

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

На правах рукописи



Панасенко Любовь Алексеевна

Исследование влияния эффекта Герценштейна на спектр реликтовых гравитационных волн

Специальность 1.3.3 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Долгов Александр Дмитриевич
член-корреспондент РАН

Новосибирск — 2026

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Гравитационные волны	13
1.1 Определение и источники гравитационных волн (ГВ)	13
1.2 История развития теории ГВ	14
1.3 Открытие ГВ	16
1.4 Методы и задачи регистрации ГВ	18
1.5 Современный статус гравитационно-волновой теории	23
1.6 Формализм описания ГВ	25
1.7 Уравнение движения ГВ в расширяющейся Вселенной	34
1.8 Инфляция и реликтовые гравитационные волны	35
1.9 Наблюдательные ограничения на реликтовые гравитационные волны	40
Глава 2. Эффект Герценштейна и космологическое магнитное поле	44
2.1 Эффект Герценштейна	44
2.1.1 Действие Гейзенберга-Эйлера	47
2.2 Крупномасштабное космическое магнитное поле	48
2.2.1 Модели магнитогенезиса	49
2.2.2 Следы первичного магнитного поля (ПМП) на космическом микроволновом фоне	51
2.2.3 Влияние ПМП на первичный нуклеосинтез	55
2.2.4 Влияние ПМП на формирование крупномасштабной структуры	57
2.2.5 Влияние ПМП на гало вокруг активных ядер галактик	57
2.2.6 Модель стохастического магнитного поля	58
Выводы из литературного обзора, мотивация и цель исследования	61
Глава 3. Система уравнений для эффекта Герценштейна	62
3.1 Уравнение распространения ГВ в произвольном непустом искривленном пространстве-времени	62

	Стр.
3.1.1	Обозначения 64
3.1.2	Вывод уравнения 64
3.1.3	Смешивание мод возмущений метрики 67
3.2	Система уравнений для эффекта Герценштейна в общем случае фоновой метрики 69
3.2.1	Обозначения 69
3.2.2	Уравнения для возмущений метрики 71
3.2.3	Уравнения для электромагнитной волны 73
3.3	Система уравнений для эффекта Герценштейна на фоне метрики ФЛРУ 75
3.3.1	Уравнения для возмущений метрики 78
3.3.2	Уравнения для электромагнитной волны 80
Глава 4. Решение системы $g - \gamma$ на фоне метрики ФЛРУ в приближении однородного космологического магнитного поля 82	
4.1	Два случая направления распространения гравитационной волны 82
4.1.1	$\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ 82
4.1.2	$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ 84
4.1.3	Генерация скалярных возмущений метрики 87
4.2	Решение для длинных реликтовых ГВ 92
4.3	Решение для коротких реликтовых ГВ 94
4.3.1	Аналитическое решение 97
4.3.2	Решение в пределе $\beta \rightarrow 1$ 101
4.3.3	Результат решения задачи Коши 102
4.4	Модель стохастического космологического магнитного поля . . . 104
4.5	Эффект взаимодействия с плазмой 109
Глава 5. Гравитационная волна в коллапсирующем асферичном пылевом облаке 111	
5.1	Описание процесса 112
5.2	Начальные значения в задаче 114
5.3	Система уравнений 115
5.4	Параметры в задаче 119

	Стр.
5.5 Решение системы уравнений	121
5.6 Выводы	126
Заключение	128
Приложение А. Основные модели инфляции	148
Приложение Б. Про поднятие и опускание индексов в уравнении Эйнштейна	154
Приложение В. Анизотропия пространства с однородным космологическим полем	155
Приложение Г. Поправка к электромагнитному ТЭИ из действия Гейзенберга–Эйлера	159
Приложение Д. Уравнение для метрических возмущений для фонового ТЭИ в модели идеальной жидкости	161

Введение

Исследование гравитационных волн (ГВ) астрофизического и космологического происхождения приобретает все большую актуальность. Впервые предсказанные общей теорией относительности в 1915 году [1; 2], они были экспериментально зарегистрированы лишь сто лет спустя — в 2015 году с помощью лазерного интерферометра LIGO [3].

ГВ — это тензорные возмущения фонового пространства-времени, которые удовлетворяют волновому уравнению и распространяются со скоростью света.

Как известно, астрофизические ГВ излучаются двойными системами массивных компактных объектов (черных дыр и нейтронных звезд). Космологические ГВ возникают в процессах космологического масштаба: в результате усиления квантовых флуктуаций гравитационного поля в эпоху космологической инфляции [4; 5].

Теория инфляции была предложена для решения проблем теории горячего Большого взрыва: проблем плоскостности, однородности и изотропности Вселенной, энтропии и первичных неоднородностей (Гл. 11 книги [6]). Данная теория предполагает расширение Вселенной по квази-экспоненциальному закону в течение короткого временного интервала между планковским временем и началом эпохи разогрева Вселенной.

Одна из основных целей теории инфляции — согласовать теоретически предсказываемый спектр первичных скалярных возмущений метрики с наблюдаемым. Это важно, так как именно скалярные возмущения метрики становятся в дальнейшем центрами формирования крупномасштабной структуры (гл. 7 книги [6]). Однако наиболее простые модели инфляции предсказывают также рождение тензорных метрических возмущений — реликтовых гравитационных волн — достаточно большой амплитуды. Такие ГВ должны были оставить отпечаток на фоне реликтового излучения. Тем не менее, обнаружить этот след до сих пор не удается [7].

Одно из возможных решений существующего противоречия между теоретическими предсказаниями и наблюдениями — разработка более сложных моделей инфляции (см., например, работы [8; 9]).

В диссертации предлагается рассмотреть проблему с другой стороны: проверить гипотезу об изменении спектра реликтовых гравитационных волн

вследствие эффекта их конверсии в электромагнитные волны под действием космологического магнитного поля.

Эффект конверсии был впервые рассмотрен Герценштейном в 1961 году [10; 11] для перехода электромагнитной волны в гравитационную под действием внешнего магнитного поля. Обратный эффект Герценштейна в астрофизике рассмотрен в работах [12—15]. Особый интерес представляет статья [16], где обратный эффект Герценштейна изучается в контексте реликтового гравитационно-волнового фона.

Все вышеперечисленные работы ограничивались задачей взаимных превращений электромагнитной и гравитационной волн на фоне плоского пространства-времени Минковского. Однако в космологическом случае необходимо учитывать зависимость амплитуды реликтовых ГВ, а также напряженности магнитного поля от масштабного фактора. Поэтому в диссертации была поставлена задача исследования обратного эффекта Герценштейна на фоне расширяющегося пространства-времени Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера (ФЛРУ).

Важно пояснить природу внешнего магнитного поля, с которым взаимодействуют реликтовые ГВ — это крупномасштабное межгалактическое магнитное поле (космологическое магнитное поле). Есть экспериментальные подтверждения того, что межгалактическое пространство заполнено магнитным полем [17—21]. Таким образом, магнитное поле присутствует в областях, где текущих источников нет.

Гипотезы формирования крупномасштабного магнитного поля можно разделить на два класса: астрофизические и космологические. В основе астрофизических моделей лежит идея «выдувания» магнитного поля из галактик (в первую очередь, из галактик с активным звездообразованием) [22; 23].

В диссертации рассмотрены только космологические модели, которые базируются на идеях генерации магнитного поля в процессах космологического масштаба, таких как инфляция или фазовые переходы первого рода, с последующим усилением внутри галактик и кластеров эффектом магнитогидродинамического динамо [21; 24].

Несмотря на то, что общепринятой теории магнитогенезиса еще нет, точно известно, что крупномасштабное межгалактическое магнитное поле существует, а также есть верхнее и нижнее ограничения на его напряженность, полученные из анализа наблюдательных данных об анизотропии и поляризации реликто-

вого излучения, параметров крупномасштабной структуры, данных о форме фотонного гало вокруг блазаров и др. [21; 25; 26].

Напряженность магнитного поля в расширяющейся Вселенной меняется по закону $B = \frac{B_0}{a(t)^2}$, где $a(t)$ — масштабный фактор, B_0 — константа. Это означает, что при движении вспять во времени, напряженность космологического магнитного поля растет относительно современного значения. Это может приводить к достаточно большому значению коэффициента конверсии гравитационных волн в электромагнитные и, следовательно, к изменению амплитуды реликтовых ГВ. А вследствие того, что коэффициент конверсии зависит от частоты ГВ, может значительно измениться наклон спектра n_T реликтовых ГВ — один из главных параметров, по измерению которого возможна проверка теории и выбор наиболее правдоподобной модели инфляции. Поэтому учет обратного эффекта Герценштейна для реликтовых ГВ может иметь важное значения для верной трактовки наблюдательных данных и сопоставления их с теоретическими предсказаниями.

Целью данной работы является оценка влияния на спектр реликтовых гравитационных волн эффекта их конверсии в электромагнитные волны под действием космологического магнитного поля.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Вывод уравнения распространения возмущений метрики на фоне произвольного искривленного непустого пространства-времени.
2. Вывод системы дифференциальных уравнений, в общем виде описывающей распространение связанной системы возмущений метрики и электромагнитных волн в присутствии внешнего магнитного поля на фоне произвольного непустого искривленного пространства-времени.
3. Оценка влияния петлевой поправки, происходящей из эффективного действия Гейзенберга-Эйлера.
4. Рассмотрение конверсии реликтовых гравитационных волн в электромагнитные волны на фоне метрики ФЛРУ в упрощающем предположении однородности космологического магнитного поля.
5. Решение системы дифференциальных уравнений для обеих поляризацій гравитационной волны на временном интервале, соответствующем стадии радиационного доминирования, в случаях параллельного и перпендикулярного распространения гравитационной волны по отношению к однородному внешнему магнитному полю.

6. Оценка влияния неоднородности космологического магнитного поля.

Научная новизна:

1. Впервые получена система дифференциальных уравнений для обратного эффекта Герценштейна на фоне произвольного пространства-времени.
2. Впервые решена система уравнений для эффекта Герценштейна на фоне метрики ФЛРУ.
3. Впервые произведена оценка изменения спектра реликтовых гравитационных волн вследствие их перехода в фотоны при взаимодействии с космологическим магнитным полем.
4. Рассмотрен эффект смешивания гравитационных волн со скалярными метрическими возмущениями при прохождении гравитационной волны через асферичное облако при формировании структур во Вселенной Фридмана.

Практическая значимость

Учет эффекта изменения амплитуды реликтовых ГВ за счет их конверсии в фотоны под действием космологического магнитного поля может быть существенен при вычислении спектра реликтовых ГВ. Действительно, ограничения на амплитуду реликтовых гравитационных волн в момент их зарождения будут более точными, если сделать поправку на степень их изменения в более поздние этапы эволюции Вселенной. Таким образом, проделанное исследование позволяет приблизиться к решению проблемы выбора модели одного из самых ранних этапов жизни Вселенной — инфляции, а также сделать более точные предсказания детектируемости реликтовых гравитационных волн в современной Вселенной.

Задача о переходе гравитационной волны в скалярные метрические возмущения в асферичных структурах во Вселенной Фридмана показывает о возможном значительном влиянии конверсии на амплитуду гравитационных волн. Так, гравитационные волны могут распространяться на фоне анизотропной метрики не только в формирующихся «блинах» Зельдовича, но и в других физически реалистичных случаях, а сами гравитационные волны могут быть не только космологического происхождения. Например, ГВ от слияния черных дыр может распространяться вблизи центра массивной галактики. Из-за смешивания мод будет происходить изменение амплитуды начального гравитационно-волнового сигнала, возникнет эффективная масса гравитона. Учет такого эффекта имеет важное значение при анализе гравитационно-волновых сигналов, пришедших на Землю.

