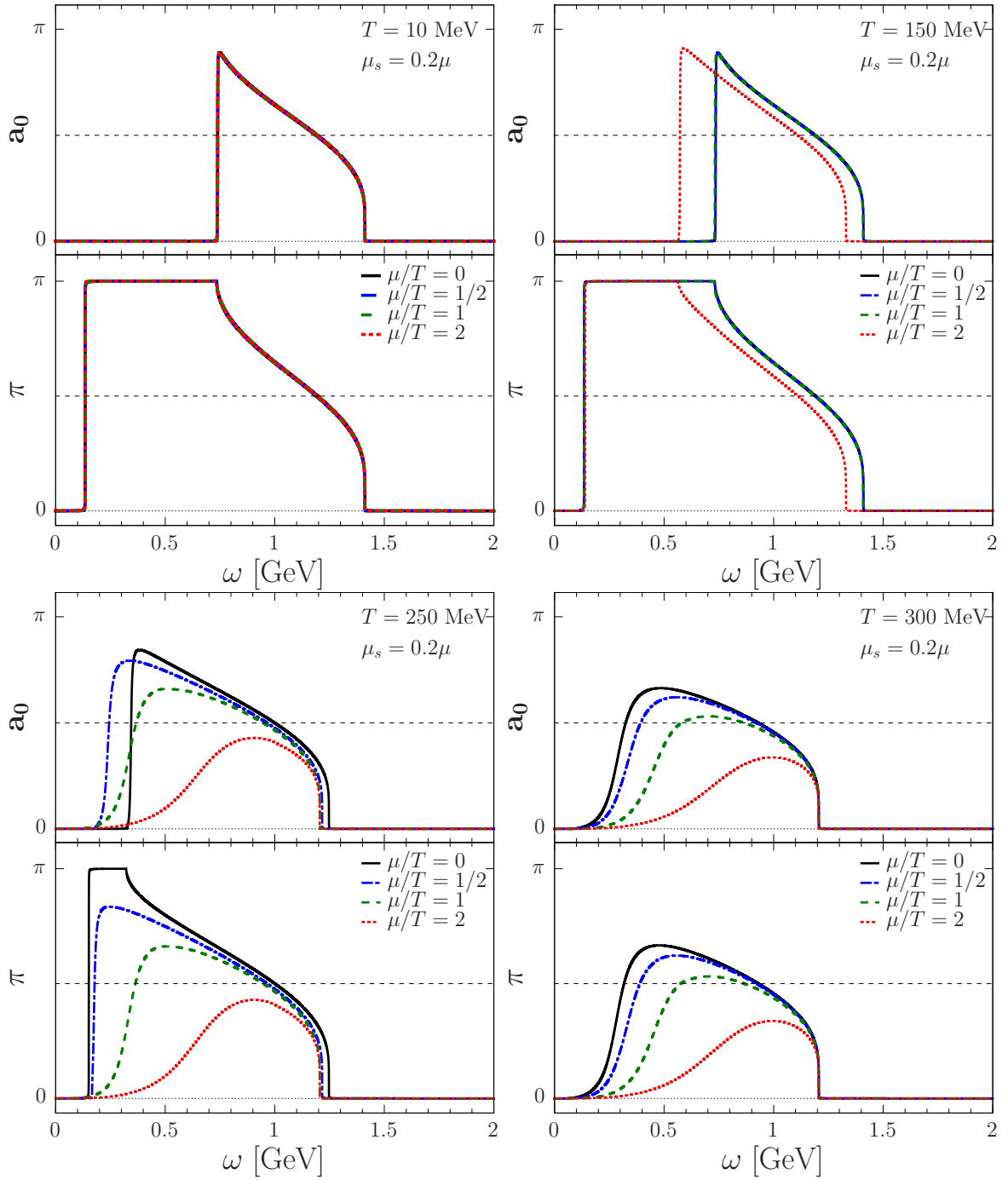


Рис. 2.14: Зависимость фазового сдвига в канале пиона и a_0 -мезона от энергии центра масс при разных температурах $T = 10, 150, 250, 300$ МэВ (сверху вниз) вдоль разных траекторий на фазовой диаграмме: $\mu/T = 0$ (чёрная сплошная линия), $\mu/T = 0.5$ (синяя пунктирная линия), $\mu/T = 1.0$ (зелёная пунктирная линия) и $\mu/T = 2.0$ (красная пунктирная линия).

химического потенциала схоже с поведением каонов. При низких температурах нарушение киральной симметрии проявляется в расщеплении массы и энергетической щели между каонами и κ -мезонами как их киральными партнёрами. При высоких температурах, когда киральная симметрия вос-

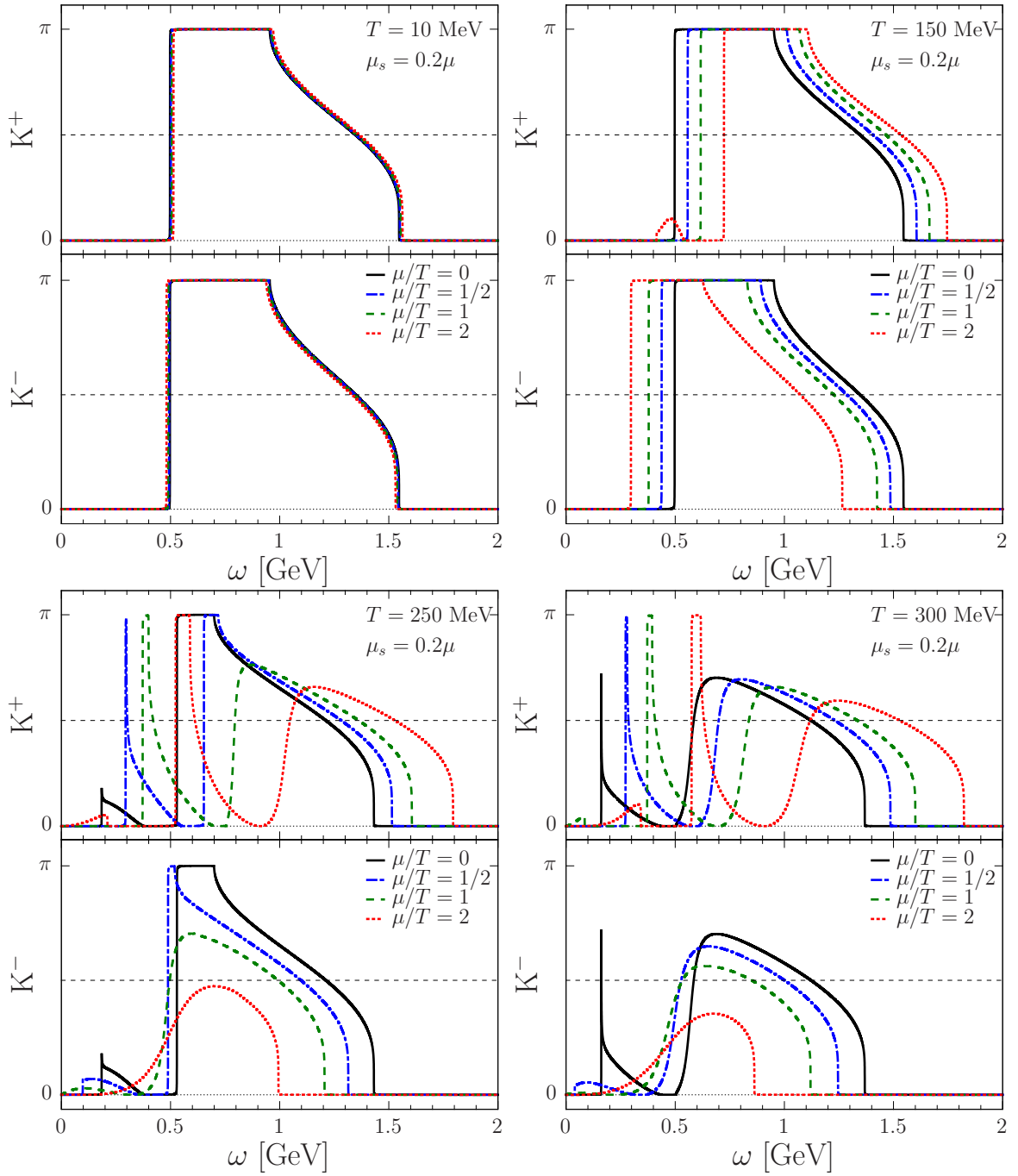


Рис. 2.15: То же, что рисунке 2.14 для состояний K^+ и K^- .

становившаяся, эти различия исчезают, и сдвиги фаз каона и κ становятся неразличимыми.

Обратимся к термодинамике мезонов в горячей и плотной среде, которая определяется через термодинамический потенциал или, что эквивалентно, через давления (2.53). Уравнение (2.53) имеет форму БУ, где фазовый сдвиг

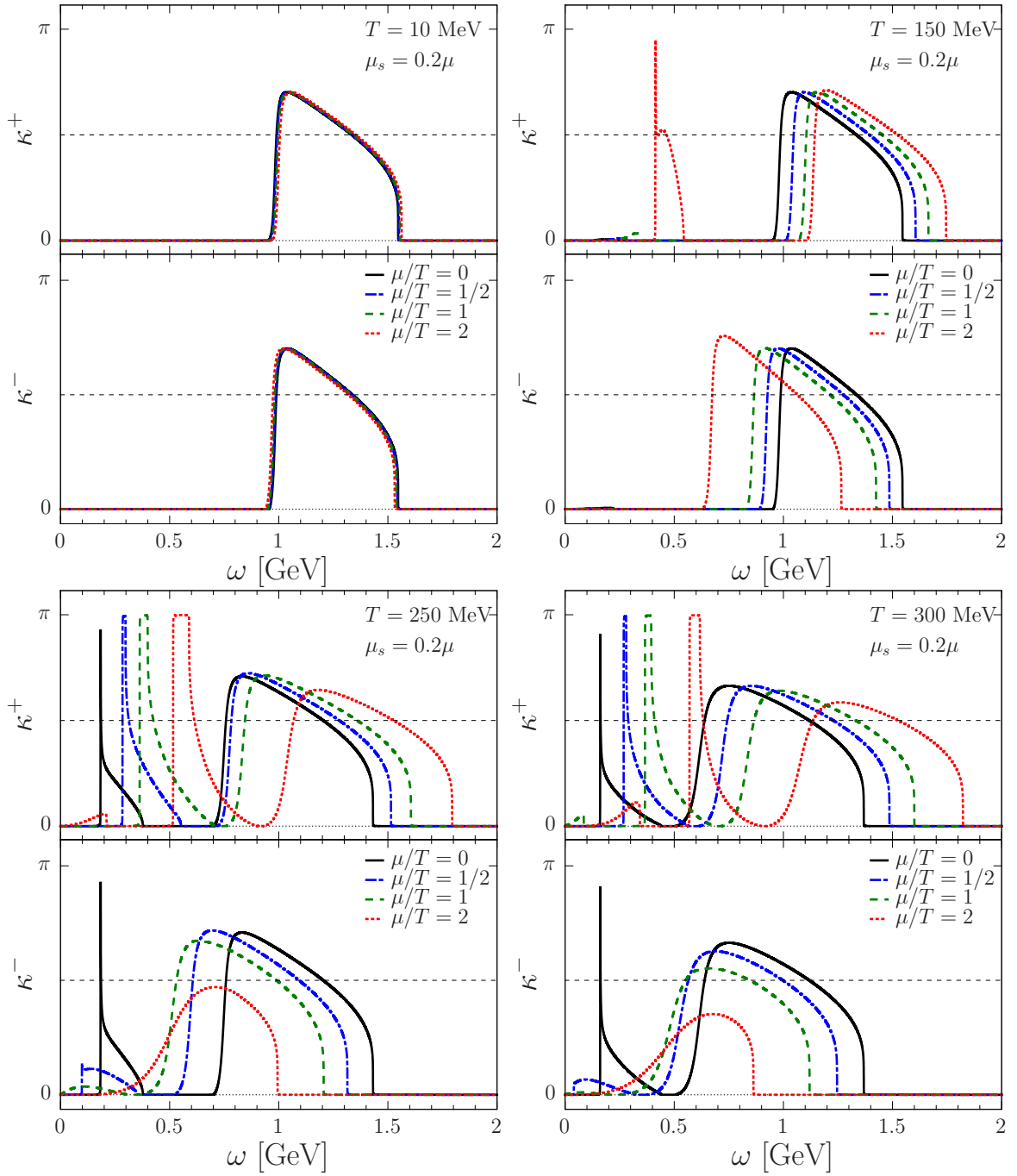


Рис. 2.16: То же, что рисунке 2.14 для состояний κ^+ и κ^- .

подчиняется теореме Левинсона в среде [138, 139]

$$\int_0^\infty d\omega \frac{d\delta_M(\omega)}{d\omega} = 0. \quad (2.56)$$

Здесь можно ввести энергетический уровень порога континуума ω_{thr} и расщепления (2.56) в сумме двух интегралов с интервалами интегрирования $[0, \omega_{\text{thr}}]$ и $[\omega_{\text{thr}}, \infty]$ соответственно. После интегрирования можно получить

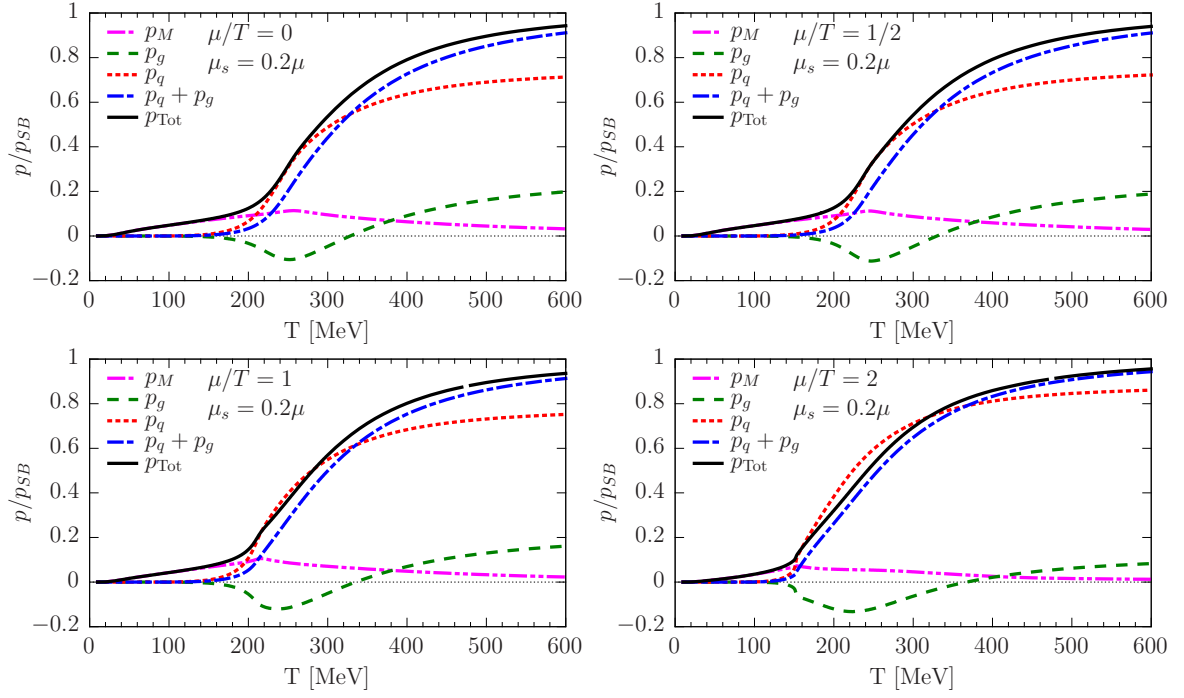


Рис. 2.17: Давление в 2+1 флейворной модели НИЛП со скалярными и псевдоскалярными мезонными корреляциями в зависимости от температуры (черная сплошная линия), нормированной на давление Стефана-Больцмана (2.58) для случаев $\mu/T = 0, 0.5, 1, 2$ (сверху вниз). Также показаны парциальные давления компонентов: лёгкие и странные кварки (красная пунктирная линия); «глюонный» вклад потенциала петли Полякова \mathcal{U} (зеленая пунктирная линия); лёгкие и странные кварки плюс глюоны (синие пунктирные); мезонные вклады (пурпурный тире-двойные точки).

теорему Левинсона в виде [142]

$$\pi n_{B,M} = \delta_M(\omega_{\text{thr}}) - \delta_M(\infty) , \quad (2.57)$$

которая применяется также в случае горячей и плотной среды. Порог континуума равен $\omega_{\text{thr}} = \sqrt{q^2 + m_{\text{thr}}^2} + \mu_{ff'}$, где $m_{\text{thr}} = 2m_u$ для мезонов из легких кварков (π, a_0) и $m_{\text{thr}} = m_u + m_s$ для мезоном состоящих из легкого и странного кварка (K, κ). Для энергий ниже порога может быть только дискретное число $n_{B,M}$ связанных состояний в канале M, каждое из которых вносит сумму π в изменение сдвига фазы при энергиях связанного состояния $\omega_{M,i} = \sqrt{q^2 + M_i^2}$ при $i = 1, \dots, n_{B,M}$. В частности, когда из-за восстановления киральной симметрии уменьшающиеся массы кварков приводят к снижению пороговых значений континуума ω_{thr} , это вызывает исчезновение связанных состояний в континууме (эффект Мотта), что приводит к $n_{B,M} = 0$.

На рисунке 2.17 показаны вклады мезонов (π, K, a_0, κ) и партонов (u, d, s

кварков и глюонов) в общее давление в горячей кварковой материи как функция температуры для разных значений отношения μ/T . Показано давление в единицах нормированных на предела Стефана-Больцмана для кварк-глюонной плазмы ($N_c = N_f = 3$)

$$P_{\text{SB}} = \frac{\pi^2}{90} T^4 \left\{ 2(N_c^2 - 1) + N_c \sum_{f=u,d,s} \left[\frac{7}{2} + \frac{15}{\pi^2} \left(\frac{\mu_f}{T} \right)^2 + \frac{15}{2\pi^4} \left(\frac{\mu_f}{T} \right)^4 \right] \right\}. \quad (2.58)$$

При конечной температуре и нулевом отношении μ/T парциальное давление мезонов имеет типичное поведение: сначала оно увеличивается с температурой, а затем, когда происходит киральный фазовый переход, уменьшается даже перед тем, как будет достигнута температура Мотта. Выше температуры Мотта растущая ширина мезона приводит к более сильному снижению давления. В случае конечных химических потенциалов вдоль траекторий с фиксированным отношением μ/T полное давление растёт быстрее с ростом температуры, поскольку температура кирального перехода падает с ростом μ/T .

Вернёмся к наблюдению, сделанному при обсуждении фазовых сдвигов для каонов, показанных на рисунке 2.15, и их скалярных состояний-партнёров, показанных на рисунке 2.16, когда в среде с конечной барионной плотностью и достаточно высокой температурой в положительно заряженных каналах возникает дополнительный низкоэнергетический резонанс или даже связанное состояние, которое практически отсутствует в отрицательно заряженных каналах. Появление этой аномальной моды является следствием неравных масс кварков составляющих эти состояний и отсутствует для пионов и их скалярных партнёров. Было бы интересно посмотреть, могут ли эти аномальные состояния приводить к каким-либо наблюдаемым эффектам, в частности для объяснения экспериментального результата по увеличению отношения K^+/π^+ по сравнению с отношением K^-/π^- выходов частиц при столкновениях тяжелых ионов при $\sqrt{s_{NN}} \sim 8$ ГэВ, что эквивалентно $E_{\text{lab}} \sim 30$ ГэВ на нуклон в экспериментах с неподвижной мишенью – так называемый эффект «рога» [287], см. [288] для ссылок на экспериментальные данные и ранние попытки объяснить местоположение «рога» в статистической модели. В этой работе предполагается, что переход от доминирующего вклада от барион-

ной плотности энтропии к мезонной может объяснить положение пика для отношения K^+/π^+ . Однако резкая форма пика недостаточно хорошо воспроизводится статистической моделью. Стандартные кинетические подходы к образованию частиц в тяжелоионных столкновениях не смогли объяснить эффект рога, но в то время этот эффект можно попытаться объяснить в модели PHSD (Parton-Hadron-String-Dynamics), когда дополнительно включаются эффекты восстановления киральной симметрии для распада струны [289].

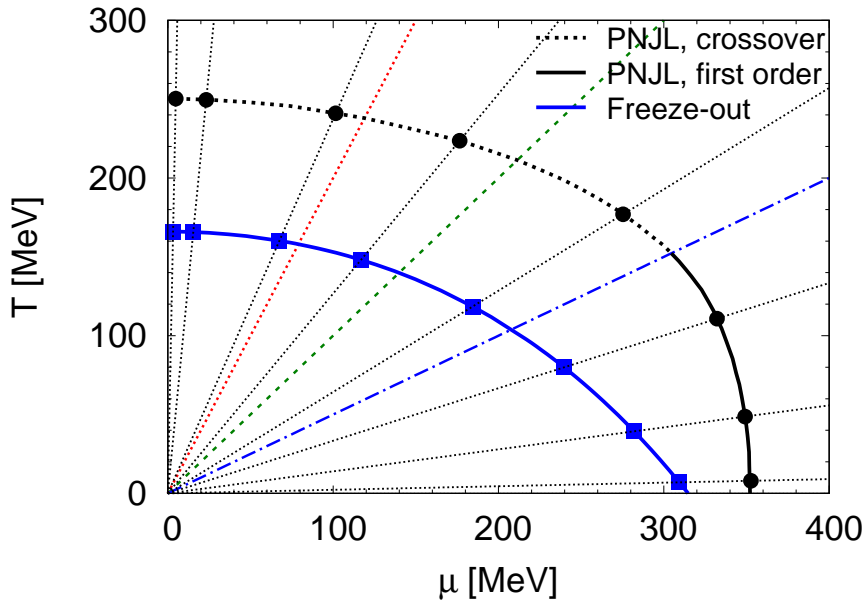


Рис. 2.18: Отображение точек на линии химического замораживания, параметризованной в работе [290] на линии псевдокритического перехода в модели НИЛП в предположении, что соответствующие состояния должны лежать на линии постоянного отношения μ/T . Точки обозначают значения для $\sqrt{s_{NN}}/[\text{ГэВ}] = 1.5, 2, 3, 5, 10, 20, 100, 500$ начиная с $T \sim 0$ при $\mu \sim 310$ МэВ до ~ 160 МэВ при $\mu \sim 0$.

На основе настоящего подхода к фазовым сдвигам в среде для рассеяния кварков и антикварков в горячем плотном кварковом веществе и вытекающих из этого мезонных вкладов в термодинамику, рассмотренным в рамках подхода Бет–Уленбека, можно рассмотреть отношения парциальных давлений для мезонных состояний в соответствии с уравнением (2.53) для описания соотношения выходов мезонов при замораживании

$$\frac{n_{K^\pm}}{n_{\pi^\pm}} = \frac{\int dM \int d^3p (M/E) [e^{(E \mp \mu_K)/T} - 1]^{-1} \delta_{K^\pm}(M)}{\int dM \int d^3p (M/E) [e^{(E - \mu_\pi)/T} - 1]^{-1} \delta_{\pi^\pm}(M)}, \quad (2.59)$$

где температура и барионный химический потенциалы связаны с энергией

столкновения $\sqrt{s_{NN}}$ формулой полученной фитированием параметров замораживания в статистической модели, см. например [290]. Неравновесный химический потенциал пионов выбирается как $\mu_\pi = 120$ МэВ [291]. Обсуждение неравновесного распределения пионов с химическим потенциалом проводилось недавно в [292]. Следуя концепции [289, 293], что химическое замораживание может быть вызвано восстановлением киральной симметрии (см. также [294]) и поэтому оценим отношения частиц (2.59) вдоль линии (псевдо-) критических температур на фазовой диаграмме рисунка 2.11. Чтобы связать эти числа с фактической феноменологией химического замерзания в столкновениях тяжёлых ионов, можно сопоставить точки с фиксированным значением μ/T на псевдокритической линии модели НИЛП с точками на кривой, фитированными в анализе проведённом в статистической модели с параметрами замораживания T_{fo}, μ_{fo} для того же значения μ_{fo}/T_{fo} , соответствующего определённой энергии столкновения $\sqrt{s_{NN}}$, показанному на рисунке 2.18. Поскольку в модели НИЛП абсолютное значение псевдокритической температуры больше, чем в расчётах решеточной КХД, мы предлагаем изменить масштаб температуры на соответствующий коэффициент и сохранить соотношение μ/T . Таким образом проводится сканирование по энергии для отношений K^+/π^+ и K^-/π^- , показанных на рисунке 2.19. Чтобы подчеркнуть возможную роль аномальных низкоэнергетических состояний для объяснения эффекта «рога», на рисунке тонкими линиями показаны те же отношения без этих состояний.

В результате усиление отношения K^+/π^+ — в области «рога» (без соответствующего влияния на отношение K^-/π^-) является эффектом кварковой подструктуры из-за аномального резонансного состояния для кварк-антикваркового поляризационного оператора (2.36) в канале K^+ мезона. Для дальнейшего объяснения эффекта можно проанализировать фазовые сдвиги, выясняя, таким образом, спектральные свойства в каналах K^+ , K^- и пионов вдоль псевдокритической линии на рисунке 2.20 (используя отображение показанное на рисунке 2.18). На массе связанного состояния фазовый сдвиг переходит с нуля (белого) на π (чёрный), так что его масса (энергия при нулевом импульсе) может быть идентифицирована как чёткая черно-белая граница. Хотя масса пиона практически не изменяется, масса K^+ (K^-) увеличи-

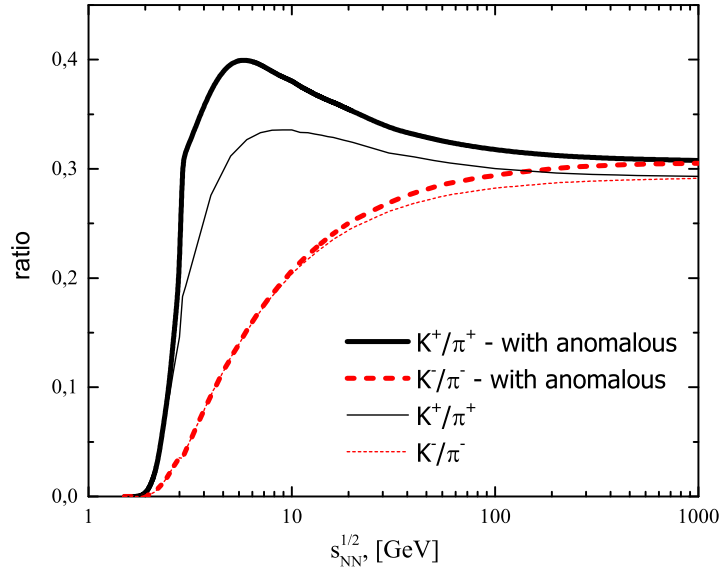


Рис. 2.19: Соотношение выходов K^+/π^+ и K^-/π^- с аномальными низкоэнергетическими состояниями и без них в зависимости от нуклон-нуклонного центра масс энергии $\sqrt{s_{NN}}$ в столкновениях тяжёлых ионов.

вается (уменьшается) при более низких значениях $\sqrt{s_{NN}}$, соответствующих более высокому химическому потенциалу. В области $4 \text{ ГэВ} < \sqrt{s_{NN}} < 20 \text{ ГэВ}$ легко идентифицировать состояние резонанса, обозначенное серой полосой, которая имеет массу, соответствующую границе с белым цветом, и лежащую в диапазоне от 400 до 500 МэВ.

В этой главе рассмотрено поведение вещества в модели НИЛ с двумя легкими и одним странным флейворами мезон-кварк-глюон при конечной температуре и химическом потенциале. Для анализа поведения кварк-антикварковых корреляций использовался подхода Бет–Уленбека. В этой формулировке кварк-антикварковые корреляции в скалярном и псевдоскалярном каналах объясняются соответствующими фазовыми сдвигами как решения уравнений Бете-Солпитера для пропагаторов мезонов.

В поведении фазовых сдвигов для K^\pm и κ^\pm мезонов возникает аномальная низкоэнергетическая мода, которая особенно выражена для положительно-заряженных состояний при конечных плотностях и температуре. Это явление обсуждается в качестве возможного объяснения эффекта «рога» - ярко выра-

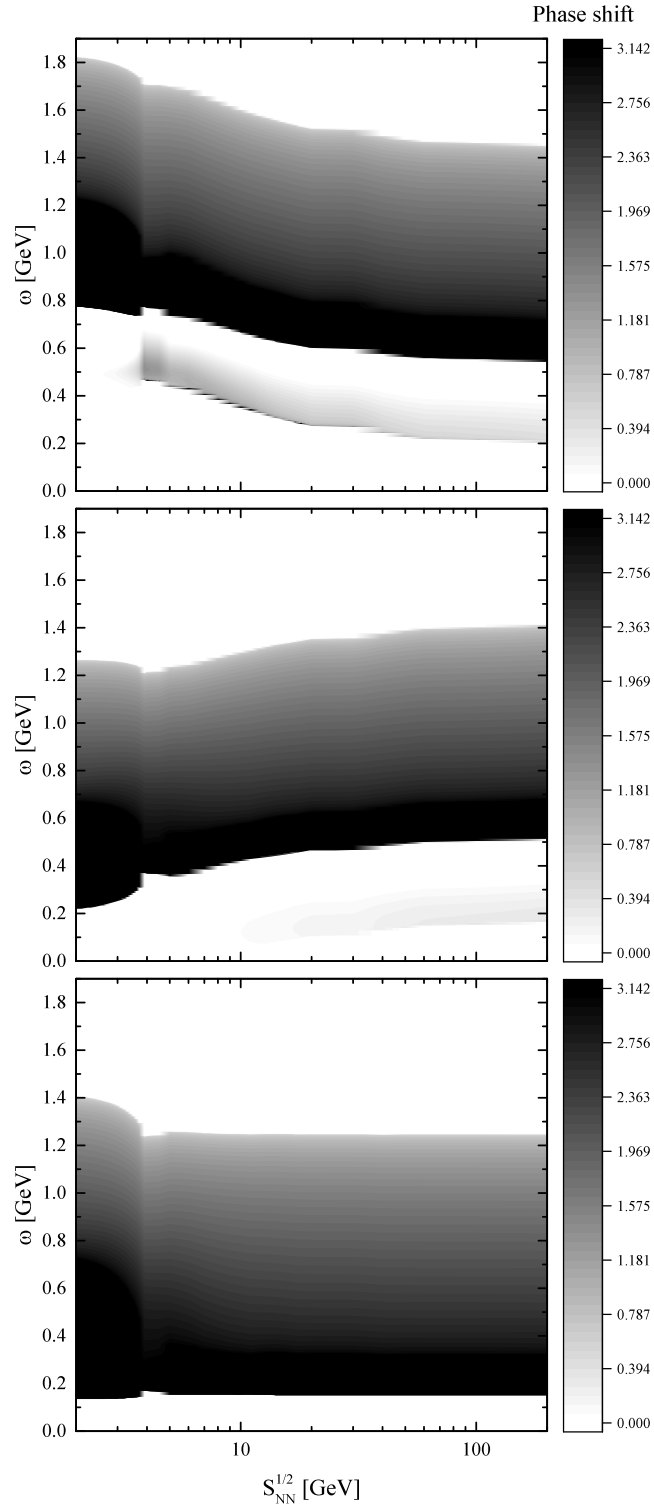


Рис. 2.20: Контуры энергетической зависимости фазовых сдвигов для K^+ (верхняя часть), K^- (средняя часть) и π (нижняя часть) вдоль линии химического замораживания на фазовой диаграмме показанной на рисунке (2.18), параметризованной энергией в системе центра масс $\sqrt{s_{NN}}$ столкновения тяжёлых ионов рождаемых в условиях соответствующим условиям замораживания. Можно отметить, что для K^+ возникает дополнительное квази-связанное состояние с малой массой, которое заметно в диапазоне энергий эффекта «рога» для отношения K^+/π^+ .

женного пика при сканировании энергии отношения K^+/π^+ в столкновениях тяжелых ионов в районе $\sqrt{s_{NN}} \sim 8$ ГэВ. Такое поведение давления в системе мезон-кварк-глюон при конечной температуре и химическом потенциале качественно согласуется с результатами моделирования решёточной КХД, см. например [295, 296].

2.4 Двухфотонные распады векторных мезонов и дилептонные распады скалярных мезонов

В данном разделе исследуются электромагнитные и сильные распады скалярных и векторных мезонов, которые происходят из-за смешивания $\sigma-\omega$, $\rho-a_0$ и $\phi-f_0$ в плотной барионной материи в локальной модели НИЛ.

Параметры модели в вакууме фиксированы таким образом, что позволяют воспроизводить массы π , K и ρ мезонов, константу слабого распада пиона, сильную ширину распада ρ -мезона и разность масс η и η' мезонов. Детали параметризации приводятся в [13] и дают следующий результат: $m_u = 280$ МэВ, $m_u^0 = 2.1$ МэВ, $m_s = 416$ МэВ, $m_s^0 = 51$ МэВ, $G_1 = 3.2$ ГэВ $^{-2}$, $G_2 = 16$ ГэВ $^{-2}$, $H = 4.6$ ГэВ $^{-5}$, $\Lambda_3 = 1.03$ ГэВ. В приближении среднего поля, где вычисляются только однопетлевые диаграммы, можно использовать кварковый пропагатор на основе формализма «реального времени» (2.1) [256, 259].

Зависимость составляющих кварковых масс m_u , m_s от T и μ может быть найдена из уравнений щели (1.40) (напомним правило соответствия между нелокальной и локальной моделями $S_u \rightarrow 8m_u I_1(m_u)$). Поведение кварковых масс m_u и m_s как функция μ показано на рисунке 2.21 при $T = 20$ и 100 МэВ. Как видно из этих графиков, масса странного кварка мало изменяется с μ в интересующем диапазоне (в адронной фазе), поэтому m_s можно приблизительно рассматривать как постоянную, фиксированную на вакуумное значение.

Прямой распад нейтрального ρ -мезона на два фотона в вакууме запрещен, но в плотной среде становится возможным переход ρ в a_0 -мезон из-за явного нарушения Лоренц симметрии. Схематически процесс представлен диаграммой, нарисованной в 2.22. Сначала кварковая петля приводит к переходу

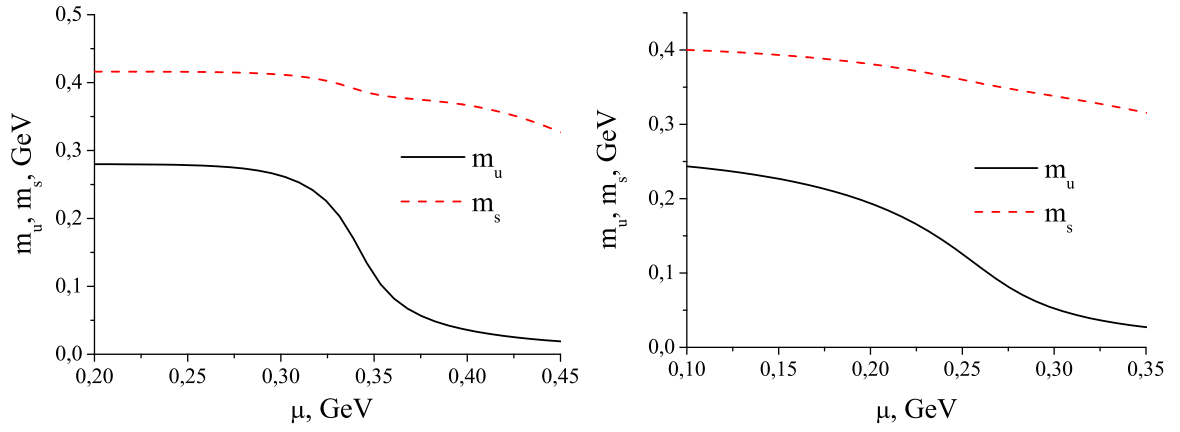


Рис. 2.21: Массы u - и s -кварков как функции μ при фиксированной температуре: $T = 20$ МэВ (слева), $T = 100$ МэВ(справа).

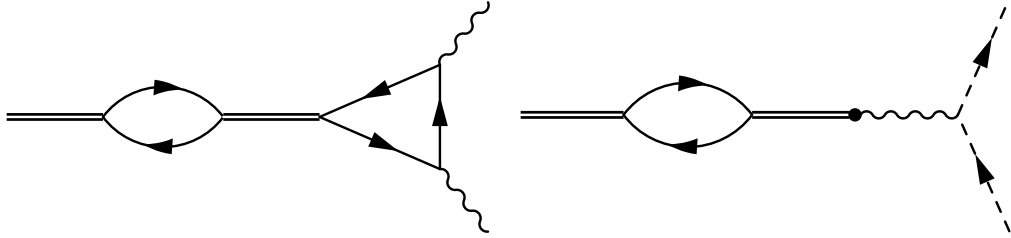


Рис. 2.22: (Слева) Диаграмма соответствующая распаду $\rho(\omega, \phi) \rightarrow \gamma\gamma$. Перекрёстная диаграмма не показана. (Справа) Диаграмма дилептонного распада скалярных мезонов в среде на основе смешивания скаляр-вектор.

вектор-скаляр, за которым следует промежуточный скалярный резонанс и в конце находится треугольная кварковая петля, соответствующая распаду скалярного мезона на два фотона. Амплитуда этого процесса имеет вид

$$A_{\rho \rightarrow \gamma\gamma}^{\alpha\mu\nu} = J_{\rho \rightarrow a_0}^{\alpha} D_{a_0} T_{a_0 \rightarrow \gamma\gamma}^{\mu\nu}, \quad (2.60)$$

где $J_{\rho \rightarrow a_0}^{\alpha}$ петля перехода ρ - a_0 , D_{a_0} – пропагатор a_0 -мезона, и $T_{a_0 \rightarrow \gamma\gamma}^{\mu\nu}$ является амплитудой распада $a_0 \rightarrow \gamma\gamma$ (2.22).

Рассмотрим правую часть (2.60). Смешивание ρ - a_0 определяется форму-

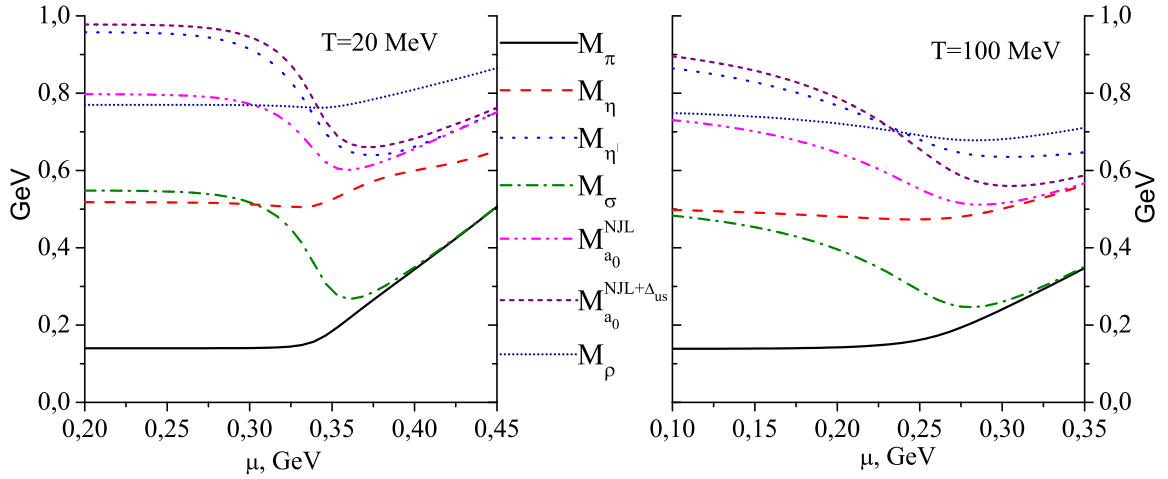


Рис. 2.23: Массы π , a_0 , σ , ρ , η и η' - мезонов как функции μ при $T = 20$ МэВ и $T = 100$ МэВ.

лой [297]

$$\begin{aligned}
 J_{\rho \rightarrow a_0}^\alpha &= \frac{C_{\rho \rightarrow a_0}}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} [S(k_-, T, \mu) \gamma^\alpha S(k_+, T, \mu)] \\
 &= 2m_u C_{\rho \rightarrow a_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} k^\alpha \frac{\delta(k_+^2 - m^2)}{k_-^2 - m^2} (n(\mathbf{k}_+; T, \mu) - n(\mathbf{k}_+; T, -\mu)) \\
 &\quad \times (\theta(k_+^0) - \theta(-k_+^0)), \tag{2.61} \\
 C_{\rho \rightarrow a_0} &= 4N_c g_{a_0} g_\rho, \quad k_\pm = k \pm \frac{p}{2}, \\
 g_{a_0} &= (4I_2^{\Lambda_3}(m_u, T, \mu))^{-1/2}, \quad g_\rho = \sqrt{6} g_{a_0},
 \end{aligned}$$

где g_{a_0} и g_ρ – мезон-кварковые константы связи a_0 и ρ , k – импульс кварка, а p – импульс распадающегося мезона.

В вакууме при $\mu = T = 0$, $J_{\rho \rightarrow a_0}^\alpha = 0$, тогда как в среде он не равен нулю и исчезает только в том случае, если частица находится в состоянии покоя в системе тепловой бани. Более того, $J_{\rho \rightarrow a_0}^\alpha$ удовлетворяет калибровочной инвариантности: $p_\alpha J_{\rho \rightarrow a_0}^\alpha = 0$, что позволяет упростить следующие выражения, используя отношение

$$|J|^2 = (J_{\rho \rightarrow a_0}^\alpha)^* J_{\alpha, \rho \rightarrow a_0} = -\frac{p^2}{\mathbf{p}^2} |J_{\rho \rightarrow a_0}^0|^2, \tag{2.62}$$

где $J_{\rho \rightarrow a_0}^0$ вычисляется интегрированием по углам в системе тепловой бани

$$J_{\rho \rightarrow a_0}^0 = \frac{C_{\rho \rightarrow a_0} m_u}{(4\pi)^2 |\mathbf{p}|} \int_{m_u}^{\infty} dE \delta(E) [(2E + p^0) \ln(F_+) + (2E - p^0) \ln(F_-)], \quad (2.63)$$

$$\delta(E) = \frac{\sinh(\mu/T)}{\cosh(\mu/T) + \cosh(E/T)}, \quad F_{\pm} = \frac{p^2 \pm 2p_0 E + 2|\mathbf{p}|q}{p^2 \pm 2p_0 E - 2|\mathbf{p}|q}, \quad (2.64)$$

с $q = \sqrt{E^2 - m^2}$.

Второй множитель в (2.60) – пропагатор a_0 -мезона, вычисленный на массовой поверхности ρ -мезона в среде,

$$D_{a_0} = (M_{a_0}^2 - M_{\rho}^2 - i\Gamma_{a_0}(M_{\rho})M_{a_0})^{-1}. \quad (2.65)$$

Как известно из различных исследований [259] (см. также рисунок 2.23), масса ρ -мезона является гладкой функцией T и μ и немного уменьшается при приближении условий восстановления киральной симметрии. Поэтому для грубых оценок ее можно считать постоянной в адронной фазе.