Еще один практически применимый результат — полученная система уравнений связанного распространения возмущений метрики и электромагнитных волн в общем виде. Система может быть использована для случая любого фонового пространства-времени и для различных значений внешнего магнитного поля произвольной природы. Например, интересна задача о конверсии гравитационных волн в электромагнитные волны при распространении первых в окрестности намагниченных объектов (магнетаров, двойных систем нейтронных звезд, намагниченных облаков и т.п.). Уже проводились качественные оценки [27] конверсии гравитационных волн в фотоны для подобных задач, но в приближении плоского фонового пространства-времени. Полученная в работе система уравнений позволяет рассмотреть фоновую метрику Шварцшильда или Керра, что дает более точное описание конверсии вблизи массивного объекта.

Методология и методы исследования

В работе использованы классические методы теории поля и теории гравитации. В частности, применен подход линейной теории возмущений в общей теории относительности с разложением возмущений метрики по спиральностям.

Дифференциальные уравнения, описывающие эффект Герценштейна, проанализированы и решены в ключевых случаях перпендикулярного и параллельного направления волнового вектора \mathbf{k} гравитационной волны относительно внешнего магнитного поля \mathbf{B} ; а также в случаях низких и высоких частот гравитационной волны. В случае низких частот система решена численно неявной схемой Рунге-Кутты пятого порядка. В случае высоких частот составлена и аналитически решена задача Коши.

В последней главе диссертации в качестве приближенной теории нелинейного коллапса пылевого облака применена теория Зельдовича.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В модели однородного, адиабатически изменяющегося космологического магнитного поля с современной напряженностью 1 нГс эффект Герценштейна к концу эпохи доминирования релятивистского вещества для h_{\times} -поляризации при $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ приводит к усилению в 10 раз амплитуды реликтовых гравитационных волн с частотами 10^{-10} Гц $\lesssim k < 10^{-7}$ Гц и к усилению в 300 раз для волн с частотами $k \gtrsim 10^{-7}$ Гц;
2. В модели стохастического магнитного поля с длиной когерентности, соответствующей современному значению ≥ 10 Мпк, оценки, которые

получены в модели однородного космологического магнитного поля, остаются верными;

3. Реликтовые гравитационные волны любой поляризации и направления волнового вектора относительно \mathbf{B} , вследствие наличия космологического магнитного поля, приобретают эффективную массу, из-за чего их амплитуда увеличивается относительно получаемой в космологии Фридмана без учета магнитного поля. К концу эпохи доминирования излучения усиление составляет порядка 0.01% для частот $10^{-18} \leq k \leq 10^{-14}$ Гц, порядка 0.1% для $10^{-13} \leq k \leq 10^{-12}$ Гц и порядка 0.5% для $k = 10^{-11}$ Гц;
4. Прохождение гравитационной волны с частотой 10^{-13} Гц через одно коллапсирующее анизотропное облако с параметрами, характерными для скопления галактик в эпоху доминирования нерелятивистского вещества, приводит к изменению амплитуды гравитационной волны на доли процента. Этот эффект обусловлен смешиванием тензорной и скалярной моды метрических возмущений на фоне анизотропного пространства. В диапазоне $10^{-9} - 10^{-6}$ Гц влияние одного облака масштаба скопления галактик оказывается практически нулевым: $\sim 10^{-9}$.

Достоверность полученных результатов основана на использовании общепринятых методов получения уравнений в теории гравитации и в физике элементарных частиц. Исследуемые уравнения в предельных случаях совпадают с результатами, ранее опубликованными другими авторами. В частности, система уравнений для эффекта Герценштейна, полученная для произвольной фоновой метрики, в случае плоского пространства-времени переходит в систему, полученную в работах [10; 11; 15; 16]. Основные результаты диссертации опубликованы в рецензируемых изданиях, неоднократно обсуждались на семинарах и конференциях.

Апробация работы

Основные результаты работы опубликованы в семи статьях и были представлены на следующих конференциях и школах: The 20st Lomonosov conference on elementary particle physics (2021), Hot topics in Modern Cosmology SPONTANEOUS WORKSHOP XV (2023), The XXVII International Scientific Conference of Young Scientists and Specialists (2023), VI Международная зимняя школа-семинар по гравитации, астрофизике и космологии «Петровские чтения –

2023» (2023), Moscow International School on Physics (2024), МНСК-2024 (2024), Hot topics in Modern Cosmology SPONTANEOUS WORKSHOP XVI (2024).

Личный вклад

Автор самостоятельно производила вывод систем уравнений, их анализ и численное решение, принимала непосредственное участие в получении аналитического решения системы дифференциальных уравнений, описывающих эффект Герценштейна на фоне метрики ФЛРУ, самостоятельно выполняла все необходимые оценки влияния различных эффектов на окончательный результат. Соискатель участвовала в обсуждениях результатов с соавторами и в подготовке публикаций по теме диссертационной работы, презентовала устные и стендовые доклады на конференциях.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в семи статьях в рецензируемых научных изданиях, четыре из которых индексируются в базах Web of Science и относятся к первому, второму и четвертому квартилям.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и 0 приложений. Полный объем диссертации составляет 161 страницу, включая 25 рисунков и 3 таблицы. Список литературы содержит 145 наименований.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Arbuzova E. V.* On Graviton Propagation in Curved Space-Time Background / E. V. Arbuzova, A. D. Dolgov, L. A. Panasenکو // J. Exp. Theor. Phys. — 2022. — Vol. 135, no. 3. — P. 304—311. — DOI: 10.1134/S1063776122090126. — arXiv: 2011.07594 [gr-qc].
2. *Panasenko L.* Gravitational Waves over Arbitrary Background / L. Panasenکو // Moscow Univ. Phys. Bull. — 2022. — Vol. 77, no. 2. — P. 336—337. — DOI: 10.3103/S0027134922020746.
3. *Dolgov A. D.* Graviton to Photon Conversion in Curved Space-Time and External Magnetic Field / A. D. Dolgov, L. A. Panasenکو, V. A. Bochko // Universe. — 2024. — Vol. 10, no. 1. — P. 7. — DOI: 10.3390/universe10010007. — arXiv: 2310.19838 [gr-qc].
4. *Arbuzova E. V.* Opening of New Windows to the Early Universe by Means of Multi-Messenger Astronomy (Brief Review) / E. V. Arbuzova, K. A. Dolgikh, A. D. Dolgov [et al.] // JETP Lett. — 2024. — Vol. 119, no. 7. — P. 485—494. — DOI: 10.1134/S0021364024600629.
5. *Панасенко Л. А.* Конверсия гравитационных волн в электромагнитные под действием космологического магнитного поля на фоне вселенной Фридмана / Л. А. Панасенко, А. Д. Долгов // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2023. — С. 13.
6. *Panasenko L.* Relic Gravitational Wave Conversion into Photons in the Cosmological Magnetic Field / L. Panasenکو // Physics of Particles and Nuclei Letters. — 2024. — Aug. — Vol. 21. — P. 590—592. — DOI: 10.1134/S1547477124700675.
7. *Panasenko L. A.* Conversion of high-frequency relic gravitational waves into photons in cosmological magnetic field / L. A. Panasenکو, A. O. Chetverikov // Eur. Phys. J. Plus. — 2024. — T. 139, № 12. — С. 1087. — DOI: 10.1140/epjp/s13360-024-05882-w. — arXiv: 2409.07063 [gr-qc].

Глава 1. Гравитационные волны

1.1 Определение и источники гравитационных волн (ГВ)

Гравитационные волны (ГВ) — это возмущения пространства-времени, которые отрываются от источника и распространяются в вакууме со скоростью света [28]. Более формальное определение будет дано в разделе 1.6.

ГВ излучаются системами массивных объектов с переменным во времени ускорением. Источники гравитационных волн делятся на два типа: астрофизические и космологические. Астрофизические ГВ являются наиболее интенсивными. Они излучаются двойными системами компактных массивных объектов, вращающихся вокруг общего центра масс. Например, двойными черными дырами, двойными нейтронными звездами и системами черная дыра-нейтронная звезда. Схематично процесс излучения ГВ представлен на рис. 1.

Вообще говоря, гравитационные волны испускаются системами любых астрономических объектов, например, системами солнцеподобных звезд и системами планет. Такие ГВ слишком слабы, чтобы быть зарегистрированными или заметно влиять на эволюцию систем¹, поэтому их практически не рассматривают. Однако, предполагается, что будущие космические интерферометры будут чувствительны к ГВ от систем двойных белых карликов — прародителей взрывов сверхновых типа Ia.

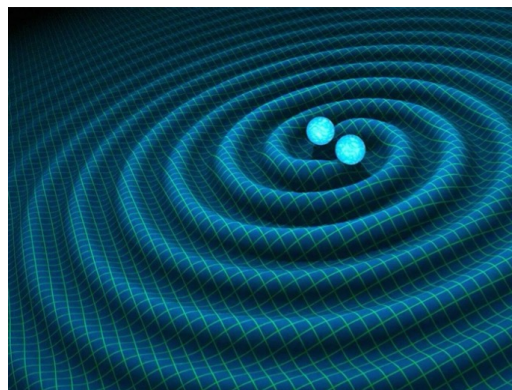


Рисунок 1 — Схематическое изображение излучения гравитационных волн двойной системой черных дыр

¹Излучение ГВ приводит к уменьшению энергии системы, поэтому объекты сближаются. Однако этот эффект значителен только для очень массивных объектов (см. параграф 110 в книге [29])

К астрофизическим источникам ГВ относятся также взрывы сверхновых любого типа. Важно, что для излучения ГВ необходим сферически-несимметричный взрыв. Пока амплитуды таких ГВ находятся вне области чувствительности действующих детекторов.

К космологическим гравитационным волнам относят первичные ГВ. Они могли возникнуть вследствие усиления квантовых флуктуаций гравитационного потенциала при ускоренном расширении Вселенной во время инфляции (см. раздел 1.8) [30; 31]. Также заметный вклад в спектр первичных ГВ могли дать процессы столкновения пузырей новой фазы при фазовых переходах первого рода (см., например, [30—34]). Такие переходы возможны только за пределами Стандартной Модели физики частиц, т.к. в Стандартной Модели электрослабый фазовый переход и переход квантовой хромодинамики являются гладким кроссовером. В диссертации рассмотрены только инфляционные реликтовые ГВ.

1.2 История развития теории ГВ

Общая теория относительности (ОТО) была сформулирована в 1915 году Альбертом Эйнштейном [35]. Одним из центральных уравнений ОТО является уравнение гравитации, в котором тяготение, согласно общей идее ОТО, описывается как проявление кривизны пространства-времени. Это уравнение нелинейное. Однако, если рассмотреть задачу о возмущении на фоне, например, плоского пространства-времени, это уравнение можно линеаризовать.

Проделав эти выводы, А. Эйнштейн обнаружил, что у таких уравнений есть вакуумное волновое решение. Вообще говоря, существует класс таких решений. У самого А. Эйнштейна были сомнения по поводу реального существования гравитационных волн. Неясны были и ответы на вопросы о скорости их распространения и о том, переносят ли такие волны энергию.

В 1936 году А. Эйнштейн вместе со своим ассистентом Розеном подготовили работу, в которой они искали точное решение для гравитационных волн и получили сингулярность. На основе этого результата авторы сделали вывод, что гравитационные волны — чисто математическая конструкция, которая не имеет ничего общего с реальностью. Статья не была принята к печати, так как рецензенты посчитали, что в ней содержится ошибка [36].

В 1955 году Натан Розен пытался доказать, что гравитационные волны не переносят энергию, а потому не являются реальными. Однако Феликсу Пирани удалось получить волновое решение, не зависящее от выбора координат. Работа была представлена на конференции в Чапел-Хилл в 1957 году и получила поддержку научного сообщества. В том числе поддержал ее и Ричард Фейнман [36].