Как следует из расчетов модели НИЛ [259], масса σ -мезона значительно падает с ростом температуры и химического потенциала, пока она не станет почти вырожденной с массой пиона при восстановлении киральной симметрии. То же самое ожидается для a_0 -мезона. Согласно модели НИЛ масса a_0 должна быть найдена из выражения [20]

$$M_{a_0}^2 = g_{a_0}^2 \left[\frac{1}{G_{a_0}} - 8I_1^{\Lambda_3}(m_u) \right] + 4m_u^2, \quad G_{a_0} = G_1 - 4Hm_s I_1^{\Lambda_3}(m_s), \quad (2.66)$$

что приводит к заниженному значению $M_{a_0} \approx 800$ МэВ по сравнению с экспериментально измеренной массой $M_{a_0}^{\text{exp}} = 984.7 \pm 1.2$ МэВ [234].

Возможное объяснение недостатка массы в расчётах НИЛ заключается в предположение о существовании четырехкварковой компоненты в a_0 -мезоне [298–300], которое обычно игнорируется в модели НИЛ. Для учёта четырехкварковой компоненты, можно ввести дополнительный член Δ в массовую формулу для a_0 -мезона

$$M_{a_0}^{*2} = M_{a_0}^2 + \Delta. \quad (2.67)$$

Как и ожидалось часть массы a_0 -мезона из модели НИЛ, а также параметр порядка m_u уменьшаются с ростом T и μ . Естественно предположить, что

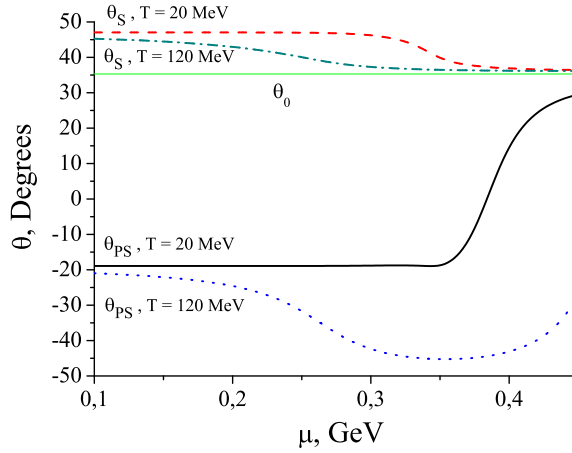


Рис. 2.24: Углы смешения скалярных и псевдоскалярных мезонов в модели NJL для $T = 20$ МэВ и $T = 120$ МэВ как функции химического потенциала μ .

Δ имеет аналогичное поведение. Δ выбирается в самой простой форме для двух случаев: I) $\Delta = \Delta_u$ и II) $\Delta = \Delta_{us}$, где $\Delta_u = 4m_u^2$ и $\Delta_{us} = 2.75m_um_s$, что достаточно для воспроизведения экспериментально измеренной массы a_0 в вакууме. После фазового перехода наступает восстановление киральной симметрии и Δ исчезает.

Второй величиной в пропагаторе a_0 -мезона является его ширина. Распад $a_0 \rightarrow \eta\pi$ определяет всю ширину и в модели НИЛ имеет вид

$$\Gamma_{a_0}(M_\rho) \approx \Gamma_{a_0\eta\pi}(M_\rho) = \frac{g_{a_0\eta\pi}^2}{16\pi M_\rho} \sqrt{1 - \left[\frac{M_\eta + M_\pi}{M_\rho}\right]^2} \times \sqrt{1 - \left[\frac{M_\eta - M_\pi}{M_\rho}\right]^2}, \quad (2.68)$$

$$g_{a_0\eta\pi} = 2m_u g_{a_0} \sin \bar{\theta}_P, \quad \bar{\theta}_P = \theta_P - \theta_0, \quad (2.69)$$

где $\theta_0 \approx 35.3^\circ$ является идеальным углом смешивания ($\text{ctg } \theta_0 = \sqrt{2}$) и θ_P — угол синглетно-октетного смешивания для псевдоскалярных мезонов. Зависимость угла смешения от химического потенциала μ приведена в 2.24 при $T = 20$ и $T = 120$ МэВ. Поведение $\Gamma_{a_0\eta\pi}(M_\rho)$ как функции химического потенциала μ показано на рисунке 2.25.

Последний множитель в (2.60), $T_{a_0 \rightarrow \gamma\gamma}^{\mu\nu}$, является амплитудой, описывающей двухфотонный распад a_0 -мезона. Выражение для него хорошо известно [147, 301]

$$T_{a_0 \rightarrow \gamma\gamma}^{\mu\nu} = C_{a_0 \rightarrow \gamma\gamma} f_1(T, \mu) F^{\mu\nu}, \quad C_{a_0 \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{2\alpha g_{a_0}}{3\pi m_u}, \quad (2.70)$$

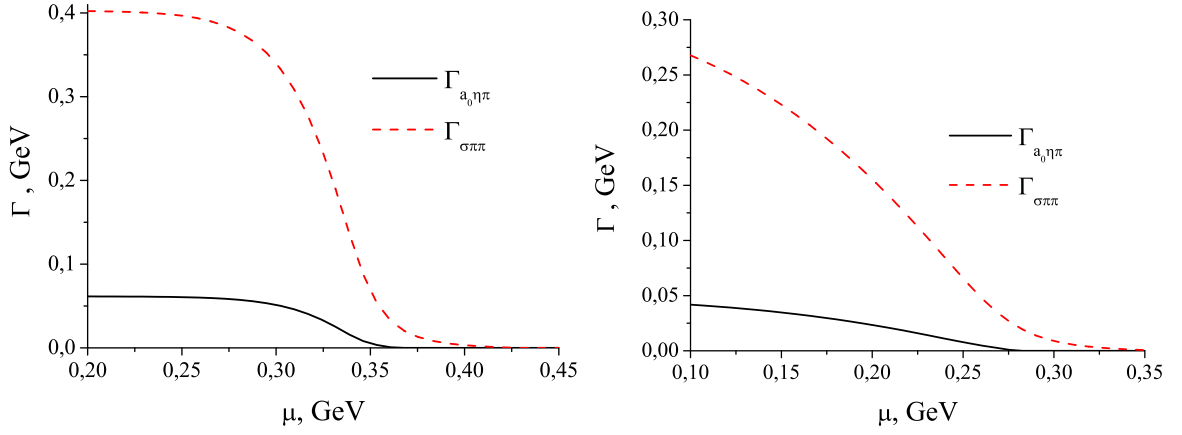


Рис. 2.25: Ширины распадов $a_0 \rightarrow \eta\pi$ и $\sigma \rightarrow \pi\pi$ в модели НИЛ для $T = 20$ МэВ (слева) и $T = 120$ (справа) МэВ как функции химического потенциала μ .

где $\alpha = 1/137$, $F^{\mu\nu}$ является тензором электромагнитного поля, и функции f_1 определяется как [147]

$$f_1(T, \mu) = 1 - \frac{3}{2} m_u^2(T, \mu) \int_0^\infty dk \frac{k^3}{E^6(k)} \ln \left[\frac{E(k) + k}{E(k) - k} \right] \times [n(k; T, \mu) + n(k; T, -\mu)]. \quad (2.71)$$

Ширина получается после вычисления квадрата абсолютного значения амплитуды, суммирования по поляризации фотонов конечного состояния и интегрирования по телесному углу

$$\Gamma_{\rho \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{\alpha^2 M_\rho^6 g_{a_0}^2}{432\pi^3 m_u^2 E_\rho |\mathbf{p}|^2} \cdot \frac{|J_{\rho \rightarrow a_0}|^2}{(M_{a_0}^2 - M_\rho^2)^2 + \Gamma_{a_0}^2 (M_\rho) M_{a_0}^2}, \quad (2.72)$$

где $E_\rho = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + M_\rho^2}$. Численные оценки ширины распада $\rho \rightarrow \gamma\gamma$ как функции трехмерного импульса \mathbf{p} и химического потенциала μ при температурах $T = 20$ и 120 МэВ приведены на рисунках 2.26–2.27 с $\Delta = \{\Delta_u, \Delta_{us}\}$. Легко видеть, что при некоторых значениях T и μ ширина двухфотонного распада ρ -мезона может быть сопоставима с шириной двухфотонного распада скалярных и псевдоскалярных мезонов в вакууме (см. таблицу 2.2).

Аналогично, двухфотонный распад ω мезона задаётся той же диаграммой, что и для ρ . Разница в том, что ω смешивается с изоскалярным скалярным мезоном σ . В модели НИЛ масса σ -мезона находится из уравнения

$$M_\sigma^2 \approx g_{a_0}^2 \left(\frac{1}{G_\sigma} - 8I_1^{\Lambda_3}(m_u) \right) + 4m_u^2, \quad G_\sigma = G_1 + 4m_s I_1^{\Lambda_3}(m_s). \quad (2.73)$$

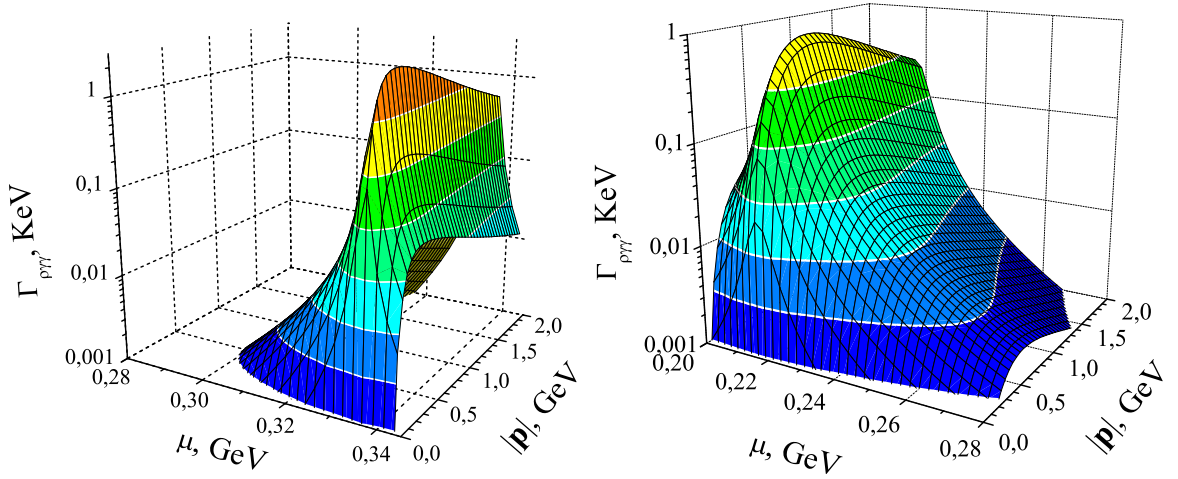


Рис. 2.26: Ширина двухфотонного распада ρ -мезона с массой a_0 , скорректированной на $\Delta = \Delta_u$ как функция μ и $|\mathbf{p}|$ для $T = 20$ МэВ (слева) и для $T = 120$ МэВ (справа).

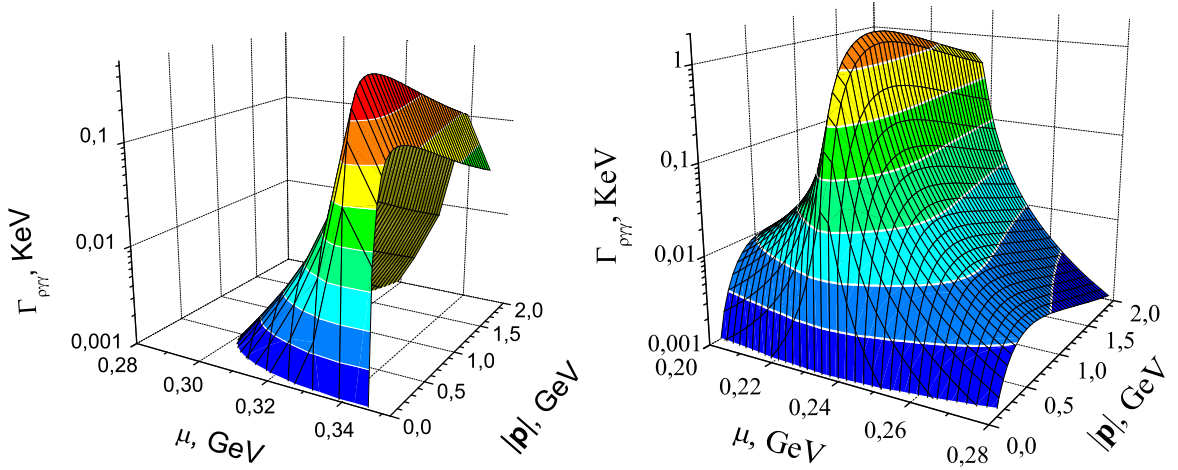


Рис. 2.27: Ширина двухфотонного распада ρ -мезона с массой a_0 , скорректированной на $\Delta = \Delta_{us}$ как функция μ и $|\mathbf{p}|$ для $T = 20$ МэВ (слева) и для $T = 120$ МэВ (справа).

Ширина σ в основном определяется его сильным распадом на два пиона и в модели имеет вид моделью (на массовой поверхности ω -мезона)

$$\Gamma_\sigma(M_\omega) \approx \Gamma_{\sigma\pi\pi}(M_\omega) = \frac{3g_{\sigma\pi\pi}^2}{32\pi M_\omega} \sqrt{1 - \frac{4M_\pi^2}{M_\omega^2}}, \quad (2.74)$$

$$g_{\sigma\pi\pi} = 2m_u g_{a_0} \cos \bar{\theta}_S. \quad (2.75)$$

Амплитуда распада $\omega \rightarrow \gamma\gamma$ может быть получена из (2.60) заменой коэффициента $C_{a_0 \rightarrow \gamma\gamma}$ в $T_{a_0 \rightarrow \gamma\gamma}^{\mu\nu}$ (2.70)) на $C_{\sigma \rightarrow \gamma\gamma} = 10\alpha g_{a_0} / (9\pi m_u)$ и с используя о пропагатор σ -мезона вместо a_0 ($D_{a_0} \rightarrow D_\sigma$)

$$D_\sigma = (M_\sigma^2 - M_\omega^2 - i\Gamma_\sigma(M_\omega)M_\sigma)^{-1}. \quad (2.76)$$

Угол $\bar{\theta}_S$ определяется как разность между углом смешивания для скалярных мезонов θ_S и идеальным смешиванием θ_0 : $\bar{\theta}_S = \theta_S - \theta_0$. Его поведение

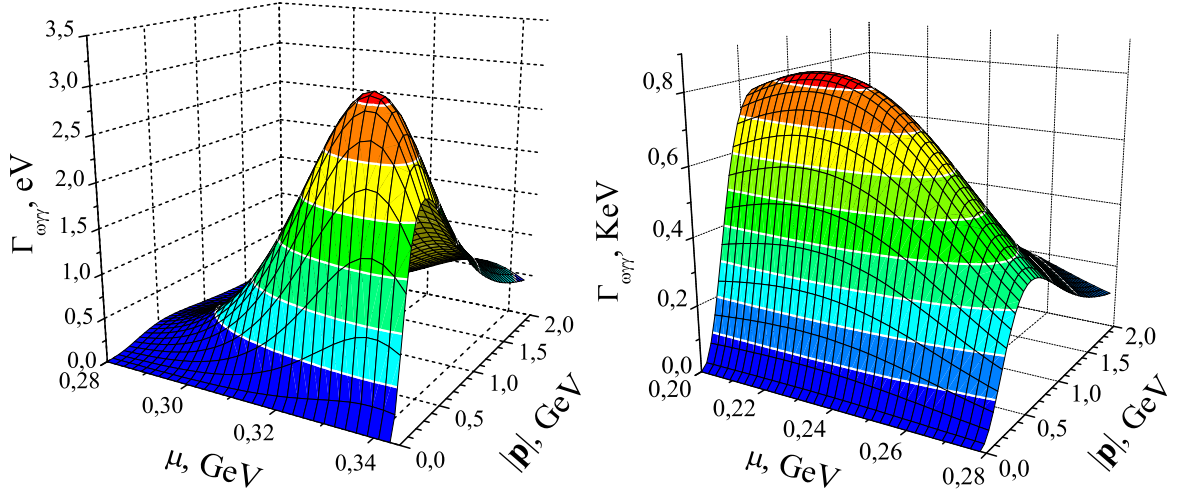


Рис. 2.28: Ширина двухфотонного распада ω мезона как функция μ и $|\mathbf{p}|$ для $T = 20$ (слева) и $T = 120$ МэВ (справа).

относительно μ приведено в 2.24, из которого видно, что синглетно-октетное смешение среди скалярных мезонов почти идеально, и поэтому используется предположение $\bar{\theta}_S = 0$.

Особенностью распада $\rho \rightarrow \gamma\gamma$ является то, что масса a_0 -мезона больше массы ρ -мезона в вакууме и значительно падает при приближении к переходу в фазу с восстановленной киральной симметрией. Из этого можно сделать вывод, что в конкретных условиях массы a_0 и ρ вырождаются, что может сопровождаться резонансным усилением распада $\rho \rightarrow \gamma\gamma$ и заметным усилением вблизи ρ -мезонной массы в двухфотонном спектре. Что касается σ -мезона, то он всегда легче ω . Более того, их разность масс растет с μ , и, как следствие, при этом распаде не возникает резонансного явления. Поэтому в числе двухфотонных событий, связанных с распадами векторного мезона, будут преобладать события, идущие от $\rho \rightarrow \gamma\gamma$, а не от $\omega \rightarrow \gamma\gamma$, как видно из рисунка 2.28.

Распад ϕ -мезона происходит за счет смешивания ϕ - f_0 ($\phi \rightarrow f_0(980) \rightarrow \gamma\gamma$), где пара фотонов образуется при распаде промежуточного $f_0(980)$ -мезона. Как видно из 2.24, смешение между скалярными мезонами почти идеально, и можно считать, что $f_0(980)$ -мезон в модели состоит только из s - и \bar{s} -кварков. ϕ -мезон также состоит в основном из странных кварков. Используя это приближение и то, что масса странного кварка почти постоянна (см. рисунок 2.21) в адронной фазе, можно примерно оценить распад ϕ на $\gamma\gamma$.

Таблица 2.2: Двухфотонные распады скалярных и псевдоскалярных мезонов в вакууме [234].

Частица	Масса, МэВ	$\Gamma_{\gamma\gamma}$, КэВ
π^0	134.9766 ± 0.0006	$(7.8 \pm 0.5) \cdot 10^{-3}$
η	547.75 ± 0.12	1.29 ± 0.07
η'	957.78 ± 0.14	4.29 ± 0.15
σ	400 – 1200	~ 1
a_0	984.7 ± 1.2	0.3 ± 0.1
f_0	980 ± 10	$0.39^{+0.1}_{-0.13}$

Смешивание ϕ - $f_0(980)$ представлено интегралом вида (2.63), где следует заменить массу u -кварка массой странного кварка ($m_u \rightarrow m_s$, $J_{\rho \rightarrow \omega}^0 \rightarrow J_{\phi \rightarrow f_0}^0$). Качественно результаты для распада ϕ мезона на фотоны как функция μ подобны поведению более легких векторных мезонов (ρ и ω) и поэтому графики не приводятся. Можно только отметить, что ширина распада $\phi \rightarrow \gamma\gamma$ может быть равна 2 КэВ при соответствующих условиях в адронной фазе при трехмерном импульсе около 1 ГэВ. Ширина больше для больших значений импульсов: при $|\mathbf{p}| \sim 5$ ГэВ ширина может достигать 8 КэВ, но такие импульсы менее вероятны при температурах порядка 100–200 МэВ.

Сильные распады $\rho \rightarrow \pi\eta$ и $\omega \rightarrow \pi\pi$ ⁶ можно рассматривать так же, как электромагнитные, которые были рассмотрены выше. Разница в том, что промежуточный скалярный мезон распадается на адроны вместо фотонов, и нужно только заменить третий множитель in (2.60) соответствующей амплитудой для соответствующего сильного распада. Для этих ширин распада при температуре $T = 20$ МэВ численные оценки показаны на рисунке 2.29. Максимальное значение ширины распада $\rho \rightarrow \gamma\gamma$ составляет около 40 МэВ, что сопоставимо с основным распадом ρ -мезона на два пиона (150 МэВ). Распад $\omega \rightarrow \pi\pi$ может происходить в вакууме из-за нарушенной изотопической инвариантности ($m_u \neq m_d$) и приводит к $\Gamma_{\omega \rightarrow \pi\pi} = 145 \pm 25$ КэВ; в среде его распад значительно увеличивается и достигает 1.5 МэВ. Следует отметить, что в плотной среде эти сильные распады становятся сравнимыми с обычными электромагнитными распадами скалярных и псевдоскалярных мезонов, ширины которых показаны в 2.2.

⁶Ширина распада в среде $\omega \rightarrow \pi\pi$ вычисляется для ядерной материи в адронной модели, включающей мезоны, нуклоны и Δ -изобары в [302].

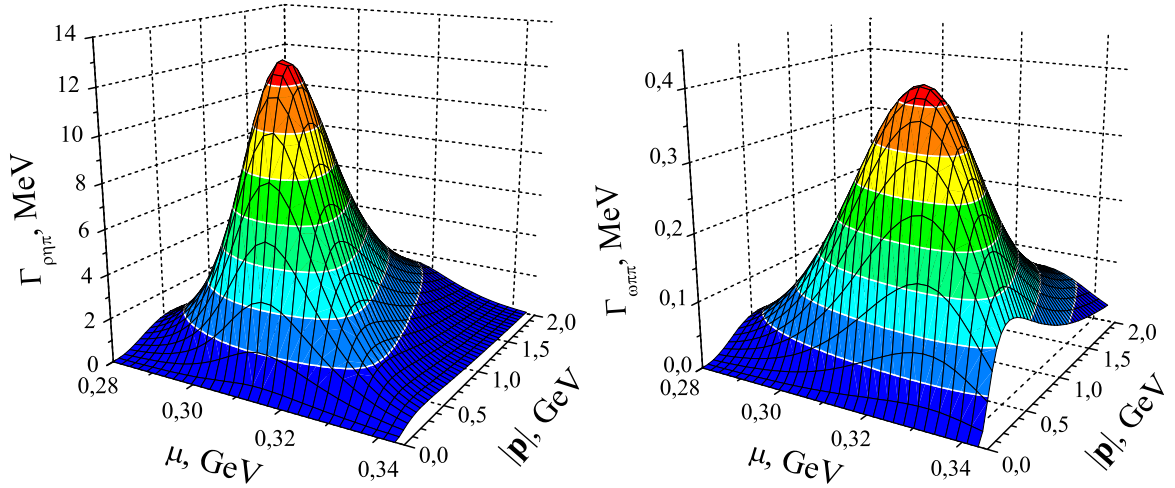


Рис. 2.29: Сильная ширина распада $\rho \rightarrow \pi\eta$ (слева) и $\omega \rightarrow \pi\pi$ (справа) при $T = 20$ МэВ.

Прямой распад σ -мезона на дилептоны также запрещен в вакууме и разрешен в плотной среде из-за смешивания σ - ω . После перехода σ в ω последний переходит в фотон (согласно модели векторной доминантности (VMD)), который затем производит электрон и позитрон как показано на рисунке 2.22. Соответствующая амплитуда

$$A_{\sigma \rightarrow e^+e^-}^{s_1 s_2} = J_{\sigma \rightarrow \omega}^\alpha D_{\omega \alpha \beta} T_{\omega \rightarrow e^+e^-}^{\beta s_1 s_2}, \quad (2.77)$$

где $J_{\sigma \rightarrow \omega}^\alpha$ характеризует смешивание σ - ω , $D_{\omega \alpha \beta}$ пропагатор ω мезона, и $T_{\omega \rightarrow e^+e^-}^{\beta s_1 s_2}$ – амплитуда распада $\omega \rightarrow e^+e^-$. Смешивание σ - ω совпадает со смешиванием ρ - a_0

$$J_{\sigma \rightarrow \omega}^\alpha = J_{\rho \rightarrow a_0}^\alpha, \quad (2.78)$$

Пропагатор ω мезона на массе σ -мезона в среде ($p^2 = M_\sigma^2$):

$$D_{\omega \alpha \beta} = \frac{g_{\alpha \beta} - p_\alpha p_\beta / M_\omega^2}{M_\omega^2 - M_\sigma^2 - i\Gamma_\omega(M_\sigma)M_\omega} \equiv \left(g_{\alpha \beta} - \frac{p_\alpha p_\beta}{M_\omega^2} \right) D_\omega. \quad (2.79)$$

Ширина ω - мезона пренебрежимо мала ей можно пренебречь, поскольку что разность масс ω и σ мезонов увеличивается при приближении к фазовому переходу и доминирует в знаменателе в (2.79):

$$D_\omega \approx \frac{1}{M_\omega^2 - M_\sigma^2}. \quad (2.80)$$

Как обсуждалось ранее массу ω -мезона можно считать постоянной. Масса σ -мезонов рассматривалась в уравнении (2.73) и приблизительно оценивается в $M_\sigma \approx 550$ МэВ в вакууме (2.23).

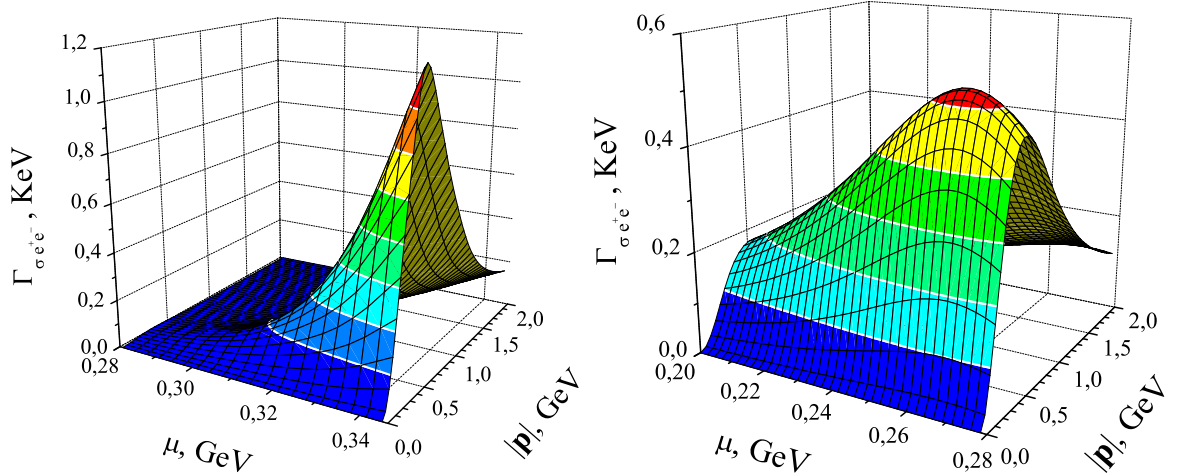


Рис. 2.30: Распад $\sigma \rightarrow e^+e^-$ при $T = 20$ МэВ (слева), 120 МэВ (справа)

Последний множитель амплитуды, $T_{\omega \rightarrow s_1 s_2}^{\beta s_1 s_2}$, является амплитудой распада $\omega \rightarrow \gamma^* \rightarrow e^+e^-$ в модели VMD:

$$T_{\omega \rightarrow e^+e^-}^{\beta s_1 s_2} = \frac{4\pi\alpha M_\omega^2}{3g_\omega M_\sigma^2} \bar{v}(\mathbf{k}_2|s_2)\gamma_\beta u(\mathbf{k}_1|s_1), \quad (2.81)$$

где $u(\mathbf{k}_1|s_1)$ и $\bar{v}(\mathbf{k}_2|s_2)$ – спиноры, соответствующие полученным электрону и позитрону, причём $s_i (i = 1, 2)$ – проекции спина, а k_i – импульсы.

Для вычисления ширины дилептонного распада скалярного мезона, нужно взять квадрат абсолютного значения амплитуды (2.77), просуммировать по спиновым проекциям (поскольку поляризация лептонов не измеряется) и интегрировать по телесному углу в конечном состоянии. Результат

$$\Gamma_{\sigma \rightarrow e^+e^-}(M_\sigma, \mathbf{p}) \approx \frac{4\alpha^2\pi^3 M_\omega^4}{27g_\omega^2 M_\sigma |\mathbf{p}|^2} \frac{|J_{\rho \rightarrow a_0}^0|^2}{(M_\sigma^2 - M_\omega^2)^2}. \quad (2.82)$$

Численный результат распад $\sigma \rightarrow e^+e^-$ приведен на рисунке 2.30 и достигает 1.5 КэВ в максимуме.

Распад $a_0 \rightarrow e^+e^-$ качественно совпадает с $\sigma \rightarrow e^+e^-$. Ширина имеет вид

$$\Gamma_{a_0 \rightarrow e^+e^-}(M_{a_0}, \mathbf{p}) \approx \frac{4\alpha^2\pi^3 M_\rho^4}{3g_\omega^2 M_{a_0} |\mathbf{p}|^2} \frac{|J_{\rho \rightarrow a_0}^0|^2}{(M_{a_0}^2 - M_\rho^2)^2 + M_\rho^2 \Gamma_\rho(M_{a_0})^2}. \quad (2.83)$$

Ширина ρ -мезона задаётся его распадом на два пиона:

$$\Gamma_\rho(M_{a_0}) \approx \Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}(M_{a_0}) = \frac{g_\rho^2}{48\pi M_{a_0}^2} (M_{a_0}^2 - 4M_\pi^2)^{3/2}. \quad (2.84)$$

Численные оценки распада $a_0 \rightarrow \gamma\gamma$ приведены на рисунках 2.31. Из-за вырождения массы ρ и a_0 вблизи фазового перехода наблюдается резонансное

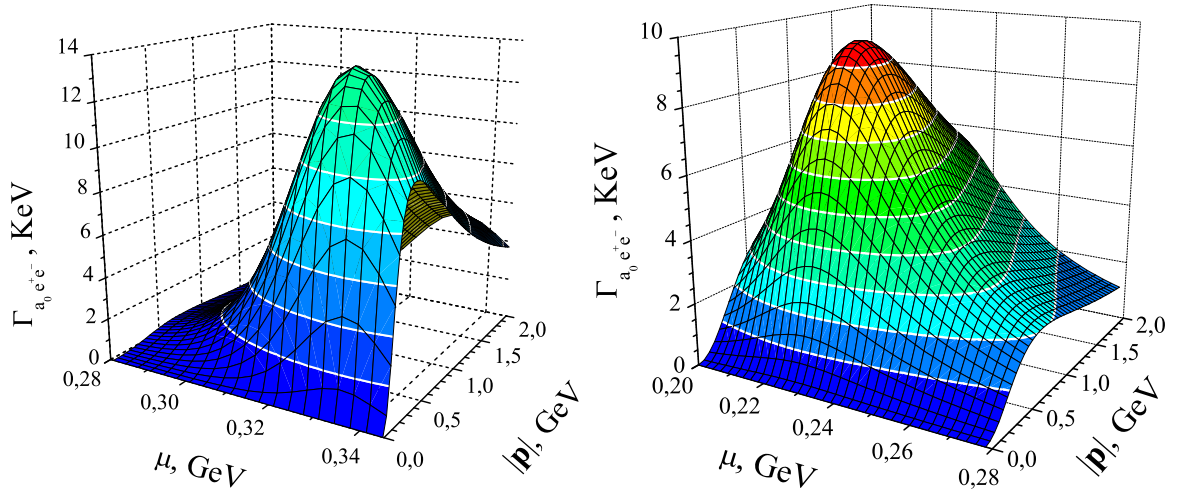


Рис. 2.31: Распад $a_0 \rightarrow e^+e^-$ при $T = 20$ МэВ (слева) и $T = 120$ МэВ(справа).

усиление при распаде $a_0 \rightarrow e^+e^-$. Однако из-за большой ширины ρ -мезона резкого резонанса нет. Тем не менее, поскольку переход $\rho\text{-}\gamma$ в три раза больше, чем переход $\omega\text{-}\gamma$ (по VMD), распад $a_0 \rightarrow e^+e^-$ оказывается больше почти на порядок (~ 10 КэВ в максимуме) по сравнению с распадом $\sigma \rightarrow e^+e^-$.

Смешивание между скалярными мезонами является почти идеальным вблизи фазового перехода, а $f_0(980)$ -мезон считается состоящим только из s - и \bar{s} -кварков. Если предположить, что массы $f_0(980)$ и ϕ почти постоянны в адронной фазе, то можно приблизительно оценить распад $f_0(980)$ на e^+e^- . Этот распад происходит через ϕ -мезон. Смешивание ϕ - $f_0(980)$ представлено интегралом вида (2.63), при этом масса u -кварка, заменяется на массу странного кварка. Другим отличием является то, что переход ϕ -мезонов в фотон отличается от ω мезона на коэффициент $\sqrt{2}$ [13]. В результат для распада $f_0 \rightarrow e^+e^-$ можно получить следующее выражение:

$$\Gamma_{f_0 \rightarrow e^+e^-}(M_{f_0}, \mathbf{p}) \approx \frac{8\alpha^2\pi^3 M_\phi^4}{27g_\phi^2 M_{f_0} |\mathbf{p}|^2} \cdot \frac{|J_{\phi \rightarrow f_0}^0|^2}{(M_{f_0}^2 - M_\phi^2)^2 + M_\phi^2 \Gamma_\phi (M_{f_0})^2}. \quad (2.85)$$

Качественно поведение этой ширины относительно температуры и химического потенциала аналогично распаду $\sigma(a_0) \rightarrow e^+e^-$. Можно отметить, что при химическом потенциале ниже $\mu = 350$ МэВ максимальная ширина составляет около 10 КэВ.

В заключение можно отметить, что двухфотонные распады векторных мезонов и дилептонные распады скалярных мезонов запрещены в свободном пространстве, но в среде они вносят дополнительный вклад в соответству-

ющие двухфотонные и дилептонные спектры при столкновениях тяжелых ионов. Эти распады определяются смешиванием σ - ω , ρ - a_0 и ϕ - $f_0(980)$, которые сильно зависят от температуры, химического потенциала и импульса распадающейся частицы в среде. Смешивание в основном зависит от плотности, и эффект должен наблюдаться для относительно высоких химических потенциалов и не слишком больших температур. Максимум смешивания соответствует частицам, импульс которых соответствует максимуму в распределении импульса при фиксированных T и μ . Распады в свободном пространстве равны нулю и достигают максимума вблизи перехода от адронной фазы к фазе с восстановленной киральной симметрией. Условия, в которых эффект заметен, соответствуют широкому диапазону на фазовой диаграмме. Дополнительное усиление связано с резонансным эффектом, если участвует ρ мезон. Это усиление сходно с процессами $\pi\pi \rightarrow \gamma\gamma$ [147] и $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ [303].

Случай смешивания ρ - a_0 кажется наиболее интересным, потому что на фазовой диаграмме есть точки, соответствующие условиям, при которых массы ρ и a_0 близки друг к другу. Это приводит к дополнительному усилению двухфотонного распада ρ -мезона, поскольку промежуточный a_0 мезон становится узким резонансом. В результате, запрещенные в вакууме распады $\rho \rightarrow \gamma\gamma$ с оказывается сопоставимым (около 2.5 КэВ) с обычным распадом $a_0 \rightarrow \gamma\gamma$ с (0.3 КэВ), $\sigma \rightarrow \gamma\gamma$ (1 ÷ 10 КэВ) и $\eta \rightarrow \gamma\gamma$ (~ 1.3 КэВ). Подобное усиление также будет наблюдаться в (сильном) распаде $\rho \rightarrow \eta\pi$, который достигает максимального значения около 40 МэВ. Что касается ω -мезона, то его распад на пионы значительно возрастает вблизи фазового перехода по сравнению с его значением в вакууме.

Несмотря на вырождение масс ρ и a_0 , в распаде $a_0 \rightarrow \gamma\gamma$ нет усиления, подобного тому, что в распаде $\rho \rightarrow \gamma\gamma$ из-за большой ширины ρ -мезона. Для распада $\sigma \rightarrow e^+e^-$ резонанса здесь не наблюдается, поскольку разность масс σ - ω относительно велика и растёт вблизи фазового перехода.

Все обсуждаемые здесь эффекты имеют место в случае распадов $\phi \rightarrow \gamma\gamma$ и $f_0(980) \rightarrow e^+e^-$.

Кроме того, можно отметить, что, согласно VMD, ρ - γ смешивание в три раза больше, чем ω - γ . Как следствие, число дилептонов, рождаемых a_0 , на

порядок превышает число дилептонов, рождаемых σ .

В данной работе не рассматривались диаграммы, исключаящие промежуточные резонансы, такие как распад ρ -мезона на фотонную пару через треугольную кварковую диаграмму (см. [304, 305]). Вклад пионной петли не рассматривался, поскольку он соответствует следующему порядку в $1/N_c$ разложении. В заключение хотелось бы подчеркнуть, что рассматриваемые здесь процессы происходят только в плотной материи и могут служить индикаторами приближения к кварк-глюонной плазме в экспериментах по столкновению тяжелых ионов.

Глава 3

Адронный вклад в аномальный магнитный момент мюона

В данной главе рассмотрено вычисление вклада в аномальный магнитный момент мюона в рамках киральной кварковой модели лидирующего порядка по постоянной тонкой структуры от адронной поляризации вакуума, и следующего за лидирующем порядком от процесса рассеяния света на света.

Поскольку текущая ситуация с аномальным магнитным моментом мюона подробно разобрана во Введении диссертации, кратко напомним основные положения.

Как известно, квантовая механика предсказывает, что гиромагнитное отношение g для заряженных точечных фермионов со спином $1/2$ равно 2. В релятивистской квантовой теории этот факт является прямым следствием уравнения Дирака. Из квантовой теории поля следует существование виртуальных частиц, приводящих к эффектам поляризации вакуума. Наиболее известными примерами этих эффектов являются лэмбовский сдвиг в уровнях атомов водорода и появление аномального магнитного момента электрона. Эти эффекты были теоретически предсказаны и подтверждены экспериментально практически одновременно.

В КЭД общий вид вершины взаимодействия фермионов (с входящими и исходящими импульсами p и p' соответственно) с фотоном с импульсом $q = p' - p$ (см., например, [306])

$$\Gamma^\mu(p, p') = \gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2), \quad p'^2 = p^2 = m^2, \quad (3.1)$$

где F_1 и F_2 форм факторы Дирака и Паули и $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$.

На древесном уровне для заряженных точечных фермионов $F_1 = 1$, $F_2 = 0$. В КЭД можно получить связь между формфакторами $F_1(0) = 1$, $F_2(0)$ и гиромагнитным отношением g

$$g = 2[F_1(0) + F_2(0)] = 2 + 2F_2(0). \quad (3.2)$$

Таким образом, вводится новая величина - аномальный магнитный момент (АММ) $a = F_2(0) = (g - 2)/2$. В квантовой теории поля $a \neq 0$ обусловлено внутренней структурой фермионов, возникающих из виртуальных радиационных поправок.

АММ лептонов (электрона или мюона) является одной из наиболее точно измеренных и теоретически изученных величин в физике элементарных частиц. Интерес к этой проблеме мотивирован желанием понять самые тонкие проявления микромира и расширении понимания за пределы современных знаний. Простое правило [307, 308] заключается в том, что эффект от вклада второго порядка в АММ лептона a_l с массой m_l из-за возможного обмена частицами масса M пропорционален

$$a_l \propto (m_l/M)^2. \quad (3.3)$$

Поэтому по сравнению с электроном мюон более чувствителен к гипотетическому взаимодействию со порядком масс M в ~ 40000 раз. Этот факт компенсирует меньшую экспериментальную точность измерений мюонного АММ и делает данное исследование более перспективным с точки зрения поиска новой физики.

В недавнем эксперименте E821 в Брукхейвенской национальной лаборатории (BNL, США) мюонный АММ измерен с очень высокой точностью [159].

В ближайшем будущем планируется увеличить точность эксперимента в новых экспериментах в FermiLab (США) [160] и JPARC (Япония) [161]. Предсказания Стандартной Модели отличаются от эксперимента на 3-4 стандартных отклонения (в зависимости от теоретических оценок различных групп).

Сильное взаимодействие вносит наибольшую теоретическую неопределённость. Вклад лидирующего порядка по постоянной тонкой структуры α от

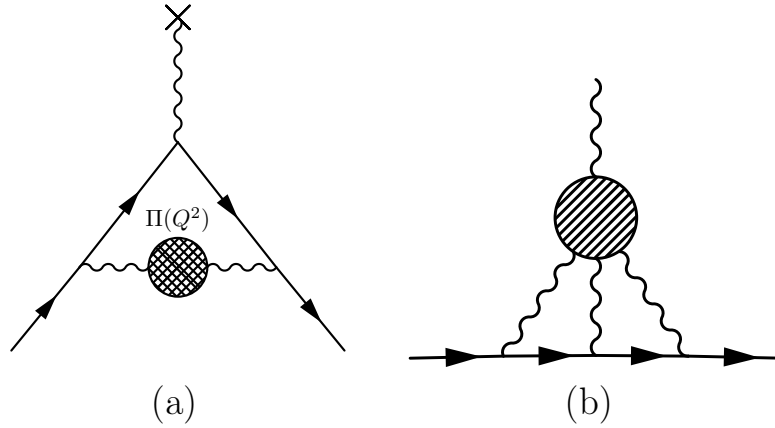


Рис. 3.1: Диаграммы соответствующие вкладам в аномальный магнитный момент мюона. Мюон представлен сплошной линией, фотоны волнистыми линиями, внешняя волнистая линия соответствует взаимодействию мюона с магнитным фотоном с импульсом $q \rightarrow 0$. Слева (a) представлен вклад адронной поляризации вакуума, справа (b) вклад от процесса рассеяния света на свете. Заштрихованные области представляют собой адронные блоки.

адронной поляризации вакуума может быть вычислен на основе экспериментальных данных (т.е. безмодельным способом), в то время как для вклада от процесса рассеяния света на свете требуется применение эффективных подходов, например таких как кварковые модели рассмотренные в диссертационной работе.

Изложение основано на работах [201, 202, 221–223].

3.1 Адронная поляризация вакуума

Вклад адронной поляризации вакуума в a_μ , показанный на рисунке 3.1(a), даётся следующим выражением

$$a_\mu^{\text{HVP}} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \frac{(1-x)(2-x)}{x} D\left(\frac{m_\mu^2 x^2}{1-x}\right), \quad (3.4)$$

где m_μ – масса мюона, $D(Q^2)$ – функция Адлера определяемая как логарифмическая производная от поляризационного оператора фотона

$$D(Q^2) = \frac{\partial \Pi(Q^2)}{\partial \ln(Q^2)}. \quad (3.5)$$

Из уравнения (3.4) видно, что a_μ^{HVP} определяется поведением функции Адлера в области малых импульсов порядка массы мюона m_μ . Наиболее простое

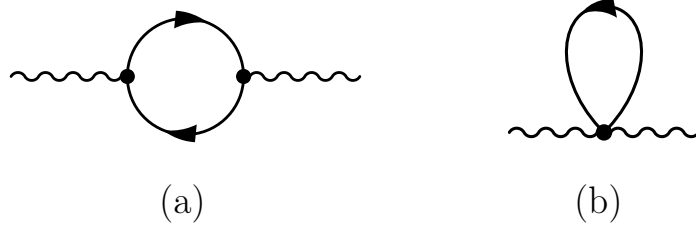


Рис. 3.2: Диаграммы соответствующие поляризации оператору: дисперсионная (а) и контактная (b).

выражение для отношения между АММ и функцией Адлера при нулевом импульсе, полученное в работе [180] есть

$$a_\mu^{\text{HVP}} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 m_\mu^2 \frac{4\pi^2}{3} \left[\frac{D(Q^2)}{Q^2} \right]_{Q^2 \rightarrow 0}. \quad (3.6)$$

В лидирующем порядке разложения по малому параметру $1/N_c$ поляризация вакуума задаётся суммой двух кварковых диаграмм

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) &= iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \Gamma_\mu(k_+, k_-) S(k_+) \Gamma_\nu(k_+, k_-) S(k_-) \} \\ &+ iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \Gamma_{\mu\nu}(k, q, -q) S(k) \}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где вершины $\Gamma_\mu(k_+, k_-)$ and $\Gamma_{\mu\nu}(k, q, -q)$ определены в (124) и (133). После свёртки (3.7) с поперечным проектором (1.43) получается поляризационный оператор

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) &= \frac{4iN_c}{q^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\sum Q_i^2}{D_+ D_-} \left\{ m_+ m_- - k_+ k_- + \frac{2}{3} k_\perp^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{4}{3} k_\perp^2 \left[m^{(1)}(k_+, k_-)^2 (m_+ m_- + k_+ k_-) - (m^2)^{(1)}(k_+, k_-) \right] \right\} + \\ &+ \frac{8iN_c}{q^2} \sum Q_i^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m_k}{D_k} \left[m'_k + \frac{4}{3} m^{(2)}(k, k, k+q) \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

$k_\perp = k - \frac{(kq)}{q^2}q$, $k_\perp^2 = k^2 - \frac{(kq)^2}{q^2}$, и $D_k = k^2 - m_k^2$ является знаменателем пропагатора кварка $S(k)$, а также введено обозначение $F_\pm = F(k_\pm)$.

Для численных оценок рассмотрим форм факторы $f(p)$ в виде функции Гаусса

$$f(p) = e^{-p^2/\Lambda^2}, \quad (3.9)$$

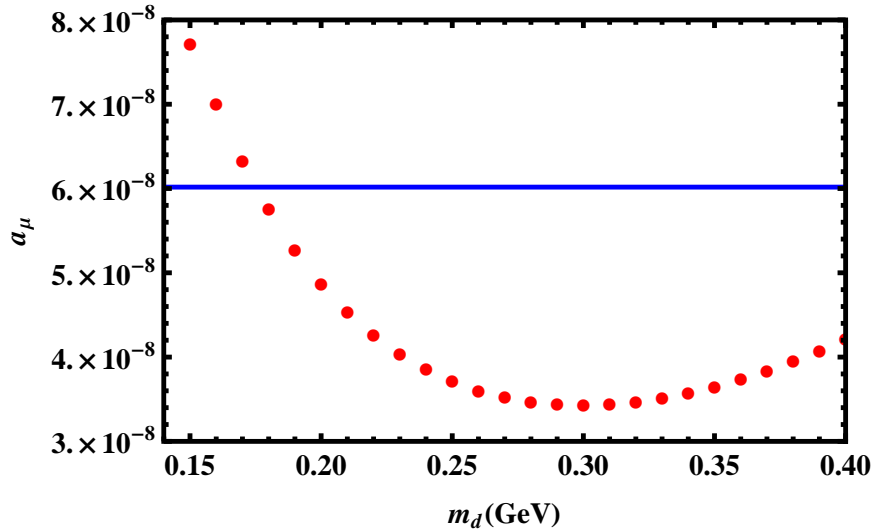


Рис. 3.3: Вклад от адронной поляризации вакуума в аномальный магнитный момент мюона. Синяя сплошная линия соответствует вкладу в a_μ от поляризации вакуума на основе спектральной функции извлечённой из эксперимента [173, 175].

с параметр нелокальности Λ . Нелокальные форм-факторы (3.9) не только отражают нетривиальную природу вакуума КХД, но и приводят к сходимости кварковых петлевых интегралов в ультрафиолетовой области.

Вклад в мюонный аномальный магнитный момент от кварковой поляризации вакуума показан на рисунке 3.3, при этом динамическая масса кварка варьируется в интервале от 150 до 400 МэВ. При этом приводится сравнение с результатом для вклада в аномальный магнитный момент мюона от поляризации вакуума на основе нестранной спектральной функции полученной из адронных распадов τ лептона на детекторе ALEPH ускорителя LEP [173, 175].

Вклад векторных мезонов зависит от константы связи G_2 , значение которой определяется по массе частиц из уравнения (1.45). Значения для вклада в аномальный магнитный момент мюона от диаграмм с промежуточными векторными мезонами в лидирующем порядке $1/N_c$ разложения приводятся в таблице 3.2.

Из рисунка 3.3 и таблицы 3.2 видно, что согласие с экспериментом в нелокальной модели в лидирующего порядке разложения по $1/N_c$ достигается для достаточно малой массы кварка.

$-\langle\bar{q}q\rangle^{1/3}$	Форм фактор	«инстантонная» нелокальность					«одно-глюонный-обмен»				
		m_c	m_d	Λ	$G_S\Lambda^2$	a_μ	m_c	m_d	Λ	$G_S\Lambda^2$	a_μ
200	G	9.7	318	651.9	18.82	357	9.8	1356	459.7	71.11	544
	L2	9.7	296	539.9	12.45	333	—	—	—	—	—
220	G	7.4	282	772	16.98	355	7.4	620	604	29.06	288
	L2	7.4	259	642.2	10.98	338	—	—	—	—	—
240	G	5.8	255	902.4	15.82	374	5.8	424	752.2	20.65	247
	L2	5.8	233	751.8	10.14	372	5.8	475	586.8	16.06	242
260	G	4.6	235	1042.2	15.08	412	4.6	339	903.4	17.53	261
	L2	4.6	216	868	9.61	412	4.6	330	736.1	11.77	234

Таблица 3.1: Результаты расчетов вклада в АММ мюона от адронной поляризации вакуума (в единицах 10^{-10}) в нелокальной модели с параметрами из таблицы I работы [240]. Для удобства приведены параметры модели в МэВ, кроме безразмерной величины $G_S\Lambda^2$.

Для проверки чувствительности кварковой модели к форме нелокальности можно использовать параметризации, полученные в работе [240] для нелокальных моделей сепарабельного типа для случаях кварковых токов «инстантонного» (1.2) и «одно-глюонного-обмена» (1.5) типов с форм-факторами вида

$$g_G(p^2) = [r_G(p^2)]^2 = \exp(-p^2/\Lambda^2) \quad (3.10)$$

и

$$g_{Ln}(p^2) = [r_{Ln}(p^2)]^2 = \frac{1}{1 + (p^2/\Lambda^2)^n}, \quad n \geq 2. \quad (3.11)$$

Результаты расчёта вклада от адронной поляризации вакуума (3.8) в a_μ приводятся в таблице 3.1.

В работе [197] было показано, что можно получить хорошее согласие с экспериментом для динамической массы кварка $m_d = 240$ МэВ если выполнить фит модельных параметров на значение константы слабого распада пиона в киральном пределе на $f_\pi = 86$ МэВ, полученное в киральной теории возмущений [71] и добавить вклад пионных и каонных петель, которые формально соответствуют следующим членам $1/N_c$ разложения.

Среди всех возможных $1/N_c$ поправок к адронной поляризации вакуума можно выделить поправки за счёт «одевания» кваркового пропагатора. При этом в лидирующем порядке по α на диаграммном уровне будут те же диаграммы рисунка 3.2, что и в лидирующем порядке по $1/N_c$, только

m_c (МэВ)	m_d (МэВ)	Λ (ГэВ)	G_1 ГэВ ⁻²	G_2 ГэВ ⁻²	$a_{\rho_0} \times 10^9$	$a_\omega \times 10^{10}$
7.6	300	1.04	32.7	-4.27	3.1	3.44
8.2	310	0.99	37.1	-5.23	3.43	3.81
8.8	320	0.95	41.8	-5.81	3.44	3.82
9.4	330	0.91	46.9	-6.14	3.27	3.63
10	340	0.87	52.4	-6.19	2.98	3.31
11	350	0.84	58.2	-5.87	2.55	2.84

Таблица 3.2: Значения вклада в аномальный магнитный момент мюона от диаграмм с промежуточными векторными мезонами в лидирующем порядке $1/N_c$ разложения.

кварковый пропагатор будет уже содержать $1/N_c$ поправки.

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) = & iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \Gamma_\mu^G(k_+, k_-) S_G(k_+) \Gamma_\nu^G(k_+, k_-) S_G(k_-) \right\} \\ & + iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \Gamma_{\mu\nu}^G(k, q, -q) S_G(k) \right\}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где вершины $\Gamma_\mu^G(k_+, k_-)$ и $\Gamma_{\mu\nu}^G(k, q, -q)$ определены в (124) и (133).

После свертки с поперечным проектором получается следующее выражения для поляризационного оператора

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) = & i \frac{N_c}{q^2} \sum_i Q_i^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{D_+^G D_-^G} \left\{ \right. \\ & (A_+ + A_-)^2 (B_+ B_- - (k_+ k_-) A_+ A_-) + \frac{8}{3} k_\perp^2 A_+^2 A_-^2 \\ & + \frac{8}{3} k_\perp^2 \left[A^2(k_+, k_-)^{(1)} (A_+ A_- [2k^2 - (k_+ k_-)] - B_+ B_-) - 2 \frac{B_+^2 A_-^2 - B_-^2 A_+^2}{k_+^2 - k_-^2} \right] \\ & + \frac{16}{3} k_\perp^2 \left[A_+ A_- (k_+ k_-) \left(B^{(1)}(k_+, k_-)^2 - k^2 A^{(1)}(k_+, k_-)^2 \right) \right. \\ & + 2k^2 A^{(1)}(k_+, k_-) \left(A_+ A_- k^2 A^{(1)}(k_+, k_-) - \frac{A_- B_+^2 - A_+ B_-^2}{k_+^2 - k_-^2} \right) + \\ & \left. + B_+ B_- \left(B^{(1)}(k_+, k_-)^2 - k^2 A^{(1)}(k_+, k_-)^2 \right) \right] \left. \right\} \\ & + \frac{8iN_c}{q^2} \sum_i Q_i^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{D_k^G} \left[\frac{2}{3} k_\perp^2 A_k A^{(1)}(k, k+q) + k^2 A_k A'_k \right. \\ & \left. + \frac{4}{3} k^2 k_\perp^2 A_k A^{(2)}(k, k+q, k) - B_k B'_k - \frac{4}{3} k_\perp^2 B_k B^{(2)}(k, k+q, k) \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

где D_{\pm}^G определён следующим образом

$$S_G(p) = \frac{1}{\hat{p} - m_p - \Sigma_p} = \frac{A_p \hat{p} + B_p}{A_p^2 p^2 - B_p^2} = \frac{A_p \hat{p} + B_p}{D_p^G}, \quad (3.14)$$

а функции A_p и B_p можно переписать через $F_v(p)$ и $F_s(p)$

$$A_p = 1 + F_v(p) \quad B_p = m_p + F_s(p). \quad (3.15)$$

Разложение (3.13) при малых q^2 в евклидовой метрике начинается от нулевой степени, разложение функции Адлера начинается с первых влать в q^2 , так как коэффициент при $(q^2)^{-1}$ в разложении (3.13) становится равным нулю при условии, что M'_k и A'_k уменьшаются достаточно быстро (экспоненциально) при стремлении q^2 к бесконечности. Действительно, соответствующий интеграл сводится к интегралу полной производной

$$\sum_i Q_i^2 \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty dk^2 k^2 A_k \frac{k^2 A_k^3 + 2k^2 B_k^2 A'_k + 2A_k B_k (B_k - k^2 B'_k)}{(k^2 A_k^2 + B_k^2)^2} = \sum_i Q_i^2 \frac{N_c}{8\pi^2} \frac{k^4 A_k^2}{k^2 A_k^2 + B_k^2} \Big|_0^\infty, \quad (3.16)$$

которая равна нулю после вычитания локального вклада

$$\sum_i Q_i^2 \frac{N_c}{8\pi^2} \frac{k^4}{k^2 + m_c^2} \Big|_0^\infty. \quad (3.17)$$

Следующие за лидирующим порядком по $1/N_c$ поправки в кварковый пропагатор представлены на рисунке 1.7, и имеют следующий вид

$$\Sigma_p = F_s(p) - F_v(p) \hat{p}, \quad (3.18)$$

где $F_v(p)$ и $F_s(p)$ можно представить виде

$$\begin{aligned} F_s(p) &= i \sum_{M=\sigma,\pi} f_p^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{f_{p-l}^2 \pm m_{p-l}}{D_l^M D_{p-l}} - \frac{f_p^2}{D_0^\sigma} \sum_{M=\sigma,\pi} i \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{D_l^M} \\ &\quad \times 4i N_c N_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f_k^2 f_{k+l}^4}{D_p D_{p+l}^2} [2k(k+l)m_{k+l} \pm m_k(m_{k+l}^2 + (k+l)^2)]. \\ F_v(p) &= -i f_p^2 \sum_{M=\sigma,\pi} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{f_{p-l}^2}{D_l^M} \frac{1 - (pl)/p^2}{D_{p-l}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

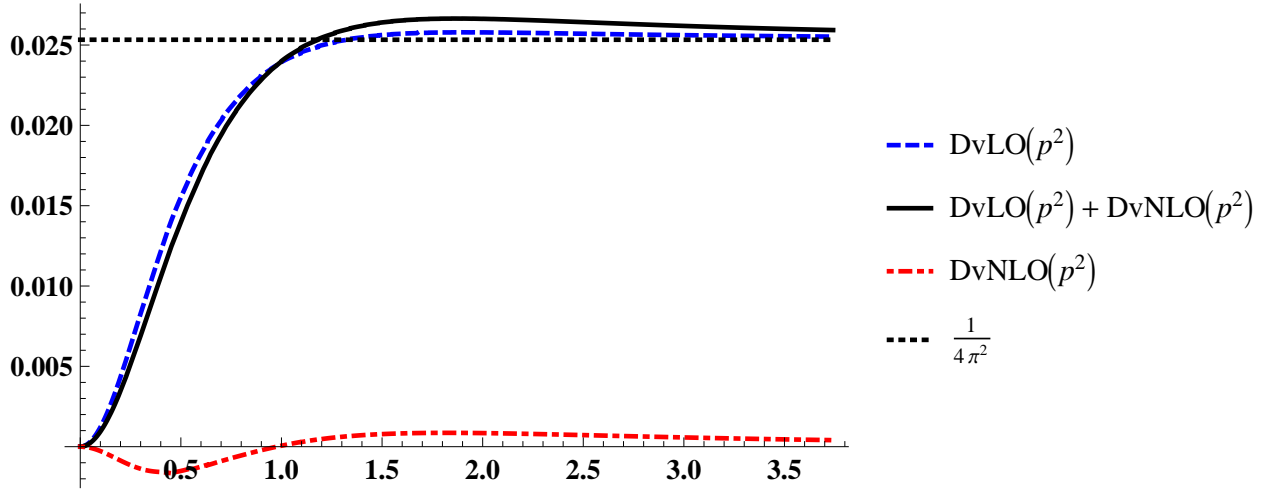


Рис. 3.4: Функция Адлера в лидирующем порядке $1/N_c$ разложения и подлидирующие вклады от поправок в кварковый пропагатор. При больших импульсах p функция Адлера сходится к предсказанию КХД $\frac{N_c}{12\pi^2}$.

Используя параметры из таблицы 1.2 с параметрами нелокальной модели можно вычислить функцию Адлера с учётом $1/N_c$ поправок в кварковый пропагатор (3.14). Результаты вычислений приводятся на рисунке 3.4. Из рисунка можно видеть что вклад в функцию Адлера от $1/N_c$ поправок в кварковый пропагатор оказывается отрицательным в области малых энергий, а при больших энергиях стремится к нулю. Таким образом, вклад от $1/N_c$ поправок кваркового пропагатора в аномальный магнитный момент мюона от адронной поляризации вакуума приводит к уменьшению вклада лидирующего порядка, поскольку именно поведение функции Адлера при малых импульсах определяет величину этого вклада. Численные оценки приводятся в таблице 3.3.

Следует отметить, добиться появления нетривиальной перенормировки волновой функции кварка уже в лидирующем порядке по $1/N_c$ можно если ввести токи с производной (1.16). В работе [226] были проведены соответствующие расчёты и параметры модели были подобраны в том числе подгонкой формы массовой и волновых функций кварка к результатам решёточных вычислений [309]. Подставив форму соответствующих функций в выражение для вклада можно получить оценку $a_\mu = 218 \times 10^{-10}$ для массы кварка в нуле $M(0) = 375$ МэВ и $Z(0) = 0.7$. Сравнивая эту величину с значениями на рисунке 3.3 и таблице 3.3 можно придти к выводу, что нетривиальная пере-

№	m_d (МэВ)	$a_{\text{LO}} \times 10^8$	$a_{\text{LO+NLO}} \times 10^8$
1	139.2	8.89	5.23
2	211.2	4.83	3.81
3	269.1	3.96	3.51
4	281.9	3.9	3.62
5	322.5	3.94	3.58
6	424	4.91	4.67

Таблица 3.3: Вклад в аномальный магнитный момент мюона от поляризации вакуума в АММ мюона в лидирующем порядке $1/N_c$ разложения и с учётом $1/N_c$ поправок в кварковый пропагатор. Параметры модели взяты из таблицы 1.2, для удобства приводится динамическая масса кварка.

нормировка волновой функции кварка по-видимому приводит к уменьшению вклада.

Среди множества работ в которых вычислялись функции Адлера и вклады адронной поляризации вакуума можно выделить работы в близких подходах основанные на оценках в киральной теории возмущений дополненной локальной моделью НИЛ и вычисления в модели на основе уравнений Дайсона-Швингера.

Так, в работе [180] предложено следующее соотношение для вклада адронной поляризации вакуума в аномальный магнитный момент мюона

$$a_\mu \simeq \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 m_\mu^2 \frac{4}{3} \pi^2 P_1, \quad (3.20)$$

основанное на том, что в рамках киральной теории возмущений лидирующий вклад связан с членами порядка $O(p^6)$, а производная перенормированного поляризационного оператора в нуле

$$P_1 = - \left. \frac{\partial \Pi_R^H(Q^2)}{\partial Q^2} \right|_{Q^2=0}. \quad (3.21)$$

есть константа которая должна быть определена в рамках другого подхода. На основе модели НИЛ с регуляризацией собственного времени соответствующее выражение имеет вид

$$P_1^{\text{ENJL}} = \frac{N_c}{16\pi^2} \frac{2}{3} \frac{1}{M_Q^2} \frac{4}{15} \left[\Gamma \left(1, \frac{M_Q^2}{\Lambda_\chi^2} \right) + \frac{5}{4} \frac{1 - g_A}{g_A} \right], \quad (3.22)$$

где $\Gamma(n, \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dz}{z} e^{-z} z^n$ есть неполная гамма функция, а аксиально-векторная константа имеет вид

$$g_A = \frac{1}{1 + 4G_V \frac{M_Q^2}{\Lambda_\chi^2} \Gamma\left(0, \frac{M_Q^2}{\Lambda_\chi^2}\right)}.$$

В результате за a_μ для параметров модели $M_Q = 265$ МэВ, $\Lambda_\chi = 1165$ МэВ, $g = 0.61$ работы [16] был получен результат [180]

$$a_\mu = 6.7 \times 10^{-8}, \quad (3.23)$$

В подходе уравнений Дайсон-Швингера к пропагатору кварка и Бете-Солпитера к связанным состояниям было предложено использовать достаточно простую форму для эффективной кварк-глюонной вершины [55]. Позднее в рамках этой модели была получена функция Адлера и соответствующая оценка на вклад в аномальный магнитный момент мюона [310].

В этом подходе кварковый пропагатор получается на основе уравнений Дайсона-Швингера с глюонным пропагатором в калибровке Ландау следующего вида в евклидовой метрике

$$D_{\mu\nu}(k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{Z(k^2)}{k^2}, \quad (3.24)$$

а для кварк-глюонной вершины $\Gamma_\mu(p, q)$ выбирается анзац вида $\Gamma_\mu(k^2) = \gamma_\mu \Gamma^{\text{YM}}(k^2)$ и поэтому вершина зависит только от глюонного импульса в квадрате k^2 . При этом произведение функций перенормировки глюонного пропагатора и кварк-глюонной вершины определяется выражением

$$Z(k^2) \Gamma^{\text{YM}}(k^2) = \frac{4\pi}{g^2} \left(\frac{\pi}{\omega^6} D k^4 e^{-k^2/\omega^2} + \frac{2\pi\gamma_m}{\ln(\tau + (1 + k^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)^2)} \left[1 - e^{-k^2/(4m_\tau^2)} \right] \right), \quad (3.25)$$

где $m_\tau = 0.5$ ГэВ, $\tau = e^2 - 1$, $\gamma_m = 12/(33 - 2N_f)$, $\Lambda_{\text{QCD}} = 0.234$ ГэВ, $\omega = 0.4$ ГэВ и $D = 0.93$ ГэВ². После этого поляризационный оператор фотона имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu}(P) = Z_2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr} [S(q_-) \Gamma_\mu(P, q) S(q_+) \gamma_\nu], \quad (3.26)$$

где Z_2 является перенормировкой волновой функции кварка. В этом выражении неявно содержатся вклады промежуточных векторных связанных состояний. В результате для вклада аномальный магнитный момент мюона были получены оценки (в 10^{-10}): 676 и 744, для вкладов u , d , s , c и b кварков. Авторы работы [310] предлагают использовать первое число в качестве среднего значения вычисления, а второе для оценки модельной зависимости.

3.2 Процесс рассеяния света-на-свете

3.2.1 Общие соображения

Вклад аномальный магнитный момент мюона от процесса рассеяния света на свете, схематически показанный на рисунке 3.1(b), можно извлечь с помощью проекции [311]

$$a_\mu^{\text{LbL}} = \frac{1}{48m_\mu} \text{Tr}((\hat{p} + m_\mu)[\gamma^\rho, \gamma^\sigma](\hat{p} + m_\mu)\Pi_{\rho\sigma}(p, p)), \quad (3.27)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{\rho\sigma}(p', p) = e^6 \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q_2^2 (q_1 + q_2)^2 (q_1 + k)^2} \times \\ \times \gamma^\mu \frac{\hat{p}' - \hat{q}_2 + m_\mu}{(p' - q_2)^2 - m_\mu^2} \gamma^\nu \frac{\hat{p} + \hat{q}_1 + m_\mu}{(p + q_1)^2 - m_\mu^2} \gamma^\lambda \times \\ \times \frac{\partial}{\partial k_\rho} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}(q_2, -(q_1 + q_2), k + q_1, -k), \end{aligned} \quad (3.28)$$

и m_μ - масса мюона, $k_\mu = (p' - p)_\mu$, и необходимо взять статический предел $k_\mu \rightarrow 0$ после дифференцирования. Можно ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_\rho} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}(q_2, -(q_1 + q_2), k + q_1, -k) = \\ \Pi_{\rho\mu\nu\lambda\sigma}(q_2, -(q_1 + q_2), q_1) + O(k) \end{aligned} \quad (3.29)$$

для производной тензора рассеяния фотона на фотоне¹. Тензор рассеяния фотона на фотоне $\Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}$ в (3.28) может иметь любую природу (КЭД, адронный и т.д.).

¹Явная калибровочно-инвариантная форма производной от тензора приведена в [312].

В результате можно переписать уравнения (3.27) и (3.28) в форме

$$a_\mu^{\text{LbL}} = \frac{e^6}{48m_\mu} \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{\Pi_{\rho\mu\nu\lambda\sigma}(q_2, -q_3, q_1) \Gamma^{\rho\mu\nu\lambda\sigma}(q_1, q_2, p)}{q_1^2 q_2^2 q_3^2 ((p+q_1)^2 - m_\mu^2) ((p-q_2)^2 - m_\mu^2)}, \quad (3.30)$$

где $q_3 \equiv q_1 + q_2$ и тензор $\Gamma^{\rho\mu\nu\lambda\sigma}$ представляет собой след от матриц Дирака

$$\Gamma^{\rho\mu\nu\lambda\sigma}(q_1, q_2, p) = \text{Tr} \left((\hat{p} + m_\mu) [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] (\hat{p} + m_\mu) \times \right. \\ \left. \times \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{q}_2 + m_\mu) \gamma^\nu (\hat{p} + \hat{q}_1 + m_\mu) \gamma^\lambda \right).$$

После взятия следа от матриц Дирака, тензор $\Gamma^{\rho\mu\nu\lambda\sigma}$ становится полиномом по импульсам p, q_1, q_2 . После этого удобно перейти в евклидово пространство, заглавные буквы P, Q_1, Q_2 будут использоваться для соответствующих аналогов векторов Минковского p, q_1, q_2 , как например $P^2 = -p^2 = -m_\mu^2$, $Q_1^2 = -q_1^2$, $Q_2^2 = -q_2^2$. Тогда уравнение (3.30) становится

$$a_\mu^{\text{LbL}} = \frac{e^6}{48m_\mu} \int \frac{d_E^4 Q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d_E^4 Q_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{Q_1^2 Q_2^2 Q_3^2} \frac{\Gamma^{\rho\mu\nu\lambda\sigma} \Pi_{\rho\mu\nu\lambda\sigma}}{D_1 D_2}, \\ D_1 = (P + Q_1)^2 + m_\mu^2 = 2(P \cdot Q_1) + Q_1^2, \quad (3.31) \\ D_2 = (P - Q_2)^2 + m_\mu^2 = -2(P \cdot Q_2) + Q_2^2.$$

Поскольку наибольшая степень импульса мюона P в $\Gamma^{\rho\mu\nu\lambda\sigma}$ равна двум² и $\Pi_{\rho\mu\nu\lambda\sigma}$ не зависит от P , факторы в подынтегральном выражении (3.31) можно переписать как

$$\frac{\Gamma^{\rho\mu\nu\lambda\sigma} \Pi_{\rho\mu\nu\lambda\sigma}}{D_1 D_2} = \sum_{a=1}^6 A_a \tilde{\Pi}_a, \quad (3.32)$$

с соответствующими коэффициентами

$$A_1 = \frac{1}{D_1}, \quad A_2 = \frac{1}{D_2}, \quad A_3 = \frac{(P \cdot Q_2)}{D_1}, \quad A_4 = \frac{(P \cdot Q_1)}{D_2}, \\ A_5 = \frac{1}{D_1 D_2}, \quad A_6 = 1, \quad (3.33)$$

²Возможные комбинации с импульсом P

$$(P \cdot Q_1)^2 = (P \cdot Q_1)(D_1 - Q_1^2)/2, \quad (P \cdot Q_2)^2 = -(P \cdot Q_2)(D_2 - Q_2^2)/2, \\ (P \cdot Q_1)(P \cdot Q_2) = -(D_1 - Q_1^2)(D_2 - Q_2^2)/4, \\ (P \cdot Q_1) = (D_1 - Q_1^2)/2, \quad (P \cdot Q_2) = -(D_2 - Q_2^2)/2.$$

где от импульса P зависят только факторы A_a , тогда как $\tilde{\Pi}_a$ не имеют зависимости от P .

Поэтому не обращаясь к конкретной форме $\tilde{\Pi}_a$ можно усреднить по направлению импульса мюона P (как было предложено в [148] для вклада с промежуточным пионом) в общем виде

$$\int \frac{d^4 Q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 Q_2}{(2\pi)^4} \frac{A_a}{Q_1^2 Q_2^2 Q_3^2} \dots = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dQ_1 \int_0^\infty dQ_2 \int_{-1}^1 dt \sqrt{1-t^2} \frac{Q_1 Q_2}{Q_3^2} \langle A_a \rangle \dots, \quad (3.34)$$

где введены радиальные переменные интегрирования $Q_1 \equiv |Q_1|$ и $Q_2 \equiv |Q_2|$ и угловая переменная $t = (Q_1 \cdot Q_2) / (|Q_1| |Q_2|)$. При этом усреднённые по направлению импульса мюона P факторы A_a есть [148] :

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_1 &= \left\langle \frac{1}{D_1} \right\rangle = \frac{R_1 - 1}{2m_\mu^2}, & \langle A \rangle_2 &= \left\langle \frac{1}{D_2} \right\rangle = \frac{R_2 - 1}{2m_\mu^2}, \\ \langle A \rangle_3 &= \left\langle \frac{(P \cdot Q_2)}{D_1} \right\rangle = +(Q_1 \cdot Q_2) \frac{(1 - R_1)^2}{8m_\mu^2}, & (3.35) \\ \langle A \rangle_4 &= \left\langle \frac{(P \cdot Q_1)}{D_2} \right\rangle = -(Q_1 \cdot Q_2) \frac{(1 - R_2)^2}{8m_\mu^2}, \\ \langle A \rangle_5 &= \left\langle \frac{1}{D_1 D_2} \right\rangle = \frac{1}{m_\mu^2 Q_1 Q_2 x} \arctan \left[\frac{zx}{1 - zt} \right], \\ \langle A \rangle_6 &= \langle 1 \rangle = 1, \end{aligned}$$

и введены обозначения

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1 - t^2}, & R_i &= \sqrt{1 + \frac{4m_\mu^2}{Q_i^2}} \quad (i = 1, 2), & (3.36) \\ z &= \frac{Q_1 Q_2}{4m_\mu^2} (1 - R_1) (1 - R_2). \end{aligned}$$

После усреднения вклад от процесса рассеяния света на свете можно представить в виде

$$a_\mu^{\text{LbL}} = \int_0^\infty dQ_1 \int_0^\infty dQ_2 \rho^{\text{LbL}}(Q_1, Q_2), \quad (3.37)$$

где введена «плотность» $\rho^{\text{LbL}}(Q_1, Q_2)$, определяемая в виде одномерного интеграла по угловой переменной

$$\rho^{\text{LbL}}(Q_1, Q_2) = \frac{Q_1 Q_2}{2\pi^2} \sum_{a=1}^6 \int_{-1}^1 dt \frac{\sqrt{1-t^2}}{Q_3^2} \langle A_a \rangle \tilde{\Pi}_a. \quad (3.38)$$

Таким образом кратность интеграла по импульсным переменным для (3.27) может быть уменьшена с восьми до трех. Преобразования от выражения (3.27) к (3.37) носят общий характер и не зависят от теоретических (модельных) предположений о форме тензора рассеяния фотона на фотоне и соответственно его свёртки $\tilde{\Pi}_a$.

В КХД тензор имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu\lambda\rho}(q_1, q_2, q_3) = & \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 e^{i(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3)} \times \\ & \times \langle 0 | T(j_\mu(x_1) j_\nu(x_2) j_\lambda(x_3) j_\rho(0)) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где $j_\mu(x)$ - электромагнитные токи кварков, а $|0\rangle$ - вакуумное состояние КХД.

В кварковой модели в лидирующем порядке разложения по $1/N_c$ тензор рассеяния фотона на фотоне можно представить в виде диаграмм схематически показанных на рисунке 3.5. При этом мезоны в кварковых моделях с кирально симметричным четырехкварковым взаимодействием локального или нелокального типа НИЛ появляются в виде полюсов в матрице рассеяния кварка-антикварка благодаря суммированию бесконечного числа диаграмм³ [181, 182, 195, 200, 201]. При этом кварк и антикварк взаимодействуют с друг другом через четырехкварковое взаимодействие. С другой стороны, можно выделить вклад от петли с динамическими кварками [222] (или другими словами контактный вклад), где кварк и антикварк не взаимодействуют друг с другом через четырехкварковое взаимодействие. Поэтому кварковый бокс является дополнительным к набору диаграмм, образующих мезоны в виде связанных состояний, должен быть обязательно добавлен и при этом нет никакого двойного счета. С другой стороны, как известно из расчётов и обсуждается в диссертации, в рамках модели НИЛ два этих типа вкладов

³Похожий механизм работает в подходе систем уравнений Дайсона-Швингера и Бете-Солпитера в КХД [203].

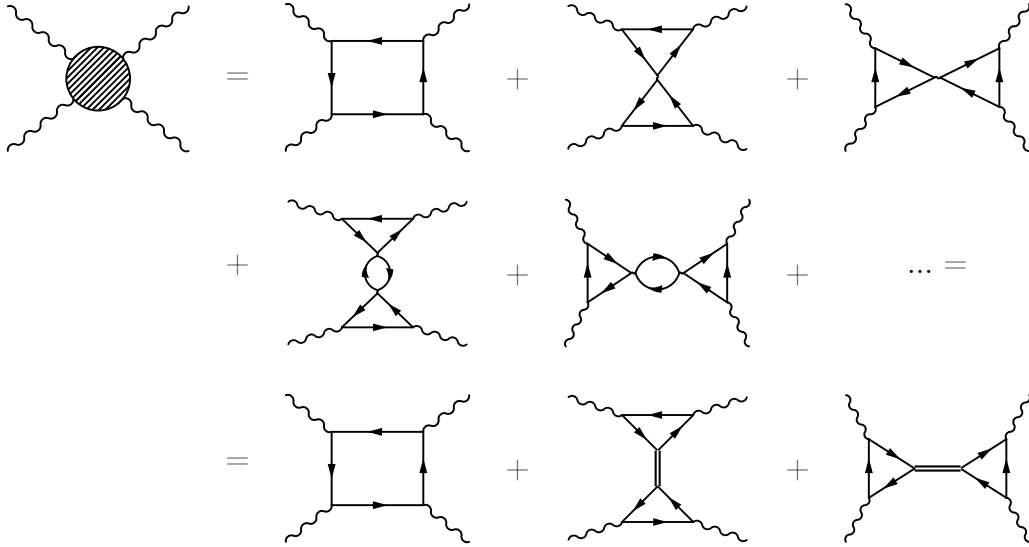


Рис. 3.5: Схематическое изображение диаграмм соответствующих вкладу в тензор рассеяния фотона на фотоне в лидирующем порядке по $1/N_c$ в кварковой модели. Для простоты не показаны нелокальные многофотонные вершины и перекрестные диаграммы.

(контактный и связанных состояний) необходимы для правильного описания таких процессов, как поляризуемость пиона [313] или $\pi\pi$ рассеяния, [219], и пропуск одного из этих вкладов приведёт к большому нарушению киральной симметрии. Вклады с промежуточными мезонами, имеют те же квантовые числа, что и исходное взаимодействие. В простейшей модели это псевдоскалярные [148, 201] и скалярные [202] частицы, а в расширенной модели также появляется вклад аксиально-векторных мезонов. При этом переходные форм-факторы мезон-фотон-фотон однозначно фиксируются в рамках кварковой модели для произвольных виртуальностей частиц.

Также вышесказанному можно добавить, что исходя из кварк-адрон дуальности кварковая петля (как для двухточечного коррелятора, так и для четырехточечного коррелятора) представляет вклад континуума возбужденных адронных состояний. На языке спектральных плотностей модельные расчёты соответствуют модели спектральной плотности, насыщенной низшим адронным резонансом плюс континуум возбужденного адронного состояния. Первая часть соответствует для диаграмм с обменом мезоном, а вторая - кварковой петли. Именно кварковая петля (континуум) обеспечивает правильную асимптотику КХД с передачей большого импульса фотона для функции Адлера, трех- и четырехточечных корреляторов.

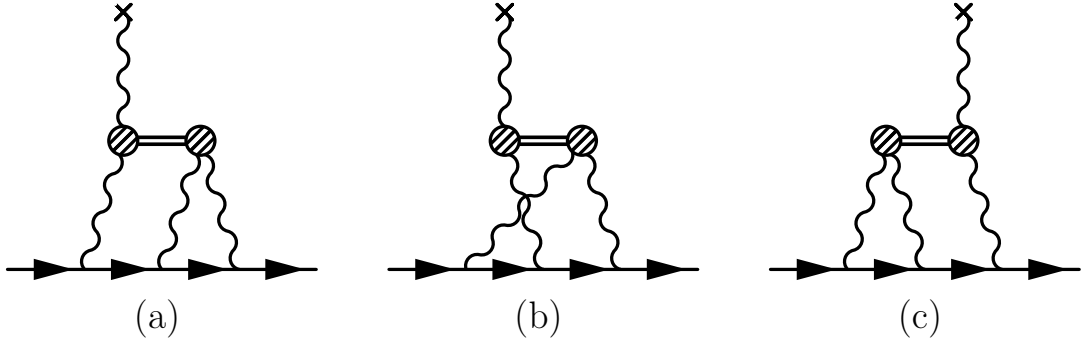


Рис. 3.6: Вклад LbL от промежуточных мезонных обменов.

3.2.2 Псевдоскалярный вклад

Диаграммы, соответствующие мезонному вкладу представлены на рисунке 3.6. Соответствующий тензор рассеяния фотона на фотоне $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}$ для обмена мезона с массой M_M имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(q_1, q_2, q_3) = & \quad (3.40) \\ & i \frac{\Delta_P^{\mu\nu}(q_1 + q_2, q_1, q_2) \Delta_P^{\lambda\rho}(q_1 + q_2, q_3, q_4)}{(q_1 + q_2)^2 - M_M^2} + \\ & + i \frac{\Delta_P^{\mu\rho}(q_2 + q_3, q_1, q_4) \Delta_P^{\nu\lambda}(q_2 + q_3, q_2, q_3)}{(q_2 + q_3)^2 - M_M^2} + \\ & + i \frac{\Delta_P^{\mu\lambda}(q_1 + q_3, q_1, q_3) \Delta_P^{\nu\rho}(q_1 + q_3, q_2, q_4)}{(q_1 + q_3)^2 - M_M^2}, \end{aligned}$$

где q_i - импульсы исходящих фотонов, $q_4 = -(q_1 + q_2 + q_3)$. Низкоэнергетическое разложение производной тензора $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}$ определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k^\rho} \Pi^{\mu\nu\lambda\sigma}(q_1, q_2, k - q_1 - q_2) = & \\ & i \frac{\Delta_P^{\mu\nu}(q_1 + q_2, q_1, q_2)}{(q_1 + q_2)^2 - M_M^2} \frac{\partial}{\partial k^\rho} \Delta_P^{\lambda\sigma}(q_1 + q_2, -q_1 - q_2, -k) \\ & + i \frac{\Delta_P^{\nu\lambda}(-q_1, q_2, -q_1 - q_2)}{q_1^2 - M_M^2} \frac{\partial}{\partial k^\rho} \Delta_P^{\mu\sigma}(-q_1, q_1, -k) \\ & + i \frac{\Delta_P^{\mu\lambda}(-q_2, q_1, -q_1 - q_2)}{q_2^2 - M_M^2} \frac{\partial}{\partial k^\rho} \Delta_P^{\nu\sigma}(-q_2, q_2, -k) + O(k). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Для вычисления этого вклада необходимо вычислить кварковые треугольные диаграммы с мезоном и двумя фотонами. Используя нелокальную ки-

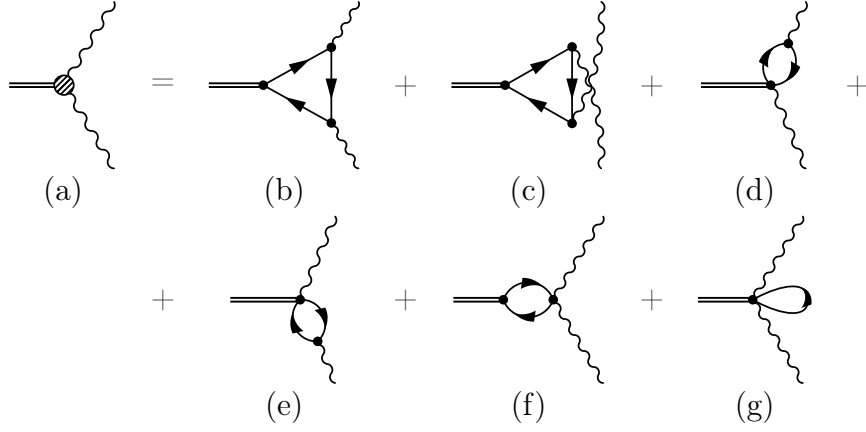


Рис. 3.7: Диаграммы для перехода мезон-фотон-фотон.

ральную кварковую модель⁴, треугольную диаграмму с участием псевдоскалярного мезона и двумя фотонами с произвольными виртуальностями⁵ как показано на рисунке 3.7 можно записать в виде [201]

$$\mathcal{A} \left(\gamma_{(q_1, \epsilon_1)}^* \gamma_{(q_2, \epsilon_2)}^* \rightarrow P_{(p)}^* \right) = e^2 \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu \Delta_P^{\mu\nu} (p, q_1, q_2) \quad (3.42)$$

$$\Delta_P^{\mu\nu} (p, q_1, q_2) = -i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_1^\rho q_2^\sigma F_{P^* \gamma^* \gamma^*} (p^2; q_1^2, q_2^2), \quad (3.43)$$

где импульсы фотонов $q_{1,2}$ и вектора поляризации $\epsilon_{1,2}$, $p = q_1 + q_2$. Для различных псевдоскалярных мезонных состояний имеются следующие соотношения

$$\begin{aligned} F_{\pi_0^* \gamma^* \gamma^*} (p^2; q_1^2, q_2^2) &= g_\pi (p^2) F_u (p^2; q_1^2, q_2^2), \\ F_{\eta^* \gamma^* \gamma^*} (p^2; q_1^2, q_2^2) &= \frac{g_\eta (p^2)}{3\sqrt{3}} \left[(5F_u (p^2; q_1^2, q_2^2) - 2F_s (p^2; q_1^2, q_2^2)) \cos \theta(p^2) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2} (5F_u (p^2; q_1^2, q_2^2) + F_s (p^2; q_1^2, q_2^2)) \sin \theta(p^2) \right], \\ F_{\eta'^* \gamma^* \gamma^*} (p^2; q_1^2, q_2^2) &= \frac{g_{\eta'} (p^2)}{3\sqrt{3}} \left[(5F_u (p^2; q_1^2, q_2^2) - 2F_s (p^2; q_1^2, q_2^2)) \sin \theta(p^2) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2} (5F_u (p^2; q_1^2, q_2^2) + F_s (p^2; q_1^2, q_2^2)) \cos \theta(p^2) \right], \end{aligned} \quad (3.44)$$

⁴Для пиона соответствующая вершина в киральном пределе была рассмотрена в [314].

⁵Отметим, что для псевдоскалярной мезонной вершины диаграммы (d)-(g) на рисунке 3.7 дадут нулевой вклад.

c

$$\begin{aligned}
 F_i(p^2; q_1^2, q_2^2) &= 8 \int \frac{d_E^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f(k_1^2) f(k_2^2)}{D_i(k_1^2) D_i(k_2^2) D_i(k^2)} \times \\
 &\times \left[m_i(k^2) - m_i^{(1)}(k_1, k) J_1 - m_i^{(1)}(k_2, k) J_2 \right], \\
 J_1 &= k^2 + \frac{q_2^2(kq_1)(k_1q_1) - q_1^2(kq_2)(k_1q_2)}{q_1^2 q_2^2 - (q_1 q_2)^2}, \\
 J_2 &= k^2 + \frac{q_1^2(kq_2)(k_2q_2) - q_2^2(kq_1)(k_2q_1)}{q_1^2 q_2^2 - (q_1 q_2)^2},
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

где $k_1 = k + q_1$, $k_2 = k - q_2$, $m_i^{(1)}(k, p) = (m_i(k^2) - m_i(p^2))/(k^2 - p^2)$ первая конечно-разностная производная. Из (3.45) легко получить выражения для специальных кинематик

$$\begin{aligned}
 F_i(q_1^2; q_1^2, 0) &= 8 \int \frac{d_E^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f(k_1^2) f(k^2)}{D_i(k_1^2) D_i^2(k^2)} \times \\
 &\times \left[m_i(k^2) - m_i^{(1)}(k_1, k) \bar{J}_1 - m_i'(k^2) \bar{J}_2 \right],
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\bar{J}_1(k, q_1) = (kq_1) + \frac{2}{3} \left[k^2 + 2 \frac{(kq_1)^2}{q_1^2} \right], \quad \bar{J}_2 = \frac{4}{3} \left[k^2 - \frac{(kq_1)^2}{q_1^2} \right],$$

$$F_i(0; 0, 0) = \frac{1}{m_{d,i}} \left[\frac{1}{4\pi^2} - 8m_{c,i} \int \frac{d_E^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m_i(k^2) - 2m_i'(k^2)k^2}{D_i^3(k^2)} \right], \tag{3.47}$$

В частности, кинематика (3.46) соответствует одной из вершин процесса рассеяния света на свете, как можно видеть из рисунка 3.6 и уравнения (3.48) ниже. С другой стороны в (3.47) первый член связан с аксиальной аномалией, а второй член представляет поправку к аномалии за счет явного нарушения киральной симметрии токовой массой кварка.