Далее возникла другая сложность — крайне слабая амплитуда гравитационных волн. Трудно было себе представить объекты, которые излучали бы потенциально регистрируемый сигнал.

Несмотря на то, что в 1916 году Шварцшильд получил точное решение уравнений Эйнштейна, которое описывает черную дыру, А. Эйнштейн в существование черных дыр не верил, и поэтому не рассматривал двойные системы таких объектов как потенциальные источники мощных гравитационных волн [37].

Противоречивая история теории черных дыр заслуживает отдельного обзора, что выходит за рамки тематики проводимого исследования. Отметим лишь, что окончательно теория черных дыр была сформулирована в 1960-е годы [37]. Тогда представилось возможным предсказать форму гравитационно-волнового сигнала от слияния двойной системы черных дыр, после чего Кип Торн, Рональдо Древер и Райнер Вайсс начали проектировать эксперимент LIGO. Саму идею использования интерферометра Майкельсона для прямой регистрации гравитационных волн в 1962 году впервые предложили В. И. Пустовойт и М. Е. Герценштейн [38].

Первая регистрация гравитационных волн в 2015 году [39] (рис. 2), по сути, является доказательством существования и черных дыр. Таким образом, ученые, опираясь на два недоказанных факта о существовании гравитационных волн и черных дыр, построили сложную и дорогостоящую экспериментальную установку, разработали метод реконструкции сигнала, и, в конце концов, одновременно удостоверились в верности обоих теоретических выводов ОТО.

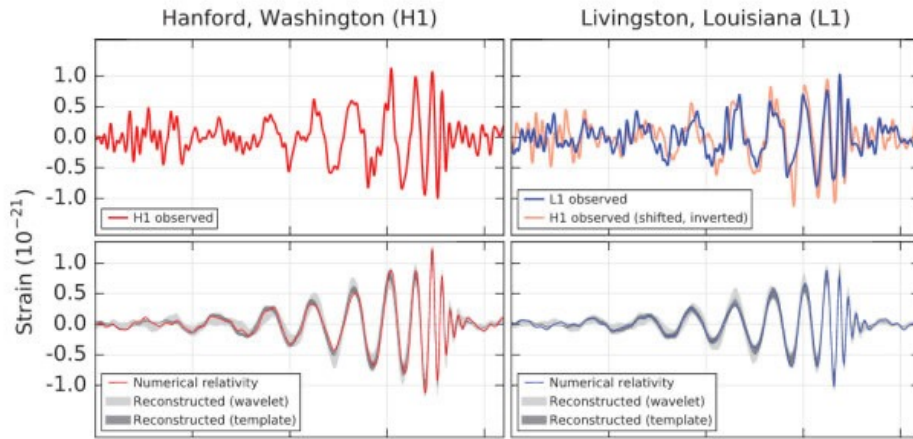


Рисунок 2 — Гравитационно-волновой сигнал двух интерферометров LIGO в 2015 году

1.3 Открытие ГВ

История попыток регистрации гравитационных волн начинается с 1960-х годов. Первые косвенные подтверждения предсказаний гравитационно-волновой теории ОТО были получены в 1993 году, когда астрономы Халс и Тейлор открыли двойные системы пульсаров, по которым можно изучать гравитацию [40].

Пульсар — это вращающаяся нейтронная звезда с джетом. Ось вращения пульсара не совпадает с направлением выброса частиц и фотонов, поэтому пульсары генерируют характерный периодический радиосигнал, регистрируемый на Земле. Наблюдения за скоростью сближения компаньонов в таких двойных системах хорошо согласовывались с предсказаниями ОТО для темпа сближения из-за потерь энергии на излучение гравитационных волн.

Напрямую гравитационные волны возможно зарегистрировать гравитационно-волновым интерферометром. Его схема приведена на рис. 3. Искажения пространства приводят к малому изменению длины плеч интерферометра, из-за чего длина пути лазерного луча по одному и другому плечу различается, что влияет на интерференционную картину, получаемую при пересечении лучей. Высокая точность измерения относительного изменения расстояний (до 10^{-23}) достигается за счет многократного отражения света от практически идеально гладких зеркал, установленных в начале и конце каждого плеча.

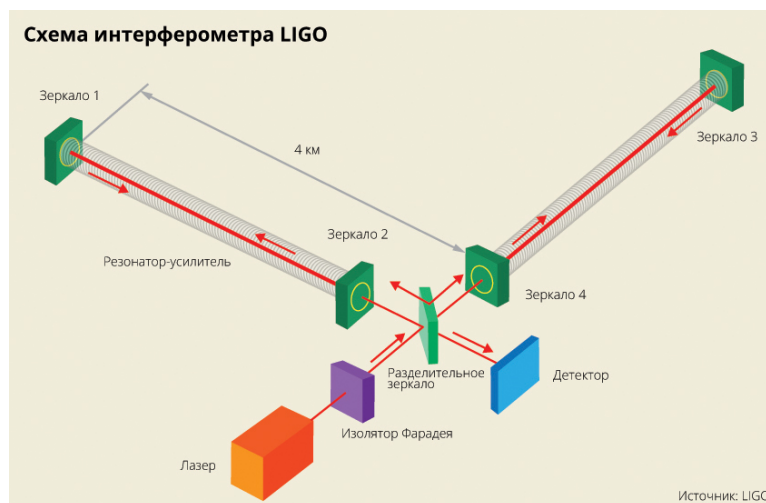


Рисунок 3 — Схема гравитационно-волнового интерферометра

В 2002 году был запущен эксперимент LIGO (рис. 4). Он включает в себя два удаленных детектора: один расположен в Хэнфорде, другой — в Ливингстоне [41]. После очередной модернизации LIGO впервые зарегистрировал гравитационные волны 14 сентября 2015 года обоими лазерными интерферометрами. Через два года за экспериментальное открытие гравитационных волн была присуждена Нобелевская премия.

Важно отметить признанный мировым сообществом существенный вклад российских ученых в разработку физических основ гравитационно-волновых интерферометров. В частности, в коллаборацию LIGO входили две российские группы: из МГУ им. Ломоносова под руководством В.Б. Брагинского, а также группа из Института прикладной физики.

Еще в 1960-х годах В.Б. Брагинский заложил теоретические основы поиска гравитационных сигналов, предсказав существование стандартного квантового предела точности измерений и разработав концепцию квантовых неразрушающих измерений [42; 43]. Под его руководством московская группа коллаборации LIGO выполнила исследования по подавлению фундаментальных шумов: были предложены уникальные подвесы пробных масс на кварцевых нитях, изучены термодинамические флуктуации в зеркалах и предсказан эффект параметрической неустойчивости [44; 45]. Эти разработки стали неотъемлемой частью конструкции детекторов Advanced LIGO, достигших чувствительности, достаточной для регистрации гравитационных волн от слияния черных дыр.



Рисунок 4 — Гравитационно-волновой интерферометр LIGO (Хэнфорд)

Продолжением методологии, заложенной В.Б. Брагинским, стал проект оптоакустического детектора ОГРАН, развернутый в Баксанской нейтринной обсерватории в России. Несмотря на ограниченную чувствительность 10^{-19} , достаточную лишь для регистрации событий в ближайших окрестностях Галактики, установка представляет интерес как элемент многоканальной астрономии. Совместно с нейтринным телескопом БПСТ² она используется для отработки методик поиска «нейтрино-гравитационных совпадений» от вспышек сверхновых [46].

1.4 Методы и задачи регистрации ГВ

В настоящее время гравитационные волны астрофизического происхождения регистрируются сетью интерферометров — помимо LIGO, анализируются одновременно сигналы с детектора Virgo в Японии и KAGRA в Индии [41; 47]. Такие наблюдения позволяют с хорошим разрешением восстанавливать локализацию слившейся двойной системы черных дыр или нейтронных звезд. К тому же гравитационно-волновая астрономия позволяет изучать свойства черных дыр и нейтронных звезд, а также проверять теоретические предсказания и принципы ОТО. Количество зарегистрированных к настоящему дню слияний черных дыр превышает сотню.

Многоканальные наблюдения слияний нейтронных звезд, подобные событию GW170817 2017 года, когда помимо гравитационно-волнового сигнала удалось наблюдать электромагнитный сигнал, становятся особенно ценными [48;

²Баксанский подземный сцинтилляционный телескоп

49]. На данный момент зарегистрировано только одно такое событие. Редкость обусловлена двумя причинами.

Первая заключается в том, что электромагнитное излучение килоновой сосредоточено в узком конусе вокруг джета — струи вещества, выбрасываемой вдоль оси вращения образующейся при слиянии нейтронной звезды или черной дыры. Так, в событии GRB170817³ угол раствора гамма-излучения составил в диаметре величину порядка 30 градусов. Таким образом, вероятность того, что излучение будет направлено в сторону Земли, не очень велика.

Вторая причина редкой многоканальной регистрации килоновых связана с тем, что их энерговыделение в электромагнитном канале меньше на один-три порядка, чем энерговыделение в гравитационно-волновом канале.

В целом, слияния нейтронных звезд порождают гравитационные волны меньшей амплитуды по сравнению с гравитационными волнами от слияния более массивных черных дыр, поэтому и регистрируют их при современной чувствительности детекторов гораздо реже [50]. Научное сообщество возлагает большие надежды на наземные гравитационно-волновые детекторы нового поколения, а также на проектируемые космические интерферометры.

К группе подземных интерферометров относятся, например, проекты Cosmic Explorer (CE) с длиной плеча 40 км и криогенный Einstein Telescope (ET) с длиной плеча 10 км (рис. 5).

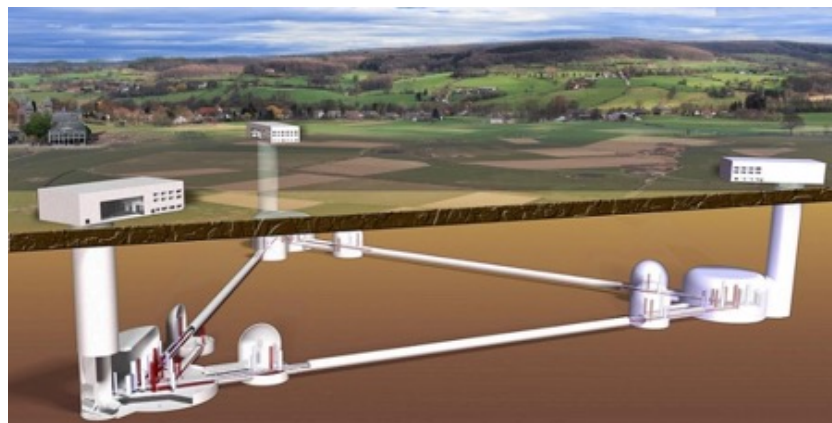


Рисунок 5 — Иллюстрация проекта гравитационно-волнового интерферометра Einstein Telescope, который планируется расположить на границе Германии, Бельгии и Нидерландов

Вторую группу составляют проекты космических детекторов: LISA (Laser Interferometer Space Antenna) Европейского космического агентства, китайский

³Gamma-Ray Burst

TianQin и японский DECIGO [51]. Детекторы так же будут иметь треугольную конфигурацию (см. рис. 6), а длина плеча будет достигать нескольких миллионов километров. Для таких детекторов полностью отсутствуют сейсмические и антропогенные шумы, поэтому может быть достигнуто лучшее отношение сигнал-шум.