Вклад от процесса рассеяния света на свете в аномальный магнитный момент мюона, обусловленный обменом промежуточными мезонами в псевдоскалярном канале может быть получен из общего выражения уравнений

(3.37), (3.38), (3.35) и имеет вид [148, 201]

$$\begin{aligned}
 a_{\mu}^{\text{LbL,PS}} = & -\frac{2\alpha^3}{3\pi^2} \int_0^{\infty} dq_1^2 \int_0^{\infty} dq_2^2 \int_{-1}^1 dt \sqrt{1-t^2} \frac{1}{q_3^2} \times \\
 & \times \sum_{a=\pi^0, \eta, \eta'} \left[2 \frac{F_{a^* \gamma^* \gamma^*}(q_2^2; q_1^2, q_3^2) F_{a^* \gamma^* \gamma}(q_2^2; q_2^2, 0)}{q_2^2 + M_a^2} I_1 \right. \\
 & \left. + \frac{F_{a^* \gamma^* \gamma^*}(q_3^2; q_1^2, q_2^2) F_{a^* \gamma^* \gamma}(q_3^2; q_3^2, 0)}{q_3^2 + M_a^2} I_2 \right], \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

где $q_3 = -(q_1 + q_2)$. Функции I_1 и I_2 есть

$$\begin{aligned}
 I_1 = & q_1^2 \left[\langle A \rangle_1 \left(\frac{(q_1 q_2)}{2} - q_2^2 (1-t^2) \right) + \langle A \rangle_3 + \right. \\
 & \left. + \langle A \rangle_5 q_2^2 (1-t^2) (q_2^2 - 2M_{\mu}^2) \right] - \frac{(q_1 q_2)}{2} \langle A \rangle_6, \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 = & 2q_2^2 \left[\langle A \rangle_2 (q_1^2 + (q_1 q_2)) - \langle A \rangle_4 - \right. \\
 & \left. - \langle A \rangle_5 q_1^2 (q_1^2 + (q_1 q_2) + M_{\mu}^2 (1-t^2)) \right] + \\
 & + \langle A \rangle_1 q_1^2 (q_1 q_2) - (q_1 q_2) \langle A \rangle_6. \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

Для численных оценок используется нелокальный форм-фактор в виде Гауссовой функции $f(k^2) = \exp(-k^2/2\Lambda^2)$ с параметрами, полученные в работе [30]. В этой работе параметры модели: токовые массы кварков $m_{c,i}$, константы связи четырех G и шестикваркового H взаимодействия, а также параметр нелокальности Λ фиксируются, на основе требований воспроизведения в модели наблюдаемых значений масс пионов и каонов, константы распада пиона f_{π} и массы η' (в наборах параметров G_I, G_{IV}) или константы $g_{\eta' \gamma \gamma}$ распада $g_{\eta' \gamma \gamma}$ (в G_{II}, G_{III}).

Также, полезно исследовать вклад нейтрального пиона в аномальный магнитный момент в $SU(2)$ версии нелокальной модели (1.39). При этом в случае точной изоспиновой симметрии в нелокальной модели существует три параметра: токовая $m_{c,u}$ и динамическая $m_{d,u}$ массы кварков и параметр

нелокальности Λ . Варьируя один параметр, скажем $m_{d,u}$, в некоторой области можно зафиксировать другие параметры, используя массу пиона и константу распада нейтрального пиона в два фотона⁶.

Масса пиона известна с высокой точностью, но постоянная распада на два фотона имеет экспериментальную погрешность на уровне 3%. Можно исследовать зависимость $a_{\mu}^{\text{LbL},\pi^0}$ об этой неопределённости. Для этого динамическая масса кварка выбирается в области 200 – 350 МэВ, а другие параметры подбираются по значениям массы пиона и константы распада на два фотона в соответствии с временем жизни пионом в диапазоне ошибок [315]. Эта зависимость $a_{\mu}^{\text{LbL},\pi^0}$ от $m_{d,u}$ в пределах погрешности для константы распада нейтрального пиона на два фотона показана на рисунке 3.8 откуда можно получить оценку на величину вклада нейтрального пиона в аномальный магнитный момент мюона $a_{\mu}^{\text{LbL},\pi^0} = (5.01 \pm 0.37) \cdot 10^{-10}$. Ошибка при этом выбирается на основе разницы между наибольшим и наименьшим значениями $a_{\mu}^{\text{LbL},\pi^0}$ полученными для разных динамических масс кварков.

Результаты расчётов в нелокальной $SU(3)$ модели (1.39) с параметризациями G_{I-IV} приведены в таблице 3.4. Легко видеть, что результаты для пионного вклада находятся в диапазоне ошибок результатов нелокальной модели $SU(2)$ модели, в то время как вклады $a_{\mu}^{\text{LbL},\eta}$ и $a_{\mu}^{\text{LbL},\eta'}$ на порядок меньше чем пионный вклад. Для оценки модельной зависимости в $SU(3)$ модели для центральных значений вкладов η и η' мезонов используются средние значения по различным модельным параметризациям [201]. Для оценки модельной ошибки вклада η' принимается максимальное отклонение от центрального значения. Отклонение вклада η от центрального значения оказывается достаточно небольшим, что может быть случайностью, поэтому можно предпо-

⁶Обычно для подбора параметров модели используют наблюдаемые связанные со свойствами заряженного пиона, а именно массу и константу слабого распада. Обычно разница между параметрами зафиксированными на наблюдаемые заряженного или нейтрального пиона связана с нарушением изотопической инвариантности ввиду электромагнитных взаимодействий и разницы токовых масс лёгких кварков. Для исследования процесса рассеяния света на свете по-видимому лучше использовать фит модельных параметров на свойства нейтрального пиона.

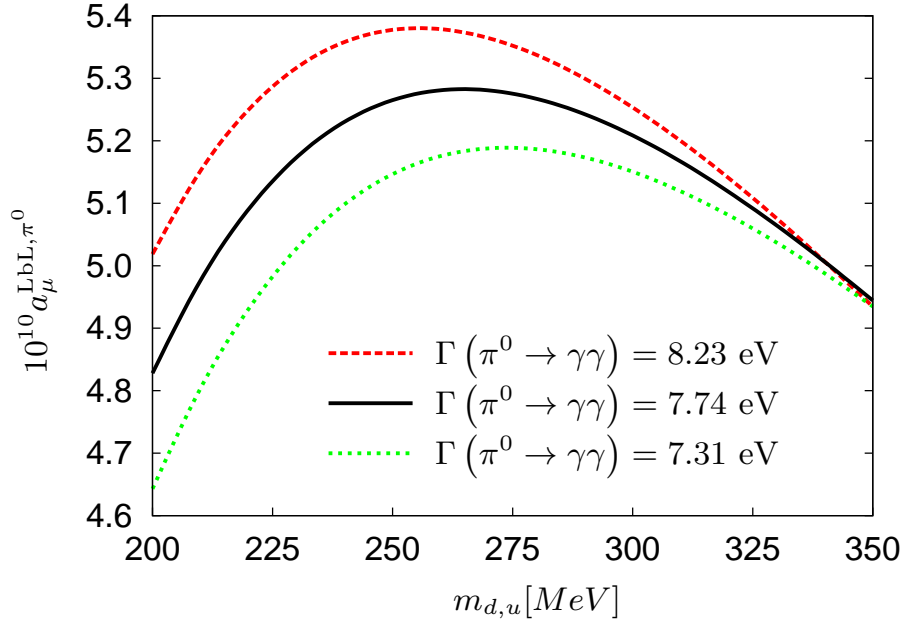


Рис. 3.8: Вклад в АММ мюона от процесса рассеяния свет на свете с обменом нейтральным пионом в зависимости от динамической массы кварка.

set	π^0	η	η'	$\eta + \eta'$	$\pi^0 + \eta + \eta'$
G _I	5.05	0.55	0.27	0.82	5.87
G _{II}	5.05	0.59	0.48	1.08	6.13
G _{III}	5.05	0.53	0.18	0.71	5.76
G _{IV}	5.10	0.49	0.25	0.74	5.84

Таблица 3.4: Вклад псевдоскалярных мезонов в АММ мюон a_μ^{LbL} , полученный в нелокальной $SU(3)$ модели для различных параметризаций. Все величины приводятся в 10^{-10} .

ложить, что модельная ошибка вклада η имеет тот же порядок, что и ошибка вклада η' , то есть на 60% от центрального значения. В результате вклады η и η' оцениваются как

$$a_\mu^{\text{LbL},\eta} = 0.54 \pm 0.32, \quad a_\mu^{\text{LbL},\eta'} = 0.30 \pm 0.18. \quad (3.51)$$

Ограничения на вершину $P\gamma\gamma$ и вклад в АММ пиона

Первое феноменологическое ограничение на аномальную вершину с участием псевдоскалярных мезонов $F_{P^*\gamma^*\gamma^*}(q_3^2; q_1^2, q_2^2)$ соответствует случаю когда мезон и фотоны находятся на массовой поверхности. В этом случае вершина $F_{P\gamma\gamma}(-M_P^2; 0, 0)$ нормируется на экспериментально измеренные ширины

распада на два фотона

$$F_{P\gamma\gamma}(-M_P^2; 0, 0) \equiv g_{P\gamma\gamma} = \sqrt{\frac{64\pi\Gamma(P \rightarrow \gamma\gamma)}{(4\pi\alpha)^2 M_P^3}}.$$

Второе феноменологическое ограничение для вершины соответствует случаю специальной кинематики, когда мезон и один из фотонов находятся на массовой поверхности, а второй фотон имеет произвольную виртуальность $F_{P\gamma\gamma^*}(-M_P^2; 0, q^2)$. Переходный форм-фактор пиона в такой кинематике измерен коллаборациями CELLO [316], CLEO [317], BABAR [318, 319] и Belle [320] ⁷. Переходные форм-факторы для π , η , η' мезонов, оценённые в нелокальной модели для набора параметров G_I показаны на рисунке 3.9, 3.10 и 3.11. Из рисунков можно видеть разумное согласие результатов нелокальной модели, модели векторной доминантности (VMD) и модели LMD+V с существующими экспериментальными данными, в то время как модель локальная модель НИЛ [192] имеет заметные отклонения от экспериментальных измерений.

Первое ограничение КХД [324] заключается в том, что при больших фотонных виртуальностях $q_1^2 + q_2^2 \rightarrow \infty$ мезонный переходной форм-фактор имеет асимптотическое поведение вида

$$F_{P\gamma^*\gamma^*}(-M_P^2; q_1^2, q_2^2) \sim 1/(q_1^2 + q_2^2)$$

и для симметрической кинематики фиксируется асимптотический коэффициент. В случае пиона

$$F_{\pi\gamma^*\gamma^*}(-M_\pi^2; q^2, q^2) \approx \frac{1}{q^2} \frac{2f_\pi}{3} \left(1 - \frac{5\alpha_s(q^2)}{6\pi} + O(\alpha_s^2) + O(q^{-2}) \right). \quad (3.52)$$

Заметим, что и в нелокальной кварковой модели и в модели LMD+V лидирующий член имеет поведение $1/q^2$. Однако даже при учёте подлидирующих поправок, в этих моделях отсутствуют радиационные поправки $O(\alpha_s)$, вычисленные в пертурбативной КХД [325].

⁷Следует отметить, что очень интересные данные коллабораций BABAR и Belle по поведению форм-фактора при большой виртуальности фотона слабо влияют на низкоэнергетические наблюдаемые [201, 321–323].

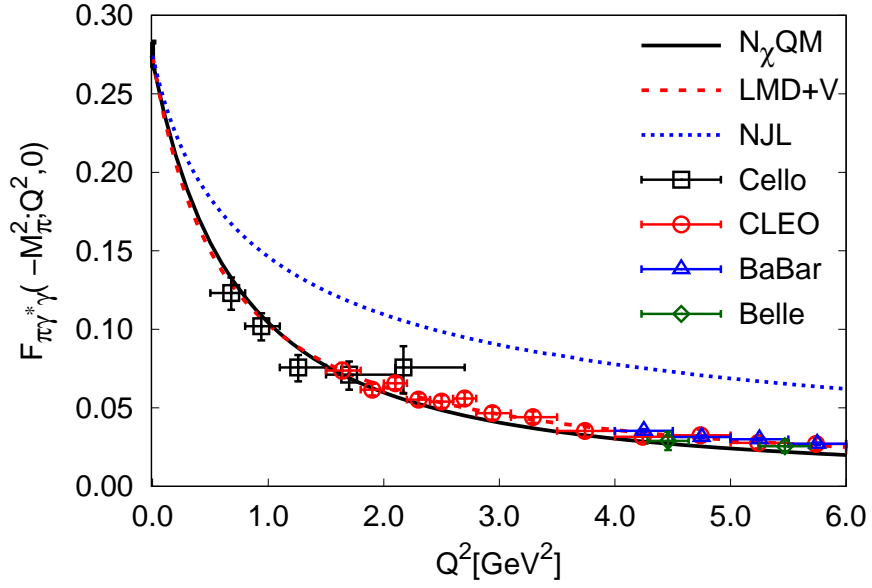


Рис. 3.9: Переходный форм-фактор пиона $\gamma^* \gamma \rightarrow \pi^0$ вычисленный в нелокальной модели для набора параметров G_I (на рисунке обозначен как $N_\chi QM$), модели LMD+V [185] и локальная модель НИЛ [192] в сравнении с данными коллабораций CELLO [316], CLEO [317], BABAR [318] и Belle [320].

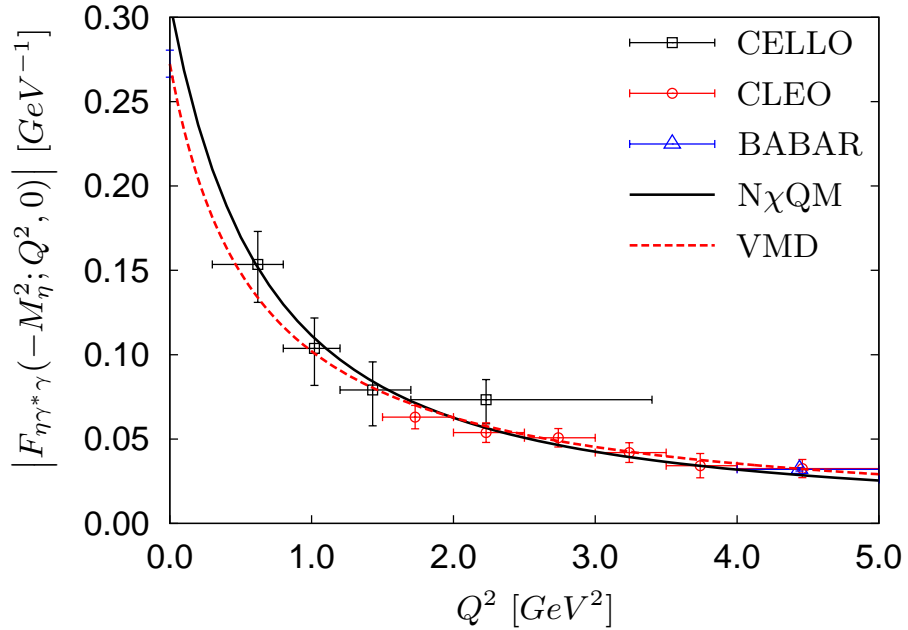


Рис. 3.10: Переходный форм-фактор η -мезона $\gamma^* \gamma \rightarrow \eta$ вычисленный в нелокальной модели для набора параметров G_I (на рисунке обозначен как $N_\chi QM$), и модели векторной доминантности VMD [185] в сравнении с данными коллабораций CELLO [316], CLEO [317] и BABAR [319].

Второе ограничение КХД следует из амплитуды рассеяния света на свете с тремя виртуальными ($q_i, i = 1, 2, 3$) и одним внешним магнитным ($q_4 \rightarrow 0$)

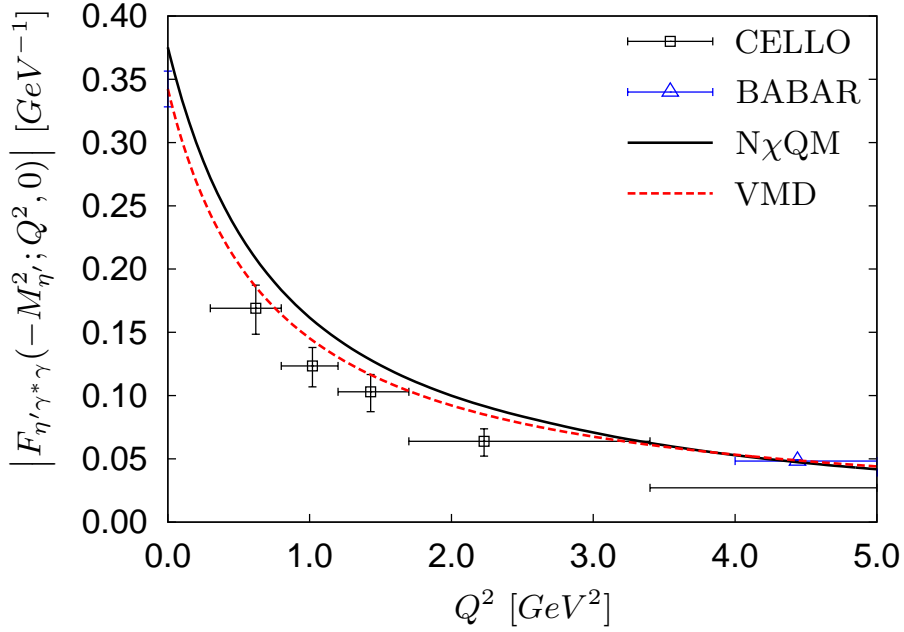


Рис. 3.11: Переходный форм-фактор η' -мезона $\gamma^*\gamma \rightarrow \eta'$ вычисленный в нелокальной модели для набора параметров G_I (на рисунке обозначен как $N\chi QM$), и модели векторной доминантности VMD [185] в сравнении с данными коллабораций CELLO [316] и BABAR [319]

ПОЛЯМИ

$$\mathcal{M}(q_1^2, q_2^2, q_3^2) \equiv \alpha^2 N_c \text{Tr} \left[\widehat{Q}^4 \right] \mathcal{A}(q_1^2, q_2^2, q_3^2)$$

для пертурбативной асимптотики КХД в конфигурации, когда некоторые из фотонов имеют большие виртуальности [186]. Есть только два различных кинематических режима для амплитуды рассеяния света на свете: евклидовы импульсы трех фотонов сравнимы по величине, $q_1^2 \approx q_2^2 \approx q_3^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2$, или одним из импульсов значительно меньше двух других $q_1^2 \approx q_2^2 \gg q_3^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2$. Второй режим был проанализирован в [186] с помощью операторного разложения, в результате чего амплитуда факторизуется на фактор связанный с малыми расстояниями $\sim 1/q_1^2$ умноженный на недиагональный коррелятор $(VA\tilde{V})$ между аксиальным и электромагнитным током во внешнем магнитном поле

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{PS}(q_1^2, q_2^2, q_3^2) &\stackrel{q_1^2 \approx q_2^2 \gg q_3^2}{=} \\ &= \sum_{a=3,8,0} W^{(a)} G_2^{(a)}(q_3^2, q_2^2, q_1^2) \{f_2 \bar{f}_1\} \{\bar{f} f_3\}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

где

$$G_2^{(a)}(q_3^2, q_2^2, q_1^2) \stackrel{q_1^2 \approx q_2^2 \gg q_3^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2}{=} \frac{2}{q_1^2} w_L^{(a)}(q_3^2),$$

$$W^{(3)} = \frac{1}{4}, \quad W^{(8)} = \frac{1}{12}, \quad W^{(0)} = \frac{2}{3},$$

$w_L^{(a)}(q_3^2)$ продольная часть коррелятора $V A \tilde{V}$ с соответствующей флейворной структурой аксиального тока, $f_i^{\mu\nu} = q_i^\mu \epsilon_i^\nu - q_i^\nu \epsilon_i^\mu$ тензоры напряженности поля, фигурные скобки обозначают следы произведений матриц $f_i^{\mu\nu}$. В (3.53) амплитуда \mathcal{A}_{PS} является частью общей амплитуды, которая имеет отношение к адронному обмену в псевдоскалярном канале. Свойства коррелятора $V A \tilde{V}$ были подробно изучены в [326], где было показано, что в киральном пределе безмассовых токовых кварков из-за свойств аксиальной аномалии в пертурбативной КХД для всех a

$$w_L^{(a)}(q^2) = \frac{2}{q^2}, \quad (3.54)$$

более того, эти выражения для $w_L^{(3,8)}(q^2)$ являются точными результатами КХД для аксиальных несинглетных токов, верных при любом q^2 . Этот результат был также подтвержден в рамках эффективной модели инстантонной жидкости [198]. В [327] также показано, как аномальные продольные части коррелятора $w_L^{(0)}(q^2)$ изменяется при малых импульсах ($q^2 \lesssim m_\eta^2$) за счет наличия в $U_A(1)$ аномалии. Таким образом, в операторном разложении независимо от a имеется асимптотическое ограничение КХД

$$G_2(q_3^2, q_2^2, q_1^2) \stackrel{q_1^2 \approx q_2^2 \gg q_3^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2}{=} \frac{4}{q_1^2 q_3^2}. \quad (3.55)$$

Функция $G_2(q_3^2, q_2^2, q_1^2)$ была получена в [186] в результате прямого вычисления в теории возмущений для амплитуды рассеяния света на свете, где взаимодействие фотон-фотон связывалось петлей безмассовых кварков. Эта функция симметрична при перестановке двух аргументов и в конкретной

кинематики сводится к

$$G_2(s, s, s) = \frac{8}{3s^2}, \quad (3.56)$$

$$G_2(s_3, s, s) = \frac{8}{s_3(s_3 - 4s)^2} \left[(2s + s_3) \ln \frac{s_3}{s} + 4s - s_3 + 2s(s - s_3) J(s_3, s, s) \right], \quad (3.57)$$

$$G_2(s, s, s_1) = \frac{4}{ss_1(s_1 - 4s)^2} \left[(4s^2 - s_1^2) \ln \frac{s}{s_1} + 2s(4s - s_1) - 2s(s_1^2 + 2s^2 - 3ss_1) J(s, s, s_1) \right], \quad (3.58)$$

где $s_i = q_i^2$. $J(s_3, s_2, s_1)$ есть функция треугольника (см., например, [328]), она является симметричной по всем аргументам и для рассматриваемой кинематики равна

$$J(s_3, s, s) = \begin{cases} \frac{1}{s} \frac{2}{\sqrt{x(1-x/4)}} \text{Cl}_2(\arccos(1 - \frac{x}{2})), & \text{if } 4s > s_3, \\ \frac{1}{s_3} \frac{1}{\lambda} \left[2 \ln^2\left(\frac{1-\lambda}{2}\right) - 4 \text{Li}_2\left(\frac{1-\lambda}{2}\right) - \ln^2(y) + \frac{\pi^2}{3} \right], & \text{if } 4s < s_3, \end{cases} \quad (3.59)$$

где $x = \frac{s_3}{s}$ ($0 \leq x \leq 4$), $y = \frac{s}{s_3}$ ($0 \leq y \leq 1/4$), $\lambda = \sqrt{1 - 4y}$, $\text{Cl}_2(\theta)$ функция Клаузена

$$\text{Cl}_2(\theta) = - \int_0^\theta dt \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right|,$$

и $\text{Li}_2(\eta)$ дилогарифм (функция Спенса)

$$\text{Li}_2(\eta) = - \int_0^1 dt \frac{\ln(1 - \eta t)}{t}.$$

Когда некоторые виртуальности фотонов велики имеют место следующие асимптотические соотношения

$$G_2(s_3, s, s) \stackrel{s \gg s_3}{\cong} \frac{1}{ss_3} \left[4 + \frac{s_3}{s} \left(\frac{4}{3} \ln \left(\frac{s_3}{s} \right) - \frac{2}{9} \right) + O \left(\left(\frac{s_3}{s} \right)^2 \right) \right], \quad (3.60)$$

$$G_2(s, s, s_1) \stackrel{s \gg s_1}{\cong} \frac{4}{s^2} \left[-\frac{1}{3} \ln \left(\frac{s_1}{s} \right) + \frac{5}{9} + O \left(\frac{s_1}{s} \right) \right], \quad (3.61)$$

и

$$G_2(s_3, s, s) \stackrel{s \ll s_3}{=} -\frac{8}{s_3^2} \left[\ln \left(\frac{s}{s_3} \right) + 1 + \right. \\ \left. + \frac{s}{s_3} \left(2 \ln^2 \left(\frac{s}{s_3} \right) + 10 \ln \left(\frac{s}{s_3} \right) + 4 + \frac{2}{3} \pi^2 \right) + O \left(\left(\frac{s}{s_3} \right)^2 \right) \right], \quad (3.62)$$

$$G_2(s, s, s_1) \stackrel{s \ll s_1}{=} -\frac{4}{ss_1} \left[\ln \left(\frac{s}{s_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{s}{s_1} \left(2 \ln^2 \left(\frac{s}{s_1} \right) + 8 \ln \left(\frac{s}{s_1} \right) + 2 + \frac{2}{3} \pi^2 \right) + O \left(\left(\frac{s}{s_1} \right)^2 \right) \right]. \quad (3.63)$$

Эти асимптотики должны играть важную роль в ограничении эффективных непертурбативных моделей при вычислении петель с динамическими кварками [200].

Однако в недавних работах [187, 204, 205] было заявлено и использовано так называемое «новое ограничение КХД» на вклад пионного обмена в $g - 2$ мюона. Это «ограничение» является попыткой зафиксировать поведение переходного форм-фактора пиона в два фотона в случае, когда пион находится вне массовой поверхности. В частности, в работе [187] утверждалось, что из КХД следует, что

$$F_{\pi^* \gamma^* \gamma}^{\text{oLMDV}}(q^2; q^2, 0) \stackrel{q^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2}{=} \frac{1}{3} f_0 \chi, \quad (3.64)$$

где f_0 - константа распада пиона в киральном пределе, а χ - магнитная восприимчивость кваркового конденсата в присутствии постоянного внешнего электромагнитного поля. Однако можно легко показать, что (3.64) несовместимо с ограничениями операторного разложения и КХД (3.56)-(3.61).

Действительно, в [187] переходный форм-фактор для пиона с произвольной виртуальностью построен следующим образом (модель off-shell + LMD + V)

$$F_{\pi^* \gamma^* \gamma^*}^{\text{oLMDV}}(q_3^2; q_1^2, q_2^2) = \frac{f_\pi}{3} \frac{-q_1^2 q_2^2 (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + P_H^V(q_3^2; q_1^2, q_2^2)}{(q_1^2 + M_1^2)(q_1^2 + M_2^2)(q_2^2 + M_1^2)(q_2^2 + M_2^2)}, \quad (3.65) \\ P_H^V(q_3^2; q_1^2, q_2^2) = h_1 (q_1^2 + q_2^2)^2 + h_2 q_1^2 q_2^2 + \\ + h_3 (q_1^2 + q_2^2) q_3^2 + h_4 q_3^4 - h_5 (q_1^2 + q_2^2) - h_6 q_3^2 + h_7,$$

где $M_{(1,2)}$ - массы векторных мезонных состояний с наименьшей массой, а коэффициенты в (3.65) фиксируются из упомянутых выше ограничений. В частности, h_7 связана с шириной распада пиона в два фотона, $h_1 = 0$ по условию (3.52), h_5 фиксируется по данным CLEO [317], h_2 связана с степенными поправками более высокого порядка (3.52) и, наконец, $(h_3 + h_4) M_1^{-2} M_2^{-2} = \chi$ фиксируется от «новому ограничению» (3.64). В результате из (3.65) можно получить асимптотику часть общей амплитуды процесса рассеяния света на свете связанную с пионным обмен

$$G_{2,PS}^{\text{oLMDV}}(q_3^2, q_2^2, q_1^2) = \frac{F_{\pi^*\gamma^*\gamma^*}(q_3^2; q_1^2, q_2^2) F_{\pi^*\gamma^*\gamma}(q_3^2; q_3^2, 0)}{q_3^2 + M_\pi^2},$$

$$G_{2,PS}^{\text{oLMDV}}(s, s, s) \stackrel{s \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2}{=} -\frac{1}{3} f_0^2 \chi \frac{1}{s^2}, \quad (3.66)$$

$$G_{2,PS}^{\text{oLMDV}}(s_3, s, s) \stackrel{s \gg s_3 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2}{=} -\frac{2}{9} f_0^2 \chi \frac{1}{s s_3}, \quad (3.67)$$

Из сравнения асимптотических коэффициентов в (3.66) и (3.67) с соответствующими коэффициентами в КХД (3.56) и (3.60) легко видеть, что результаты, основанные на «ограничении» (3.64) находятся в противоречии с асимптотиками КХД, полученными модельно независимым образом. Как ранее отмечалось в [200] происхождение этой интерпретации связано с неправильным отождествлением $\langle PVV \rangle$ коррелятора с $\langle \pi VV \rangle$. В последнем случае появляется физический адронный псевдоскалярный ток, который приводит к гораздо более высокому подавлению (3.68), чем показано в (3.64), где используется локальный псевдоскалярный ток. Поведение (3.64) находится в противоречии с предсказанием нелокальной модели, где из (3.46) имеется следующее поведение при больших q^2

$$F_{P^*\gamma^*\gamma}^{\text{N}\chi\text{QM}}(q^2; q^2, 0) \stackrel{q^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2}{\sim} \exp(-q^2/\Lambda^2), \quad (3.68)$$

что не нарушает результаты операторного разложения.

На этом этапе полезно напомнить, что модель LMD+V [185] соответствует выражению (3.65) при $q_3^2 = 0$. Модель VMD, используемая, в частности, в [185] для описания форм-факторов мезонов η и η' , определяется как

$$F_{P^*\gamma^*\gamma}^{\text{VMD}}(0; q_1^2, q_2^2) = \frac{g_{P\gamma\gamma} \Lambda_M^4}{(q_1^2 + \Lambda_M^2)(q_2^2 + \Lambda_M^2)}, \quad (3.69)$$

где параметры Λ_M подгоняются по данным CLEO [317]: $\Lambda_\pi = 776 \pm 22$ МэВ, $\Lambda_\eta = 774 \pm 29$ МэВ, $\Lambda_{\eta'} = 859 \pm 28$ МэВ.

Отметим, что из результатов [186, 198, 326] легко получить правильное выражение, включающее магнитную восприимчивость χ в асимптотическом разложении полной амплитуды света на свете. Действительно, с помощью операторного разложения [326] (см. также [198]) из-за спонтанного нарушения киральной симметрии есть степенные поправки в $w_L(q^2)$, линейные по токовой массе кварка

$$\Delta w_L(q^2) = \frac{16\pi^2 m_c |\langle \bar{q}q \rangle| \chi}{3 q^4}. \quad (3.70)$$

В результате имеется следующая поправка к полной амплитуде рассеяния света на свете

$$\Delta G_2(q_3^2, q_1^2, q_2^2) \stackrel{q_1^2 \approx q_2^2 \gg q_3^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2}{=} \frac{32\pi^2 m_c |\langle \bar{q}q \rangle| \chi}{3 q_1^2 q_3^4}, \quad (3.71)$$

который подавляется токовой массой кварка и дополнительной степенью квадрата большого импульса.

Таким образом в эффективных моделях, и в частности в нелокальной модели, возможно выполнить большинство феноменологических и КХД ограничений и учесть полную кинематическую зависимость от виртуальностей мезонов и фотонов. В подходах основанных на модели векторной доминантности, например модели LMD+V [185], для переходного форм-фактора пиона также возможно выполнить многие ограничения. Наиболее серьёзной проблемой моделей типа VMD является то, что они не учитывают зависимость переходного форм-фактора мезона от виртуальности мезона и, таким образом, нарушают закон сохранения импульса в этой вершине.

Результаты и сравнение с другими подходами

Результаты различных подходов к вычислению вкладов псевдоскалярных мезонов в АММ мюона от процесса рассеяния света на свете приведены в таблице 3.5. Для вклада пиона в АММ мюона в нелокальной модели провидены числа из $SU(2)$ версии модели. Для η и η' используется среднее значе-

Model	π^0	η	η'	$\pi^0 + \eta + \eta'$
VMD [329]	5.74	1.34	1.19	8.27(0.64)
ENJL [330]	5.6			8.5(1.3)
LMD+V, VMD [185]	5.8(1.0)	1.3(0.1)	1.2(0.1)	8.3(1.2)
NJL [192]	8.18(1.65)	0.56(0.13)	0.80(0.17)	9.55(1.66)
(LMD+V)', VMD [186]	7.97	1.8	1.8	11.6(1.0)
N χ QM [200]	6.5(0.2)			
NM [204]	6.9	2.7	1.1	10.7
DIP, VMD [205]	6.54(0.25)			
DSE [331]	5.75(0.69)	1.36(0.30)	0.96(0.21)	8.07(1.20)
Нелокальная модель	5.01(0.37)	0.54(0.32)	0.30(0.18)	5.85(0.87)

Таблица 3.5: Вклад от процесса рассеяния света на свете в АММ мюона от адронных обменов в нейтральном псевдоскалярном канале a_μ^{LbL} , полученный в разных работах. Все цифры приводятся в 10^{-10} . Для модели (LMD+V)' [186] приводится исправленное значение 7.97 [200, 332] вместо 7.65.

ние результатов, полученных для различных наборов параметров из таблицы 3.4.

Из таблицы можно сделать вывод, что результаты расчётов в нелокальной модели для вкладов псевдоскалярных мезонов в мюонный АММ систематически ниже результатов, полученных в других работах. Причину этого можно понять, если проанализировать вершину мезон-фотон-фотон в кинематике $F_{P^*\gamma^*\gamma}(p^2; p^2, 0)$, которая входит уравнение (3.48). Сравнение расчётов нелокальной модели для пионной вершины в этой кинематике 3.46 с другими моделями представлено на рисунке 3.12. Легко видеть, что в нелокальной модели с ростом импульса данная вершина подавляется сильнее, чем в других подходах. Это и есть причина, почему результаты для $a_\mu^{\text{LbL}, \pi^0}$, полученные в нелокальной модели, меньше по сравнению с другими подходами.

Ситуация с η ещё более интересна. Для иллюстрации на рисунке 3.13 представлены вершины $F_{P^*\gamma\gamma}(p^2; 0, 0)$ во времениподобной области $p^2 \leq 0$ и вершины $F_{P^*\gamma^*\gamma}(p^2; p^2, 0)$ в пространственноподобной области $p^2 \geq 0$ в нелокальной кварковой модели и модели векторной доминантности. Эти две специальные кинематики совпадают при нулевой виртуальности $p^2 = 0$, но первая кинематика связана с распадом псевдоскалярных мезонов в два фотона $F_{P\gamma\gamma}(-M_M^2; 0, 0) = g_{P\gamma\gamma}$, в то время как вторая кинематика имеет отношение к вкладу от процесса рассеяния света на свете в АММ мюона (3.48). Та-

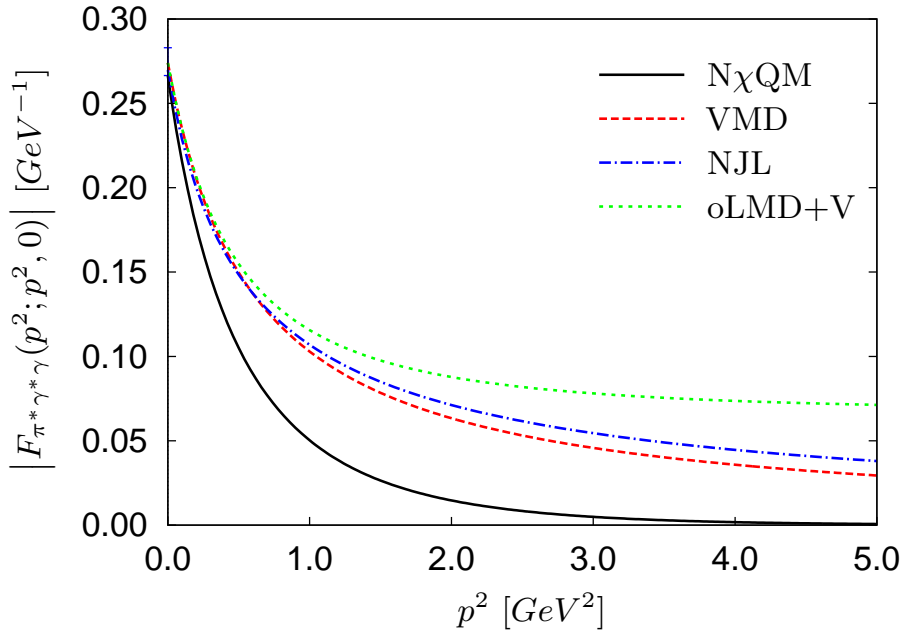


Рис. 3.12: Вершина пион-фотон-фотон для специальной кинематики, когда пион и один фотон вне массовой поверхности и имеют одинаковые квадраты импульсов, а другой фотон находится на массовой поверхности. Нелокальная модель показана (3.46), задается сплошной линией, модель векторной доминантности VMD (3.69) пунктирной линией, результат модели НИЛ [192] по штрихпунктирной линии, и oLMD+V (3.65) короткой пунктирной линией.

ким образом, левая часть рисунка 3.13 в области $p^2 < 0$ описывает переход пион-двух-фотонной вершины с физической точки мезонных масс на массовой поверхности до точки с нулевой мезонной виртуальностью, с которой как раз начинается интегрирование вклада (3.48). В моделях типа векторной доминантности, включая модель LMD+V, такой зависимости от мезонной виртуальности нет. Таким образом, значение этой вершины при нулевой мезонной виртуальности совпадает со значением вершины в физических точках мезонных масс, $F_{P\gamma\gamma}^{\text{VMD}}(p^2 = -M_{\eta,\eta'}^2; 0, 0) = F_{P\gamma\gamma}^{\text{VMD}}(0; 0, 0)$. Однако η и η' мезоны значительно тяжелее, чем пион и такая экстраполяция является слишком грубой. Легко видеть, что для η и особенно для η' разница между значениями вершины в физической и нулевой точках виртуальности в нелокальной модели весьма значительна $F_{P\gamma\gamma}(p^2 = -M_{\eta,\eta'}^2; 0, 0) \gg F_{P\gamma\gamma}(0; 0, 0)$. Таким образом, вклад η и η' мезонов в АММ мюона, оцененный в нелокальной модели, сильно подавлен по сравнению с результатами модели векторной доминантности, которые можно рассматривать только как оценки этих вкладов

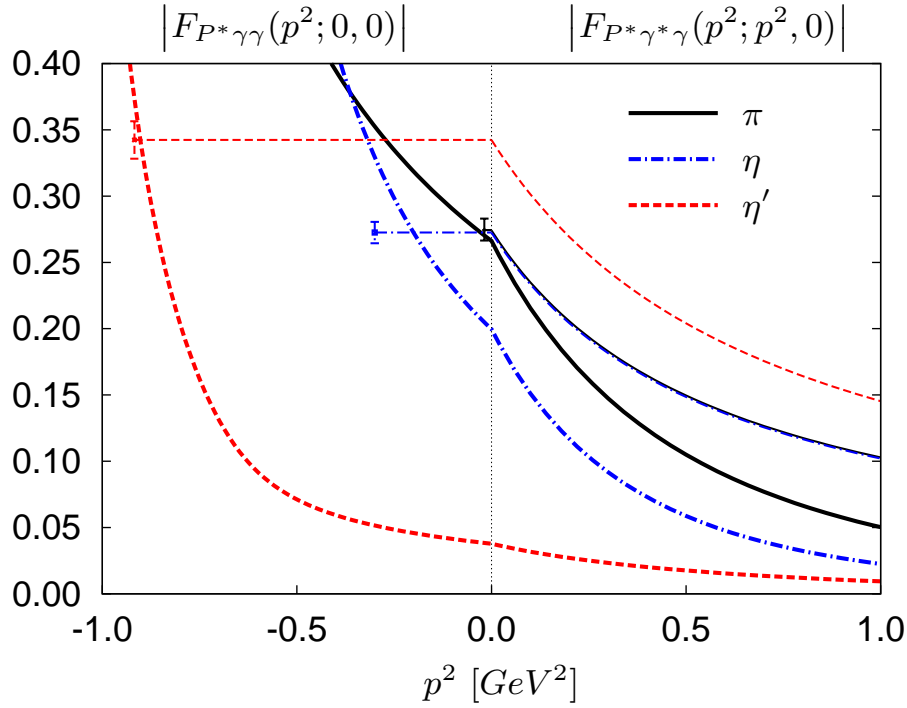


Рис. 3.13: Графики вершин для π^0 , η и η' мезонов: $F_{P^* \gamma \gamma}(p^2; 0, 0)$ во временной области и $F_{P^* \gamma^* \gamma}(p^2; p^2, 0)$ в пространственной области в нелокальной модели (N χ QM) (жирные линии) и VMD (3.69) (тонкие линии). Точки с ошибками соответствуют физическим точкам распада мезона на два фотона. Кривые модели VMD для π^0 и η почти неразличимы.

сверху⁸.

3.2.3 Скалярный вклад

Диаграммы для вклада в АММ мюона от процесса рассеяния света на свете с промежуточными скалярными мезонами имеют тот же вид, что и в псевдоскалярном случае, рисунок 3.6. Необходимо заменить выражения для вершин $\Delta_P \rightarrow \Delta_S$ и масс в производной от тензора рассеяния фотона на фотоне 3.41. Вершины, содержащие виртуальный скалярный мезон с импульсом p и два фотона с импульсами $q_{1,2}$ и векторами поляризации $\epsilon_{1,2}$ рисунка 3.7 можно записать как [192] и

$$\mathcal{A} \left(\gamma_{(q_1, \epsilon_1)}^* \gamma_{(q_2, \epsilon_2)}^* \rightarrow S_{(p)}^* \right) = e^2 \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu \Delta_S^{\mu\nu} (p, q_1, q_2) \quad (3.72)$$

⁸Отметим также, что в подходе уравнений Дайсона-Швингера и Бете-Солпитера [331] также проводились оценки подобной зависимости, однако при этом использовался модельный анзац, а не полный расчёт Т-матрицы рассеяния.