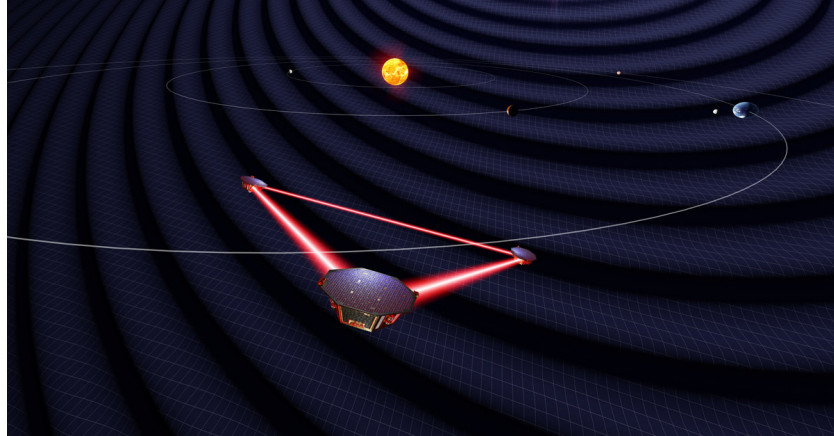


Рисунок 6 — Иллюстрация проекта гравитационно-волнового интерферометра LISA

Сравнительный график чувствительностей некоторых экспериментов можно увидеть на рис. 7.

Важно заметить, что чем больше плечи детектора, тем большие длины волн он может улавливать. Следовательно, новые проекты позволят регистрировать гравитационные волны других частотных диапазонов. Все это значительно расширяет список научных задач. Особенно актуальной является задача регистрации стохастического фона гравитационных волн, который, в том числе, несет в себе информацию об этапах расширения Вселенной сразу после планковских времен [52].

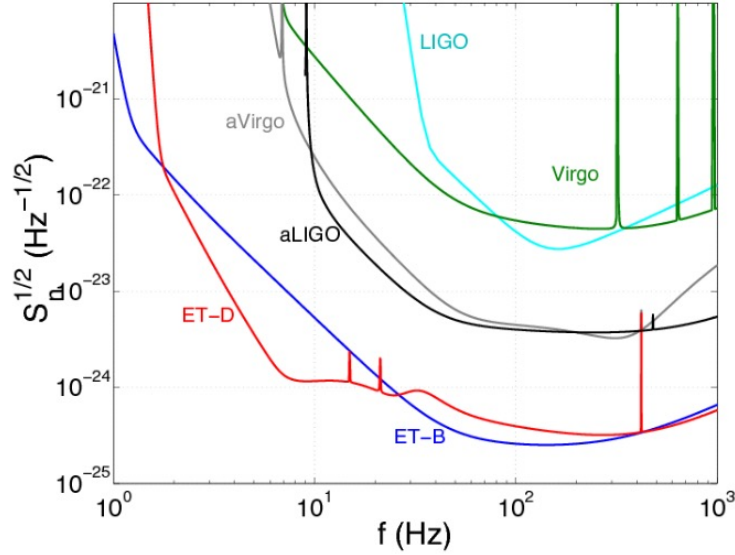


Рисунок 7 — Зависимость чувствительности к амплитуде гравитационных волн от частоты для существующих и будущих наземных интерферометров

Нельзя не отметить активно развивающийся метод регистрации гравитационных волн с помощью точного тайминга миллисекундных пульсаров — РТА (pulsar timing array).

Коллаборация NANOGrav уже опубликовала первые результаты с указанием на возможное открытие стохастического фона наногерцовых гравитационных волн [53] (рис. 8). Однако, пока что открытием данный результат назвать нельзя — статистическая значимость на 2023 год составила величину $\sim 3.5\sigma - 4\sigma$. Требуется дальнейший набор статистики.

Подчеркнем, что метод РТА не является принципиально новым, ведь Халс и Тейлор в 1993 году использовали тот же подход для наблюдений и анализа, хотя причина изменения времен прихода периодического сигнала в случае с РТА существенно отличается. В первом случае наблюдалось уменьшение периода обращения двойной системы пульсаров из-за излучения ГВ, во втором — изменение периода вращения вокруг своей оси для единичных пульсаров из-за проходящей внешней ГВ либо на луче зрения источник-наблюдатель [54], либо через сам пульсар, когда возникает его деформация, приводящая к изменению момента инерции звезды и, как следствие, скорости ее вращения [55].

Что касается указания NANOGrav на стохастический гравитационно-волновой фон на частоте 1 нГц, уже высказывается множество предположений о его природе. С большой вероятностью есть значительный вклад от слияний

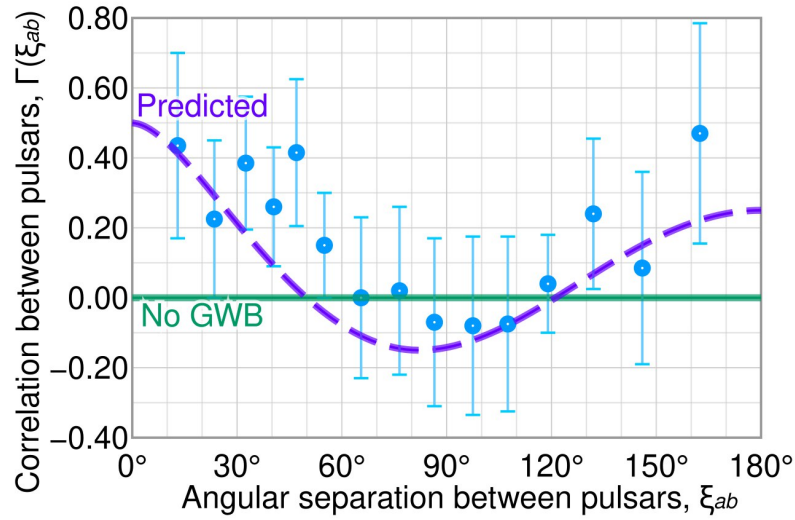


Рисунок 8 — Наблюдаемый сигнал от стохастического ГВ фона по данным коллаборации NANOGrav. Фиолетовая линия соответствует теоретической модели со слияниями двойных систем сверхмассивных черных дыр; голубым показаны экспериментальные измерения; зеленой линией — ожидаемый график при отсутствии стохастического ГВ фона

двойных систем сверхмассивных черных дыр, но возможны и более экзотические варианты вкладов: инфляционные ГВ, ГВ от фазовых переходов первого рода и др. [30—34].

Для самых длинных ГВ (10^{-18} Гц — 10^{-16} Гц) тоже существует метод наблюдения. Это наблюдения реликтового излучения. Основными экспериментами по регистрации микроволнового реликтового излучения являются космические эксперименты WMAP [56] и Planck [57]. Существуют также наземные телескопы микроволнового излучения, например, BICEP [58], Atacama Cosmology Telescope [59] и South-Pole Telescope [60].

По предсказаниям теории эволюции возмущений метрики (см. раздел 1.7), амплитуды реликтовых ГВ с частотами в диапазоне чувствительности интерферометров к настоящему времени должны быть подавлены на много порядков. Так что ожидать их регистрации прямыми методами можно только при довольно сложных и, пока не подтвержденных, теоретических предположениях. В связи с этим, ключевым методом регистрации реликтовых ГВ является измерение анизотропии и поляризации реликтового излучения.

Помимо реликтовых гравитационных волн, теория инфляции предсказывает рождение первичных скалярных возмущений плотности. Теоретический спектр скалярных возмущений хорошо согласуется с получаемым из анализа анизотропии и поляризации реликтового излучения, а также со спектрами,

восстановленными по данным наблюдений крупномасштабной структуры Вселенной наземными и космическими телескопами⁴. В частности, наблюдаются предсказываемые барионные акустические осцилляции.

Многие модели инфляции предсказывают, что начальная амплитуда реликтовых ГВ должна быть сопоставима с амплитудой первичных скалярных возмущений, а значит, можно ожидать заметный отпечаток реликтовых ГВ на реликтовом излучении. Тем не менее, реликтовые ГВ до сих пор не обнаружены [7]. Этот факт не позволяет продвинуться в выборе подходящей инфляционной модели.

В заключение этого обзорного раздела приведу таблицу с основными характеристиками гравитационно-волновых экспериментов (таблица 1).

Таблица 1 — Характеристики различных экспериментов для регистрации ГВ

Эксперимент	Диапазон частот, Гц	Пиковая чувствительность	Начало-окончание работы, год
aLIGO	$10 - 10^4$	10^{-23}	2015
aVirgo	$10 - 10^4$	10^{-22}	2017
KAGRA	$10 - 10^4$	10^{-23}	2020
ET	$1 - 10^4$	10^{-24}	2030-e
CE	$1 - 10^4$	10^{-24}	2035
LISA	$10^{-4} - 10^{-1}$	10^{-23}	2035
DECIGO	$0.1 - 10$	10^{-23}	2040-e
NANOGrav	$10^{-9} - 10^{-6}$	$10^{-14} - 10^{-15}$	2021
Planck	$10^{-18} - 10^{-16}$	10^{-6}	2009-2013

1.5 Современный статус гравитационно-волновой теории

Сегодня продолжается активная исследовательская деятельность по моделированию гравитационно-волнового сигнала от более сложных, чем черные дыры, астрофизических объектов: от двойных нейтронных звезд, где важно учитывать приливные эффекты [61]; от взрывов сверхновых [62].

Особенно важна экспериментальная многоканальная регистрация слияния нейтронных звезд, подобная событию 2017 года, когда удалось записать и

⁴Чем ниже частота регистрируемого телескопом электромагнитного излучения, тем в более удаленные области (на большие красные смещения) можно заглянуть. Таким образом, разные телескопы строят спектр для разных красных смещений

гравитационно-волновой сигнал, и электромагнитный [48]. Такие события позволяют изучать детали слияния нейтронных звезд и формирования остаточной звезды или черной дыры.

Современная астрофизика не имеет точного описания строения нейтронной звезды, поэтому гравитационно-волновые и многоканальные наблюдения слияний нейтронных звезд позволяют сопоставить предсказания различных моделей с экспериментальными данными и выбрать наиболее подходящую теоретическую модель.

По таким наблюдениям можно также измерить скорость распространения ГВ и проверить альтернативы ОТО. Например, теории массивной гравитации [63; 64].

Интерес представляют также теоретические предсказания распространённости двойных систем черных дыр, предсказания происхождения компаньонов (первичные черные дыры [65] или астрофизические), а также предсказания спектра масс черных дыр [66].

Отдельно нужно отметить теорию гравитационных волн от космологических источников. В один из ранних этапов расширения Вселенной, космологическую инфляцию [67], происходила генерация гравитационно-волнового фона. Он, в свою очередь, отразился на анизотропии и поляризации реликтового излучения [68]. Анализ регистрируемого реликтового излучения в будущем должен привести к прояснению процессов, происходящих во времена $\sim 10^{-42} - 10^{-36}$ секунд⁵ с момента рождения Вселенной и к выбору модели инфляции (более подробно ограничения на интенсивность реликтовых ГВ из анализа анизотропии и поляризации реликтового излучения будут обсуждаться в параграфе 1.9).

Это только краткий список направлений исследований гравитационных волн. Со временем появляется все больше проектов будущих экспериментов, а также активно используются косвенные методы регистрации. Каждый экспериментальный метод чувствителен в соответствующем диапазоне частот (рис. 9). Это приводит к необходимости теоретической проработки различных явлений, которые приводят к рождению гравитационных волн соответствующей частоты, и, конечно, такие исследования открывают новые пути познания физики космоса.