с

$$\begin{aligned} \Delta_S^{\mu\nu}(p, q_1, q_2) = & A_S(p^2; q_1^2, q_2^2) P_A^{\mu\nu}(q_1, q_2) + \\ & + B_S(p^2; q_1^2, q_2^2) P_B^{\mu\nu}(q_1, q_2), \end{aligned} \quad (3.73)$$

где

$$\begin{aligned} P_A^{\mu\nu}(q_1, q_2) &= (g^{\mu\nu}(q_1 q_2) - q_1^\nu q_2^\mu), \\ P_B^{\mu\nu}(q_1, q_2) &= (q_1^2 q_2^\mu - (q_1 q_2) q_1^\mu) (q_2^2 q_1^\nu - (q_1 q_2) q_2^\nu), \end{aligned}$$

и $p = q_1 + q_2$. Отметим также, что в литературе известна другая форма для второго калибровочно-инвариантного тензора, вместо $P_B^{\mu\nu}(q_1, q_2)$, когда в него также входит $g^{\mu\nu}$ и отсутствует $q_1^\nu q_2^\mu$ [333]

$$P_c^{\mu\nu}(q_1, q_2) = g^{\mu\nu} q_1^2 q_2^2 + q_1^\mu q_2^\nu (q_1 q_2) - q_1^\mu q_1^\nu q_2^2 - q_2^\mu q_2^\nu q_1^2. \quad (3.74)$$

Отметим, что скалярный форм-фактор B_S является сингулярным в пределе, когда один фотон действителен, а виртуальность второго фотона равна виртуальности скалярного мезона $p^2 \rightarrow q_1^2, q_2^2 \rightarrow 0$. Для удобства можно определить дополнительную функцию

$$B'_S(p^2; q_1^2, q_2^2) = B_S(p^2; q_1^2, q_2^2) ((q_1 q_2)^2 - q_1^2 q_2^2), \quad (3.75)$$

которая будет регулярной в этом пределе. В общем случае скалярные функции являются комбинациями нестранных и странных компонент. Подробности смешивания мезонов, взаимодействующих с фотонами, приведены в приложении Д. В приложении Е представлен локальный предел амплитуды $\gamma^* \gamma^* \rightarrow S^*$.

После усреднения по направлению импульса мюона (3.37), (3.38) выражение для вклада от процесса рассеяния света на свете в мюонный АММ от скалярного мезонного обмена можно записать в виде интеграла по евклидо-

ВЫМ ИМПУЛЬСАМ

$$\begin{aligned}
 a_{\mu}^{\text{LbL},S} &= -\frac{2\alpha^3}{3\pi^2} \int_0^{\infty} dQ_1^2 \int_0^{\infty} dQ_2^2 \int_{-1}^1 dt \sqrt{1-t^2} \frac{1}{Q_3^2} \sum_{j=1}^6 \langle A \rangle_j \times \\
 &\times \sum_{S=a_0^0, \sigma, f_0} \left[2 \frac{\mathcal{N}_{1,j}^S}{Q_2^2 + M_S^2} + \frac{\mathcal{N}_{2,j}^S}{Q_3^2 + M_S^2} \right], \tag{3.76} \\
 \mathcal{N}_{1,j}^S &= \sum_{X=A, B'} \sum_{Y=A, B} X_S(Q_2^2; Q_2^2, 0) Y_S(Q_2^2; Q_1^2, Q_3^2) Z_{1,j}^{XY}, \\
 \mathcal{N}_{2,j}^S &= \sum_{X=A, B'} \sum_{Y=A, B} X_S(Q_3^2; Q_3^2, 0) Y_S(Q_3^2; Q_1^2, Q_2^2) Z_{2,j}^{XY},
 \end{aligned}$$

где X_S, Y_S есть функции A_S, B_S, B'_S , определенные в уравнениях (3.73), (3.75), $Q_3 = -(Q_1 + Q_2)$ и заглавные буквы соответствуют для евклидовым импульсам, т. е. $Q_i^2 = -q_i^2$. Явный вид полиномов $Z_{\mathbf{n},j}^{XY}$ приведён в [202].

Как и псевдоскалярном случае для численных оценок в используется нелокальный форм-фактор виде Гауссовой функции. Для оценки чувствительности результатов к модельным параметрам весьма полезно изучить вклад π и σ мезонов в мюонный АММ для $SU(2) \times SU(2)$ нелокальной модели. При этом значения динамической массы кварка выбираются в типичном интервале значений модели 200- 350 МэВ, а токовая масса кварка $m_{c,u}$ и параметр нелокальности Λ подгоняются по физическим значения массы пиона и двухфотонной константы распада нейтрального пиона в пределах диапазона ошибок, приведённого в [315].

Результаты расчётов показаны на рисунке 3.14. Легко видеть, что вклад σ -мезона существенно меньше пионного, положителен и имеет минимальное значение около значения 300 МэВ для динамической массы. Интересно отметить, что суммарный результат для вкладов пиона и σ -мезона достаточно устойчив к изменению динамической массы в тестируемом интервале. Оценки для суммы вкладов π^0 и σ мезонов следующие (здесь и далее в 10^{-10})

$$a_{\mu}^{\text{LbL},\pi^0} = 5.01 \pm 0.37, \quad a_{\mu}^{\text{LbL},\pi^0+\sigma} = 5.40 \pm 0.33. \tag{3.77}$$

Суммарный вклад $a_0(980)$ и $f_0(980)$ мезонов в $SU(3)$ версии модели как

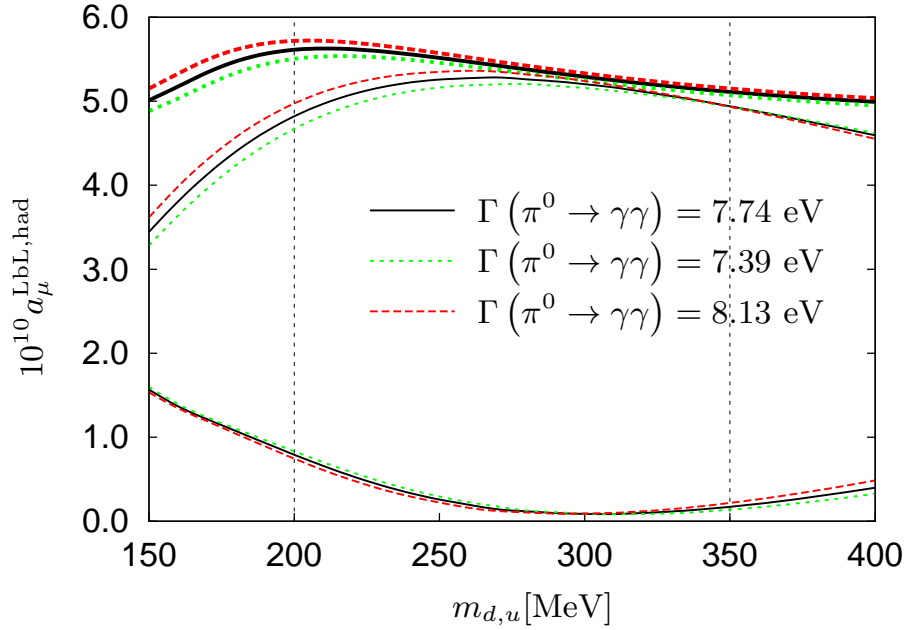


Рис. 3.14: Вклад от процесса рассеяния света на свете в АММ мюона от обменов нейтральным пионом и σ мезоном в зависимости от массы динамического кварка. Группа из трех нижних линий соответствует вкладу σ , вклад π^0 находится посередине, а верхние линии - суммарный вклад. ертикальные тонкие пунктирные линии обозначают интервал динамических масс кварков, используемый для оценки интервала модельных ошибок для a_μ^{LbL} .

set	π^0	η	η'	$\eta + \eta'$	PS	$a_0(980)$	σ	$f_0(980)$	S	$\pi^0 + \sigma$	PS+S
G _I	5.05	0.55	0.27	0.82	5.87	0.0064	0.100	0.0035	0.110	5.15	5.98
G _{II}	5.05	0.59	0.48	1.08	6.13	0.0079	0.100	0.0038	0.110	5.15	6.24
G _{III}	5.05	0.53	0.18	0.71	5.76	0.0058	0.100	0.0034	0.109	5.15	5.87
G _{IV}	5.10	0.49	0.25	0.74	5.84	0.0060	0.115	0.0038	0.126	5.25	5.97

Таблица 3.6: Вклад скалярных и псевдоскалярных мезонов в мюонный АММ a_μ^{LbL} для различных наборов параметров модели [30]. Все числа указаны в 10^{-10} .

следует из таблицы 3.6

$$a_\mu^{\text{LbL}, a_0+f_0} \approx 0.01. \quad (3.78)$$

Сравнение скалярного вклада с другими моделями и локальный предел

В разных версиях локальной модели НИЛ существуют оценки вклада скалярного мезонного обмена в мюонный АММ. В [334] вклад от скалярных мезонов оценивался как

$$a_\mu^{\text{LbL}, S} = -(0.68 \pm 0.2) \cdot 10^{-10}. \quad (3.79)$$

В то же время оценки в работе [192] для вкладов σ и a_0 мезонов получена оценка

$$\begin{aligned} a_\mu^{\text{LbL},\sigma} &= (1.167 \pm 0.238) \cdot 10^{-10}, \\ a_\mu^{\text{LbL},a_0} &= (0.062 \pm 0.024) \cdot 10^{-10}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Легко видеть, что оценки в нелокальной модели в уравнениях (3.77) , (3.78) и таблице 3.6 меньше по абсолютным значениям, чем оценки в локальной модели (3.79) и (3.80). При этом оценки (3.79) и (3.80) отличаются знаком для вклада обмена скалярными мезонами. В [335] аналитические выражения для вклада пиона и σ -мезона⁹ были получены с помощью переходных форм-факторов мезона следующих из модели векторной доминантности (VMD), с единственным параметром – массой ρ -мезона M_ρ . Эти выражения приведены в виде разложения по малым параметрам, при этом используется следующая иерархия масштабов масс $(M_M^2 - m_\mu^2) \ll m_\mu^2 \ll M_\rho^2$. В нелокальной модели численно все коэффициенты этих разложений для вклада псевдоскалярного мезона из уравнений (8) и (10) работы [335] полностью воспроизводятся¹⁰, используя программу для численных расчётов a_μ и заменив форму переходные форм-факторы в виде модели векторной доминантности (VMD) факторы вместо нелокальной модели

$$A_S(p^2; q_1^2, q_2^2) = F_M^{\text{VMD}}(q_1^2, q_2^2), \quad B_S(p^2; q_1^2, q_2^2) = 0.$$

Однако для вклада σ -мезона с использованием такой же методики с моделью VMD коэффициенты разложения в формуле (11) [335] численно воспроизводятся с точностью до знака. Таким образом, оказывается, что как и в [192]) вклад скалярного мезона в мюонный АММ для модели векторной доминантности имеет положительный знак, расходящийся с результатом [335].

Для дополнительной проверки правильности численного алгоритма, следуя работе [335], можно рассчитать вклад в АММ мюона от процесса поляризации вакуума, $a_\mu^{\text{HVP},M\gamma}$, где виртуальный фотон расщепляется на мезон

⁹Для пионного обмена лидирующий коэффициент, $\log^2(M_\rho/m_\mu)$, в разложении $(m_\mu/M_\rho)^2$ был найден работе [336].

¹⁰Эти коэффициенты можно воспроизвести варьируя значения масс ρ -мезона, мюона, а также и разность квадрата масс пиона и мюона.

M и реальный фотон γ . Как утверждается в [335], этот вклад должны быть положительным, поскольку он связан дисперсионными соотношениями с сечением $\sigma(e^+e^- \rightarrow M\gamma)$. Численные результаты для модели VMD и набора параметров, используемых в [335] (для $M_\sigma = M_\pi$), таковы:

$$a_{\mu, \text{VMD}}^{\text{LbL}, \pi^0} = +5.64 \cdot 10^{-10}, \quad (3.81)$$

$$a_{\mu, \text{VMD}}^{\text{LbL}, \sigma} = +4.76 \cdot 10^{-10}, \quad (3.82)$$

$$a_{\mu, \text{VMD}}^{\text{HVP}, \pi^0 \gamma} = +0.368 \cdot 10^{-10}, \quad (3.83)$$

$$a_{\mu, \text{VMD}}^{\text{HVP}, \sigma \gamma} = +0.265 \cdot 10^{-10}. \quad (3.84)$$

Численные результаты для вкладов обмена пионов, (3.81) и (3.83), согласуются с результатами, приведёнными в уравнениях (2) и (10) из работы [335].

Чтобы изучить переход от нелокальной модели к локальной, рассмотрим нелокальную модель $SU(2) \times SU(2)$ с дополнительно регуляризацией Паули – Вилларса и соответственно с ¹¹

1. параметром нелокальности Λ ,
2. параметром регуляризации кварковой петли Λ_q .

Локальная модель соответствует пределу

$$\Lambda \rightarrow \infty, \quad \Lambda_q = \Lambda_q^{\text{fit}}, \quad (3.85)$$

в то время как нелокальная модель без регуляризации может быть получена предельным переходом

$$\Lambda = \Lambda^{\text{fit}}, \quad \Lambda_q \rightarrow \infty. \quad (3.86)$$

Для определенности сравним локальную модель^{12 13} [80, 81] с нелокальной моделью¹⁴ [218]. Значения кваркового конденсата в локальной и нелокальной моделях численно совпадают в пределах менее 0,5 %.

¹¹Аналогичное рассмотрение используется в главе по исследованию роли $1/N_c$ поправок.

¹² $m_{c,u}^{\text{NJL}} = 5.69$ МэВ, $m_{d,u}^{\text{NJL}} = 253.9$ МэВ, $\Lambda_q^{\text{NJL}} = 800$ МэВ.

¹³Токовая масса кварков при этом уменьшена, чтобы воспроизвести массу нейтрального пиона вместо заряженного.

¹⁴ $m_{c,u} = 5.45$ МэВ, $m_{d,u} = 255.8$ МэВ, $\Lambda = 902.4$ МэВ.

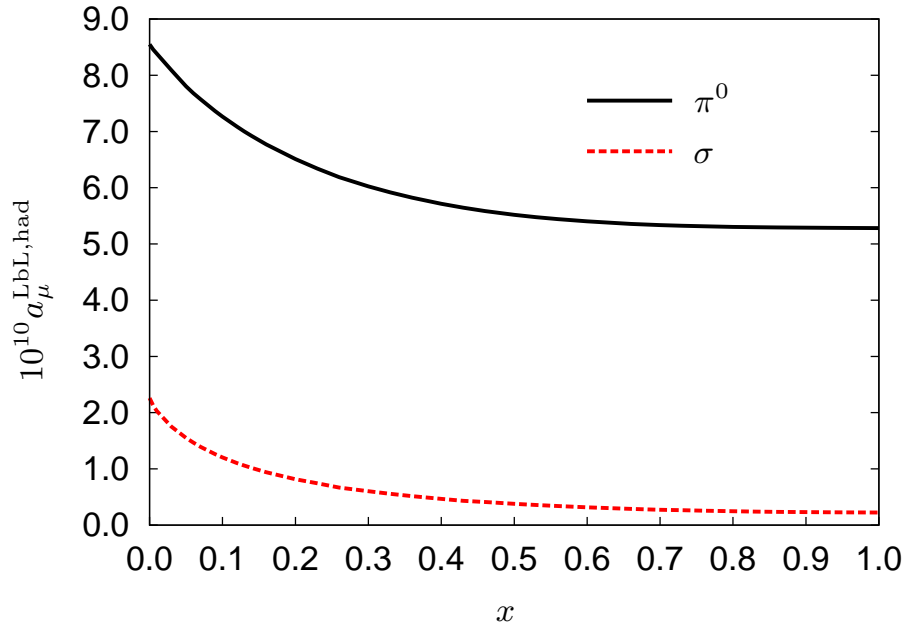


Рис. 3.15: Вклад от процесса рассеяния света на свете в АММ мюона от обмена нейтральным пионом и σ мезоном в нелокальной модели с дополнительной регуляризацией Паули–Вилларса как функция степени «нелокальности» модели x . Нулевое значение x соответствует локальной модели НИЛ, а x равный 1 – нелокальной модели без регуляризации.

Для перехода между предельными значениями соответствующим локальной и нелокальной моделям, вводится дополнительный параметр x показывающий степень «нелокальности» модели. Нулевое значение x соответствует локальной модели НИЛ, а нелокальная модель воспроизводится для x , равного единице. Для каждой точки x между нулём и единицей параметр ПВ регуляризации ведёт себя как $\Lambda_q = \Lambda_q^{\text{NJL}}/(1 - x)$, масса динамического кварка меняется линейно, а масса токового кварка и Λ фиксируются на значения массы нейтрального пиона и линейной изменяющегося кваркового конденсата. Результат представлен на рисунке 3.15. Легко видеть, что вклад пиона в мюонный АММ возрастает с $5.3 \cdot 10^{-10}$ в нелокальной модели до $8.5 \cdot 10^{-10}$ в локальной модели НИЛ. С вкладом σ -мезона ситуация более интересна. Вклад в локальном пределе в десять раз больше, чем в нелокальной модели, $2.2 \cdot 10^{-10}$ вместо $0.22 \cdot 10^{-10}$. При этом значения, полученные в локальном пределе, имеют тот же порядок, что и числа, указанные в [192].

3.2.4 Кварковая петля

В данной главе завершается расчёт вклада в аномальный магнитный момент мюона в рамках нелокальной модели с участием псевдоскалярных и скалярных мезонов в лидирующем порядке $1/N_c$ разложения.

Напомним, что существенной особенностью нелокальных моделей является то, что динамическая масса кварка зависит от импульса, а обратный пропагатор кварка принимает вид

$$S^{-1}(k) = \widehat{k} - m(k^2), \quad (3.87)$$

и массовая функция полученная имеет вид $m(k^2) = m_c + m_d f^2(k^2)$. В нелокальных моделях есть согласованный переход между областью низких энергий (где есть согласие низкоэнергитическими теоремами) и областью высоких энергий (где есть согласие с операторным разложением), т.к. что зависящая от импульса динамическая масса кварка, при низких виртуальностях представляет собой составляющую (или конститuentную) массу кварка $m(0) = m_c + m_d$, а при больших виртуальностях становится токовой массой кварков m_c . В этом состоит главное отличие от локальных моделей, где масса кварка является составляющей при любых виртуальностях.

Для численных оценок используются две версии форм-фактора используемые в литературе выражаемый через функции Гаусса

$$f_G(k_E^2) = \exp(-k_E^2/2\Lambda^2), \quad (3.88)$$

и Лоренца

$$f_L(k_E^2) = \frac{1}{1 + k_E^2/\Lambda^2}. \quad (3.89)$$

На основе правил Фейнмана для динамического пропагатора кварков (3.87) и вершин взаимодействия кварка с фотонами (1.26), (98), (99) и (100), можно получить полный калибровочно-инвариантный набор диаграмм соответствующий тензору рассеянию фотона на фотоне $\Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}(q_2, -(q_1 + q_2), k + q_1, -k)$ за счёт вклада кварковой петли, приведённый на рисунке 3.16.

Для численных оценок используются нелокальные $SU(2)$ и $SU(3)$ версии модели. Чтобы проверить зависимость от конечных результатов, также выполняются расчёты для различных наборов параметров модели.

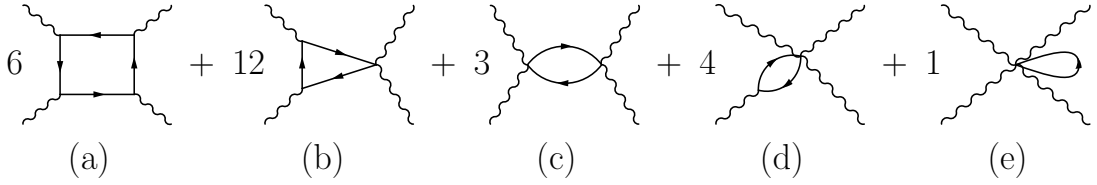


Рис. 3.16: Полный калибровочно-инвариантный набор диаграмм тензора рассеяния фотона на фотоне $\Pi_{\mu\nu\lambda\rho}$. Представлены диаграммы типа кварковый бокс и диаграммы с нелокальными многофотонными вершинами. Цифры перед диаграммами обозначают число диаграмм определённого типа.

В $SU(2)$ модели применяется форма нелокальности в виде функции Гаусса с той же схемой выбора параметров модели, что и в разделах по вычислению вкладов псевдоскалярных и скалярных частиц: параметры Λ и m_c выбираются на основе массы π^0 и ширины распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, при этом значение динамической массы кварка выбирается в более широкой области, по сравнению с предыдущими разделами области 150 – 400 МэВ. Для оценки a_μ^{HLbL} и наивного учёта «модельной» ошибки также используется область m_D от 200 до 350 МэВ, а результаты в граничных диапозоны динамической массы кварка от 150 до 200 МэВ и от 350 до 400 МэВ получены для понимания характера поведения вклада при уменьшении или увеличении массы кварка.

Для $SU(3)$ версии модели необходимо дополнительно определить ещё два параметра: токовую и динамическую массы странного кварка. Это можно сделать выполняя фит по массе K^0 и получая более или менее разумные значения для массы η -мезона и его ширины распада $\eta \rightarrow \gamma\gamma$. Основная проблема здесь заключается в том, что наименьшее значение для динамической массы m_d составляет 240 МэВ, потому что при более низких массах η мезон становится нестабильным.

Кроме того, для проверки чувствительности результатов к форме нелокальности и конкретным параметрам используются параметризации из работы [30] для функций Гаусса и Лоренца.

Важным результатом, независимым от конкретных параметров, является характер поведения плотности $\rho^{\text{HLbL}}(Q_1, Q_2)$, показанный на рисунке 3.17. Можно видеть, что плотность на краях ($Q_1 = 0$ или $Q_2 = 0$) равна нулю и ее максимум находится сосредоточено в области низких энергий ¹⁵ ($Q_1 \approx Q_2 \approx$

¹⁵Плотность для мезонных обменов имеет аналогичное поведение.

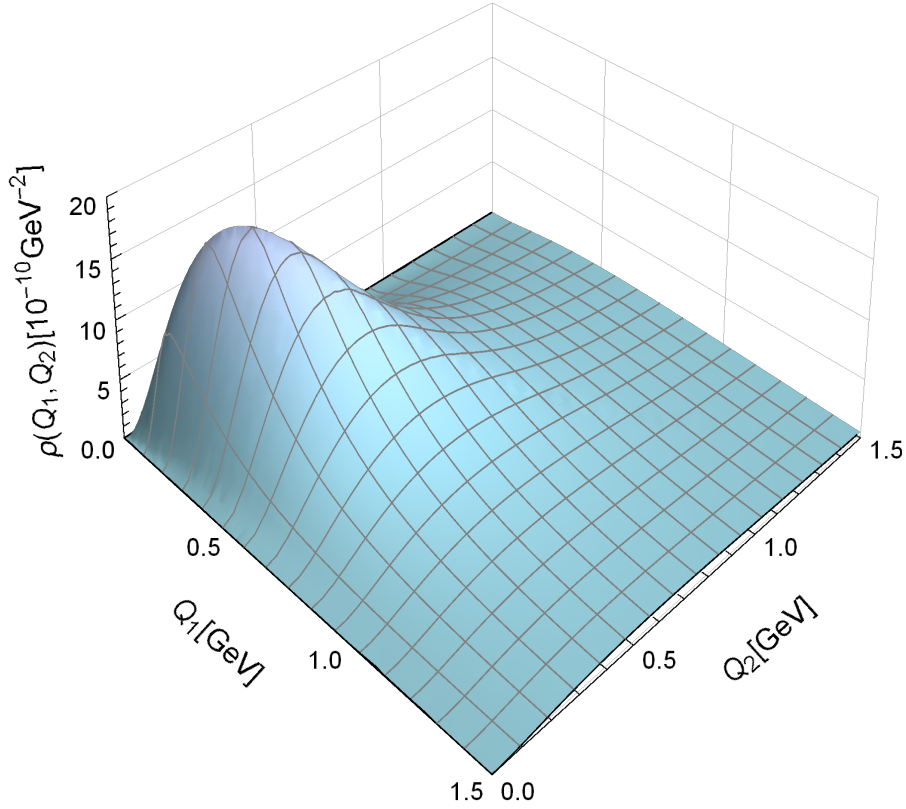


Рис. 3.17: Трёхмерный график «плотности» $\rho(Q_1, Q_2)$, определённой в уравнениях (3.37), (3.38).

300 МэВ), где набирается основной вклад в a_μ^{HLbL} .

На рисунке 3.18 показана «плотность» $\rho^{\text{HLbL}}(Q_1, Q_2)$ в диагональном направлении $Q_2 = Q_1$ представлен вместе с различными частичными вкладами диаграмм различной топологии из рисунка 3.16. Видно, что при нулевой виртуальности $\rho^{\text{HLbL}}(0, 0) = 0$, что обусловлено нетривиальным сокращением вкладов диаграмм различной топологии. Это является следствием калибровочной инвариантности и спонтанного нарушения киральной симметрии и представляет собой низкоэнергетическую теорему, аналогичную теореме для поведения функции Адлера при нулевом импульсе. При больших импульсах Q_1, Q_2 лидирующий вклад даёт бокс-диаграмма с локальными вершинами, при этом динамическая непертурбативная масса кварка стремится к нулю, а кварки при этом становятся токовыми кварками теории возмущений.

Численные результаты для значения a_μ^{HLbL} приведены в таблице 3.7 и представлены на рисунке 3.19 для $SU(2)$ и $SU(3)$ версий нелокальной модели вместе с результатом вычислений СХQM [195] и подходу на основе уравне-

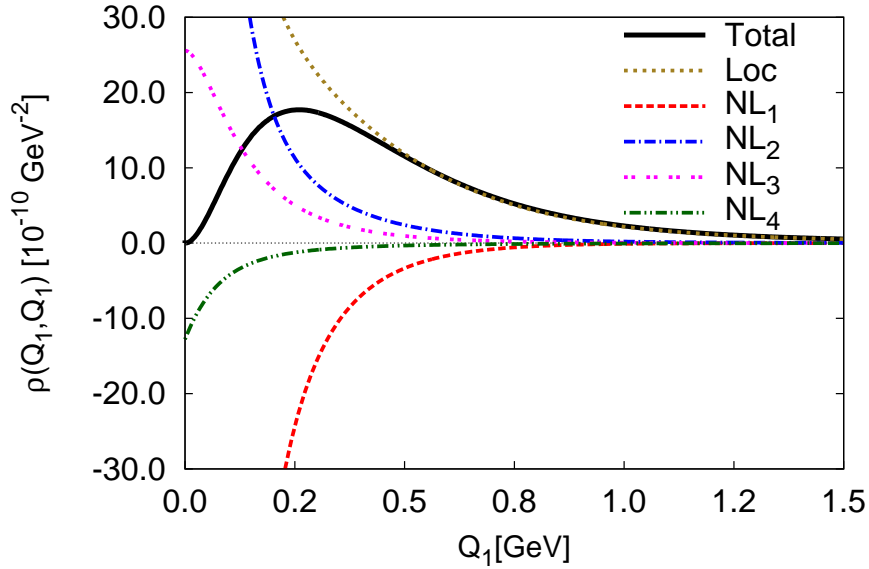


Рис. 3.18: «Плотность» $\rho(Q_1, Q_2)$ при $Q_2 = Q_1$. Разные кривые соответствуют вкладам топологически различных наборов диаграмм показанных на рисунке 3.16. Вклад типа кварковый бокс с локальными вершинами, рисунок 3.16 а, является точечной линией коричневого цвета (Loc); диаграмма бокс, рисунок 3.16 а, с нелокальными частями вершин - красной штриховой линией (NL₁); треугольник с одной нелокальной двухфотонной вершиной, рисунок 3.16 b, и петля с двумя двухфотонной вершиной, рисунок 3.16 с – синяя пунктирная линия (NL₂); петля с трехфотонной вершиной, Fig. 3.16 d, фиолетовой линией типа точка-точка (NL₃); петля с четырехфотонной вершиной, Fig. 3.16 e, показана зелёной штрих-пунктирной линией (NL₄); сумма всех вкладов - чёрная сплошная линия. В нуле все вклады являются конечными.

ний Дайсона-Швингера и Бете-Солпитера [203]. Частичные вклады в a_μ^{HLbL} (в 10^{-10}) при этом оцениваются следующими значениями

- вклад π^0 мезона – 5.01(0.37)
- сумма вкладов псевдоскалярных мезонов π^0 , η и η' – 5.85(0.87)
- сумма вкладов скалярных мезонов σ , $a_0(980)$ и $f_0(980)$ – 0.34(0.48)
- вклад кварковой петли – 11.0(0.9) .

Во всех случаях оценки для абсолютного значения и «модельной» ошибке приводятся для вычислений вклада в аномальный магнитный момент при варьировании динамической массы кварка m_d и фиксации остальных параметров как было указано выше. В результате полный вклад, полученный в ведущем порядке в разложении $1/N_c$ в нелокальной киральной кварковой

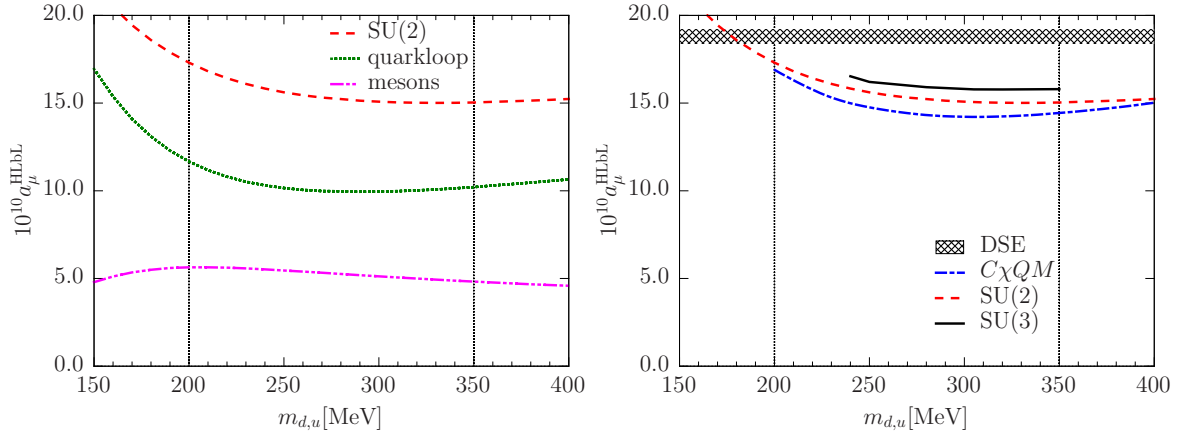


Рис. 3.19: (Слева) Результаты для a_μ^{HLbL} в $SU(2)$ нелокальной модели: красная пунктирная линия – полный результат, зеленая линия из точек – вклад кварковой петли и фиолетовая линия с штрих-пунктирная линия с двумя штрихами соответствует вклад $\pi + \sigma$ мезонов. Тонкая вертикальная линия указывает область для оценки полосы ошибки a_μ^{HLbL} . (Справа) Результаты для a_μ^{HLbL} : чёрная сплошная линия - результат вычислений в $SU(3)$ нелокальной модели, красная пунктирная линия соответствует результату $SU(2)$ модели, синяя пунктирная линия - это результат модели $C\chi QM$ из [195], заштрихованная область соответствует результату основанному на уравнениях Дайсона-Швингера и Бете-Солпитера к КХД [203].

модели равен

$$a_\mu^{\text{HLbL}} = 16.8(1.25) \cdot 10^{-10}. \quad (3.90)$$

No.	model parameters					a_μ^{LbL} in 10^{-10}					
	$m_{d,u}$ MeV	$m_{c,u}$ MeV	$m_{d,s}$ MeV	$m_{c,s}$ MeV	Λ MeV	total $SU(3)$	total $SU(2)$	$u + d$ quark loop	s quark loop	$\pi^0 + \sigma$	$\eta + \eta' +$ $a_0 + f_0$
1	150	0.33			6786.6		21.74	16.95		4.79	
6	200	2.27			2204.9		17.30	11.67		5.64	
7	210	2.79			1941.5		16.82	11.18		5.64	
8	220	3.34			1738.2		16.42	10.80		5.62	
9	230	3.90			1577.1		16.09	10.52		5.58	
10	240	4.47			1446.3		15.83	10.31		5.52	
11	240	4.47	339.5	133.7	1446.3	16.53	15.89	10.31	0.234	5.58	0.404
12	250	5.06			1338.2		15.61	10.16		5.46	
13	250	5.06	347.1	148.4	1338.2	16.21	15.64	10.16	0.229	5.49	0.337
14	260	5.65			1247.2		15.45	10.05		5.39	
15	270	6.25			1169.6		15.31	9.99		5.33	
16	280	6.86			1102.5		15.23	9.97		5.26	
17	280	6.86	387.4	193.4	1102.5	15.91	15.22	9.97	0.209	5.25	0.480
18	290	7.48			1043.9		15.14	9.94		5.19	
19	300	8.09			992.2		15.08	9.96		5.12	
20	305	8.41	413.7	231.9	968.6	15.78	15.05	9.97	0.193	5.08	0.543
21	310	8.72			946.2		15.04	9.98		5.06	
22	320	9.35			904.9		15.02	10.02		5.00	
23	320	9.35	428	255.7	904.9	15.78	15.02	10.03	0.182	4.99	0.577
24	330	9.99			867.7		15.01	10.08		4.94	
25	340	10.63			833.8		15.02	10.14		4.88	
26	350	11.29			802.8		15.03	10.21		4.82	
27	350	11.29	451.2	305.9	802.8	15.80	15.05	10.21	0.159	4.84	0.592
32	400	14.69			679.8		15.24	10.65		4.58	
G_I	304.5	8.50	427	223	1002.7	15.67	14.67	9.71	0.192	4.95	0.810
G_{II}	304.5	8.50	439	223	1002.7	15.93	14.67	9.71	0.190	4.95	1.070
G_{III}	304.5	8.50	422	223	1002.7	15.57	14.67	9.71	0.193	4.95	0.707
G_{IV}	287.5	7.50	408	199	1086.1	15.75	14.81	9.75	0.202	5.06	0.738
L_I	295	4.00	450	112	1013	15.58	14.84	9.61	0.241	5.23	0.503
L_{II}	295	4.00	505	110	1013	16.37	14.84	9.61	0.222	5.23	1.311
L_{III}	296	4.00	457	112	1013	15.61	14.80	9.57	0.238	5.22	0.578
L_{IV}	277.5	3.50	418	100	1110	15.76	15.08	9.74	0.251	5.33	0.435

Таблица 3.7: Вклад в АММ мюона a_μ^{LbL} для разных наборов параметров нелокальной модели. Параметры модели G_{I-IV} и L_{I-IV} взяты из [30]. Разница между a_μ^{LbL} для набора параметров модели с одинаковой массой u кварков в моделях $SU(2)$ и $SU(3)$ моделях обусловлена для смешиванием σ -мезона с f_0 -мезоном является в $SU(3)$ модели. Для экстраполяции результата $SU(3)$ модели к меньшим массе кварка, используется максимальная разница между полными расчётами в $SU(2)$ и $SU(3)$ моделях, которая составляет 0.77. Поэтому она добавляется к значению результата $SU(2)$ модели при 200 МэВ. В таблице исключены результаты для параметризаций 2 – 5 и 28 – 31, которые, как и параметризации 1 и 32 не используются для оценок вклада. Полная версия таблицы приводится в [222].

Указанное значение учитывает разброс результатов в зависимости от разумного изменения параметров модели и чувствительности к различному выбору форм нелокальности. Конечно же подобная оценка ошибки НЕ включает возможные дополнительные вклады, скажем от $1/N_c$ поправок, что в литературе называют «систематической ошибкой» моделей [195].

Сравнивая результаты вычислений с другими модельными расчётами, можно видеть, что результаты вычислений в нелокальной модели довольно близки к недавним результатам, полученным в [195, 203]¹⁶. Вычисления в нелокальной модели наиболее близки к расчётам в модели основанной на эффективной кварк-глюонной вершине и соответствующих уравнениях Дайсона-Швингера для пропагатора кварка и Бете-Солипитера для пропагатора мезона полученным в работе [203]. Разница между нелокальными ядрами взаимодействия этих подходов состоит том, что работа [203] основа на эффективном глюонном обмене, а нелокальная кварковая модель, рассмотренная в диссертации мотивируется моделью вакуума КХД как жидкости инстантонов. Соответственно модель рассмотренная в диссертации имеет в некотором смысле минимальную структуру взаимодействия в скалярном–псевдоскалярном каналах, в то время как обмен эффективным глюоном может генерировать большее число каналов эффективных взаимодействий. Тем не менее, предсказания нелокальной модели для вкладов в АММ мюона согласуются с [203] в пределах 10%.

«Киральная модель с составляющими кварками» (С χ QM), использованная в работе [195], соответствует локальному пределу нелокальной модели, который можно получить устремив нелокальный параметр Λ в бесконечность, и нелокальные форм-факторы при этом становятся постоянными: $f(k^2) \rightarrow 1$. В этом пределе нелокальная модель зависит от одного параметра M_q (динамическая+токовая масса), и полностью численно воспроизводится зависимость вклада кваркового бокса в a_μ^{HLbL} от M_q , показанная на рисунке 13 в работе [195]. Также, как видно из рисунка 3.19 зависимость от M_q общего вклада в a_μ^{HLbL} в [195] и нелокальной модели имеют одинаковое качественное поведение и численно согласуются на уровне 10%.

¹⁶Следует отметить, что в более ранних работах [181, 182] был получен вклад кварковой петли на порядок меньше. По-видимому, одной из причин малости вклада кварковой петли является то, что в этих работах использовались дополнительные форм-факторы модели векторной доминантности (VMD), которые подавляли связь кварков с фотоном.

3.3 Выводы к главе

В этой главе представлены результаты вычисления адронных вкладов (т.е. вкладов сильных взаимодействий) в АММ мюона: (1) лидирующего порядка по постоянной тонкой структуры от адронной поляризации вакуума и (2) следующего за лидирующим от процесса рассеяния света на свете в рамках нелокальной киральной кварковой модели.

Показано, что в нелокальной кварковой модели результаты для адронной поляризации вакуума для различных параметризаций достаточно сильно зависят от динамической массы кварка и согласие с оценками на основе экспериментальных данных достигается для параметризаций модели с достаточно малой массой кварка. Оценка $1/N_c$ поправок в пропагатор кварка показывает, что такие поправки приводят к уменьшению вклада в адронную поляризацию вакуума.

Процесс рассеяния света на свете в нелокальной модели (и в кварковых моделях вообще) состоит из контактного члена с динамическими кварками и диаграмм с мезонными обменами.

Новым элементом вычислений диаграмм с мезонными обменами является включение полной кинематической зависимости вершины мезон-фотон-фотон от виртуальностей фотонов и мезонов. Обнаружено, что для псевдоскалярных вкладов зависимость вершин от виртуальности пиона уменьшает результат примерно на 20-30% по сравнению со случаем, когда этой зависимостью пренебрегают. Наиболее значимый эффект возникает для вкладов мезонов η и η' в АММ мюона. В этом случае результаты уменьшаются примерно в 3 раза по сравнению с результатами, полученными в других эффективных моделях, где подобной кинематической зависимостью пренебрегали. Таким образом, основной вывод заключается в том, что в рамках нелокальной киральной кварковой модели общий вклад псевдоскалярных обменов в $a_\mu^{\text{PS,LbL}}$ примерно в 1.5 раза меньше, чем большинство предыдущих оценок

$$a_\mu^{\text{LbL,PS}} = (5.85 \pm 0.87) \cdot 10^{-10}. \quad (3.91)$$

Вклад скалярных мезонов положителен и частично компенсирует модельную зависимость псевдоскалярного вклада. Суммарное значение для скалярно-псевдоскалярного вклада оценивается как

$$a_\mu^{\text{LbL,PS+S}} = (6.25 \pm 0.83) \cdot 10^{-10}. \quad (3.92)$$

Вклад петли с динамическими кварками (или контактный вклад) оказывается больше вклада псевдоскалярных и скалярных мезонов

$$a_\mu^{\text{LbL,dyn}} = (11.0 \pm 0.9) \cdot 10^{-10}. \quad (3.93)$$

Следует отметить, что при больших передачах импульса динамические кварки переходят в токовые, вершины взаимодействия кварков с фотонами становятся локальными. Поэтому в нелокальной модели именно за счёт такого контактного вклада выполняются известные из КХД ограничения на тензор рассеяния фотона на фотоне.

Суммарная оценка полного адронного вклад в a_μ^{HLbL} в нелокальной модели в лидирующем порядке $1/N_c$ разложения

$$a_\mu^{\text{HLbL}} = (16.8 \pm 1.25) \cdot 10^{-10}. \quad (3.94)$$

Неопределённость результата, указанная в (3.94) связанная с варьированием параметров модели в физически мотивированном интервале для разных форм-факторов. Поэтому можно считать такую оценку консервативной.

Если добавить результат (3.90) ко всем другим известным вкладам стандартной модели в a_μ , (8) - (16) то разность между экспериментом (7) и теорией

$$a_\mu^{\text{BNL,corr}} - a_\mu^{\text{SM}} = 20.36(6.88) \times 10^{-10}, \quad (3.95)$$

что соответствует разнице между теорией и экспериментом на уровне 3σ .

Таким образом несмотря на то, что значение вклада от процесса рассеяния света на свете в нелокальной кварковой модели больше, что в оценках [179], суммарный вклад в рамках Стандартной Модели не может описать экспериментальное значение аномального магнитного момента мюона.

Заключение

В заключение хотелось бы коротко рассмотреть основные этапы диссертационной работы и отметить направления дальнейшего развития исследований.

Было дано одно из существенных расширений нелокальной киральной кварковой модели связано с учётом мезонных флуктуаций на основе схемы «строгого $1/N_c$ » разложения. Такое расширение оказалось крайне плодотворным: было показано отсутствие необходимости ввода каких-либо новых параметров, поскольку нелокальность взаимодействия приводит к тому, что петлевые интегралы оказываются сходящимися для любого количества петель. Оценки на относительный вклад поправок в свойства пиона также оказались обнадеживающими, поскольку вклад среднего поля оказался определяющим.

Было показано, что при конечной температуре модель следует дополнительно расширить введя взаимодействие с фоновым полем представленным в форме петли Полякова с соответствующим эффективным потенциалом. Роль такого фонового поля заключается в подавлении вклада свободных кварков в термодинамические наблюдаемые. В результате в такой модели $1/N_c$ поправки приводят к уменьшению кирального конденсата по сравнению с результатом среднего поля. Как правило, это также приводит к снижению температуры кирального фазового перехода. При низких температурах $T \leq 100$ МэВ результат для температурного поведения кваркового конденсата и давления практически совпадает с результатом киральной теории возмущений, тогда как в области высоких температур определяющий вклад даётся приближением среднего поля.

В киральном пределе схема «строгого $1/N_c$ » разложения, которая рассматривает поправки пертурбативно, перестаёт работать в окрестности кирального фазового перехода. Для реального случая ненулевых токовых кварковых масс аналогичная ситуация имеет место при больших значениях параметра потенциала петли Полякова T_0 (напомним, что $T_0 = 270$ МэВ в случае чистой глюодинамики).

Поэтому крайне интересным в будущем представляется учёт следующих порядков разложения по $1/N_c$: как в вакууме, где интерес представляет от-

носительная роль $1/N_c$ поправок высших порядков, так и при конечной температуре, где интерес представляет неустойчивая область $1/N_c$ разложения – будет ли она уменьшаться или увеличиваться ?