⁵Временной интервал приведен для наглядности, точный интервал времени зависит от выбранной модели инфляции

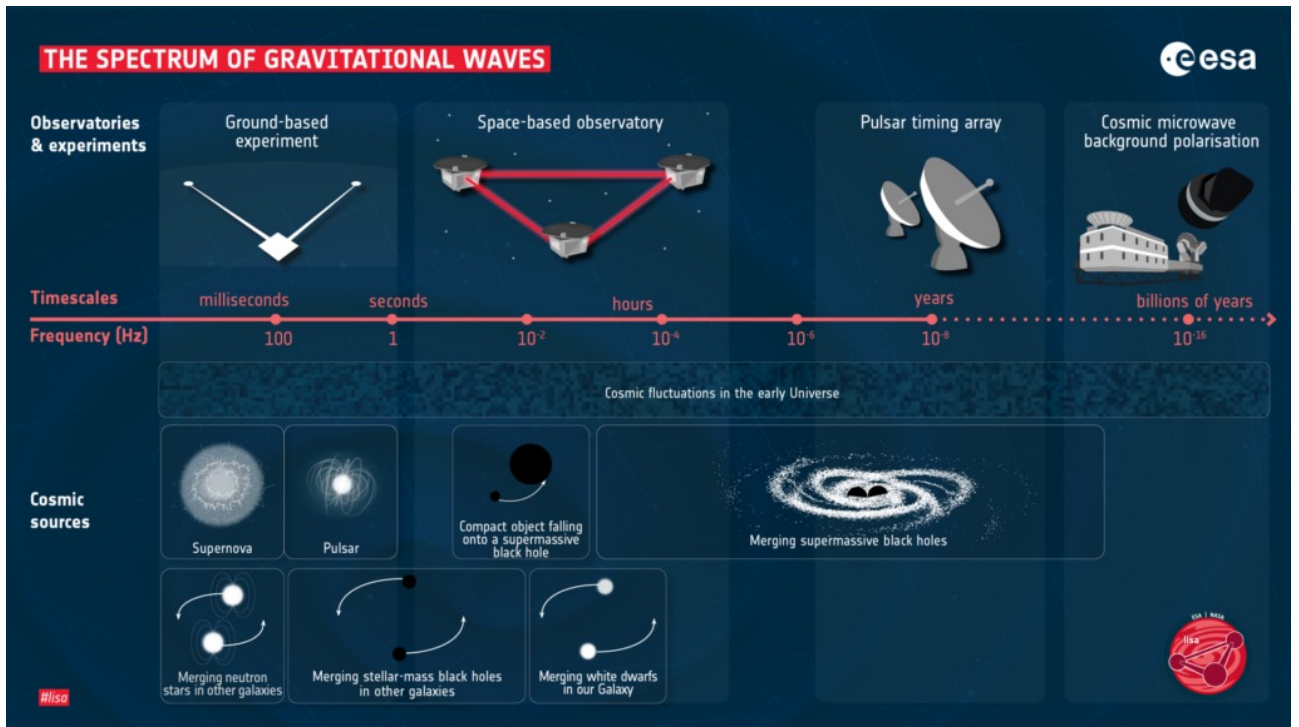


Рисунок 9 — Спектр гравитационных волн, источники и методы регистрации для различных диапазонов их частот

В следующих двух разделах будет рассмотрен формализм описания и уравнение движения ГВ в случае плоского пространства-времени Минковского и в случае расширяющегося пространства-времени Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера.

Так как именно реликтовые ГВ являются объектом исследования, в ниже представленных параграфах первой главы литературного обзора акцент сделан на кратком обзоре теории инфляции и наблюдательных ограничениях интенсивности реликтовых ГВ.

1.6 Формализм описания ГВ

Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ определяет кривизну пространства-времени и связан с интервалом следующим образом

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.1)$$

В этом разделе рассмотрим ГВ на фоне плоского пространства-времени Минковского, метрика которого выражается из уравнения

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (1.2)$$

и на фоне метрики Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера, которой соответствует

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (1.3)$$

где $a(t)$ — масштабный фактор. Темп расширения (конкретный вид функции $a(t)$) определяется типом материи, дающей основной вклад в плотность энергии.

Введем метрический тензор $\bar{g}_{\mu\nu}$, который является суммой фонового метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и тензора малого возмущения $h_{\mu\nu}$:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

И для фонового, и для полного метрического тензора выполняется условие

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\alpha\mu} \bar{g}^{\alpha\nu} &= \delta_{\mu}^{\nu}, \\ g_{\alpha\mu} g^{\alpha\nu} &= \delta_{\mu}^{\nu}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где δ_{μ}^{ν} — символ Кронекера, а второе уравнение верно с точностью до величин второго порядка по возмущению метрики. Поэтому для контравариантных компонент получаем равенство с противоположным знаком перед $h^{\mu\nu}$

$$\bar{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (1.6)$$

Малость метрического возмущения формально выражается неравенством

$$h \equiv \det[h_{\mu\nu}] \ll \det[g_{\mu\nu}], \quad (1.7)$$

где \det — определитель. При этом

$$\begin{aligned} h &= h_{\alpha}^{\alpha} = g_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}, \\ \bar{g} &= g(1 + h), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\bar{g} \equiv \det \bar{g}_{\mu\nu}$, а $g \equiv \det g_{\mu\nu}$

Теперь воспользуемся уравнением гравитации Эйнштейна

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}_{\mu\nu} = 8\pi G \bar{T}_{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

Все величины с верхним подчеркиванием означают сумму фоновых значений и поправок, которые возникают из-за возмущения метрики. То есть для тензора Риччи $\bar{R}_{\mu\nu}$, скалярной кривизны R и тензора энергии-импульса (ТЭИ) $\bar{T}_{\mu\nu}$ имеем:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)}, \\ \bar{R} &= R + R^{(1)}, \\ \bar{T}_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(1)},\end{aligned}\tag{1.10}$$

где $R_{\mu\nu}$, R , $T_{\mu\nu}$ — фоновые величины, $R_{\mu\nu}^{(1)}$, $R^{(1)}$, $T_{\mu\nu}^{(1)}$ — поправки первого порядка по возмущению, G — гравитационная постоянная, скорость света положена равной единице.

Будем следовать изложению параграфов 105 и 107 в книге [29].

Условие малости возмущения не фиксирует систему отсчета однозначно, так как при сдвиге координат x^μ на малые величины ε^μ

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu\tag{1.11}$$

закон преобразования $h_{\mu\nu}$ принимает вид

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu},\tag{1.12}$$

где ковариантные компоненты вектора сдвига получены с использованием фоновой метрики, то есть $\varepsilon_\mu = g_{\mu\alpha}\varepsilon^\alpha$.

Вообще говоря, в уравнении (1.12) должны использоваться ковариантные производные, но сначала будет рассмотрен случай фоновой метрики Минковского.

Таким образом, мы подошли к теме калибровки. Фиксировать систему координат можно любыми условиями, но, как правило, выбираются те, что позволяют получить максимально простую форму уравнений на эволюцию метрических возмущений.

Общепринятой является калибровка Лоренца

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} &= 0, \\ \psi^{\mu\nu} &= h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}h.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Для произвольной метрики условие выражается через ковариантную дивергенцию D_μ :

$$D_\mu \psi^{\mu\nu} = 0. \quad (1.14)$$

Такая калибровка естественным образом возникает в случае использования так называемых гармонических координат Фока и позволяет упростить выражение для тензора Риччи и уравнение распространения метрических возмущений.

В частности, в метрике Минковского из выражения⁶

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\nu h_\mu^\alpha + \partial_\alpha \partial_\mu h_\nu^\alpha) - \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial^\alpha h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h), \quad (1.15)$$

где $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, получается более простое уравнение

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

Здесь $\square = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right)$ — оператор Даламбера, Δ — оператор Лапласа.

Возьмем след от обеих частей уравнения (1.9). Получим

$$\bar{R} = -8\pi G \bar{T}^\alpha_\alpha. \quad (1.17)$$

По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Из уравнений (1.9, 1.17) ясно, что в пустом пространстве, где $\bar{T}_{\mu\nu} = 0$, равны нулю \bar{R} и $\bar{R}_{\mu\nu}$. Так как для фоновых величин и для поправок первого порядка уравнения гравитации независимы⁷, уравнения (1.9, 1.16) приводят к общеизвестному волновому вакуумному решению

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (1.18)$$

Калибровка (1.13) еще оставляет свободу преобразования координат

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon^{(2)\mu}. \quad (1.19)$$

Действительно, если компоненты четырех-вектора преобразования удовлетворяют условиям

$$\square \varepsilon^{(2)\mu} = 0, \quad (1.20)$$

⁶Вывод выражения из определения тензора Риччи опущен, читатель может ознакомиться с ним в книге [29]

⁷В этом легко убедиться, подставив уравнение (1.10) в (1.9) и используя уравнение Эйнштейна для фона

то уравнение (1.18) по-прежнему будет справедливо, поэтому можно наложить еще четыре произвольных условия.

В плоском пространстве-времени обычно выбирают такую систему координат, в которой обращается в нуль след тензора $h_{\mu\nu}$, и остается только две независимые переменные, через которые выражается тензор: h_+ и h_\times . Они отвечают двум поляризациям ГВ. Тогда тензор возмущения принимает вид

$$\{h_{\mu\nu}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

На рис. 10 проиллюстрировано действие ГВ на пробные массы для случая распространения волны вдоль оси z .

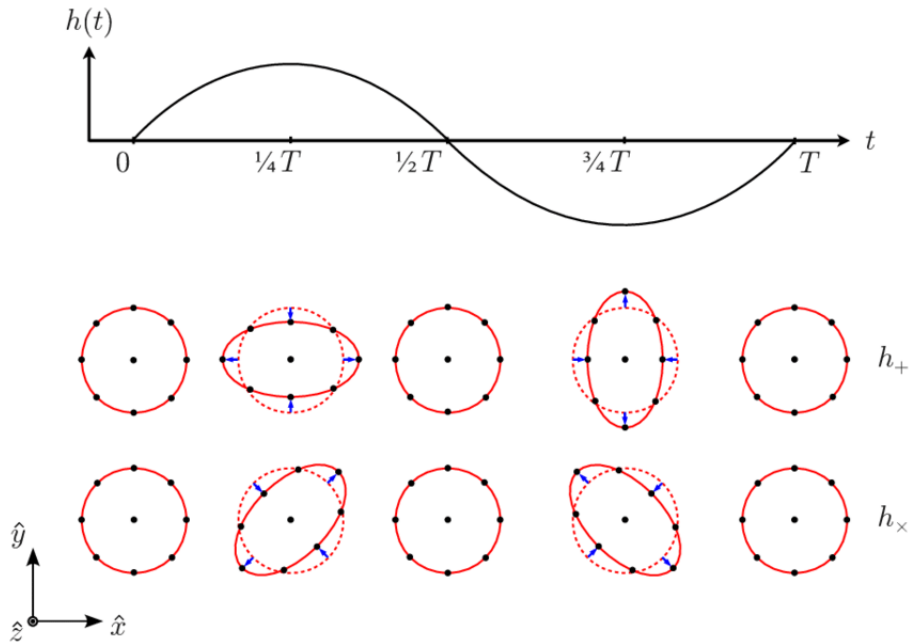


Рисунок 10 — Действие двух поляризаций гравитационной волны на пробные массы в плоскости, перпендикулярной к направлению ее распространения

Важно заметить, что изначально тензор возмущения, симметричный по определению, имел десять компонент. Независимых (физических) из них только шесть: помимо тензорных компонент есть еще две скалярные и две векторные. Нефизические компоненты исключаются калибровкой.

Все шесть компонент можно получить при разборе уравнения движения ГВ на фоне метрики ФЛРУ. В пустом пространстве скалярные и векторные моды не возбуждаются. Иначе говоря, эти моды не имеют вакуумного решения.