Также представляется важным рассмотрение свойств скалярных мезонов, особенно σ , в модели с систематическим учётом $1/N_c$ поправок. Дело в том, что в лидирующем порядке $1/N_c$ разложения скалярные частицы представляют собой стабильные состояния. В то же время расчёты показывают, что константа связи с σ -мезона с двумя пионами большая, что свидетельствует о том, что физический σ -мезон должен помимо кварковой компоненты включать по крайней мере ещё и двухпионную компоненту. Этого можно достичь рассматривая свойства σ -мезона в модели с $1/N_c$ поправками.

Отдельный вопрос состоит в исследовании поправок в аномальный магнитный момент в рамках нелокальной модели. В диссертации были рассмотрены вклады в аномальный магнитный момент мюона от адронной поляризации вакуума и процесса рассеяния света на свете в нелокальной модели в лидирующем порядке $1/N_c$ разложения. Основной вывод по результатам расчётов состоит в том, что несмотря на то, что в модели получается большее значение для вклада от процесса рассеяния света на свете, чем часто используемый результат «Glasgow consensus», Стандартная Модель не может описать экспериментальное значение аномального магнитного момента мюона. Также пока совершенно непонятно как согласовать между собой результаты расчётов в нелокальной кварковой модели (да и в подходе уравнений Дайсона–Швингера и Бете–Солпитера к КХД), где есть контактный член (кварковая петля) с результатами расчётов в дисперсионном подходе, где контактный член отсутствует. Возможно, что вычисление поправок в аномальный магнитный момент в рамках нелокальной модели с учётом $1/N_c$ поправок помимо численных оценок позволит каким-то образом связать оба подхода.

Результаты расчётов, приведённые в диссертационной работе, показывают, что локальная модель НИЛ также может применяться для описания процессов как в вакууме, так и в среде. В дополнении, результаты вычислений при конечной температуре допускают достаточно простую квазичастичную интерпретацию с использованием фазовых сдвигов. Подобную интерпретацию трудно провести в нелокальной модели.

Приложения

А Правила Фейнмана для нелокальных вершин взаимодействия

Правила Фейнмана для взаимодействия фотонов с кварками и бозонами Гольдстоуна были построены в работе [228]. Чтобы вывести эти правила, использовалось эффективное калибровочное инвариантное действие, аналогичное написанному выше 1.9. Свойства Швингеровской экспоненты имеют решающее значение для этого вывода, и используется формализм, не зависящий от конкретного пути. Подобные результаты были получены ранее для взаимодействия фотонов с протяжённым нуклоном [337]. Правила также были переполучены, например, в [338] для нелокальной модели кварков и [339] для нечастичной модели (unparticle), основываясь на нелокальном действии и используя аналогичные методы.

Приведём явный вид нелокальных вершин для кварковых токов вида (1.4), для этого введём следующие обозначения для конечно-разностных производных

$$f^{(1)}(a, b) = \frac{f(a+b) - f(b)}{(a+b)^2 - b^2}, \quad (96)$$

$$f^{(n+1)}(a, \{b_i\}, b_1, b_2) = \frac{f^{(n)}(a, \{b_i\}, b_1) - f^{(n)}(a, \{b_i\}, b_2)}{(a+b_1)^2 - (a+b_2)^2},$$

где $n = 1, 2, \dots$. Полная вершина взаимодействия фотонов с парой кварк-антикварк, показанная на рисунке 1.1a содержит локальные и нелокальные части

$$\Gamma_{k',k}^\mu = T^a(\gamma_\mu - (k+k')_\mu m^{(1)}(k, k')), \quad (97)$$

где $T^a \equiv Q$. Вершина взаимодействия кварка-антикварка с двумя фотонами, рисунок 1.1b, равна [228]

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{(2)}(q_1, q_2) = & 2g_{\mu\nu} m^{(1)}(k, k') + (k+k_1)_\mu (k_1+k')_\nu m^{(2)}(k, k_1, k') + \\ & + (k+k_2)_\nu (k_2+k')_\mu m^{(2)}(k, k_2, k'). \end{aligned} \quad (98)$$

Здесь и далее используются обозначения k - импульс входящего кварка, k' - импульс исходящего кварка, q_i - импульсы поступающих фотонов, а $k_1 = k + q_1$, $k_{ij\dots k} = k + q_i + q_j + \dots + q_k$. Вершина взаимодействия кварк-антикварка с тремя фотонами (Рис. 1.1 с) [339]

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu\rho}^{(3)}(q_1, q_2, q_3) = & - [2g_{\mu\nu}(k_{12} + k')_{\rho} m^{(2)}(k, k_{12}, k') + 2g_{\mu\nu}(k + k_3)_{\rho} m^{(2)}(k, k_3, k') \\ & + (k + k_1)_{\mu}(k_1 + k_{12})_{\nu}(k_{12} + k')_{\rho} m^{(3)}(k, k_1, k_{12}, k') \\ & + (k + k_1)_{\mu}(k_{13} + k')_{\nu}(k_1 + k_{13})_{\rho} m^{(3)}(k, k_1, k_{13}, k')] \\ & + [1 \Leftrightarrow 3, \mu \Leftrightarrow \rho] + [2 \Leftrightarrow 3, \nu \Leftrightarrow \rho]. \end{aligned} \quad (99)$$

Показанная на рисунке 1.1d вершина взаимодействия кварк-антикварка с четырьмя фотонами имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu\rho\tau}^{(4)}(q_1, q_2, q_3, q_4) = & \left[+ 4g_{\mu\nu}g_{\tau\rho} m^{(2)}(k, k_{12}, k') + 4g_{\mu\nu}g_{\tau\rho} m^{(2)}(k, k_{34}, k') \right. \\ & + 2g_{\mu\nu} \left((k + k_3)_{\rho}(k_3 + k_{34})_{\tau} m^{(3)}(k, k_3, k_{34}, k') \right. \\ & + (k + k_3)_{\rho}(k_{123} + k')_{\tau} m^{(3)}(k, k_3, k_{123}, k') \\ & + (k_{12} + k_{123})_{\rho}(k_{123} + k')_{\tau} m^{(3)}(k, k_{12}, k_{123}, k') \\ & + (k_{124} + k')_{\rho}(k_{12} + k_{124})_{\tau} m^{(3)}(k, k_{12}, k_{124}, k') \\ & + (k_{124} + k')_{\rho}(k + k_4)_{\tau} m^{(3)}(k, k_4, k_{124}, k') \\ & \left. + (k_4 + k_{34})_{\rho}(k + k_4)_{\tau} m^{(3)}(k, k_4, k_{34}, k') \right) \\ & + 2g_{\tau\rho} \left((k + k_1)_{\mu}(k_1 + k_{12})_{\nu} m^{(3)}(k, k_1, k_{12}, k') \right. \\ & + (k + k_2)_{\nu}(k_2 + k_{12})_{\mu} m^{(3)}(k, k_2, k_{12}, k') \\ & + (k_{34} + k_{234})_{\nu}(k_{234} + k_{1234})_{\mu} m^{(3)}(k, k_{34}, k_{234}, k') \\ & + (k_{34} + k_{134})_{\mu}(k_{134} + k_{1234})_{\nu} m^{(3)}(k, k_{34}, k_{134}, k') \\ & + (k + k_1)_{\mu}(k_{134} + k_{1234})_{\nu} m^{(3)}(k, k_1, k_{134}, k') \\ & \left. + (k + k_2)_{\nu}(k_{234} + k_{1234})_{\mu} m^{(3)}(k, k_2, k_{234}, k') \right) \\ & + (k + k_1)_{\mu}(k_1 + k_{12})_{\nu}(k_{12} + k_{123})_{\rho}(k_{123} + k')_{\tau} m^{(4)}(k, k_1, k_{12}, k_{123}, k') \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned}
& + (k + k_1)_\mu (k_1 + k_{12})_\nu (k_{124} + k_{1234})_\rho (k_{12} + k_{124})_\tau m^{(4)}(k, k_1, k_{12}, k_{124}, k') \\
& + (k_2 + k_{12})_\mu (k + k_2)_\nu (k_{12} + k_{123})_\rho (k_{123} + k_{1234})_\tau m^{(4)}(k, k_2, k_{12}, k_{123}, k') \\
& + (k_2 + k_{12})_\mu (k + k_2)_\nu (k_{124} + k_{1234})_\rho (k_{12} + k_{124})_\tau m^{(4)}(k, k_2, k_{12}, k_{124}, k') \\
& + (k_{23} + k_{123})_\mu (k + k_2)_\nu (k_2 + k_{23})_\rho (k_{123} + k_{1234})_\tau m^{(4)}(k, k_2, k_{23}, k_{123}, k') \\
& + (k_{24} + k_{124})_\mu (k + k_2)_\nu (k_{124} + k_{1234})_\rho (k_2 + k_{24})_\tau m^{(4)}(k, k_2, k_{24}, k_{124}, k') \\
& + (k_{234} + k_{1234})_\mu (k + k_2)_\nu (k_{24} + k_{234})_\rho (k_2 + k_{24})_\tau m^{(4)}(k, k_2, k_{24}, k_{234}, k') \\
& + (k_{234} + k_{1234})_\mu (k + k_2)_\nu (k_2 + k_{23})_\rho (k_{23} + k_{234})_\tau m^{(4)}(k, k_2, k_{23}, k_{234}, k') \Big] \\
& + [2 \leftrightarrow 4, \nu \leftrightarrow \tau] + [2 \leftrightarrow 3, \nu \leftrightarrow \rho].
\end{aligned}$$

Вершина взаимодействия кварк-антикварка с мезоном и фотоном, показанная на рисунке 1.1е имеет вид

$$\begin{aligned}
\Gamma_{k',k,q}^{M;\mu} = & -g_M(k) \left(f^{(1)}(k, k+q) f(k') (2k+q)_\mu T^a \Gamma_M^b + \right. \\
& \left. + f^{(1)}(k', k'-q) f(k) (2k'-q)_\mu \Gamma_M^b T^a \right). \quad (101)
\end{aligned}$$

Чтобы выразить вершину взаимодействия кварк-антикварка с мезоном и двумя фотонами введём следующие обозначения

$$\begin{aligned}
G_\mu^a(k, q) = & iT^a (2k+q)_\mu f^{(1)}(k, k+q), \\
G_{\mu\nu}^{ab}(k, q, q', k') = & -f(k') \left\{ T^a T^b \left[g_{\mu\nu} f^{(1)}(k, k+q+q') + \right. \right. \\
& \left. \left. + [2(k+q') + q]_\mu (2k+q')_\nu f^{(2)}(k, k+q', k+q+q') \right] + \right. \\
& \left. + [(q, a, \mu) \longleftrightarrow (q', b, \nu)] \right\}, \quad (102)
\end{aligned}$$

с использованием которых вершина принимает вид

$$\begin{aligned}
\Gamma_{k',k,q_1,q_2}^{M;\mu,\nu} = & g_M(k) \left\{ G_{\mu\nu}^{ab}(k, q_1, q_2, k') \Gamma_M^c + \Gamma_M^c G_{\mu\nu}^{ab}(k' - q_1 - q_2, q_1, q_2, k) \right. \\
& \left. + G_\mu^a(k, q_1) \Gamma_M^c G_\nu^b(k' - q_2, q_2) + G_\mu^a(k' - q_1, q_1) \Gamma_M^c G_\nu^b(k, q_2) \right\}. \quad (103)
\end{aligned}$$

Приведём также явный вид вершин взаимодействия с внешним с аксиально-векторным полем. Явный вид нелокальной добавки к вершине взаимодействия кварка и антикварка с аксиально-векторным полем

$$- T^a \gamma_5 (k + k')^\mu m_d \frac{(f(k) - f(k'))^2}{k^2 - (k')^2}, \quad (104)$$

Вершина взаимодействия кварка и антикварка с двумя аксиально-векторными полями

$$m_d \left\{ G_{\mu\nu}^{ab}(k, q_1, q_2, k') + G_{\mu\nu}^{ab}(k' - q_1 - q_2, q_1, q_2, k) - G_{\mu}^a(k, q_1) G_{\nu}^b(k' - q_2, q_2) - G_{\mu}^a(k' - q_1, q_1) G_{\nu}^b(k, q_2) \right\}. \quad (105)$$

Вершины взаимодействия кварк-антикварка с мезоном и один аксиально-векторным полем есть

$$-g_M(k) \left(f^{(1)}(k, k+q) f(k') (2k+q)^{\mu} T^a \gamma_5 \Gamma_M - \right. \quad (106)$$

$$\left. f^{(1)}(k', k'-q) f(k) (2k'-q)^{\mu} \Gamma_M T^a \gamma_5 \right). \quad (107)$$

А в случае двух аксиально-векторных полей подобная вершина имеет вид

$$g_M(k) \left\{ G_{\mu\nu}^{ab}(k, q_1, q_2, k') \Gamma_M + \Gamma_M G_{\mu\nu}^{ab}(k' - q_1 - q_2, q_1, q_2, k) - G_{\mu}^a(k, q_1) \gamma_5 \Gamma_M \gamma_5 G_{\nu}^b(k' - q_2, q_2) - G_{\mu}^a(k' - q_1, q_1) \gamma_5 \Gamma_M \gamma_5 G_{\nu}^b(k, q_2) \right\}. \quad (108)$$

Приведем также явный вид вершин с участием аксиально-векторного внешнего поля в случае кварковых токов вида (1.5). Нелокальной добавка к вершине взаимодействия кварка и антикварка с аксиально-векторным полем есть

$$-\gamma_5 \frac{T^a}{4} m_d \left[(3k+k')^{\mu} f^{(1)} \left(k, \frac{k+k'}{2} \right) - (k+3k')^{\mu} f^{(1)} \left(k', \frac{k+k'}{2} \right) \right], \quad (109)$$

а вершины взаимодействия кварк-антикварка с мезоном и один аксиально-векторным полем имеет вид

$$\frac{g_M(k)}{4} \left[\Gamma_M \gamma_5 T^a (2(k+k') + q)^{\mu} f^{(1)} \left(\frac{k+k'+q}{2}, \frac{k+k'}{2} \right) - \gamma_5 T^a \Gamma_M (2(k+k') - q)^{\mu} f^{(1)} \left(\frac{k+k'-q}{2}, \frac{k+k'}{2} \right) \right]. \quad (110)$$

Б Метод Кролла

Цель этого приложения - дать альтернативный метод получения вершин взаимодействия, основанный на работе [229], опубликованной в 1966 году. Ценность этого метода заключается в том, что для получения вершин необходима только форма пропагатора кварка (или вершины пиона) в нелокальной

модели. Работа Кролла основана на вопросе: если кто-то модифицирует пропагатор фермионов, то как необходимо изменить теорию чтобы сохранить калибровочную инвариантность. Этот вопрос исследовался ранее [340–342]. Другие важные результаты по калибровочно-инвариантному введению полей в нелокальных моделях были получены в [343], а также [310, 344].

Важным отправным элементом в построении является то, что все нелокальные модели формально имеют одинаковую общую структуру пропагатора фермионов

$$S_G^{-1}(q) = A(q)\hat{q} - B(q). \quad (111)$$

Чтобы получить минимальное взаимодействие, используется операторный формализм, основанный на идеях работы [229]. Сначала переменная импульса q_μ заменяется некоммутирующими операторными переменными z_μ и оператором сдвига $U_k = e^{-k_\mu \partial^\mu}$, который действует как

$$U_k^{-1} z_\mu U_k = z_\mu + k_\mu. \quad (112)$$

Далее определим формальный оператор d_μ^k действующий на функцию F от переменной z

$$n_\mu d_\mu^k F(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_k^{-1} \left[\frac{F(z + \varepsilon n U_k) - F(z)}{\varepsilon} \right], \quad (113)$$

где n_μ – единичный четыре-вектор. После выполнения всех операций d_μ^k необходимо вернуть операторную величину z к переменной импульса q .

Важные свойства, следующие из определения (113):

$$d_\mu^k F(z) G(z) = [d_\mu^k F(z)] G(z) + F(z + k) d_\mu^k G(z), \quad (114)$$

$$d_\mu^k F^{-1}(z) = -F^{-1}(z + k) [d_\mu^k F(z)] F^{-1}(z), \quad (115)$$

$$d_\mu^k F(z) G(z) \neq d_\mu^k G(z) F(z). \quad (116)$$

Последнее свойство обусловлено некоммутативностью задействованных переменных. Докажем первое соотношение. По определению

$$n_\mu d_\mu^k [F(z) G(z)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_k^{-1} \left[\frac{F(z + \varepsilon n U_k) G(z + \varepsilon n U_k) - F(z) G(z)}{i\varepsilon} \right].$$

Ясно, что для бесконечно малых сдвигов

$$F(z + \varepsilon n U_k) G(z + \varepsilon n U_k) = F(z + \varepsilon n U_k) G(z) + F(z) G(z + \varepsilon n U_k) - F(z) G(z).$$

Тогда числитель преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned}
 & U_k^{-1} [F(z + \varepsilon n U_k) G(z) + F(z) G(z + \varepsilon n U_k) - 2F(z) G(z)] \\
 &= U_k^{-1} [F(z + \varepsilon n U_k) G(z) - F(z) G(z) + F(z) G(z + \varepsilon n U_k) - F(z) G(z)] \\
 &= U_k^{-1} [F(z + \varepsilon n U_k) - F(z)] G(z) + U_k^{-1} F(z) [G(z + \varepsilon n U_k) - G(z)] \\
 &= \{U_k^{-1} [F(z + \varepsilon n U_k) - F(z)]\} G(z) + F(z + k) \{U_k^{-1} [G(z + \varepsilon n U_k) - G(z)]\}
 \end{aligned}$$

откуда следует уравнение (114). Второе свойство доказывается аналогично.

Минимальное электромагнитное взаимодействие фермиона с пропагатором (111) с n фотонами определяется рекурсивно

$$\begin{aligned}
 V_{\mu_1 \dots \mu_n}(z; k_1, \dots, k_n) &= d_{\mu_n}^{k_n} V_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}(z; k_1, \dots, k_{n-1}), \\
 V_\mu(z, k) &= d_\mu^k S_G^{-1}(z),
 \end{aligned} \tag{117}$$

где k_1, \dots, k_n - импульсы фотонов, S_G - пропагатор частиц. Вершины, определенные в (117), удовлетворяют тождествам Казес–Чанг–Мани(КЧМ) (обобщённые тождества Уорда–Такахаша) [341, 342]

$$k^{\mu_n} V_{\mu_1 \dots \mu_n}(q; k_1, \dots, k_n) = V_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}(q + k_n; k_1, \dots, k_{n-1}) - V_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}(q; k_1, \dots, k_{n-1}) \tag{118}$$

или

$$V_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}, \lambda}(q; k_1, \dots, k_{n-1}, 0) = \frac{\partial}{\partial q_\lambda} V_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}(q; k_1, \dots, k_{n-1}). \tag{119}$$

Этот вывод воспроизводит стандартные правила локального взаимодействия n фотонов с заряженной частицей (фермионом или скаляром). Отметим также, что очень похожая процедура была использована позднее в [345].

Рассмотрим действие оператора d_μ^k для простейших случаев степеней переменной z

$$\begin{aligned}
 d_\mu^k z_\nu &= U_k^{-1} \partial_\mu z_\nu U_k = g_{\mu\nu} \\
 d_\mu^k z^2 &= d_\mu^k z_\nu z^\nu = z_\mu + (z + k)_\mu = (2z + k)_\mu \\
 d_\mu^k z^4 &= (2z + k)_\mu [(z + k)^2 + z^2] = (2z + k)_\mu \frac{(z + k)^4 - z^4}{(z + k)^2 - z^2} \\
 d_\mu^k z^{2n} &= (2z + k)_\mu \frac{(z + k)^{2n} - z^{2n}}{(z + k)^2 - z^2}.
 \end{aligned} \tag{120}$$

Заметим, что в данном моменте начинается расхождение с оригинальной работой [229]. Там рассматривались переменные z как значение матрицы Дирака $2z_\mu = \hat{z} \gamma_\mu + \gamma_m u \hat{z}$. С этим рецептом оказывается, например, $d_\mu^k z^2 =$

$d_\mu^k z_\nu \gamma_\nu z^\rho \gamma_\rho = 2z_\mu + \hat{k} \gamma_m u$. Более того, в [229] (см. также [346]) в качестве примеров рассматривались только локальные пропагаторы.

Из (120) следует, что действие d_μ^k на функции, имеющие разложение $F(z) = \sum c_n z^{2n}$, сводится к

$$d_\mu^k F(z) = (2z + k)_\mu \frac{F(z + k) - F(z)}{(z + k)^2 - z^2}. \quad (121)$$

Важным примером этого соотношения является экспоненциальная функция

$$\begin{aligned} d_\mu^k e^{-\alpha z^2} &= (2z + k)_\mu \frac{e^{-\alpha(z+k)^2} - e^{-\alpha z^2}}{(z + k)^2 - z^2} = \\ &= (2z + k)_\mu (-\alpha) \int_0^1 dt \exp[-\alpha(t(z+k)^2 + \bar{t}z^2)], \end{aligned} \quad (122)$$

где $\bar{t} = 1 - t$.

Однофотонная вершина получается непосредственно из (121). Единственный тонкий момент заключается в том, что действие $d_\mu(k)$ на $\hat{z}A(z)$ и $A(z)\hat{z}$ даёт разные результаты. Чтобы получить физически правильный результат, необходимо рассмотреть симметризованное выражение:

$$\begin{aligned} d_\mu^k \frac{A(z)\hat{z} + \hat{z}A(z)}{2} &= \frac{(2z + k)_\mu}{2} \frac{A(z + k) - A(z)}{(z + k)^2 - z^2} \hat{z} + \frac{A(z + k)}{2} \gamma_\mu \\ &+ \frac{A(z)}{2} \gamma_\mu + \frac{\hat{z} + \hat{k}}{2} (2z + k)_\mu \frac{A(z + k) - A(z)}{(z + k)^2 - z^2} \\ &= \frac{A(z) + A(z + k)}{2} \gamma_\mu + \frac{2\hat{z} + \hat{k}}{2} (2z + k)_\mu \frac{A(z + k) - A(z)}{(z + k)^2 - z^2} \end{aligned} \quad (123)$$

Это соответствует кинетической части пропагатора. Скалярная часть генерирует вершину путем простой подстановки $F \rightarrow B$ в (121).

Конечный результат для однофотонной вершины в минимальном подходе приобретает вид

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^G(q, k) &= \frac{A(q) + A(q + k)}{2} \gamma_\mu + \frac{2\hat{q} + \hat{k}}{2} (2q + k)_\mu \frac{A(q + k) - A(q)}{(q + k)^2 - q^2} \\ &- (2q + k)_\mu \frac{B(q + k) - B(q)}{(q + k)^2 - q^2}. \end{aligned} \quad (124)$$

где k - импульс фотона, q - импульс входящего кварка. Этот результат согласуется с [228, 343] и уравнением (97), т.к. в нелокальной модели в лидирующем

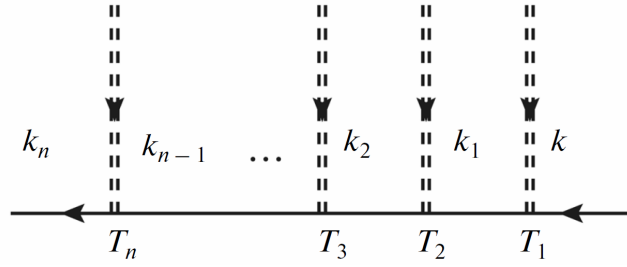


Рис. 20: На рисунке показано, что нужно упорядочить α_i -параметры и матрицы заряда T_i от правой границы (начальное состояние) к левой слева (конечное состояние) в соответствии с тем, как течёт импульс. Двойные пунктирные линии соответствуют для фотонам или мезонам, сплошная линия – кваркам.

порядке $A \equiv 1$ и $B \equiv m$. Легко проверить, что эта вершина удовлетворяет тождеству Уорда-Такахаша

$$\begin{aligned} k^\mu \Gamma_\mu^G(q, k) &= (\hat{k} + \hat{q})A(k + q) - M(k + q) - \hat{k}A(k) + M(k) = \\ &= S_G^{-1}(k + q) - S_G^{-1}(k). \end{aligned} \quad (125)$$

Чтобы получить 2-фотонную вершину таким методом нам нужно вычислить $d_\nu^{k'} d_\mu^k F(z)$. На этом этапе упорядочение факторов становится важным (см. рисунок 20). Это ещё одно предписание, которым следует дополнить метод в случае неабелевых моделей. По-видимому, наиболее удобный способ - использовать α -представление

$$F(z) = \int_0^\infty d\alpha F(\alpha) e^{-\alpha z^2}. \quad (126)$$

С использованием (122) получается правильный порядок

$$d_\mu^k F(z) = \int_0^1 dt \int_0^\infty d\alpha (-\alpha) F(\alpha) e^{-\alpha t(z+k)^2} (2z + k)_\mu e^{\bar{t}z^2}. \quad (127)$$

Это выражение, записанное в α -представлении, эквивалентно (121).

В результате действия на подынтегральное выражение (127) второго опе-

ратора $d_\nu^{k'}$ получается

$$\begin{aligned}
& \left[d_\nu^{k'} e^{-\alpha t(z+k)^2} \right] (2z+k)_\mu e^{-\alpha \bar{t} z^2} + e^{-\alpha t((z+k+k')^2)} \left[d_\nu^{k'} (2z+k)_\mu e^{-\alpha \bar{t} z^2} \right] \\
&= (2z+2k+k')_\nu (-\alpha t) \int_0^1 dt' e^{-\alpha t(t'(z+k+k'+\bar{t}')^2)} (2z+k)_\mu e^{-\alpha \bar{t} z^2} \\
&\quad + e^{-\alpha t(z+k+k')^2} \left\{ \left[d_\nu^{k'} (2z+k)_\mu \right] e^{-\alpha \bar{t} z^2} + (2z+2k'+k)_\mu d_\nu^{k'} e^{-\alpha \bar{t} z^2} \right\} \\
&= (2z+2k+k')_\nu (-\alpha t) \int_0^1 dt' e^{-\alpha t(t'(z+k+k')^2 + \bar{t}'(z+k)^2)} (2z+k)_\mu e^{-\alpha \bar{t} z^2} \\
&\quad + e^{-\alpha t(z+k+k')^2} (2z+2k'+k)_\mu (2z+k')_\nu \int_0^1 dt' (-\alpha \bar{t}) e^{-\alpha \bar{t} [t'(z+k')^2 + \bar{t}' z^2]} \\
&\quad + 2g_{\mu\nu} e^{-\alpha t((z+k+k')^2 - \alpha \bar{t} z^2)}. \tag{128}
\end{aligned}$$

Для первого члена после интегрирования этого выражения с весом (127) получается

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dt \int_0^\infty d\alpha (-\alpha) F(\alpha) (-\alpha t) \int_0^1 dt' e^{-\alpha t(t'(z+k+k')^2 + \bar{t}'(z+k)^2) - \alpha \bar{t} z^2} \\
&= \int_0^1 dt \int_0^\infty d\alpha (-\alpha) F(\alpha) \int_0^1 dt' \frac{d}{dt'} \frac{e^{-\alpha t(t'(z+k+k')^2 + \bar{t}'(z+k)^2) - \alpha \bar{t} z^2}}{(z+k+k')^2 - (z+k)^2} \\
&= \int_0^1 dt \int_0^\infty d\alpha (-\alpha) F(\alpha) \frac{e^{-\alpha t(z+k+k')^2 - \alpha \bar{t} z^2} - e^{-\alpha t(z+k)^2 - \alpha \bar{t} z^2}}{(z+k+k')^2 - (z+k)^2} \tag{129} \\
&= \frac{1}{(z+k+k')^2 - (z+k)^2} \left[\frac{F(z+k+k') - F(z)}{(z+k+k')^2 - z^2} - \frac{F(z+k) - F(z)}{(z+k)^2 - z^2} \right],
\end{aligned}$$

для второго члена

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dt \int_0^\infty d\alpha (-\alpha) F(\alpha) \int_0^1 d\bar{t}^{-\alpha t(z+k+k')^2} (-\alpha \bar{t}) e^{-\alpha \bar{t} [t'(z+k')^2 + \bar{t}' z^2]} \\
&= \int_0^1 dt \int_0^\infty d\alpha (-\alpha) F(\alpha) e^{-\alpha t(z+k+k')^2} \frac{e^{-\alpha \bar{t}(z+k')^2} - e^{-\alpha \bar{t} z^2}}{(z+k')^2 - z^2} \\
&= \frac{1}{(z+k')^2 - z^2} \left[\frac{F(z+k+k') - F(z+k')}{(z+k+k')^2 - (z+k')^2} - \frac{F(z+k+k') - F(z)}{(z+k+k')^2 - z^2} \right] \\
&= \frac{1}{(z+k+k')^2 - (z+k')^2} \left[\frac{F(z+k+k') - F(z)}{(z+k+k')^2 - z^2} - \frac{F(z+k') - F(z)}{(z+k')^2 - z^2} \right],
\end{aligned} \tag{130}$$

и для третьего члена

$$\int_0^1 dt \int_0^\infty d\alpha F(\alpha) e^{-\alpha t(z+k+k')^2 - \alpha \bar{t} z^2} = \frac{F(z+k+k') - F(z)}{(z+k+k')^2 - z^2}.$$

Используя обозначения для конечно-разностных производных (96) результат принимает вид

$$\begin{aligned}
d_\nu^{k'} d_\mu^k F(z) &= g_{\mu\nu} F^{(1)}(z+k+k', z) \\
&+ (2z+2k+k')_\nu (2z+k)_\mu F^{(2)}(z+k+k', z+k, z) + (\mu \leftrightarrow \nu, k \leftrightarrow k').
\end{aligned} \tag{131}$$

Второй член может быть преобразован тождественным образом

$$\frac{2\hat{z} + \hat{k}}{2} (2z+k)_\mu \frac{A(z+k) - A(z)}{(z+k)^2 - z^2} \rightarrow \frac{2\hat{z} + \hat{k}}{4} d_\mu^k A(z) + [d_\mu^k A(z)] \frac{2\hat{z} + \hat{k}}{4}.$$

а затем действуя $d_\nu(k')$ на (124)

$$\begin{aligned}
d_\nu^{k'} \left[(2\hat{z} + \hat{k}) d_\mu^k A(z) \right] &= 2\gamma_\nu [d_\mu^k A(z)] + (2\hat{z} + 2\hat{k}' + \hat{k}) d_\nu^{k'} d_\mu^k A(z), \\
d_\nu^{k'} [d_\mu^k A(z)] (2\hat{z} + \hat{k}) &= \left[d_\nu^{k'} d_\mu^k A(z) \right] (2\hat{z} + \hat{k}) + 2d_\mu^k A(z+k') \gamma_\nu.
\end{aligned} \tag{132}$$

В результате получаем 2-фотонную вершину

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^G(q, k, k') &= \frac{\gamma_\mu}{2} (2q+k')_\nu A^{(1)}(q+k', q) + \\
&+ \frac{\gamma_\mu}{2} (2q+2k+k')_\nu A^{(1)}(q+k+k', q+k) + \\
&+ \frac{2\hat{q} + \hat{k} + \hat{k}'}{2} g_{\mu\nu} A^{(1)}(q+k+k', q) + (2q+2k+k')_\nu (2q+k)_\mu \\
&\times A^{(2)}(q+k+k', q+k, q) - g_{\mu\nu} B^{(1)}(q+k+k', q) \\
&- (2q+2k+k')_\nu (2q+k)_\mu B^{(2)}(q+k+k', q+k, q) + (\mu \leftrightarrow \nu, k \leftrightarrow k').
\end{aligned} \tag{133}$$

Которая удовлетворяет тождествам КЧМ

$$k'^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^G(q, k, k') = G_{\mu}(q + k') - G_{\mu}(q, k). \quad (134)$$

Если положить в (133) $A \equiv 1$, $B \equiv m$, то вершина согласуется с версией, полученной в [228] и (98).

Обозначим импульс входящего кварка k , импульс(ы) пион(ов) равны p , а импульс(ы) фотона(ов) q . Вершина кварк-пиона в модели [228] равна

$$F_{\pi}^T(k, k + p) = \frac{g_{\pi q}}{m_d} i\gamma_5 \tau^a (m(k) + m(k + p)), \quad (135)$$

В методе Кролла, вершина кварк–антикварк–пион–фотон воспроизводится тривиальным образом [228]

$$\begin{aligned} d_{\mu}^q(m(k) + m(k + p)) &= \tau^a Q (2k + q)_{\mu} m^{(1)}(k + q, k) + \\ &+ Q \tau^a (2(k + p) + q)_{\mu} m^{(1)}(k + p + q, k + p). \end{aligned} \quad (136)$$

Для модели инстантонной жидкости кварк-пионная вершина есть

$$F_{\pi}^I(k, k + p) = g_{\pi}(q) i\gamma_5 \tau^a f(k + p) f(k). \quad (137)$$

При этом важен порядок f . Далее, используя метод Кролла можно получить

$$\begin{aligned} d_{\mu}^q(f(k + p) f(k)) &= (d_{\mu}^q f(k + p)) f(k) + f(k + p + q) (d_{\mu}^q f(k)) \\ &= \tau^a Q (2k + q)_{\mu} f(k + p + q) f^{(1)}(k; q) + Q \tau^a (2(k + p) + q)_{\mu} f(k) f^{(1)}(k + p; q). \end{aligned}$$

Это выражение соответствует предыдущим результатам [202] и (101). После рассмотрения этих примеров можно рассмотреть общий вид кварк-пионной вершины

$$F_{\pi}^g(k, k + p) = g_{\pi}(q) i\gamma_5 \tau^a G(k^2, p^2, (k + p)^2). \quad (138)$$

Сначала формально запишем функцию G как трехмерный интеграл по α параметрам

$$G(k^2, p^2, (k + p)^2) = \int_0^{\infty} d\alpha d\beta d\gamma g(\alpha, \beta, \gamma) e^{-\gamma(k+p)^2} e^{-\beta p^2} e^{-\alpha k^2}. \quad (139)$$

Как и в предыдущем примере, здесь оказывается важным порядок показателей. Теперь применим оператор d_{μ}^q к показателям и используем (122) в α

представлении

$$\begin{aligned}
d_\mu^q e^{-\gamma(k+p)^2} e^{-\beta p^2} e^{-\alpha k^2} &= Q\lambda^a \left[d_\mu^q e^{-\gamma(k+p)^2} \right] e^{-\beta p^2} e^{-\alpha k^2} \\
&+ \frac{1}{2} (Q\lambda^a - \lambda^a Q) e^{-\gamma(k+p+q)^2} \left[d_\mu^q e^{-\beta p^2} \right] e^{-\alpha k^2} + \lambda^a Q e^{-\gamma(k+p+q)^2} e^{-\beta(p+q)^2} \left[d_\mu^q e^{-\alpha k^2} \right] \\
&= Q\lambda^a \left[(2(k+p) + q)_\mu \int_0^1 dt (-\gamma) e^{-\gamma[t(k+p+q)^2 + \bar{t}(k+p)^2]} \right] e^{-\beta p^2} e^{-\alpha k^2} \\
&+ \frac{1}{2} (Q\lambda^a - \lambda^a Q) e^{-\gamma(k+p+q)^2} \left[(2p + q)_\mu \int_0^1 dt (-\beta) e^{-\beta[t(p+q)^2 + \bar{t}p^2]} \right] e^{-\alpha k^2} \\
&+ \lambda^a Q e^{-\gamma(k+p+q)^2} e^{-\beta(p+q)^2} \left[(2k + q)_\mu \int_0^1 dt (-\alpha) e^{-\alpha[t(k+q)^2 + \bar{t}k^2]} \right].
\end{aligned}$$

Вставим это выражение обратно в (139) с использованием (122) в качестве конечно-разностной производной и вернёмся к импульсному представлению. Тогда вершина будет иметь вид

$$\begin{aligned}
d_\mu^q G(k^2, p^2, (k+p)^2) &= \\
&+ Q\lambda^a (2(k+p) + q)_\mu \frac{G(k^2, p^2, (k+p+q)^2) - G(k^2, p^2, (k+p)^2)}{(k+p+q)^2 - (k+p)^2} \\
&+ \frac{1}{2} (Q\lambda^a - \lambda^a Q) (2p + q)_\mu \frac{G(k^2, (p+q)^2, (k+p)^2) - G(k^2, p^2, (k+p)^2)}{(p+q)^2 - p^2} \\
&+ \lambda^a Q (2k + q)_\mu \frac{G((k+q)^2, p^2, (k+p)^2) - G(k^2, p^2, (k+p)^2)}{(k+q)^2 - k^2}
\end{aligned}$$

Этот результат согласуется с [337], где нуклоны рассматривались как фермионами и изучалось фоторождения пиона. Заметим, что первое слагаемое соответствует обмену каналом u , а второе и третье - обменам канала t и s соответственно.

Кварк-пион-пионная вершина в модели Тернинга [228] равна

$$\begin{aligned}
F_\pi^T(k, k+p) &= - \left(\frac{g_\pi(q)}{m_d} \right)^2 \frac{\tau^{\{ab\}}}{2} (m(k) + m(k+p_1) \\
&+ m(k+p_2) + m(k+p_1+p_2)). \tag{140}
\end{aligned}$$

Действуя оператором Кролла, результат уравнения (33) из [228] воспроизводится с точностью до изоспиновых матриц.

В Четырехкварковые константы связи, поляризационные операторы и углы смешивания

При наличии взаимодействия 'т Хоофта уравнение (1.17) становится матричным $G_1 \rightarrow \mathbf{G}_{ch}$, $\Pi_a \rightarrow \mathbf{\Pi}_{ch}$. Элементы матриц \mathbf{G}_{ch} для различных каналов принимают вид

$$\begin{aligned} G_{00} &= G \pm \frac{H}{3}(2S_u + S_s), & G_{88} &= G \mp \frac{H}{6}(4S_u - S_s), \\ G_{08} &= G_{80} = \mp \frac{\sqrt{2}}{6}H(S_u - S_s), & G_{33} &= G \mp \frac{H}{2}S_s, \end{aligned} \quad (141)$$

где верхний знак соответствует скалярному каналу, а нижний знак – псевдоскалярному. Для пиона G_π равно G_{33} псевдоскалярного взаимодействия, а для a_0 мезона, G_{a_0} равен G_{33} скалярного взаимодействия. Матрицы $\mathbf{\Pi}_{ch}(P^2)$ для скалярных и псевдоскалярных мезонов диагональны в флейворном базисе, а в базисе синглет-триплет-октет они имеют вид

$$\begin{aligned} \Pi_{00}(P^2) &= \frac{1}{3}(2\Pi_{uu}(P^2) + \Pi_{ss}(P^2)), \\ \Pi_{88}(P^2) &= \frac{1}{3}(\Pi_{uu}(P^2) + 2\Pi_{ss}(P^2)), \\ \Pi_{08}(P^2) &= \Pi_{80}(P^2) = \frac{\sqrt{2}}{3}(\Pi_{uu}(P^2) - \Pi_{ss}(P^2)), \\ \Pi_{33}(P^2) &= \Pi_{uu}(P^2), \end{aligned} \quad (142)$$

разница между скалярным и псевдоскалярным каналами заключается в поляризационных операторах

$$\Pi_{ij}(P^2) = 8N_c \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{f^2(K_+^2)f^2(K_-^2)}{D_i(K_+^2)D_j(K_-^2)} [(K_+ \cdot K_-) \mp m_i(K_+^2)m_j(K_-^2)], \quad (143)$$

где $K_\pm = K \pm P/2$. Аналогично уравнению (141), верхний знак соответствует скалярному каналу, а нижний знак – псевдоскалярному, Π_{a_0} равен Π_{33} для скалярного канала и Π_π равен Π_{33} в псевдоскалярном канале. Неперенормированные мезонные пропагаторы скалярных мезонов имеют вид

$$\begin{aligned} D_{a_0}^{-1}(P^2) &= -G_{a_0}^{-1} + \Pi_{a_0}(P^2), & D_{\sigma, f_0}^{-1}(P^2) &= \frac{1}{2} \left[(A + C) \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} \right], \\ A &= -G_{88}/\det(\mathbf{G}_{ch}) + \Pi_{00}(P^2), & B &= +G_{08}/\det(\mathbf{G}_{ch}) + \Pi_{08}(P^2), \\ C &= -G_{00}/\det(\mathbf{G}_{ch}) + \Pi_{88}(P^2), & \det(\mathbf{G}_{ch}) &= G_{00}G_{88} - G_{08}^2. \end{aligned} \quad (144)$$

Угол смешивания зависит от виртуальности мезона

$$\theta_S(P^2) = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{2B}{A - C} \right] - \frac{\pi}{2} \Theta(A - C). \quad (145)$$

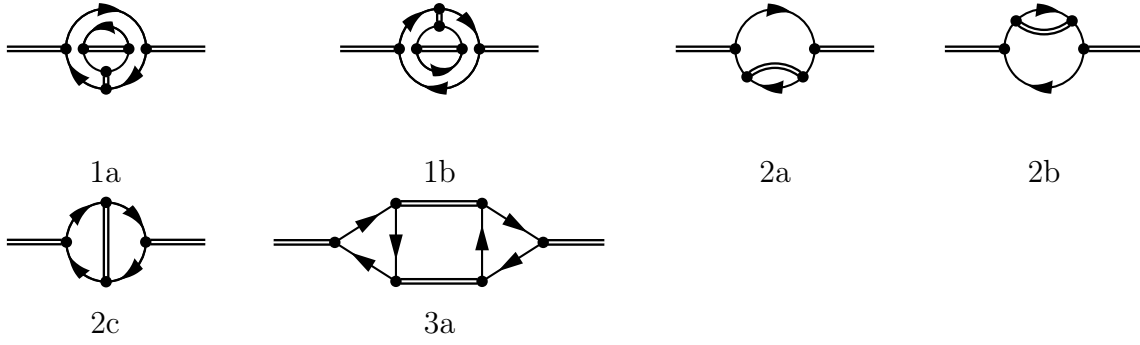


Рис. 21: Диаграммы для вычисления $1/N_c$ поправок к пропагатору мезона.

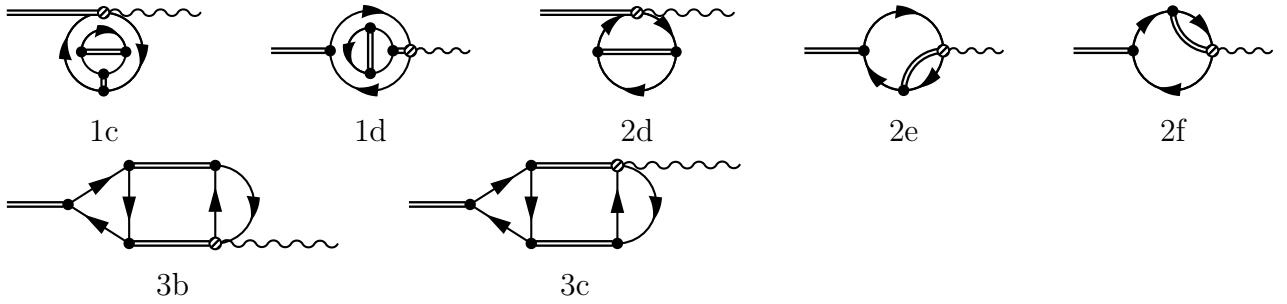


Рис. 22: Дополнительные нелокальные диаграммы для расчета $1/N_c$ поправок к слабому распаду пиона.