Динамическое пространство, в частности Вселенная, расширяется из-за действия ненулевого фонового ТЭИ. Система уравнений будет содержать все шесть независимых компонент тензора $h_{\mu\nu}$, так как фоновый ТЭИ может получить некоторое возмущение $T_{\mu\nu}^{(1)}$. Конкретный вид ТЭИ и поправки к нему зависят от физики рассматриваемой задачи и пока уточняться не будут.

Воспользуемся материалом книг [6; 69] и рассмотрим метрику (1.3).

Запишем поправки к тензору Риччи и скалярной кривизне, учитывая, что фоновая метрика ФЛРУ зависит от времени и, следовательно, в уравнениях движения метрического возмущения и при калибровке нужно использовать ковариантную производную D_μ .

Итак,

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (D_\alpha D_\nu h_\mu^\alpha + D_\alpha D_\mu h_\nu^\alpha - D_\alpha D^\alpha h_{\mu\nu} - D_\mu D_\nu h), \quad (1.22)$$

$$R^{(1)} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(1)} - h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \quad D_\mu \Psi^{\mu\nu} = 0, \quad (1.23)$$

где ковариантная производная берется по отношению к фоновой метрике $g_{\mu\nu}$ и $D^\alpha = g^{\alpha\beta} D_\beta$. Здесь и ниже для поднятия и опускания индексов используется фоновая метрика, $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$.

Подставим все эти выражения (1.23) в уравнение (1.9) и исключим слагаемые, удовлетворяющие фоновому уравнению $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$. Получим систему дифференциальных уравнений для возмущения⁸

$$R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} \left[g_{\mu\nu} \left(g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(1)} - h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \right) + h_{\mu\nu} R \right] = 8\pi G T_{\mu\nu}^{(1)}, \quad (1.24)$$

где $R_{\mu\nu}^{(1)}$ определено в уравнении (1.22). Для метрики ФЛРУ имеем

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{ij} &= -g_{ij} \left(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right), \\ R &= -6 \left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right), \end{aligned} \quad (1.25)$$

где точка означает производную по времени, а $H = \frac{\dot{a}}{a}$ — параметр Хаббла.

⁸На самом деле, данное уравнение явно не встречается в литературе, а выведено автором диссертации самостоятельно и помещено здесь для большей ясности изложения

Теперь можно упростить систему (1.25), разложив компоненты тензора $h_{\mu\nu}$ по спиральностям. Общепринятый подход состоит в том, что тензор возмущения выражается с использованием двух поперечных векторов C_i, G_i ($k_i C^i = 0, k_i G^i = 0$), бесследового тензора h_{ij}^T ($h^T_i{}^i = 0$) и четырех скаляров A, B, E, F следующим образом:

$$h_{00} = -E, \quad (1.26)$$

$$h_{0i} = a \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} + G_i \right), \quad (1.27)$$

$$h_{ij} = a^2 \left(A\delta_{ij} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial C_i}{\partial x^j} + \frac{\partial C_j}{\partial x^i} + h_{ij}^T \right). \quad (1.28)$$

Все возможные комбинации величин учтены — тензор возмущений метрики разложен по базису. Уравнения для каждой спиральности (моды) в изотропном пространстве являются независимыми.

В таком пространстве снова применяется калибровка Лоренца (1.23), а дополнительные четыре условия накладываются из соображений удобства в каждой конкретной задаче. Два из них на любые две компоненты векторов C_i, G_i . Обычно зануляют второй вектор, чтобы $h_{0i} = 0$. Оставшимися двумя условиями зануляют два скаляра из четырех.

Синхронная калибровка соответствует выбору $E = 0$ и $F = 0$. При таких условиях все еще остается некоторая дополнительная свобода, которая может позволить упростить алгебру.

Второй известный тип калибровки — это ньютоновская калибровка, где $B = 0, F = 0, E \equiv 2\Phi$ и $A \equiv -2\Psi$. Такой выбор удобен в рассматриваемой задаче, поэтому для скалярного сектора будет использована именно ньютоновская калибровка.

Для демонстрации качественных результатов воспользуемся моделью идеальной жидкости для ТЭИ:

$$\bar{T}_{\mu\nu} = -\bar{p} \bar{g}_{\mu\nu} + (\bar{p} + \bar{\rho}) \bar{u}_\mu \bar{u}_\nu, \quad (1.29)$$

где $\bar{p}, \bar{\rho}, \bar{u}_\mu$ — давление, плотность энергии и скорость среды соответственно. Полные величины выражаются следующим образом

$$\bar{u}^\mu = u^\mu + \delta u^\mu, \quad (1.30)$$

$$\bar{p} = p + \delta p, \quad (1.31)$$

$$\bar{\rho} = \rho + \delta \rho, \quad (1.32)$$

где p, ρ, u^μ — фоновые величины, $\delta p, \delta \rho, \delta u^\mu$ — поправки к ним.

Рассмотрим задачу, в которой пространственные компоненты фоновой скорости равны нулю $u^j = 0$, а возмущением являются пространственные компоненты $\delta u^j \neq 0$.

Для временной компоненты четырех-скорости есть поправка первого порядка. Действительно, всегда должно выполняться равенство

$$\bar{g}_{\mu\nu} \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu = 1. \quad (1.33)$$

Следовательно, $(1 + h_{00}) (1 + \delta u^0)^2 = 1$, и

$$\delta u^0 = -\frac{h_{00}}{2}. \quad (1.34)$$

Подробнее с выводом можно ознакомиться в разделе 2.2.2 книги [6].

В результате, для поправки к ТЭИ получаем

$$T_{00}^{(1)} = \delta \rho + \rho h_{00}, \quad (1.35)$$

$$T_{0i}^{(1)} = (p + \rho) v_i, \quad (1.36)$$

$$T_{ij}^{(1)} = -g_{ij} \delta p - p h_{ij}, \quad (1.37)$$

где введено обозначение для физической скорости $v^i = a \delta u^i$, и для переноса индекса используется фоновая метрика $v_i = g_{ij} v^j$, так как иначе будет учтен второй порядок малости $\sim h_{ij} \delta u^j$, что будет излишним.

Запишем систему уравнений, которая получается после подстановки разложения (1.26 – 1.28) и уравнений (1.25, 1.35) в уравнение (1.24) в терминах конформного времени η ($a d\eta = dt$) [6; 69]. Для тензорной моды:

$$\left(\partial_\eta^2 + 2 \frac{a'}{a} \partial_\eta + \Delta \right) h_{ij}^T = 0, \quad (1.38)$$

где $\partial_\eta = \frac{\partial}{\partial \eta}$, $\Delta = \partial_i \partial^i$, $a' = \partial_\eta a$.

Для векторной моды в калибровке $G_x = G_y = 0$ (поперечный вектор):

$$\partial_\eta \Delta C_i = 16\pi G a^2 (p + \rho) v_i^T, \quad (1.39)$$

где v_i^T — компонента возмущения скорости, перпендикулярная волновому вектору метрического возмущения.

Для скалярной моды в ньютоновской калибровке:

$$\Phi = -\Psi, \quad (1.40)$$

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = 4\pi Ga^2\delta\rho, \quad (1.41)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi Ga^2(p + \rho)v, \quad (1.42)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi Ga^2\delta p, \quad (1.43)$$

где v — скаляр в спиральном разложении скорости

$$v_i = v_i^T + ik_i v. \quad (1.44)$$

Равенство (1.40) справедливо только для идеальной жидкости.

Выше приведены не все уравнения для скалярной и векторной части. Обычно используются еще уравнения состояния $p(\rho)$ и законы ковариантного сохранения ТЭИ, которые замыкают системы неизвестных и позволяют найти законы эволюции возмущений плотности энергии, давления и скорости $\delta p, \delta\rho, \delta u^i = v^i/a$ из заданных начальных значений возмущений $\delta p_1, \delta\rho_1, \delta u_1^i = v_1^i/a_1$. Нас интересуют только качественные результаты для трех мод возмущения метрики, поэтому громоздкие выкладки, которые нужны только при решении конкретных задач, приводиться не будут.

Основные выводы следующие: скалярные моды возмущений метрики возникают при ненулевом следе возмущения ТЭИ; векторные — при наличии возмущений скоростей (вихрей); а тензорные, по аналогии с результатом в плоском пространстве, имеют нетривиальное решение и в вакууме.

Если ТЭИ содержит тензор анизотропных напряжений (не является изотропным), то его необходимо разложить по спиральностям и внести в уравнения на все моды соответствующие поправки. Если при этом тензорная часть ТЭИ ненулевая, то она будет давать вклад в правую часть уравнения (1.38). То есть для ГВ получится уравнение осциллятора с вынуждающей силой.

В заключение этого раздела дадим более формальное определение гравитационной волны. ГВ — это тензорная мода возмущений метрики пространства-времени, свободно распространяющаяся со скоростью света.

1.7 Уравнение движения ГВ в расширяющейся Вселенной

В данной работе затрагиваются ГВ только реликтового происхождения (подробнее об инфляции и генерации ГВ см. параграф 1.8). В случае расширяющейся Вселенной можно выделить два режима эволюции ГВ [6; 69]. Первый режим называют режимом за горизонтом, второй — под горизонтом. Дело в том, что амплитуда ГВ по-разному зависит от времени для этих двух случаев.

Действительно, обратимся к уравнению (1.38). После преобразования Фурье по пространственным координатам получаем

$$\left(\partial_{\eta}^2 + 2\frac{a'}{a}\partial_{\eta} - k^2 \right) h_{ij}^{\text{T}} = 0, \quad (1.45)$$

где k — модуль волнового вектора.

Видно, что для $k \ll \frac{a'}{a}$, что эквивалентно неравенству

$$k\eta \ll 1, \quad (1.46)$$

можно пренебречь третьим слагаемым в левой части уравнения (1.45). Тогда решением уравнения будет $h_{ij}^{\text{T}} = \text{const}$ ⁹.

Когда волна заходит под горизонт

$$k\eta \gg 1, \quad (1.47)$$

решение имеет вид

$$h(\eta) \propto \frac{\cos(k\eta + \varphi_{\text{hor}})}{a(\eta)}, \quad (1.48)$$

то есть амплитуда ГВ осциллирует и убывает, так как масштабный фактор растет с ростом η . φ_{hor} здесь — это постоянная фаза, которая находится при сшивке режимов за и под горизонтом.

Напомним, что

$$d\eta = \frac{1}{a(t)} dt. \quad (1.49)$$

⁹Есть еще убывающее решение, но оно не представляет интереса с точки зрения космологии. Такие ГВ слишком быстро затухают и не оставляют следа ни на характеристиках реликтового излучения, ни, тем более, в современной Вселенной

Поэтому точную зависимость $\eta(t)$ можно отдельно найти для каждой эпохи доминирования конкретного типа вещества¹⁰. Например, для эпохи радиационного доминирования (РД) $a \propto \sqrt{t}$. Следовательно,

$$\eta \propto a \propto \sqrt{t}. \quad (1.50)$$

А для эпохи доминирования материи (МД) $a \propto t^{2/3}$. Значит,

$$\eta \propto \sqrt{a} \propto t^{1/3}. \quad (1.51)$$

Важный обзор существующей литературы, посвященной распространению ГВ на фоне более сложных метрик, представлен в начале раздела 3.1.

1.8 Инфляция и реликтовые гравитационные волны

Инфляционная стадия предшествовала стадии горячего Большого взрыва. Она заключалась в быстром расширении Вселенной за крайне короткий промежуток времени порядка 10^{-36} с. Данная теория еще не подтверждена экспериментально, но ее предсказания хорошо согласуются с наблюдениями.

Теория инфляции помогает устранить ряд проблем, которые невозможно решить в рамках теории горячего Большого взрыва: проблемы горизонта (однородности и изотропии), плоскостности, энтропии и первичных неоднородностей. Стоит отметить, что предсказанный спектр этих неоднородностей полностью согласуется с измеренным (рис. 11).

¹⁰Можно найти эту зависимость аналитически и при учете двух типов материи, если того требует задача

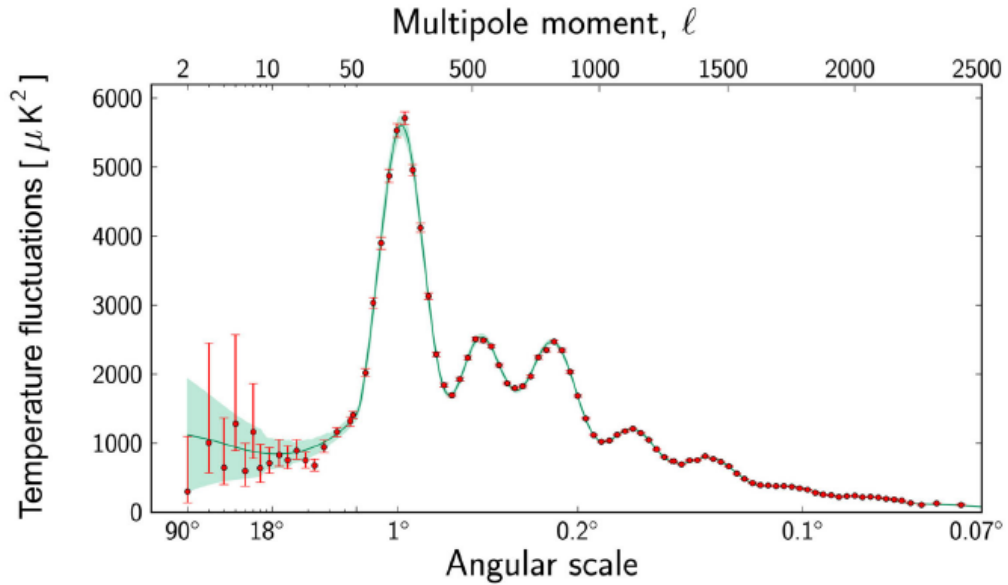


Рисунок 11 — Угловой спектр температурных флуктуаций реликтового излучения. Красные точки — измерения Planck; зеленая кривая — предсказания теории. Наблюдаются барионные акустические осцилляции, предсказанные в рамках теории гауссова поля начальных флуктуаций и теории эволюции скалярных возмущений с застыванием спектра в момент рекомбинации

Проблемы теории горячего Большого взрыва

Размер причинно связанных областей Вселенной характеризуется космологическим горизонтом. Это длина пути, которую сигнал (свет) проходит за время существования Вселенной, то есть с момента Большого взрыва до наших дней. По наблюдениям Вселенная является однородной с хорошей точностью на масштабах больших, чем размер космологического горизонта. Такой вывод можно сделать при измерении температуры фотонов реликтового микроволнового фона. Реликтовое излучение однородно с точностью до 10^{-4} . Другими словами, области Вселенной, которые никогда не были в непосредственном контакте, по какой-то причине имели одинаковую температуру и плотность энергии. В этом и заключается проблема горизонта.

Геометрия Вселенной, а именно кривизна, определяет характер ее будущей эволюции. По современным данным Вселенная является с высокой точностью

плоской, вклад кривизны в плотность энергии в наше время составляет величину $\Omega_{\text{curv}} < 0.02$. Используя это значение, можно получить, что в планковскую эпоху должно было выполняться $|\Omega_{\text{curv}}(t_{\text{pl}}) \lesssim 10^{-60}|$. Удовлетворить этому неравенству в процессе расширения невозможно в отсутствие дополнительной стадии инфляции. В этом и заключается проблема плоскостности.

Энтропия Вселенной, по современным измерениям, составляет величину порядка $S_0 \sim 10^{88}$. Из-за адиабатичности расширения в модели горячего Большого взрыва такую величину можно заложить только в качестве начального условия, что тоже выглядит неестественно.

Инфляция важна и для формирования крупномасштабной структуры. Для образования пустот, галактик и их скоплений в современной Вселенной необходимы начальные неоднородности плотности порядка $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 5 \cdot 10^{-5}$. Эту величину тоже нельзя объяснить в рамках теории горячего Большого взрыва, приходится вводить начальное условие.

Решение проблем теории горячего Большого взрыва в рамках теории инфляции

Если записать выражение для размера космологического горизонта в фиксированный момент времени t_1

$$l_H(t_1) = \int_{t_{\text{pl}}}^{t_1} \frac{dt}{a(t)}, \quad (1.52)$$

становится ясно, что для решения проблемы горизонта требуется, чтобы масштабный фактор рос быстрее, чем полином первой степени. В таком случае Вселенная будет расширяться с ускорением, как бы раздуваясь (англ. *inflate*).

Для ускоренного расширения требуется, чтобы Вселенная была заполнена особым типом вещества с отрицательным давлением, называемым ложным вакуумом. Уравнение состояния должно удовлетворять неравенству

$$p < -\frac{1}{3}\rho. \quad (1.53)$$

Уравнение состояния с отрицательным давлением неустойчиво, поэтому после короткого промежутка инфляционной стадии ложный вакуум переходит в истинный посредством рождения частиц и передачи им высокой кинетической энергии.

Таким образом, за инфляционной стадией следует эпоха постинфляционного разогрева, приводящая к горячему Большому взрыву.

Можно определить, в какое минимальное количество раз должна была расширяться Вселенная к концу инфляционной стадии, чтобы решить проблемы горизонта и плоскостности. Число e -фолдингов N означает, во сколько раз Вселенная экспоненциально расширилась за время инфляции: в $\exp\{N\}$ раз. Общепринятая минимально необходимая величина $N_{\min} \approx 10^{60}$. Более точно N_{\min} определяется в зависимости от выбранной модели инфляции.

Можно оценить минимальное время инфляционной стадии, используя соотношения

$$N = \int_{t_{\text{pl}}}^{t_{\text{end}}} H(t) dt \sim H_{\text{infl}} \Delta t_{\text{infl}}, \quad (1.54)$$

$$N > N_{\min}, \quad (1.55)$$

$$H_{\text{infl}} \sim H(t_{\text{end}}) \sim \frac{T_{\text{reh}}^2}{m_{\text{pl}}}, \quad (1.56)$$

где t_{end} — время окончания инфляции, t_{pl} — планковское время, H_{infl} — значение параметра Хаббла в период инфляции, Δt_{infl} — интервал времени, в течение которого происходила инфляция, T_{reh} — температура разогрева. Тогда оценка минимально необходимого периода инфляции составляет $\Delta t_{\text{infl}}^{\min} \sim 10^{-42} - 10^{-36}$ с.

Необходимо сделать несколько важных замечаний. Первое состоит в том, что инфляция могла начаться не обязательно в планковское время, а в любой субпланковский момент времени после t_{pl} . Второе замечание о том, что N может быть больше минимально необходимого значения N_{\min} . Причем это предположение более естественно, нежели точная подгонка под результат, необходимый для объяснения наблюдений.

Важно упомянуть то, что на стадии постинфляционного разогрева происходит рождение большого количества частиц с большой кинетической энергией. Таким образом, модель инфляции приводит к естественному росту энтропии в последующей стадии.

В рамках инфляционной теории разрешена и проблема генерации первичных возмущений плотности. Инфляция посредством быстрого расширения Вселенной в 10^{26} раз (в линейных размерах) превращает вакуумные квантовые флуктуации скалярного поля в макроскопические скалярные возмущения

плотности, а квантовые флуктуации гравитационного поля в бегущие тензорные возмущения. Первые становятся причиной рождения крупномасштабной структуры, вторые называются реликтовыми гравитационными волнами [70].

Для вещества с отрицательным давлением тензор энергии-импульса записывается следующим образом

$$T_{\mu\nu} = \rho_{\text{vac}} g_{\mu\nu}, \quad (1.57)$$

где ρ_{vac} — плотность энергии ложного вакуума. Из (1.57) явно следует уравнение состояния $p = -\rho$.

Для расширяющейся Вселенной с нулевым значением кривизны можно записать уравнение Фридмана

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3m_{\text{pl}}^2} \rho. \quad (1.58)$$

Откуда, при условии $\rho = \text{const} = \rho_{\text{vac}}$ следует экспоненциальный закон расширения $a(t) = a_0 e^{H_{\text{vac}} t}$, где $H_{\text{vac}} = \sqrt{\frac{8\pi \rho_{\text{vac}}}{3 m_{\text{pl}}^2}}$.

С кратким обзором основных моделей инфляции можно ознакомиться в приложении 5.6.

Реликтовые гравитационные волны

Л. П. Гришук показал, что конформно-плоское расширяющееся пространство может генерировать гравитоны, так как линеаризованное уравнение Эйнштейна не является конформно-инвариантным [71].

Согласно наблюдениям, начальный спектр первичных скалярных возмущений, который выражается следующим образом

$$\mathcal{P}_s(k) = \mathcal{A}_s \left(\frac{k}{k_*}\right)^{n_s-1}, \quad (1.59)$$

является с хорошей точностью плоским ($n_s = 0.965(4)$ [72]) — гауссовым¹¹, также называемым спектром Гаррисона-Зельдовича [73].

¹¹Гауссово поле начальных флуктуаций означает равную вероятность возмущений для всех масштабов, а также отсутствие выделенного масштаба и корреляций между амплитудами флуктуаций на разных масштабах

Отсюда следует вывод, что, раз реликтовые ГВ и первичные скалярные возмущения были сгенерированы одним и тем же процессом, спектр реликтовых ГВ

$$\mathcal{P}_T(k) = \mathcal{A}_T \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_T-1}, \quad (1.60)$$

тоже является плоским: $n_T = 1$.

k_* в (1.59, 1.60) используется для обезразмеривания спектральной функции, нет необходимости его уточнять; \mathcal{A}_s — начальная амплитуда первичных скалярных возмущений, \mathcal{A}_T — начальная амплитуда реликтовых ГВ. Из наблюдений анизотропии реликтового излучения $\mathcal{A}_s^2 = 10^{-5}$ [68]. Предсказание величины \mathcal{A}_T зависит от модели инфляции.

Сейчас стандартной моделью космологии является Λ CDM-модель. В ней принято $\mathcal{A}_T = 0$ из-за отсутствия наблюдательных подтверждений существования реликтового гравитационно-волнового фона.

Как было показано в разделе 1.7, ГВ разных частот заходят под горизонт (начинают убывать) в разные моменты времени. Это приводит к тому, что спектр реликтовых ГВ видоизменяется: чем выше частота, тем меньше современная амплитуда. Это утверждение верно для волн, находящихся глубоко под горизонтом. Частоты $10^{-17} - 10^{-16}$ Гц в современной Вселенной только начинают заходить под горизонт. А частоты порядка 10^{-18} Гц по порядку величины равны современному горизонту Хаббла¹².

На рис. 12 показано, как выглядит ожидаемый спектр реликтовых ГВ для $n_T = 1.2$ в современной Вселенной. В разных моделях он может отличаться. Особенно, если помимо инфляционных ГВ, имели место и другие процессы рождения ГВ в ранней Вселенной [30—34; 74].

1.9 Наблюдательные ограничения на реликтовые гравитационные волны

Есть две моды поляризации реликтовых ГВ — E -мода и B -мода. Они вводятся по аналогии с электрическим и магнитным полем, так как имеют схожую структуру (см. рис. 13).