Выражения для неперенормированных пропагаторов псевдоскалярных мезонов аналогичны выражениям скалярных мезонов, (144), (145), с соответствующей заменой $a_0 \rightarrow \pi$, $\sigma \rightarrow \eta$, $f_0 \rightarrow \eta'$ и $\theta_S \rightarrow \theta_P$.

Г $1/N_c$ поправки к пропагатору пиона и константа слабого распада

$1/N_c$ поправки к мезонному пропагатору состоят из диаграмм, показанных на рисунке 21. Для удобства разделим их на три типа. Для пиона соответствующие выражения принимают вид

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\pi,1a+2a}^{N_c}(p^2) &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma_{k_+,k_-}^\pi S_{k_-} \Sigma_{k_-}^{N_c} S_{k_-} \Gamma_{k_-,k_+}^\pi S_{k_+} \right] \\
 \Pi_{\pi,1b+2b}^{N_c}(p^2) &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma_{k_+,k_-}^\pi S_{k_-} \Gamma_{k_-,k_+}^\pi S_{k_+} \Sigma_{k_+}^{N_c} S_{k_+} \right] \\
 \Pi_{\pi,2c}^{N_c}(p^2) &= \sum_{M=\sigma,\pi} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma_{k_+,k_-}^\pi S_{k_-} \Gamma_{k_-,l_-}^M S_{l_-} \Gamma_{l_-,l_+}^\pi S_{l_+} \Gamma_{l_+,k_+}^M S_{k_+} \right] D_{k-l}^M \\
 \Pi_{\pi,3a}^{N_c}(p^2) &= 4 \times i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma_{k_+,k_-}^{\pi\pi\sigma} D_{k_-}^\pi \Gamma_{k_-,k_+}^{\pi\sigma\pi} D_{k_+}^\sigma,
 \end{aligned} \tag{146}$$

и фактор 4 в $\Pi_{\pi,3a}^{N_c}(p^2)$ является фактором вырождения.

Расчёт константы слабого распада пиона более сложен. Часть диаграмм может быть получена из выражения для пропагатора пиона путём умножения на фактор $-ig_{\pi}^{\text{MF}}$ и замены исходящей вершины пиона вершиной с внешним током. Кроме этого, существуют дополнительные нелокальные диаграммы, показанные на рисунке 22.

Дополнительные $1/N_c$ поправки типа 1 есть

$$\begin{aligned} f_{\pi,1c}^{N_c}(p^2) &= g_{\pi}^{\text{MF}} C \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f^2(k) \text{Tr} \left[\Gamma_{k,k}^{5\pi,L} S_k \Gamma_{k,k}^{\sigma} S_k \right] \\ f_{\pi,1d}^{N_c}(p^2) &= g_{\pi}^{\text{MF}} C \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma_{k_+,k_-}^{\pi} S_{k_-} \Gamma_{k_-,k_+}^{5\sigma,L} S_{k_+} \right], \end{aligned}$$

Поправки $1/N_c$ типа 2 принимают вид

$$\begin{aligned} f_{\pi,2d}^{N_c}(p^2) &= g_{\pi}^{\text{MF}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma_{k,k}^{5\pi,L} S_k \Gamma_{k,l}^M S_l \Gamma_{l,k}^M S_k \right] D_{k-l}^M \\ f_{\pi,2e}^{N_c}(p^2) &= g_{\pi}^{\text{MF}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma_{k_+,k_-}^{\pi} S_{k_-} \Gamma_{k_-,l_-}^M S_{l_-} \Gamma_{l_-,k_+}^{5M,L} S_{k_+} \right] D_{k-l}^M \\ f_{\pi,2f}^{N_c}(p^2) &= g_{\pi}^{\text{MF}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma_{k_+,k_-}^{\pi} S_{k_-} \Gamma_{k_-,l_+}^{5M,L} S_{l_+} \Gamma_{l_+,k_+}^M S_{k_+} \right] D_{k-l}^M \end{aligned}$$

где проводится суммирование по $M = \pi, \sigma$.

Дополнительные поправки типа 3

$$f_{\pi,3b+3c}^{N_c}(p^2) = 2 \times g_{\pi}^{\text{MF}} i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma_{k_+,k_-}^{\pi\pi\sigma} D_{k_-}^{\pi} \Gamma_{k_-,k_+}^{5\sigma\pi,L} D_{k_+}^{\sigma},$$

где эффективная вершина $\Gamma_{q_1,q_2}^{5\sigma\pi,L}$ равна

$$\Gamma_{q_1,q_2}^{5\beta\gamma,L} = - \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma_{l+q_1,l+q_2}^{5\gamma,L} S_{l+q_2} \Gamma_{l+q_2,l}^{\beta} S_l + \Gamma_{l+q_1,l+q_2}^{5\beta,L} S_l \Gamma_{l,l+q_1}^{\gamma} S_{l+q_1} \right].$$

Д Амплитуда перехода мезона в два фотона

Амплитуда перехода мезона в два фотона представляет собой сумму диаграмм, показанных на рисунке 3.7, где все частицы являются виртуальными.

Для скалярного мезона он принимает вид

$$\begin{aligned}
 A(\gamma_1^* \gamma_2^* \rightarrow M^*) &= e^2 \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu \Delta^{\mu\nu}(p, q_1, q_2), \\
 \Delta^{\mu\nu}(p, q_1, q_2) &= -iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\
 &\times \text{Tr} \left(2\Gamma_{k_2, k_1}^M S(k_1) \Gamma_{k_1, k_3}^\mu S(k_3) \Gamma_{k_3, k_2}^\nu S(k_2) \right. \\
 &+ \Gamma_{k_2, k_3, q_1}^{M; \mu} S(k_3) \Gamma_{k_3, k_2}^\nu S(k_2) + \Gamma_{k_3, k_1, q_2}^{M; \nu} S(k_1) \Gamma_{k_1, k_3}^\mu S(k_3) \\
 &\left. + \Gamma_{k_2, k_1}^M S(k_1) \Gamma_{k_1, k_2, q_1, q_2}^{\mu, \nu} + \Gamma_{k_3, k_3, q_1, q_2}^{M; \mu, \nu} S(k_3) \right),
 \end{aligned} \tag{147}$$

где символами являются импульсы фотонов $q_{1,2}$, векторы поляризации фотонов $\epsilon_{1,2}$, импульс мезона $p = q_1 + q_2$ и кварковые импульсы $k_{1,2,3}$ ($k_1 = k + q_1$, $k_2 = k - q_2$, $k_3 = k$). Первый член в скобках соответствует диаграммам кварковых треугольников¹⁷. Для различных скалярных мезонных состояний имеются следующие комбинации не странных и странных компонент

$$\begin{aligned}
 \Delta_{a_0}^{\mu\nu}(p, q_1, q_2) &= g_{a_0}(p^2) \delta_u^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2), \\
 \Delta_\sigma^{\mu\nu}(p, q_1, q_2) &= \frac{g_\sigma(p^2)}{3\sqrt{3}} \times \\
 &\times \left[(5\delta_u^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2) - 2\delta_s^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2)) \cos \theta_S(p^2) - \right. \\
 &\left. - \sqrt{2} (5\delta_u^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2) + \delta_s^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2)) \sin \theta_S(p^2) \right], \\
 \Delta_{f_0}^{\mu\nu}(p, q_1, q_2) &= \frac{g_{f_0}(p^2)}{3\sqrt{3}} \times \\
 &\times \left[(5\delta_u^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2) - 2\delta_s^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2)) \sin \theta_S(p^2) + \right. \\
 &\left. + \sqrt{2} (5\delta_u^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2) + \delta_s^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2)) \cos \theta_S(p^2) \right].
 \end{aligned} \tag{148}$$

Из уравнений (3.73), (3.75) легко увидеть, что смешивание для форм-факторов A_S, B_S, B'_S из компонентов A_u, B_u, B'_u и A_s, B_s, B'_s аналогично. Для вычислений необходимо выполнить проекцию A_i и B_i ($i = u, s$) на петли из циклов

¹⁷В случае псевдоскалярных мезонов диаграммы на рисунке 3.7d-g дают нулевой вклад из соображений киральности.

нестранных и странных кварков

$$\begin{aligned}
 A_i(p^2; q_1^2, q_2^2) &= \frac{\delta_i^{\mu\nu}(p^2, q_1^2, q_2^2)}{2(q_1 \cdot q_2)} \left[g^{\mu\nu} - \frac{(q_1 \cdot q_2) q_1^\nu q_2^\mu}{(q_1 \cdot q_2)^2 - q_1^2 q_2^2} \right], \\
 B_i(p^2; q_1^2, q_2^2) &= -\frac{\delta_i^{\mu\nu}(p^2, q_1^2, q_2^2)}{2(q_1 \cdot q_2) ((q_1 \cdot q_2)^2 - q_1^2 q_2^2)} \times \\
 &\quad \times \left[g^{\mu\nu} - 3 \frac{(q_1 \cdot q_2) q_1^\nu q_2^\mu}{(q_1 \cdot q_2)^2 - q_1^2 q_2^2} \right], \tag{149}
 \end{aligned}$$

где

$$\delta_i^{\mu\nu}(p^2, q_1^2, q_2^2) = -2i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[J_{bc}^{\mu\nu} + J_{de}^{\mu\nu} + J_f^{\mu\nu} + J_g^{\mu\nu} \right],$$

и различные члены в скобках, $J^{\mu\nu}$, соответствуют диаграммам, показанным на рис. 3.7, где нижние индексы обозначают соответствующие диаграммы на рисунке. Ниже для простоты импульс обозначается как нижний индекс и индекс флейвора кварка i опускается

$$\begin{aligned}
 f_n &\equiv f(k_n^2), \quad m_n \equiv m_i(k_n^2), \quad D_n \equiv D_i(k_n^2), \quad f_{nm}^{(1)} \equiv f^{(1)}(k_n, k_m), \\
 m_{ln}^{(1)} &\equiv m^{(1)}(k_n, k_m), \quad f_{nml}^{(2)} \equiv f^{(2)}(k_n, k_m, k_l).
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 J_{bc}^{\mu\nu} &= \frac{f_1 f_2}{D_1 D_2 D_3} \left[V_1^{\mu\nu} + m_{23}^{(1)} m_{13}^{(1)} (k_2 + k_3)^\nu (k_1 + k_3)^\mu V_4 - \right. \\
 &\quad \left. - m_{23}^{(1)} (k_2 + k_3)^\nu V_2^\mu - m_{13}^{(1)} (k_1 + k_3)^\mu V_3^\nu \right], \tag{150}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 V_1^{\mu\nu} &= m_1 [k_2^\nu k_3^\mu + k_2^\mu k_3^\nu] + m_3 [k_2^\nu k_1^\mu - k_2^\mu k_1^\nu] + \\
 &\quad + m_2 [k_3^\nu k_1^\mu + k_3^\mu k_1^\nu] + g^{\mu\nu} [m_1 m_3 m_2 - m_1 (k_2 k_3) + \\
 &\quad + m_3 (k_2 k_1) - m_2 (k_3 k_1)], \\
 V_2^\mu &= k_1^\mu [m_2 m_3 + (k_2 k_3)] + k_2^\mu [m_1 m_3 - (k_1 k_3)] + \\
 &\quad + k_3^\mu [m_1 m_2 + (k_1 k_2)], \\
 V_3^\nu &= k_1^\nu [m_2 m_3 - (k_2 k_3)] + k_2^\nu [m_1 m_3 + (k_1 k_3)] + \\
 &\quad + k_3^\nu [m_1 m_2 + (k_1 k_2)], \\
 V_4 &= m_1 m_2 m_3 + m_1 (k_2 k_3) + m_3 (k_1 k_2) + m_2 (k_1 k_3),
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
J_{\text{de}}^{\mu\nu} &= \frac{f_2}{D_2 D_3} f_{13}^{(1)} (k_1 + k_3)^\mu \times \\
&\times \left(m_2 k_3^\nu + m_3 k_2^\nu - m_{32}^{(1)} (k_2 + k_3)^\nu ((k_3 k_2) + m_3 m_2) \right) + \\
&+ \frac{f_1}{D_1 D_3} f_{23}^{(1)} (k_2 + k_3)^\nu \times \\
&\times \left(m_3 k_1^\mu + m_1 k_3^\mu - m_{13}^{(1)} (k_1 + k_3)^\mu ((k_3 k_1) + m_3 m_1) \right), \\
J_{\text{f}}^{\mu\nu} &= \frac{f_1 f_2}{D_1 D_2} ((k_1 k_2) + m_1 m_2) m_d \left[(f_1 + f_2) g^{\mu\nu} f_{12}^{(1)} + \right. \\
&+ (k_1 + k_3)^\mu (k_2 + k_3)^\nu \left. \left((f_1 + f_2) (f_{231}^{(2)} + f_{132}^{(2)}) - f_{13}^{(1)} f_{23}^{(1)} \right) \right], \\
J_{\text{g}}^{\mu\nu} &= -\frac{f_2 m_2}{D_2} [g^{\mu\nu} f_{12}^{(1)} + (k_1 + k_3)^\mu (k_2 + k_3)^\nu f_{231}^{(2)}] - \\
&- \frac{f_1 m_1}{D_1} [g^{\mu\nu} f_{12}^{(1)} + (k_2 + k_3)^\nu (k_1 + k_3)^\mu f_{132}^{(2)}] + \\
&+ \frac{f_3 m_3}{D_3} f_{13}^{(1)} f_{23}^{(1)} (2k_1 + k_3)^\mu (2k_2 + k_3)^\nu.
\end{aligned} \tag{151}$$

Аналитические выражения в случае специальной кинематики ¹⁸ для форм-факторов $A_i(p^2; q_1^2, q_2^2)$ и $B'_i(p^2; q_1^2, q_2^2)$, когда один фотон реальный, $q_1^2 = 0$, а виртуальность второго фотона равна виртуальности мезона $p_2^2 = q_2^2$, может быть получено путём разложения выражений кварковой петли, уравнений (149), (150), (151), по q_1^2 . Полученные выражения содержат производные от нелокальной функции $f(k^2)$ до третьего порядка. Эти выражения довольно громоздки и здесь не представлены. В качестве альтернативы можно вычислить форм-факторы для малых, но ненулевых q_1^2 , а затем получить предел численно.

Е Локальный предел амплитуды $\gamma^* \gamma^* \rightarrow S^*$

В локальной модели с составляющими массами кварков m_i треугольные кварковые диаграммы, изображённые на рисунке 3.7 b-c, сводятся к следующему выражению

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{loc};i}^{\mu\nu}(p^2, q_1^2, q_2^2) &= m_i g^{\mu\nu} I_{\text{g}}(m_i^2) + A_{\text{loc};i}(p^2; q_1^2, q_2^2) \times \\
&\times P_A^{\mu\nu}(q_1, q_2) + B_{\text{loc};i}(p^2; q_1^2, q_2^2) P_B^{\mu\nu}(q_1, q_2),
\end{aligned} \tag{152}$$

¹⁸ $B_i(p^2; q_1^2, q_2^2)$ в этой кинематике расходится.

где $I_g(m_i^2)$ - калибровочный неинвариантный член (постоянная)

$$I_g(m_i^2) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \frac{m_i^2 - X}{m_i^2 - X} = \frac{1}{4\pi^2}, \quad (153)$$

$$X = x_1(1 - x_1 - x_2)q_2^2 + x_2(1 - x_1 - x_2)q_1^2 + x_1x_2p^2,$$

$$A_{\text{loc};i}(p^2; q_1^2, q_2^2) = \frac{m_i}{4(q_1q_2)\pi^2} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \times \\ \times \frac{4X - p^2 + q_2^2(1 - 2x_1) + q_1^2(1 - 2x_2)}{m_i^2 - X}, \quad (154)$$

$$B_{\text{loc};i}(p^2; q_1^2, q_2^2) = \frac{m_i}{(q_1q_2)\pi^2} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \frac{x_2(1 - 2x_2)}{q_2^2(m_i^2 - X)}.$$

Если взять локальный предел нелокального выражения (149), устремив $\Lambda \rightarrow \infty$, вклад нелокальных диаграмм полностью сокращает калибровочно-неинвариантный член. В работе [211] в локальной модели НИЛ изучалась другая кинематика похожей вершины со скалярным мезоном на массовой поверхности и двумя фотонами, один из которых находился вне массовой поверхности. При этом требовалась промежуточная регуляризация, которая в конце вычислению могла быть снята ввиду калибровочной инвариантности. В локальном пределе нелокальной модели такая промежуточная регуляризация оказывается не нужной.

Для специальной кинематики, когда $p^2 = q_1^2$ и $q_2^2 = 0$ имеются следующие соотношения

$$A_{\text{loc};i}(p^2; p^2, 0) = -\frac{m_i}{12\pi^2} \int_0^1 dx \frac{2m_i^2 - p^2\bar{x}x(1 + 4x\bar{x})}{(m_i^2 - x\bar{x}p^2)^2}, \\ B'_{\text{loc};i}(p^2; p^2, 0) = -\frac{m_i}{6\pi^2} \int_0^1 dx \frac{1 - 6x\bar{x}}{m_i^2 - p^2x\bar{x}}, \quad (155)$$

где $(\bar{x} = 1 - x)$.

Литература

- [1] Gross D. J., Wilczek F. Ultraviolet behavior of nonabelian gauge theories // *Phys. Rev. Lett.* — 1973. — Vol. 30. — P. 1343–1346.
- [2] Politzer H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? // *Phys. Rev. Lett.* — 1973. — Vol. 30. — P. 1346–1349.
- [3] Ваняшин В. С., Тереньтев М. В. Поляризация вакуума заряженного векторного поля // *ЖЭТФ.* — 1965. — Т. 48. — С. 375.
- [4] Хриплович И. Б. Функции Грина в теориях с неабелевой калибровочной группой. // *ЯФ* — 1969. — Т. 10. — С. 410.
- [5] Nambu Y., Jona-Lasinio G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. 1. // *Phys. Rev.* — 1961. — Vol. 122. — P. 345–358.
- [6] Nambu Y., Jona-Lasinio G. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II // *Phys. Rev.* — 1961. — Vol. 124. — P. 246–254.
- [7] Eguchi T. A new approach to collective phenomena in superconductivity models // *Phys. Rev.* — 1976. — Vol. D14. — P. 2755.
- [8] Kikkawa K. Quantum corrections in superconductor models // *Prog. Theor. Phys.* — 1976. — Vol. 56. — P. 947.
- [9] Волков М. К. и Эберт Д. Четырехкварковые взаимодействия как общий динамический источник сигма-модели и модели векторной доминантности. // *ЯФ.* — 1982. — Т. 36. — С. 1265–1277.
- [10] Ebert D., Volkov M. K. Composite meson model with vector dominance based on $u(2)$ invariant four quark interactions // *Z. Phys.* — 1983. — Vol. C16. — P. 205.

- [11] Volkov M. K. Meson lagrangians in a superconductor quark model // *Annals Phys.* — 1984. — Vol. 157. — P. 282–303.
- [12] Ebert D., Reinhardt H. Effective chiral hadron lagrangian with anomalies and skyrme terms from quark flavor dynamics // *Nucl. Phys.* — 1986. — Vol. B271. — P. 188.
- [13] Волков М. К. Низкоэнергетическая физика мезонов в кварковой модели сверхпроводящего типа // *ЭЧАЯ* — 1986. — Т. 17. — С. 433.
- [14] Generalized su(3) nambu-jona-lasinio model. part. 1. mesonic modes / S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl, W. Weise // *Nucl. Phys.* — 1990. — Vol. A516. — P. 429–468.
- [15] Klevansky S. P. The nambu-jona-lasinio model of quantum chromodynamics // *Rev. Mod. Phys.* — 1992. — Vol. 64. — P. 649–708.
- [16] Bijmans J., Bruno C., de Rafael E. Nambu-jona-lasinio like models and the low-energy effective action of qcd // *Nucl. Phys.* — 1993. — Vol. B390. — P. 501–541.
- [17] Волков М. К. Effective chiral lagrangians and the nambu-jona-lasinio model // *ЭЧАЯ* — 1993. — Т. 24. — С. 81.
- [18] Hatsuda T., Kunihiro T. QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian // *Phys. Rept.* — 1994. — Vol. 247. — P. 221–367.
- [19] Ebert D., Reinhardt H., Volkov M. K. Effective hadron theory of qcd // *Prog. Part. Nucl. Phys.* — 1994. — Vol. 33. — P. 1–120.
- [20] Volkov M. K., Nagy M., Yudichev V. L. Scalar mesons in the nambu-jona-lasinio model with 't hooft interaction // *Nuovo Cim.* — 1999. — Vol. A112. — P. 225–232. — hep-ph/9804347.
- [21] Волков М. К., Раджабов А. Е. Модель Намбу–Иона–Лазинио и её развитие // *УФН* — 2006. — Т. 176. — С. 569–580.
- [22] Volkov M. K., Yudichev V. L. Radially excited scalar, pseudoscalar, and vector meson nonets in a chiral quark model // *ЭЧАЯ* — 2000. — Т. 31. — С. 576.

- [23] Andrianov A. A., Andrianov V. A. Structure of effective fermion models in symmetry breaking phase // Int. J. Mod. Phys. — 1993. — Vol. A8. — P. 1981–1992.
- [24] Ito H., Buck W. W., Gross F. Electromagnetic properties of the pion as a composite nambu-goldstone boson // Phys. Rev. — 1992. — Vol. C45. — P. 1918–1934.
- [25] Efimov G. V., Ivanov M. A. The Quark confinement model of hadrons. — Bristol, UK : IOP, 1993. — P. 177.
- [26] Plant R. S., Birse M. C. Meson properties in an extended nonlocal NJL model // Nucl.Phys. — 1998. — Vol. A628. — P. 607–644.
- [27] Covariant confinement model for the study of the properties of light mesons / L. S. Celenza, B. Huang, H. S. Wang, C. M. Shakin // Phys. Rev. — 1999. — Vol. C60. — P. 025202.
- [28] Аникин В. Д., Дорохов А. Е., Томио Л. Структура пиона в модели инстантонной жидкости // ЭЧАЯ — 2000. — Т. 31. — С. 1023.
- [29] Radzhabov A. E., Volkov M. K. SU(2) x SU(2) nonlocal quark model with confinement // Eur. Phys. J. — 2004. — Vol. A19. — P. 139–144.
- [30] Scarpettini A., Gomez Dumm D., Scoccola N. N. Light pseudoscalar mesons in a nonlocal $su(3)$ chiral quark model // Phys. Rev. — 2004. — Vol. D69. — P. 114018. — hep-ph/0311030.
- [31] pi pi scattering in a qcd based model field theory / Craig D. Roberts, Reginald T. Cahill, Martin E. Sevier, Nicolangelo Iannella // Phys. Rev. — 1994. — Vol. D49. — P. 125–137. — hep-ph/9304315.
- [32] Tandy P. C. Hadron physics from the global color model of qcd // Prog. Part. Nucl. Phys. — 1997. — Vol. 39. — P. 117–199. — nucl-th/9705018.
- [33] Finite t meson correlations and quark deconfinement / D. Blaschke, G. Baur, Yu. L. Kalinovsky et al. // Int. J. Mod. Phys. — 2001. — Vol. A16. — P. 2267–2291. — nucl-th/0002024.
- [34] Schäfer T., Shuryak E. V. Instantons in qcd // Rev. Mod. Phys. — 1998. — Vol. 70. — P. 323–426.

- [35] Diakonov D. Instantons at work // Prog. Part. Nucl. Phys. — 2003. — Vol. 51. — P. 173–222.
- [36] Kochelev N. I. Qcd vacuum structure and hadron properties // ЭЧАЯ — Т. 36. — 2005. — С. 1157–1225 .
- [37] Инстантонная азбука / А.И. Вайнштейн, В.И. Захаров, В.А. Новиков, М.А. Шифман // УФН — 1982. — Т. 136. — С. 553–591.
- [38] Shuryak E. V. The role of instantons in quantum chromodynamics. 1. physical vacuum // Nucl. Phys. — 1982. — Vol. B203. — P. 93.
- [39] Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. QCD and Resonance Physics. Theoretical Foundations // Nucl. Phys. — 1979. — Vol. B147. — P. 385–447.
- [40] Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. QCD and Resonance Physics: Applications // Nucl. Phys. — 1979. — Vol. B147. — P. 448–518.
- [41] Kochelev N. Role of anomalous chromomagnetic interaction in pomeron and odderon structures and in gluon distribution // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2010. — Vol. 7. — P. 326–333. — 0907.3555.
- [42] Ostrovsky D., Shuryak E. Instanton-induced azimuthal spin asymmetry in deep inelastic scattering // Phys. Rev. — 2005. — Vol. D71. — P. 014037.
- [43] Instanton contribution to the sivers function / I. O. Cherednikov, U. D’Alesio, N. I. Kochelev, F. Murgia // Phys. Lett. — 2006. — Vol. B642. — P. 39–47.
- [44] Hoyer P., Jarvinen M. Soft rescattering in dis: Effects of helicity flip // JHEP. — 2005. — Vol. 10. — P. 080.
- [45] Kochelev N., Korchagin N. Anomalous quark chromomagnetic moment and single-spin asymmetries // Phys. Lett. — 2014. — Vol. B729. — P. 117–120. — 1308.4857.
- [46] Qian Y., Zahed I. Spin physics through qcd instantons // Annals Phys. — 2016. — Vol. 374. — P. 314–337. — 1512.08172.
- [47] Gluonic structure of the constituent quark / Nikolai Kochelev, Hee-Jung Lee, Baiyang Zhang, Pengming Zhang // Phys. Lett. — 2016. — Vol. B757. — P. 420–425. — 1512.03863.

- [48] Roberts C. D., Williams A. G. Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics // Prog. Part. Nucl. Phys. — 1994. — Vol. 33. — P. 477–575.
- [49] Frank M. R., Roberts C. D. Model gluon propagator and pion and rho meson observables // Phys. Rev. — 1996. — Vol. C53. — P. 390–398. — hep-ph/9508225.
- [50] Alkofer R., von Smekal L. The Infrared behavior of QCD Green’s functions: Confinement dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states // Phys. Rept. — 2001. — Vol. 353. — P. 281.
- [51] Roberts C. D. Hadron properties and dyson-schwinger equations // Prog. Part. Nucl. Phys. — 2008. — Vol. 61. — P. 50–65. — 0712.0633.
- [52] Dorkin S. M., Kaptari L. P., Kämpfer B. Accounting for the analytical properties of the quark propagator from the Dyson-Schwinger equation // Phys. Rev. — 2015. — Vol. C91, no. 5. — P. 055201. — 1412.3345.
- [53] Fischer C. S. QCD at finite temperature and chemical potential from Dyson–Schwinger equations // Prog. Part. Nucl. Phys. — 2019. — Vol. 105. — P. 1–60. — 1810.12938.
- [54] Dorkin S. M., Kaptari L. P., Kämpfer B. Pseudo-Scalar $q\bar{q}$ Bound States at Finite Temperatures // Few Body Syst. — 2019. — Vol. 60, no. 2. — P. 20. — 1807.10075.
- [55] Maris P., Tandy P. C. Bethe-salpeter study of vector meson masses and decay constants // Phys. Rev. — 1999. — Vol. C60. — P. 055214. — nucl-th/9905056.
- [56] Horvatic D., Klabucar D., Radzhabov A. E. η and η' mesons in the dyson-schwinger approach at finite temperature // Phys. Rev. — 2007. — Vol. D76. — P. 096009. — arXiv:0708.1260 [hep-ph].
- [57] Bernard V., Osipov A. A., Meissner U. G. Consistent treatment of the bosonized Nambu-Jona-Lasinio model // Phys. Lett. — 1992. — Vol. B285. — P. 119–125.
- [58] Pion observables in the extended NJL model with vector and axial - vector mesons / Veronique Bernard, Alex H. Blin, Brigitte Hiller et al. // Annals Phys. — 1996. — Vol. 249. — P. 499–531.

- [59] Radzhabov A. E., Volkov M. K. Process $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ in the nambu-jona-lasinio model // Phys. Rev. — 2006. — Vol. D74. — P. 113001.
- [60] Weinberg S. Pion scattering lengths // Phys. Rev. Lett. — 1966. — Vol. 17. — P. 616–621.
- [61] Adler S. L., Dashen R. F. Current algebra. — New York : Benjamin, 1968.
- [62] Токи в физике адронов / В. Де Альфаро, С. Фубини, Г. Фурлан и К. Росети. — М., "Мир 1976, 670 с.
- [63] Gasiorowicz S., Geffen D. A. Effective Lagrangians and field algebras with chiral symmetry // Rev. Mod. Phys. — 1969. — Vol. 41. — P. 531–573.
- [64] Coleman S. R., Wess J., Zumino B. Structure of phenomenological Lagrangians. 1. // Phys. Rev. — 1969. — Vol. 177. — P. 2239–2247.
- [65] Structure of phenomenological Lagrangians. 2. / Curtis G. Callan, Jr., Sidney R. Coleman, J. Wess, Bruno Zumino // Phys. Rev. — 1969. — Vol. 177. — P. 2247–2250.
- [66] Волков М. К., Первушин В. П. Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов. — Москва : Атомиздат, 1978. — С. 240.
- [67] Lehmann H. Chiral invariance and effective range expansion for pion pion scattering // Phys. Lett. — 1972. — Vol. 41B. — P. 529–532.
- [68] Первушин В. Н., Волков М. К. Низкоэнергетическое рассеяние массивных пионов // ЯФ — 1974. — Т. 20. — С. 762–774.
- [69] Volkov M. K., Pervushin V. N. Description of $\pi\pi$ scattering and the pion electromagnetic properties in quantum chiral field theory // Il Nuovo Cimento A (1965-1970). — 1975. — Jun. — Vol. 27, no. 3. — P. 277–293.
- [70] Weinberg S. Phenomenological Lagrangians // Physica. — 1979. — Vol. A96, no. 1-2. — P. 327–340.
- [71] Gasser J., Leutwyler H. Chiral Perturbation Theory to One Loop // Annals Phys. — 1984. — Vol. 158. — P. 142.
- [72] Colangelo G., Gasser J., Leutwyler H. The $\pi\pi$ S wave scattering lengths // Phys. Lett. — 2000. — Vol. B488. — P. 261–268.

- [73] Colangelo G., Gasser J., Leutwyler H. $\pi\pi$ scattering // Nucl. Phys. — 2001. — Vol. B603. — P. 125–179.
- [74] Tanabashi M. et al. Review of Particle Physics // Phys. Rev. — 2018. — Vol. D98, no. 3. — P. 030001.
- [75] Quack E., Klevansky S. Effective $1/N(c)$ expansion in the NJL model // Phys. Rev. — 1994. — Vol. C49. — P. 3283–3288.
- [76] Ebert D., Nagy M., Volkov M. K. To the problem of $1/N(c)$ approximation in the Nambu-Jona-Lasinio model // Phys. Atom. Nucl. — 1996. — Vol. 59. — P. 140–143. — hep-th/9412214.
- [77] Meson loops in the Nambu-Jona-Lasinio model / Emil N. Nikolov, Wojciech Broniowski, Christo V. Christov et al. // Nucl. Phys. — 1996. — Vol. A608. — P. 411–436. — hep-ph/9602274.
- [78] Chirally symmetric O ($1/N(c)$ corrections to the Nambu-Jona-Lasinio model / Veljko Dmitrasinovic, H. J. Schulze, R. Tegen, Richard H. Lemmer // Annals Phys. — 1995. — Vol. 238. — P. 332–369.
- [79] $1/N(c)$ expansion of the quark condensate at finite temperature / D. Blaschke, Yu. L. Kalinovsky, G. Roepke et al. // Phys. Rev. — 1996. — Vol. C53. — P. 2394–2400. — nucl-th/9511003.
- [80] Oertel M., Buballa M., Wambach J. Pion properties in the $1/N(c)$ corrected NJL model // Phys. Lett. — 2000. — Vol. B477. — P. 77–82. — hep-ph/9908475.
- [81] Oertel M., Buballa M., Wambach J. Meson loop effects in the NJL model at zero and nonzero temperature // ЯФ — 2001. — Т. 64. — С. 757–785.
- [82] Plant R. S., Birse M. C. Mesonic fluctuations in a nonlocal NJL model // Nucl. Phys. — 2002. — Vol. A703. — P. 717–744. — hep-ph/0007340.
- [83] Jafarov R. G., Rochev V. E. Mean field expansion and meson effects in chiral condensate of analytically regularized Nambu-Jona-Lasinio model // Central Eur. J. Phys. — 2004. — Vol. 2. — P. 367–381. — hep-ph/0311339.
- [84] Goeke K., Musakhanov M. M., Siddikov M. Low energy constants of chi PT from the instanton vacuum model // Phys. Rev. — 2007. — Vol. D76. — P. 076007. — 0707.1997.

- [85] Muller D., Buballa M., Wambach J. The Quark Propagator in the NJL Model in a self-consistent $1/N_c$ Expansion // Phys. Rev. — 2010. — Vol. D81. — P. 094022. — 1002.4252.
- [86] 't Hooft G. A planar diagram theory for strong interactions // Nucl. Phys. — 1974. — Vol. B72. — P. 461.
- [87] Achasov M. N. et al. Search for the radiative decay $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ in the SND experiment at VEPP-2M // Nucl. Phys. — 2001. — Vol. B600. — P. 3–20. — hep-ex/0101043.
- [88] Determination of the branching ratios among the neutral decay modes of the η particle / G. Di Giugno, R. Querzoli, G. Troise et al. // Phys. Rev. Lett. — 1966. — Vol. 16. — P. 767–771.
- [89] Oppo G., Oneda S. Models of $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ decay // Phys. Rev. — 1967. — Vol. 160. — P. 1397–1406.
- [90] Ebert D., Volkov M. K. On the problem of the $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ decay // Sov. J. Nucl. Phys. — 1979. — Vol. 30. — P. 736.
- [91] Иванов А. Н., Троицкая Н. И. Аномалии кварковых диаграмм в распаде $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ и кварковая структура скалярного мезона $\delta(980)$. // ЯФ — 1982. — Т. 36. — С. 494–497.
- [92] Креопалов Д. В., Волков М. К. Распад $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ в модели мезонов с кварковыми петлями // ЯФ — 1983. — Т. 37. — С. 1297–1302.
- [93] Davtdov V. A. et al. η puzzle: The decay $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ // Lett. Nuovo Cim. — 1981. — Vol. 32. — P. 45.
- [94] Alde D. et al. Neutral decays of the η meson // Z. Phys. — 1984. — Vol. C25. — P. 225–229.
- [95] Prakhov S. et al. Measurement of the branching ratio for $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ decay // Phys. Rev. — 2005. — Vol. C72. — P. 025201.
- [96] Nefkens B. M. K. et al. New measurement of the rare decay $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ with the Crystal Ball/TAPS detectors at the Mainz Microtron // Phys. Rev. — 2014. — Vol. C90, no. 2. — P. 025206. — 1405.4904.
- [97] Ng J. N., Peters D. J. A study of $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ decay using the quark box diagram // Phys. Rev. — 1993. — Vol. D47. — P. 4939–4948.

- [98] Nemoto Y., Oka M., Takizawa M. Eta - pi0 gamma gamma decay in the three flavor nambu-jona-lasinio model // Phys. Rev. — 1996. — Vol. D54. — P. 6777–6781.
- [99] Ng J. N., Peters D. J. The decay of the eta meson into pi mu+ mu- // Phys. Rev. — 1992. — Vol. D46. — P. 5034–5039.
- [100] Ko P. Contributions to the c odd axial vector resonances to eta - pi0 gamma gamma and gamma gamma - pi0 pi0 // Phys. Rev. — 1993. — Vol. D47. — P. 3933–3937.
- [101] Chiral perturbation theory for eta - pi0 gamma gamma / L. Ametller, J. Bijnens, A. Bramon, F. Cornet // Phys. Lett. — 1992. — Vol. B276. — P. 185–190.
- [102] Ko P. eta - pi0 gamma gamma and gamma gamma - pi0 pi0 in o(p**6) chiral perturbation theory // Phys. Lett. — 1995. — Vol. B349. — P. 555–560.
- [103] Bellucci S., Bruno C. Gamma gamma - pi0 pi0 and eta - pi0 gamma gamma at low-energy within the extended nambu-jona-lasinio model // Nucl. Phys. — 1995. — Vol. B452. — P. 626–648.
- [104] Bel'kov A. A., Lanyov A. V., Scherer S. gamma gamma - pi0 pi0 and eta - pi0 gamma gamma at o(p**6) in the njl model // J. Phys. — 1996. — Vol. G22. — P. 1383–1394.
- [105] Bijnens J., Fayyazuddin A., Prades J. The gamma gamma - pi0 pi0 and eta - pi0 gamma gamma transitions in the extended njl model // Phys. Lett. — 1996. — Vol. B379. — P. 209–218.
- [106] Oset E., Pelaez J. R., Roca L. eta - pi0 gamma gamma decay within a chiral unitary approach // Phys. Rev. — 2003. — Vol. D67. — P. 073013.
- [107] Photon-fusion reactions from the chiral Lagrangian with dynamical light vector mesons / I. V. Danilkin, M. F. M. Lutz, S. Leupold, C. Ter-schlusen // Eur. Phys. J. — 2013. — Vol. C73, no. 4. — P. 2358. — 1211.1503.
- [108] Low-energy dynamics of the gamma gamma - pi pi reaction in the njl model / B. Bajc, A. H. Blin, B. Hiller et al. // Nucl. Phys. — 1996. — Vol. A604. — P. 406–428.

- [109] Achasov M. N. et al. Experimental study of $\rho \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ and $\omega \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ decays // Phys. Lett. — 2002. — Vol. B537. — P. 201–210. — hep-ex/0205068.
- [110] Akhmetshin R. R. et al. Study of the process $e^+e^- \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ in c.m. energy range 600-mev to 970-mev at cmd2 // Phys. Lett. — 2004. — Vol. B580. — P. 119–128. — hep-ex/0310012.
- [111] Singer P. Decay mode $\omega \rightarrow 2\pi + \gamma$ // Phys. Rev. — 1962. — Vol. 128. — P. 2789–2792.
- [112] Singer P. Radiative rho meson decay // Phys. Rev. — 1963. — Vol. 130. — P. 2441–2448.
- [113] Bramon A., Grau A., Pancheri G. Intermediate vector meson contributions to $\nu^0 \rightarrow p^0 p^0 \gamma$ decays // Phys. Lett. — 1992. — Vol. B283. — P. 416–420.
- [114] Palomar J. E., Hirenzaki S., Oset E. Chiral loops and vmd in the $\nu \rightarrow p^0 p^0 \gamma$ decays // Nucl. Phys. — 2002. — Vol. A707. — P. 161–172.
- [115] Gokalp A., Yilmaz O. The role of sigma meson in $\omega \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ decays and the coupling constant $g(\omega\sigma\gamma)$ // Phys. Lett. — 2000. — Vol. B494. — P. 69–74. — nucl-th/0008011.
- [116] Gokalp A., Yilmaz O. The decay $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ and the role of sigma meson // Phys. Lett. — 2001. — Vol. B508. — P. 25–30. — nucl-th/0006044.
- [117] Scalar sigma meson effects in rho and omega decays into $\pi^0\pi^0\gamma$ / A. Bramon, R. Escribano, J. L. Lucio Martinez, M. Napsuciale // Phys. Lett. — 2001. — Vol. B517. — P. 345–354.
- [118] Kucukarslan A., Solmaz S. Different contributions in $\omega \rightarrow \pi^0\eta\gamma$ and $\rho \rightarrow \pi^0\eta\gamma$ decays // Phys. Rev. — 2004. — Vol. D70. — P. 053004.
- [119] Escribano R. Scalar and vector meson exchange in $\nu \rightarrow p^0 p^0 \gamma$ decays // Phys. Rev. — 2006. — Vol. D74. — P. 114020.
- [120] Kochelev N. I. Anomalous quark chromomagnetic moment induced by instantons // Phys. Lett. — 1998. — Vol. B426. — P. 149–153.

- [121] Kochelev N. I. The Pauli form-factor of the quark induced by instantons // Phys. Lett. — 2003. — Vol. B565. — P. 131–136.
- [122] Moch S., Ringwald A., Schrempp F. Instantons in deep inelastic scattering: The Simplest process // Nucl. Phys. — 1997. — Vol. B507. — P. 134–156.
- [123] Ringwald A., Schrempp F. Zooming in on instantons at HERA // Phys. Lett. — 2001. — Vol. B503. — P. 331–340.
- [124] Ringwald A., Schrempp F. Confronting instanton perturbation theory with QCD lattice results // Phys. Lett. — 1999. — Vol. B459. — P. 249–258. — hep-lat/9903039.
- [125] Ratti C., Thaler M. A., Weise W. Phases of QCD: Lattice thermodynamics and a field theoretical model // Phys. Rev. — 2006. — Vol. D73. — P. 014019.
- [126] Meisinger P. N., Ogilvie M. C. Chiral symmetry restoration and $z(n)$ symmetry // Phys. Lett. — 1996. — Vol. B379. — P. 163–168. — hep-lat/9512011.
- [127] Fukushima K. Chiral effective model with the Polyakov loop // Phys. Lett. — 2004. — Vol. B591. — P. 277–284.
- [128] Megias E., Ruiz Arriola E., Salcedo L. L. Polyakov loop in chiral quark models at finite temperature // Phys. Rev. — 2006. — Vol. D74. — P. 065005.
- [129] Sasaki C., Friman B., Redlich K. Susceptibilities and the phase structure of a chiral model with Polyakov loops // Phys. Rev. — 2007. — Vol. D75. — P. 074013.
- [130] Mesonic correlation functions at finite temperature and density in the Nambu-Jona-Lasinio model with a Polyakov loop / H. Hansen, W.M. Alberico, A. Beraudo et al. // Phys. Rev. — 2007. — Vol. D75. — P. 065004.
- [131] Roessner S., Ratti C., Weise W. Polyakov loop, diquarks and the two-flavour phase diagram // Phys. Rev. — 2007. — Vol. D75. — P. 034007.
- [132] The equation of state for two flavor qcd at nonzero chemical potential / C. R. Allton, S. Ejiri, S. J. Hands et al. // Phys. Rev. — 2003. — Vol. D68. — P. 014507. — hep-lat/0305007.

- [133] Ali Khan A. et al. Equation of state in finite temperature qcd with two flavors of improved wilson quarks // Phys. Rev. — 2001. — Vol. D64. — P. 074510. — hep-lat/0103028.
- [134] Shuryak E. V., Zahed I. Towards a theory of binary bound states in the quark gluon plasma // Phys. Rev. — 2004. — Vol. D70. — P. 054507.
- [135] Thermodynamics of a quark plasma beyond the mean field: A generalized Beth-Uhlenbeck approach / J. Hufner, S. P. Klevansky, P. Zhuang, H. Voss // Annals Phys. — 1994. — Vol. 234. — P. 225–244.
- [136] Zhuang P., Hufner J., Klevansky S. Thermodynamics of a quark - meson plasma in the Nambu-Jona-Lasinio model // Nucl.Phys. — 1994. — Vol. A576. — P. 525–552.
- [137] Generalized Beth–Uhlenbeck approach to mesons and diquarks in hot, dense quark matter / D. Blaschke, M. Buballa, A. Dubinin et al. // Annals Phys. — 2014. — Vol. 348. — P. 228–255. — 1305.3907.
- [138] Dubinin A., Blaschke D., Kalinovsky Yu. L. Pion and sigma meson dissociation in a modified njl model at finite temperature // Acta Phys. Polon. Supp. — 2014. — Vol. 7, no. 1. — P. 215–223. — 1312.0559.
- [139] Pion dissociation and levinson’s theorem in hot pnjl quark matter / A. Wergieluk, D. Blaschke, Yu. L. Kalinovsky, A. Friesen // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2013. — Vol. 10. — P. 660–668. — 1212.5245.
- [140] Yamazaki K., Matsui T. Quark-Hadron Phase Transition in the PNJL model for interacting quarks // Nucl. Phys. — 2013. — Vol. A913. — P. 19–50. — 1212.6165.
- [141] Yamazaki K., Matsui T. Quark-hadron phase transition in a three flavor PNJL model for interacting quarks // Nucl. Phys. — 2014. — Vol. A922. — P. 237–261. — 1310.4960.
- [142] Blaschke D., Dubinin A., Buballa M. Polyakov-loop suppression of colored states in a quark-meson-diquark plasma // Phys. Rev. — 2015. — Vol. D91, no. 12. — P. 125040. — 1412.1040.
- [143] Torres-Rincon J. M., Aichelin J. Equation of state of a quark-polyakov loop-meson mixture in the pnjl model at finite temperature. — 2016. — 1601.01706.

- [144] Weldon H. A. Dilepton enhancement at $2m(\pi)$ and chiral symmetry restoration // Phys. Lett. — 1992. — Vol. B274. — P. 133–137.
- [145] Teodorescu O., Dutt-Mazumder A. K., Gale C. The effects of meson mixing on dilepton spectra // Phys. Rev. — 2001. — Vol. C63. — P. 034903. — nucl-th/0008006.
- [146] Anchishkin D., Naryshkin R. Pion and quark annihilation mechanisms of dilepton production in relativistic heavy-ion collisions // Mod. Phys. Lett. — 2005. — Vol. A20. — P. 2047.
- [147] Excess low energy photon pairs from pion annihilation at the chiral phase transition / M. K. Volkov, E. A. Kuraev, D. Blaschke et al. // Phys. Lett. — 1998. — Vol. B424. — P. 235–243. — hep-ph/9706350.
- [148] Jegerlehner F., Nyffeler A. The Muon $g-2$ // Phys.Rept. — 2009. — Vol. 477. — P. 1–110. — 0902.3360.
- [149] Muon ($g-2$): Experiment and theory / James P. Miller, Eduardo de Rafael, B. Lee Roberts, Dominik Stöckinger // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. — 2012. — Vol. 62. — P. 237–264.
- [150] Jegerlehner F. The anomalous magnetic moment of the muon // Springer Tracts Mod. Phys. — 2017. — Vol. 274. — P. pp.1–693.
- [151] Логашенко И. Б., Эйдельман С. И. Аномальный магнитный момент мюона // УФН — 2018. — Т. 188. — С. 540–573.
- [152] Hanneke D., Fogwell S., Gabrielse G. New Measurement of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 100. — P. 120801. — 0801.1134.
- [153] Tenth-Order QED Contribution to the Electron $g-2$ and an Improved Value of the Fine Structure Constant / Tatsumi Aoyama, Masashi Hayakawa, Toichiro Kinoshita, Makiko Nio // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 109. — P. 111807. — 1205.5368.
- [154] Kinoshita T. Tenth-order QED contribution to the electron $g-2$ and high precision test of quantum electrodynamics // Int. J. Mod. Phys. — 2014. — Vol. A29. — P. 1430003.

- [155] Aoyama T., Kinoshita T., Nio M. Revised and Improved Value of the QED Tenth-Order Electron Anomalous Magnetic Moment // *Phys. Rev.* — 2018. — Vol. D97, no. 3. — P. 036001. — 1712.06060.
- [156] Data and analysis for the CODATA 2017 special fundamental constants adjustment / Peter J. Mohr, David B. Newell, Barry N. Taylor, Eite Tiesinga // *Metrologia.* — 2018. — Vol. 55, no. 1. — P. 125.
- [157] New determination of the fine structure constant and test of the quantum electrodynamics / Rym Bouchendira, Pierre Clade, Saida Guellati-Khelifa et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 106. — P. 080801. — 1012.3627.
- [158] Mohr P. J., Taylor B. N., Newell D. B. Codata recommended values of the fundamental physical constants: 2010 // *Rev. Mod. Phys.* — 2012. — Vol. 84. — P. 1527–1605. — 1203.5425.
- [159] Bennett G. W. et al. Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL // *Phys. Rev.* — 2006. — Vol. D73. — P. 072003. — hep-ex/0602035.
- [160] Venanzoni G. Latest on $g-2$ from experiment // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2012. — Vol. 349. — P. 012008.
- [161] Saito N. A novel precision measurement of muon $g-2$ and edm at j-parc // *AIP Conf. Proc.* — 2012. — Vol. 1467. — P. 45–56.
- [162] Kataev A. L. Reconsidered estimates of the 10th order QED contributions to the muon anomaly // *Phys. Rev.* — 2006. — Vol. D74. — P. 073011.
- [163] Complete tenth-order qed contribution to the muon $g-2$ / Tatsumi Aoyama, Masashi Hayakawa, Toichiro Kinoshita, Makiko Nio // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 109. — P. 111808. — 1205.5370.
- [164] Czarnecki A., Marciano W. J., Vainshtein A. Refinements in electroweak contributions to the muon anomalous magnetic moment // *Phys. Rev.* — 2003. — Vol. D67. — P. 073006.
- [165] Gnendiger C., Stöckinger D., Stöckinger-Kim H. The electroweak contributions to $(g - 2)_\mu$ after the Higgs boson mass measurement // *Phys. Rev.* — 2013. — Vol. D88. — P. 053005. — 1306.5546.

- [166] Aad G. et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC // *Phys. Lett.* — 2012. — Vol. B716. — P. 1–29. — 1207.7214.
- [167] Chatrchyan S. et al. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC // *Phys. Lett.* — 2012. — Vol. B716. — P. 30–61. — 1207.7235.
- [168] Bouchiat, Claude, Michel, Louis. La résonance dans la diffusion méson méson le moment magnétique anormal du méson // *J. Phys. Radium.* — 1961. — Vol. 22, no. 2. — P. 121.
- [169] Reevaluation of the hadronic vacuum polarisation contributions to the Standard Model predictions of the muon $g - 2$ and $\alpha(m_Z^2)$ using newest hadronic cross-section data / Michel Davier, Andreas Hoecker, Bogdan Malaescu, Zhiqing Zhang // *Eur. Phys. J.* — 2017. — Vol. C77, no. 12. — P. 827. — 1706.09436.
- [170] Keshavarzi A., Nomura D., Teubner T. Muon $g - 2$ and $\alpha(M_Z^2)$: a new data-based analysis // *Phys. Rev.* — 2018. — Vol. D97, no. 11. — P. 114025. — 1802.02995.
- [171] Hadronic contribution to the muon anomalous magnetic moment to next-to-next-to-leading order / Alexander Kurz, Tao Liu, Peter Marquard, Matthias Steinhauser // *Phys. Lett.* — 2014. — Vol. B734. — P. 144–147. — 1403.6400.
- [172] Barate R. et al. Measurement of the spectral functions of vector current hadronic tau decays // *Z. Phys.* — 1997. — Vol. C76. — P. 15–33.
- [173] Barate R. et al. Measurement of the spectral functions of axial - vector hadronic tau decays and determination of $\alpha(s)(m^{*2}(\tau))$ // *Eur. Phys. J.* — 1998. — Vol. C4. — P. 409–431.
- [174] Schael S. et al. Branching ratios and spectral functions of tau decays: Final ALEPH measurements and physics implications // *Phys. Rept.* — 2005. — Vol. 421. — P. 191–284. — hep-ex/0506072.
- [175] Ackerstaff K. et al. Measurement of the strong coupling constant $\alpha(s)$ and the vector and axial-vector spectral functions in hadronic tau decays // *Eur. Phys. J.* — 1999. — Vol. C7. — P. 571–593. — hep-ex/9808019.

- [176] Anderson S. et al. Hadronic structure in the decay $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ // Phys. Rev. — 2000. — Vol. D61. — P. 112002. — hep-ex/9910046.
- [177] Fujikawa M. et al. High-Statistics Study of the $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ Decay // Phys. Rev. — 2008. — Vol. D78. — P. 072006. — 0805.3773.
- [178] Jegerlehner F., Szafron R. $\rho^0 - \gamma$ mixing in the neutral channel pion form factor F_π^e and its role in comparing e^+e^- with τ spectral functions // Eur. Phys. J. — 2011. — Vol. C71. — P. 1632. — 1101.2872.
- [179] Prades J., de Rafael E., Vainshtein A. The Hadronic Light-by-Light Scattering Contribution to the Muon and Electron Anomalous Magnetic Moments // Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. — 2009. — Vol. 20. — P. 303–317. — 0901.0306.
- [180] de Rafael E. Hadronic contributions to the muon $g-2$ and low-energy QCD // Phys.Lett. — 1994. — Vol. B322. — P. 239–246.
- [181] Hayakawa M., Kinoshita T., Sanda A. Hadronic light by light scattering effect on muon $g-2$ // Phys.Rev.Lett. — 1995. — Vol. 75. — P. 790–793.
- [182] Bijmans J., Pallante E., Prades J. Hadronic light by light contributions to the muon $g-2$ in the large $N(c)$ limit // Phys.Rev.Lett. — 1995. — Vol. 75. — P. 1447–1450.
- [183] Connected and Leading Disconnected Hadronic Light-by-Light Contribution to the Muon Anomalous Magnetic Moment with a Physical Pion Mass / Thomas Blum, Norman Christ, Masashi Hayakawa et al. // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Vol. 118, no. 2. — P. 022005. — 1610.04603.
- [184] Meyer H. B., Wittig H. Lattice QCD and the anomalous magnetic moment of the muon // Prog. Part. Nucl. Phys. — 2019. — Vol. 104. — P. 46–96. — 1807.09370.
- [185] Knecht M., Nyffeler A. Hadronic light by light corrections to the muon $g-2$: The Pion pole contribution // Phys. Rev. — 2002. — Vol. D65. — P. 073034.
- [186] Melnikov K., Vainshtein A. Hadronic light-by-light scattering contribution to the muon anomalous magnetic moment revisited // Phys. Rev. — 2004. — Vol. D70. — P. 113006.

- [187] Nyffeler A. Hadronic light-by-light scattering in the muon $g-2$: A New short-distance constraint on pion-exchange // Phys. Rev. — 2009. — Vol. D79. — P. 073012. — 0901.1172.
- [188] Kampf K., Novotny J. Resonance saturation in the odd-intrinsic parity sector of low-energy qcd // Phys. Rev. — 2011. — Vol. D84. — P. 014036. — 1104.3137.
- [189] Roig P., Guevara A., López Castro G. $VV'P$ form factors in resonance chiral theory and the $\pi - \eta - \eta'$ light-by-light contribution to the muon $g - 2$ // Phys. Rev. — 2014. — Vol. D89, no. 7. — P. 073016. — 1401.4099.
- [190] Engel K. T., Ramsey-Musolf M. J. The Muon Anomalous Magnetic Moment and the Pion Polarizability // Phys. Lett. — 2014. — Vol. B738. — P. 123–127. — 1309.2225.
- [191] Pivovarov A. A. Muon anomalous magnetic moment: A Consistency check for the next-to-leading order hadronic contributions // ЯФ — 2003. — T. 66. — C. 934–945.
- [192] Scalar and pseudoscalar meson pole terms in the hadronic light-by-light contributions to $a(\mu)(\text{had})$ / E. Bartos, A. Z. Dubnickova, S. Dubnicka et al. // Nucl. Phys. — 2002. — Vol. B632. — P. 330–342.
- [193] Erler J., Toledo Sanchez G. An upper bound on the hadronic light-by-light contribution to the muon $g-2$ // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 97. — P. 161801.
- [194] Boughezal R., Melnikov K. Hadronic light-by-light scattering contribution to the muon magnetic anomaly: constituent quark loops and qcd effects // Phys. Lett. — 2011. — Vol. B704. — P. 193–196. — 1104.4510.
- [195] Greynat D., de Rafael E. Hadronic contributions to the muon anomaly in the constituent chiral quark model // JHEP. — 2012. — Vol. 07. — P. 020. — 1204.3029.
- [196] Dorokhov A. E., Broniowski W. Vector and axial-vector correlators in a nonlocal chiral quark model // Eur. Phys. J. — 2003. — Vol. C32. — P. 79–96. — hep-ph/0305037.

- [197] Dorokhov A. E. Adler function and hadronic contribution to the muon $g-2$ in a nonlocal chiral quark model // Phys. Rev. — 2004. — Vol. D70. — P. 094011.
- [198] Dorokhov A. E. $V A V$ correlator within the instanton vacuum model // Eur. Phys. J. — 2005. — Vol. C42. — P. 309–317.
- [199] Dorokhov A. E. Hadronic corrections to muon anomalous magnetic moment within the instanton liquid model // Acta Phys. Polon. — 2005. — Vol. B36. — P. 3751–3782.
- [200] Dorokhov A. E., Broniowski W. Pion pole light-by-light contribution to $g-2$ of the muon in a nonlocal chiral quark model // Phys. Rev. — 2008. — Vol. D78. — P. 073011. — 0805.0760.
- [201] Dorokhov A., Radzhabov A., Zhevlakov A. The pseudoscalar hadronic channel contribution of the light-by-light process to the muon $(g - 2)_\mu$ within the nonlocal chiral quark model // Eur. Phys. J. — 2011. — Vol. C71. — P. 1702. — 1103.2042.
- [202] Dorokhov A., Radzhabov A., Zhevlakov A. The Light-by-Light Contribution to the Muon $(g-2)$ from Lightest Pseudoscalar and Scalar Mesons within Nonlocal Chiral Quark Model // Eur. Phys. J. — 2012. — Vol. C72. — P. 2227. — 1204.3729.
- [203] Fischer C. S., Goecke T., Williams R. A fresh look at hadronic light-by-light scattering in the muon $g-2$ with the Dyson-Schwinger approach // Eur. Phys. J. — 2011. — Vol. A47. — P. 28. — 1009.5297.
- [204] Hong D. K., Kim D. Pseudo scalar contributions to light-by-light correction of muon $g-2$ in AdS/QCD // Phys.Lett. — 2009. — Vol. B680. — P. 480–484. — 0904.4042.
- [205] Capiello L., Cata O., D’Ambrosio G. The hadronic light by light contribution to the $(g - 2)_\mu$ with holographic models of QCD // Phys. Rev. — 2011. — Vol. D83. — P. 093006. — 1009.1161.
- [206] Dispersive approach to hadronic light-by-light scattering / Gilberto Colangelo, Martin Hoferichter, Massimiliano Procura, Peter Stoffer // JHEP. — 2014. — Vol. 09. — P. 091. — 1402.7081.

- [207] Pauk V., Vanderhaeghen M. Anomalous magnetic moment of the muon in a dispersive approach // *Phys. Rev.* — 2014. — Vol. D90, no. 11. — P. 113012. — 1409.0819.
- [208] Dispersion relation for hadronic light-by-light scattering: pion pole / Martin Hoferichter, Bai-Long Hoid, Bastian Kubis et al. // *JHEP.* — 2018. — Vol. 10. — P. 141. — 1808.04823.
- [209] Pion-pole contribution to hadronic light-by-light scattering in the anomalous magnetic moment of the muon / Martin Hoferichter, Bai-Long Hoid, Bastian Kubis et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2018. — Vol. 121, no. 11. — P. 112002. — 1805.01471.
- [210] Калошин А. Е., Раджабов А. Е. Унитарное смешивание скаляр–вектор в ξ калибровке // *ЯФ* — 2003. — Т. 66. — С. 1416–1425.
- [211] Volkov M. K., Radzhabov A. E., Yudichev V. L. Process $\gamma^*\gamma \rightarrow \sigma$ at large virtuality of γ^* // *ЯФ* — 2003. — Т. 66. — С. 2193–2198.
- [212] Dorokhov A. E., Radzhabov A. E., Volkov M. K. $Su(2) \times su(2)$ chiral quark model with nonlocal interaction // *ЯФ* — 2004. — С. 67. — Т. 1042–1049.
- [213] Dorokhov A. E., Radzhabov A. E., Volkov M. K. Pion radii in nonlocal chiral quark model // *Eur. Phys. J.* — 2004. — Vol. A21, no. 1. — P. 155–159.
- [214] Radzhabov A. E., Volkov M. K. Charged pion polarizability in the nonlocal quark model of nambu–jona-lasinio type // *Письма в ЭЧАЯ* — 2005. — Т. 2. — С. 7–12.
- [215] Radzhabov A. E., Volkov M. K., Yudichev V. L. Two-photon decays of vector mesons and dilepton decays of scalar mesons in dense matter // *J. Phys.* — 2006. — Vol. G32. — P. 111–127.
- [216] Radzhabov A. E., Volkov M. K. $Su(2) \times su(2)$ nonlocal quark model with confinement and pion radius // *Письма в ЭЧАЯ* — 2005. — Т. 2. — С. 90–96.
- [217] Radzhabov A. E., Volkov M. K., Kornakov N. G. $\rho(\omega) \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$, $\rho(\omega) \rightarrow \eta\pi^0\gamma$ decays in the local quark nambu–jona-lasinio model // *ЯФ* — 2007. — Т. 71. — С. 1509–1514. —

- [218] Effects of mesonic correlations in the qcd phase transition / D. Blaschke, M. Buballa, A. E. Radzhabov, M. K. Volkov // ЯФ — 2007. — Т. 71. — С. 2012–2018. —
- [219] Osipov A., Radzhabov A., Volkov M. pi pi scattering in a nonlocal chiral quark model // ЯФ — 2007. — Т. 70. — С. 1980–1989.
- [220] Nonlocal PNJL model beyond mean field and the QCD phase transition / A.E. Radzhabov, D. Blaschke, M. Buballa, M.K. Volkov // Phys. Rev. — 2011. — Vol. D83. — P. 116004. —
- [221] Dorokhov A. E., Radzhabov A., Zhevlakov A. Status of the lepton g-2 and effects of hadronic corrections // Письма в ЖЭТФ — 2014. — Т. 100. — С. 141.
- [222] Dorokhov A. E., Radzhabov A. E., Zhevlakov A. S. Dynamical quark loop light-by-light contribution to muon g-2 within the nonlocal chiral quark model // Eur. Phys. J. — 2015. — Vol. C75, no. 9. — P. 417.
- [223] The nonlocal chiral quark model and the muon g - 2 problem / A. E. Dorokhov, A. E. Radzhabov, F. A. Shamakhov, A. S. Zhevlakov // ЭЧАЯ — 2016. — Т. 47— С. 699.
- [224] Mott dissociation of pions and kaons in hot, dense quark matter / D. Blaschke, A. Dubinin, A. Radzhabov, A. Wergieluk // Phys. Rev. D. — 2017. — nov. — Vol. 96, no. 9. —
- [225] Pauli form factor of quark and nontrivial topological structure of the QCD / Baiyang Zhang, Andrey Radzhabov, Nikolai Kochelev, Pengming Zhang // Phys. Rev. — 2017. — Vol. D96, no. 5. — P. 054030. — 1703.04333.
- [226] Noguera S., Scoccola N. N. Nonlocal chiral quark models with wavefunction renormalization: Sigma properties and pi - pi scattering parameters // Phys. Rev. — 2008. — Vol. D78. — P. 114002. — 0806.0818.
- [227] Bowler R. D., Birse M. C. A Nonlocal, covariant generalization of the NJL model // Nucl. Phys. — 1995. — Vol. A582. — P. 655–664. — hep-ph/9407336.
- [228] Terning J. Gauging nonlocal lagrangians // Phys. Rev. — 1991. — Vol. D44. — P. 887–897.

- [229] Kroll N. M. Ad hoc modifications of quantum electrodynamics // Il Nuovo Cimento A (1965-1970). — 1966. — Sep. — Vol. 45, no. 1. — P. 65–92.
- [230] Diakonov D., Petrov V. Yu. A theory of light quarks in the instanton vacuum // Nucl. Phys. — 1986. — Vol. B272. — P. 457–489.
- [231] Pagels H., Stokar S. The pion decay constant, electromagnetic form-factor and quark electromagnetic selfenergy in qcd // Phys. Rev. — 1979. — Vol. D20. — P. 2947.
- [232] Reinhardt H., Alkofer R. Instanton induced flavor mixing in mesons // Phys. Lett. — 1988. — Vol. B207. — P. 482–488.
- [233] Bhagwat M., Pichowsky M. A., Tandy P. C. Confinement phenomenology in the bethe-salpeter equation // Phys. Rev. — 2003. — Vol. D67. — P. 054019.
- [234] Eidelman S. et al. Review of particle physics // Phys. Lett. — 2004. — Vol. B592. — P. 1.
- [235] Adeva B. et al. First measurement of the $\pi^+ \pi^-$ atom lifetime // Phys. Lett. — 2005. — Vol. B619. — P. 50–60. — hep-ex/0504044.
- [236] Batley J. R. et al. Observation of a cusp-like structure in the $p_i^0 p_i^0$ invariant mass distribution from $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0$ decay and determination of the $\pi \pi$ scattering lengths // Phys. Lett. — 2006. — Vol. B633. — P. 173–182. — hep-ex/0511056.
- [237] Pislak S. et al. High statistics measurement of $k(e4)$ decay properties // Phys. Rev. — 2003. — Vol. D67. — P. 072004. — hep-ex/0301040.
- [238] Pelaez J. R., Yndurain F. J. The pion pion scattering amplitude // Phys. Rev. — 2005. — Vol. D71. — P. 074016. — hep-ph/0411334.
- [239] Adeva B. et al. Determination of $\pi\pi$ scattering lengths from measurement of $\pi^+\pi^-$ atom lifetime // Phys. Lett. — 2011. — Vol. B704. — P. 24–29. — 1109.0569.
- [240] Gomez Dumm D., Grunfeld A., Scoccola N. On covariant nonlocal chiral quark models with separable interactions // Phys. Rev. — 2006. — Vol. D74. — P. 054026.

- [241] Grigorian H. Parametrization of a nonlocal, chiral quark model in the instantaneous three-flavor case: Basic formulas and tables // *Phys.Part.Nucl.Lett.* — 2007. — Vol. 4. — P. 223–231.
- [242] Unquenching effects in the quark and gluon propagator / Waseem Kamleh, Patrick O. Bowman, Derek B. Leinweber et al. // *Phys. Rev.* — 2007. — Vol. D76. — P. 094501. — 0705.4129.
- [243] Fischer C. S., Nickel D., Wambach J. Hadronic unquenching effects in the quark propagator // *Phys. Rev.* — 2007. — Vol. D76. — P. 094009. — 0705.4407.
- [244] Contrera G. A., Orsaria M., Scoccola N. N. Nonlocal Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model with wavefunction renormalization at finite temperature and chemical potential // *Phys. Rev.* — 2010. — Vol. D82. — P. 054026. — 1006.4639.
- [245] Width of the QCD transition in a Polyakov-loop DSE model / D. Horvatic, D. Blaschke, D. Klabucar, O. Kaczmarek // *Phys. Rev.* — 2011. — Vol. D84. — P. 016005. — 1012.2113.
- [246] Hell T., Kashiwa K., Weise W. Extensions and further applications of the nonlocal Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model // *Phys. Rev.* — 2011. — Vol. D83. — P. 114008. — 1104.0572.
- [247] Ecker G., Pich A., de Rafael E. Radiative kaon decays and cp violation in chiral perturbation theory // *Nucl. Phys.* — 1988. — Vol. B303. — P. 665–702.
- [248] Yao W. M. et al. Review of Particle Physics // *J. Phys.* — 2006. — Vol. G33. — P. 1–1232.
- [249] Volkov M. K., Osipov A. A. Description of $\omega \rightarrow 3\pi$, $\phi \rightarrow 3\pi$, $\eta \rightarrow \pi + \pi - \gamma$ and $K(L) \rightarrow \pi + \pi - \gamma$ decays within the Nambu-Jona-Lasinio model // *Sov. J. Nucl. Phys.* — 1992. — Vol. 55. — P. 107–110.
- [250] Brodsky S. J., Sullivan J. D. W BOSON CONTRIBUTION TO THE ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT OF THE MUON // *Phys. Rev.* — 1967. — Vol. 156. — P. 1644–1647.

- [251] Chang L., Liu Y.-X., Roberts C. D. Dressed-quark anomalous magnetic moments // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 106. — arXiv : nucl-th/1009.3458v1.
- [252] Fayazbakhsh S., Sadooghi N. Anomalous magnetic moment of hot quarks, inverse magnetic catalysis, and reentrance of the chiral symmetry broken phase // *Phys. Rev.* — 2014. — Vol. D90, no. 10. — P. 105030. — 1408.5457.
- [253] Ilgenfritz E.-M., Shuryak E. V. Quark induced correlations between instantons drive the chiral phase transition // *Phys. Lett.* — 1994. — Vol. B325. — P. 263–266.
- [254] Ilgenfritz E.-M., Shuryak E. V. Chiral Symmetry Restoration at Finite Temperature in the Instanton Liquid // *Nucl. Phys.* — 1989. — Vol. B319. — P. 511–520.
- [255] Schäfer T., Shuryak E. V., Verbaarschot J. J. M. The Chiral phase transition and instanton – anti-instanton molecules // *Phys. Rev.* — 1995. — Vol. D51. — P. 1267–1281.
- [256] Dolan L., Jackiw R. Symmetry Behavior at Finite Temperature // *Phys. Rev.* — 1974. — Vol. D9. — P. 3320–3341.
- [257] Kapusta J. I. *Finite Temperature Field Theory.* — Cambridge Univ. Press., 1999.
- [258] Landsman N. P., van Weert C. G. Real and Imaginary Time Field Theory at Finite Temperature and Density // *Phys. Rept.* — 1987. — Vol. 145. — P. 141.
- [259] Mesons and diquarks in a njl model at finite temperature and chemical potential / D. Ebert, Yu. L. Kalinovsky, L. Munchow, M. K. Volkov // *Int. J. Mod. Phys.* — 1993. — Vol. A8. — P. 1295–1312.
- [260] MOTT N. F. Metal-insulator transition // *Rev. Mod. Phys.* — 1968. — Vol. 40. — P. 677–683.
- [261] Satz H. Color screening in $su(n)$ gauge theory at finite temperature // *Nucl. Phys.* — 1984. — Vol. A418. — P. 447C–465C.

- [262] Mott mechanism and the hadronic to quark matter phase transition / D. Blaschke, F. Reinholz, G. Ropke, D. Kremp // Phys. Lett. — 1985. — Vol. 151B. — P. 439–443.
- [263] Schmidt M., Röpke G., Schulz H. Generalized Beth–Uhlenbeck approach for hot nuclear matter // Annals Phys. — 1990. — Vol. 202. — P. 57–99.
- [264] Ripka G. Quarks bound by chiral fields: The quark-structure of the vacuum and of light mesons and baryons. — 1997.
- [265] Diakonov D., Petrov V. Yu. Instanton based vacuum from feynman variational principle // Nucl. Phys. — 1984. — Vol. B245. — P. 259–292.
- [266] Dorokhov A. E., Tomio L. Pion structure function within the instanton model // Phys. Rev. — 2000. — Vol. D62. — P. 014016.
- [267] Heavy quark anti-quark free energy and the renormalized Polyakov loop / O. Kaczmarek, F. Karsch, P. Petreczky, F. Zantow // Phys.Lett. — 2002. — Vol. B543. — P. 41–47. — hep-lat/0207002.
- [268] Karsch F., Laermann E., Peikert A. The pressure in two flavor, (2+1)-flavor and three flavor qcd // Phys. Lett. — 2000. — Vol. B478. — P. 447–455. — hep-lat/0002003.
- [269] McLerran L., Redlich K., Sasaki C. Quarkyonic matter and chiral symmetry breaking // Nucl. Phys. — 2009. — Vol. A824. — P. 86–100. — 0812.3585.
- [270] Pisarski R. D. Quark gluon plasma as a condensate of su(3) wilson lines // Phys. Rev. — 2000. — Vol. D62. — P. 111501.
- [271] Schaefer B.-J., Pawłowski J. M., Wambach J. The phase structure of the polyakov–quark-meson model // Phys. Rev. — 2007. — Vol. D76. — P. 074023. — 0704.3234.
- [272] Gasser J., Leutwyler H. Light Quarks at Low Temperatures // Phys. Lett. — 1987. — Vol. B184. — P. 83–88.
- [273] Braun J. Thermodynamics of qcd low-energy models and the derivative expansion of the effective action // Phys. Rev. — 2010. — Vol. D81. — P. 016008. — 0908.1543.

- [274] Dual quark condensate and dressed polyakov loops / Erek Bilgici, Falk Bruckmann, Christof Gattringer, Christian Hagen // *Phys. Rev.* — 2008. — Vol. D77. — P. 094007. — 0801.4051.
- [275] Fischer C. S. Deconfinement phase transition and the quark condensate // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 103. — P. 052003. — 0904.2700.
- [276] Kashiwa K., Kouno H., Yahiro M. Dual quark condensate in the polyakov-loop extended njl model // *Phys. Rev.* — 2009. — Vol. D80. — P. 117901. — 0908.1213.
- [277] Mukherjee T. K., Chen H., Huang M. Chiral condensate and dressed polyakov loop in the nambu-jona-lasinio model // *Phys. Rev.* — 2010. — Vol. D82. — P. 034015. — 1005.2482.
- [278] Bazavov A., Petreczky P. Chiral transition and deconfinement transition in qcd with the highly improved staggered quark (hisq) action // *Phys. Part. Nucl. Lett.* — 2011. — Vol. 8. — P. 860–864. — 1009.4914.
- [279] Borsanyi S. et al. Is there still any T_c mystery in lattice QCD? Results with physical masses in the continuum limit III // *JHEP.* — 2010. — Vol. 1009. — P. 073. — 1005.3508.
- [280] Rehberg P., Klevansky S. P., Hufner J. Hadronization in the su(3) nambu-jona-lasinio model // *Phys. Rev.* — 1996. — Vol. C53. — P. 410–429.
- [281] Costa P., Ruivo M. C., Kalinovsky Yu. L. Pseudoscalar neutral mesons in hot and dense matter // *Phys. Lett.* — 2003. — Vol. B560. — P. 171–177.
- [282] Pseudoscalar mesons in hot, dense matter / Pedro Costa, M. C. Ruivo, Yu. L. Kalinovsky, C. A. de Sousa // *Phys. Rev.* — 2004. — Vol. C70. — P. 025204.
- [283] Analysis of the U(A)(1) symmetry-breaking and restoration effects on scalar-pseudoscalar spectrum / Pedro Costa, M. C. Ruivo, C. A. de Sousa, Yu. L. Kalinovsky // *Phys. Rev.* — 2005. — Vol. D71. — P. 116002.
- [284] Scalar-pseudoscalar meson behavior and restoration of symmetries in SU(3) PNJL model / Pedro Costa, M. C. Ruivo, C. A. de Sousa et al. // *Phys. Rev.* — 2009. — Vol. D79. — P. 116003. — arXiv : hep-ph/0807.2134.

- [285] Naskret M., Blaschke D., Dubinin A. Mott-Anderson freeze-out and the strange matter "horn" // Phys. Part. Nucl. — 2015. — Vol. 46, no. 5. — P. 789–793. — 1501.01599.
- [286] Karsch F., Redlich K. Probing freeze-out conditions in heavy ion collisions with moments of charge fluctuations // Phys. Lett. — 2011. — Vol. B695. — P. 136–142. — 1007.2581.
- [287] Gazdzicki M., Gorenstein M. I. On the early stage of nucleus-nucleus collisions // Acta Phys. Polon. — 1999. — Vol. B30. — P. 2705.
- [288] Transition from baryonic to mesonic freeze-out / J. Cleymans, H. Oeschler, K. Redlich, S. Wheaton // Phys. Lett. — 2005. — Vol. B615. — P. 50–54.
- [289] Chiral symmetry restoration in heavy-ion collisions at intermediate energies / A. Palmese, W. Cassing, E. Seifert et al. // Phys. Rev. — 2016. — Vol. C94, no. 4. — P. 044912. — 1607.04073.
- [290] Comparison of chemical freeze-out criteria in heavy-ion collisions / J. Cleymans, H. Oeschler, K. Redlich, S. Wheaton // Phys. Rev. — 2006. — Vol. C73. — P. 034905.
- [291] Kataja M., Ruuskanen P. V. Nonzero chemical potential and the shape of the p_t distribution of hadrons in heavy ion collisions // Phys. Lett. — 1990. — Vol. B243. — P. 181–184.
- [292] Begun V., Florkowski W., Rybczynski M. Explanation of hadron transverse-momentum spectra in heavy-ion collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ tev within chemical non-equilibrium statistical hadronization model // Phys. Rev. — 2014. — Vol. C90, no. 1. — P. 014906. — 1312.1487.
- [293] Chiral condensate and chemical freeze-out / D. B. Blaschke, J. Berdermann, J. Cleymans, K. Redlich // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2011. — Vol. 8. — P. 811–817. — 1102.2908.
- [294] Blaschke D., Jankowski J., Naskret M. Formation of hadrons at chemical freeze-out. — 2017. — 1705.00169.
- [295] Full result for the QCD equation of state with 2+1 flavors / Szabocs Boranyi, Zoltan Fodor, Christian Hoelbling et al. // Phys. Lett. — 2014. — Vol. B730. — P. 99–104. — 1309.5258.

- [296] Bazavov A. et al. Equation of state in (2+1)-flavor qcd // Phys. Rev. — 2014. — Vol. D90. — P. 094503. — 1407.6387.
- [297] Scalar correlations in a quark plasma and low mass dilepton production / D. Blaschke, Yu. L. Kalinovsky, S. M. Schmidt, H. J. Schulze // Phys. Rev. — 1998. — Vol. C57. — P. 438–441. — nucl-th/9709058.
- [298] Jaffe R. L. Multi - quark hadrons. 1. the phenomenology of (2 quark 2 anti-quark) mesons // Phys. Rev. — 1977. — Vol. D15. — P. 267.
- [299] Achasov N. N. Radiative decays of phi meson about nature of light scalar resonances // Phys. Atom. Nucl. — 2004. — Vol. 67. — P. 1529–1535.
- [300] Gerasimov S. B. Sum rules for two-photon decay widths of meson resonances and quark-gluon configuration structure of low-lying scalar mesons // Nucl. Phys. Proc. Suppl. — 2004. — Vol. 126. — P. 210–215.
- [301] Volkov M. K. Quark and gluon condensates in the nambu-jona-lasinio model at finite temperature // Theor. Math. Phys. — 1994. — Vol. 101. — P. 1473–1478.
- [302] Broniowski W., Florkowski W., Hiller B. Matter-induced omega – pi pi decay // Eur. Phys. J. — 2000. — Vol. A7. — P. 287–291. — nucl-th/9905040.
- [303] Hatsuda T., Kunihiro T. The Sigma meson and pi pi correlation in hot/dense medium: Soft modes for chiral transition in QCD // International Workshop on Chiral Fluctuations in Hadronic Matter (CHIRAL 01) Orsay, France, September 26-28, 2001. — 2001. — nucl-th/0112027.
- [304] Teryaev O. Axial anomaly and qcd sum rules // Chin. J. Phys. — 1996. — Vol. 34. — P. 1074–1079.
- [305] Skalozub V. V., Tishchenko A. Y. Photon splitting and photon plasmon interaction in a dense medium. — 1999. — hep-th/9907097.
- [306] Peskin M. E., Schroeder D. V. An Introduction to quantum field theory. — Reading, USA : Addison-Wesley, 1995. — ISBN: 9780201503975, 0201503972.
- [307] Berestetskii V., Krokhin O., Khlebnikov A. Concerning the Radiative Correction to the μ -Meson Magnetic Moment // JETP. — 1956. — Vol. 3, no. 5. — P. 761–762.

- [308] Brodsky S. J., De Rafael E. Suggested boson - lepton pair couplings and the anomalous magnetic moment of the muon // Phys. Rev. — 1968. — Vol. 168. — P. 1620–1622.
- [309] Scaling behavior of quark propagator in full qcd / Maria B. Parappilly, Patrick O. Bowman, Urs M. Heller et al. // Phys. Rev. — 2006. — Vol. D73. — P. 054504. — hep-lat/0511007.
- [310] Goecke T., Fischer C. S., Williams R. Leading-order calculation of hadronic contributions to the muon $g - 2$ using the dyson-schwinger approach // Phys. Lett. — 2011. — Vol. B704. — P. 211–217. — 1107.2588.
- [311] Photon - photon scattering contribution to the sixth order magnetic moments of the muon and electron / Janis Aldins, Toichiro Kinoshita, Stanley J. Brodsky, A. J. Dufner // Phys. Rev. — 1970. — Vol. D1. — P. 2378.
- [312] Light-light scattering tensor and muon anomalous magnetic moment. (in russian) / E. A. Kuraev, Z. K. Silagadze, A. A. Cheshel, A. Schiller // Sov. J. Nucl. Phys. — 1989. — Vol. 50. — P. 264–268.
- [313] Pion polarizabilities at finite temperature / A. E. Dorokhov, M. K. Volkov, J. Hufner et al. // Z. Phys. — 1997. — Vol. C75. — P. 127–135.
- [314] Dorokhov A. E. Pion distribution amplitudes within the instanton model of qcd vacuum // JETP Lett. — 2003. — Vol. 77. — P. 63–67. — hep-ph/0212156.
- [315] Nakamura K. et al. Review of particle physics // J. Phys. — 2010. — Vol. G37. — P. 075021.
- [316] Behrend H. J. et al. A Measurement of the π^0 , eta and eta-prime electromagnetic form-factors // Z. Phys. — 1991. — Vol. C49. — P. 401–410.
- [317] Gronberg J. et al. Measurements of the meson photon transition form factors of light pseudoscalar mesons at large momentum transfer // Phys. Rev. — 1998. — Vol. D57. — P. 33–54. — hep-ex/9707031.
- [318] Aubert B. et al. Measurement of the $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ transition form factor // Phys. Rev. — 2009. — Vol. D80. — P. 052002. — 0905.4778.

- [319] del Amo Sanchez P. et al. Measurement of the $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta$ and $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta'$ transition form factors // Phys. Rev. — 2011. — Vol. D84. — P. 052001. — 1101.1142.
- [320] Measurement of $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ transition form factor at Belle / The Belle Collaboration, S. Uehara, Y. Watanabe et al. // Phys. Rev. — 2012. — Vol. D86. — P. 092007. — arXiv : hep-ex/1205.3249.
- [321] Nyffeler A. Hadronic light-by-light scattering in the muon g-2: A new short-distance constraint on pion exchange // PoS. — 2009. — Vol. CD09. — P. 080. — 0912.1441.
- [322] Dorokhov A. E. Rare decay $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ as a Test of Standard Model // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2010. — Vol. 7. — P. 229–234. — 0905.4577.
- [323] Dorokhov A. E. How the recent babar data for $p \rightarrow \gamma\gamma^*$ affect the standard model predictions for the rare decays $p \rightarrow l^+l^-$ // JETP Lett. — 2010. — Vol. 91. — P. 163–169. — 0912.5278.
- [324] Brodsky S. J., Lepage G. P. Large Angle Two Photon Exclusive Channels in Quantum Chromodynamics // Phys. Rev. — 1981. — Vol. D24. — P. 1808.
- [325] Use and misuse of qcd sum rules, factorization and related topics / V. A. Novikov, Mikhail A. Shifman, A. I. Vainshtein et al. // Nucl. Phys. — 1984. — Vol. B237. — P. 525–552.
- [326] Vainshtein A. Perturbative and nonperturbative renormalization of anomalous quark triangles // Phys. Lett. — 2003. — Vol. B569. — P. 187–193.
- [327] Dorokhov A. E. Singlet $V A \cdot V$ correlator within the instanton vacuum model // JETP Lett. — 2005. — Vol. 82. — P. 1–6.
- [328] Davydychev A. I., Tausk J. B. A magic connection between massive and massless diagrams // Phys. Rev. — 1996. — Vol. D53. — P. 7381–7384.
- [329] Hayakawa M., Kinoshita T. Pseudoscalar pole terms in the hadronic light by light scattering contribution to muon g - 2 // Phys. Rev. — 1998. — Vol. D57. — P. 465–477.

- [330] Bijnens J., Pallante E., Prades J. Comment on the pion pole part of the light by light contribution to the muon $g-2$ // Nucl. Phys. — 2002. — Vol. B626. — P. 410–411.
- [331] Goecke T., Fischer C. S., Williams R. Hadronic light-by-light scattering in the muon $g-2$: a Dyson-Schwinger equation approach // Phys. Rev. — 2011. — Vol. D83. — P. 094006. — 1012.3886.
- [332] Bijnens J., Prades J. The hadronic light-by-light contribution to the muon anomalous magnetic moment: Where do we stand? // Mod. Phys. Lett. — 2007. — Vol. A22. — P. 767–782.
- [333] Pion and sigma meson properties in a relativistic quark model / Amand Faessler, T. Gutsche, M. A. Ivanov et al. // Phys. Rev. — 2003. — Vol. D68. — P. 014011.
- [334] Bijnens J., Pallante E., Prades J. Analysis of the hadronic light by light contributions to the muon $g-2$ // Nucl.Phys. — 1996. — Vol. B474. — P. 379–420.
- [335] Blokland I. R., Czarnecki A., Melnikov K. Pion pole contribution to hadronic light by light scattering and muon anomalous magnetic moment // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 88. — P. 071803.
- [336] Hadronic light by light scattering contribution to the muon $g-2$: An effective field theory approach / M. Knecht, Andreas Nyffeler, M. Perrottet, E. de Rafael // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 88. — P. 071802.
- [337] Ohta K. Electromagnetic interactions of extended nucleons // Phys. Rev. — 1989. — Vol. C40. — P. 1335–1346.
- [338] Ivanov M. A., Locher M. P., Lyubovitskij V. E. Electromagnetic form-factors of nucleons in a relativistic three quark model // Few Body Syst. — 1996. — Vol. 21. — P. 131.
- [339] Liao Y. Some issues in a gauge model of unparticles // Eur. Phys. J. — 2009. — Vol. C60. — P. 125–134. — 0804.4033.
- [340] McClure J. A., Drell S. D. Analyses of muon electrodynamic test // Nuovo Cim. — 1965. — Vol. 37. — P. 1638–1646.

- [341] Kazes E. Generalized current conservation and low energy limit of photon interactions // *Il Nuovo Cimento* (1955-1965). — 1959. — Sep. — Vol. 13, no. 6. — P. 1226–1239.
- [342] Chang N. P., Mani H. S. Possible effects of strong interactions in feinberg-pais theory of weak interactions. ii // *Phys. Rev.* — 1964. — May. — Vol. 134. — P. B896–B900.
- [343] Burden C. J., Roberts C. D. Light cone regular vertex in quenched qed in three-dimensions // *Phys. Rev.* — 1991. — Vol. D44. — P. 540–550.
- [344] Blankleider B., Kvinikhidze A. N., Silagadze Z. K. Gauge invariant formulation of 3γ decay of particle-antiparticle bound states // *Phys. Rev.* — 2015. — Vol. D92, no. 4. — P. 045032. — 1410.6216.
- [345] Haberzettl H. Gauge invariant theory of pion photoproduction with dressed hadrons // *Phys. Rev.* — 1997. — Vol. C56. — P. 2041–2058. — nucl-th/9704057.
- [346] Efimov G. V., Ivanov M. A. Radiative decays of vector mesons in the nonlocal quark model. — 1977. — JINR-E2-11065.