¹²Время жизни Вселенной составляет 13.8 млрд лет, что $\approx 4.4 \cdot 10^{17}$ секунд

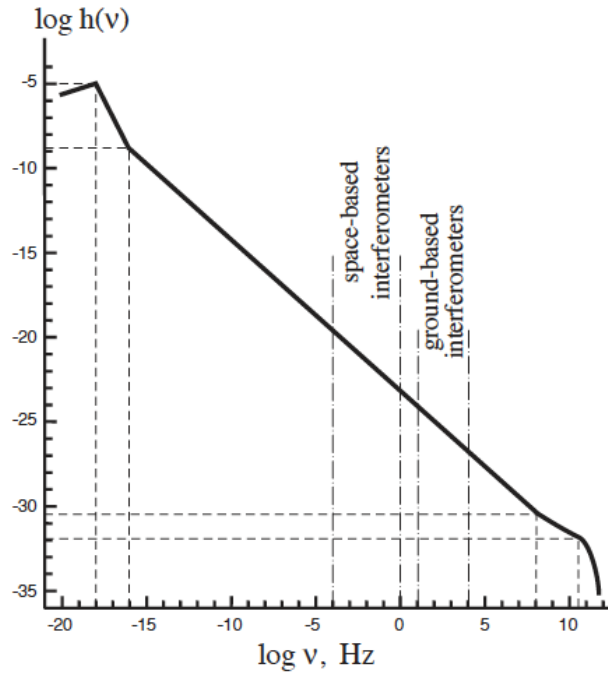


Рисунок 12 — Амплитуда реликтовых ГВ в современной Вселенной в зависимости от частоты при $n_T = 1.2$ [74]. Пунктирными вертикальными линиями выделены диапазоны частот, к которым чувствительны космические и наземные гравитационно-волновые интерферометры

Первичные неоднородности в плазме создают только E -моду. Это легко объяснить, исходя из следующих соображений: из-за неоднородностей плотности температура в разных точках пространства отличается, из-за этого в одной точке рекомбинация заканчивается раньше, в другой — позже. Как следствие, фотоны, отделившиеся от плазмы раньше, по пути к наблюдателю краснеют сильнее (имеют меньшую температуру) — появляется анизотропия реликтового излучения. Важно, что скалярные возмущения создают градиент температур, направленный по радиусу, с началом в наиболее плотном участке. Поэтому температура фотонов реликтового излучения будет меняться так же вдоль этих линий¹³.

¹³Есть еще вариант формы E -моды поляризации реликтового излучения в виде окружности (рис. 13, нижнее левое изображение). Такая структура тоже отвечает векторной симметрии

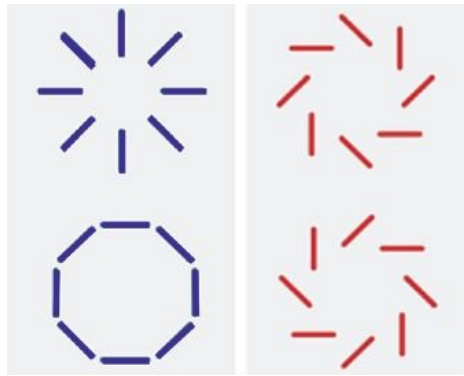


Рисунок 13 — Демонстрация E - (слева) и B -моды (справа) поляризации реликтового излучения

Ясно, что фотоны, рассеиваясь на электронах, меняют свою температуру. Следовательно, для формирования B -моды необходимо изменение распределения электронов характерной формы, поэтому причинами возникновения вихревой поляризации могут являться:

- намагниченная диффузная галактическая пыль;
- линзирование (эффект Сакса-Вольфа);
- реликтовые гравитационные волны.

Действительно, при наличии гравитационной волны происходит квадрупольное перераспределение электронов в плазме в эпоху рекомбинации¹⁴.

Эффект Сакса-Вольфа оказывает влияние на протяжении всего распространения реликтового излучения до Земли. Заключается он в красном смещении фотонов под воздействием гравитации крупномасштабной структуры. Свет, проходя гравитационное поле от массивной структуры, меняет свою частоту, что приводит к возникновению анизотропии реликтового излучения [75].

Намагниченная пыль не меняет энергию реликтовых фотонов, но сама создает поляризованное тепловое излучение в том же диапазоне частот. Это основной фон, присутствующий в измерениях поляризации космического реликтового излучения.

Так, в 2014 году коллаборация WMAP2 объявила об открытии B -моды поляризации реликтового излучения [76], заявляя тем самым открытие реликтового ГВ фона. Однако позже результаты обсерватории Planck показали, что результат WMAP2 можно полностью объяснить поляризованной галактической пылью [77].

¹⁴До момента последнего рассеяния, когда фотоны реликтового излучения стали свободно распространяться

Отметим, что у самого эксперимента ВІСЕР2 не было возможности точно измерить вклад пыли, т.к. измерения производились только на одной частоте, из-за чего оценки запыленности приходилось получать экстраполяцией данных других установок. Это привело к недооценке данного вклада. Данные космической обсерватории Planck позволили устранить систематику.

На сегодняшний день реликтовые ГВ не обнаружены. Совместный анализ данных Planck, ВІСЕР2, KeckArray, LIGO, Virgo, KAGRA дает следующее ограничение на отношение интенсивностей реликтовых ГВ и первичных скалярных возмущений:

$$r \equiv \left(\frac{\mathcal{A}_T}{\mathcal{A}_s} \right)^2 < 0.028 \quad (1.61)$$

на уровне достоверности 95% [7]. В то время как числа, получаемые в простейших моделях инфляции, составляют гораздо большие значения r . Например, для степенного потенциала с $n = 2$ и $n = 4$ (см. уравнения (48, 49))

$$\begin{aligned} r &= 0.13 - 0.16, & n &= 2, \\ r &= 0.27 - 0.32, & n &= 4. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Из-за этого класс теорий со степенным потенциалом считается опровергнутым. Другие модели предсказывают слабую интенсивность реликтовых ГВ, что согласуется с оценкой (1.61). Но тогда не ясно, как можно проверить эти теории, ведь на сегодняшний день нет метода детектирования таких слабых ГВ сигналов. Между тем, именно регистрация реликтовых ГВ позволила бы подтвердить верность инфляционной модели в целом.

В следующей, заключительной, главе литературного обзора рассмотрен эффект конверсии ГВ в электромагнитные волны во внешнем магнитном поле — эффект Герценштейна; эффективное действие, которое описывает рассеяние света на свете и может вносить поправки к эффекту Герценштейна, а также теория и результаты наблюдений первичного (космологического) магнитного поля.

Глава 2. Эффект Герценштейна и космологическое магнитное поле

2.1 Эффект Герценштейна

В 1961 году Михаил Герценштейн показал, что электромагнитная волна под действием внешнего магнитного поля переходит в гравитационную волну [10]. Эффект имеет место при рассмотрении классического действия Максвелла

$$\mathcal{A}_{\text{Max}} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + A_\mu J^\mu), \quad (2.1)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор электромагнитного поля, $g = \det g_{\mu\nu}$, J^μ — четырех-вектор тока, A^μ — потенциал электромагнитного поля. С точки зрения квантовой механики и физики частиц это может быть интерпретировано как смешивание состояний гравитона и фотона.

Позже, в 1974 году, Яков Борисович Зельдович рассмотрел процесс перехода в обратном направлении — из гравитона в фотон [78]. Часто такой эффект называют обратным эффектом Герценштейна.

В научной литературе это явление называется эффектом Герценштейна–Зельдовича [79] или просто эффектом Герценштейна [11]. В диссертации будет использоваться термин «эффект Герценштейна».

Эффект был исследован в различных задачах, например, в астрофизике обратный эффект Герценштейна рассматривался в работах [12–15].

Стоит отметить исследования, в которых предлагается использование обратного эффекта Герценштейна для создания детектора высокочастотных (1 МГц — 1 ТГц) гравитационных волн [80; 81]. В частности, в работах В.Н. Руденко и Н.И. Колосничина [82; 83] подробно рассматривается вопрос о реалистичности создания лабораторной установки для осуществления гравитационного опыта Герца¹ на основе эффекта Герценштейна–Зельдовича. Авторами проведен анализ прямой и обратной задач преобразования электромагнитных волн в гравитационные в присутствии сильного магнитного поля, получены

¹По аналогии с классическим опытом Герца по генерации и приему электромагнитных волн, гравитационным опытом Герца называют гипотетический лабораторный эксперимент по созданию искусственного источника гравитационных волн и их детектированию на небольших расстояниях.

численные оценки ожидаемых амплитуд сигнала и обсуждены принципиальные экспериментальные трудности, связанные с регистрацией крайне малого количества фотонов на фоне тепловых шумов [82]. Позднее, в обзорной работе [83], эти результаты были обобщены в контексте общей программы российских гравитационно-волновых экспериментов, включая перспективы использования резонансных оптических систем для повышения эффективности преобразования.

Толчком к проведению представленного в диссертации исследования послужила статья А. Д. Долгова и Д. Эйли, где обратный эффект Герценштейна был изучен в контексте реликтового гравитационно-волнового фона [16]. В данной работе система дифференциальных уравнений была выведена в приближении плоского пространства-времени, а для напряженности магнитного поля был использован пересчет согласно закону $B \propto 1/a^2$ для одной точки во времени с целью сделать качественные оценки. Эти оценки показали, что эффект может оказывать заметное влияние на амплитуду реликтовых ГВ.

Рассмотрим формальный вывод системы дифференциальных уравнений для эффекта на примере работы [11]. На фоне плоского пространства-времени выводится стандартное волновое уравнение для ГВ, где справа стоит поправка к ТЭИ

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}^{(1)}. \quad (2.2)$$

После чего, магнитное поле раскладывают на фоновое \mathbf{B}_0 и на поправку \mathbf{b}_0 в первом порядке по возмущению

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}. \quad (2.3)$$

Далее, используя выражения для ТЭИ из действия Максвелла

$$T_{\mu\nu}^{\text{Max}} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{A}_{\text{Max}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 - F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\cdot\alpha}, \quad (2.4)$$

получают систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{h}_{xy} - h''_{xy} &= -4B_0 b_y, \\ \ddot{b}_y - b''_y &= h''_{xy} B_0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Авторы показали, что конверсия происходит только для перпендикулярной составляющей \mathbf{k} и поляризации $h_{\times} = h_{xy}$.

Вероятность перехода фотона в гравитон выражается в зависимости от пройденного расстояния D как

$$P(\gamma \rightarrow g) = \sin^2(D/L), \quad L = \frac{2}{B_0}. \quad (2.6)$$

Здесь можно провести некоторую аналогию с осцилляциями нейтрино, где вероятность перехода мюонного нейтрино в электронное

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \propto \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E_\nu} D\right). \quad (2.7)$$

E_ν — энергия нейтрино, $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$ — квадрат разницы масс состояний m_1 и m_2 . Однако, следует понимать, что у эффекта смешивания нейтрино другая природа (в общепринятом формализме отсутствует коммутация вакуумного оператора эволюции с оператором рождения нейтрино при слабых взаимодействиях), так как в этом случае смешивание происходит из-за наличия разных масс у разных сортов нейтрино. В эффекте Герценштейна же смешиваются два безмассовых бозона.

Нужно заметить, что вероятность перехода гравитона в фотон имеет простую форму для постоянного внешнего магнитного поля. В случае переменного магнитного поля зависимость может быть сложнее или даже не выражаться аналитически.

К тому же, в работе [11] указан закон сохранения энергии в виде

$$h_{xy}^2 + \frac{b_y^2}{B_0^2} = const. \quad (2.8)$$

В космологии нет закона сохранения энергии, поэтому это равенство будет нарушаться.

В заключение раздела отметим, что все перечисленные в начале главы работы ограничивались задачей взаимных превращений электромагнитной и гравитационной волн на фоне плоского пространства-времени Минковского в постоянном внешнем электромагнитном поле. Однако в космологическом случае необходимо учитывать зависимость амплитуды реликтовых ГВ, а также напряженности магнитного поля от масштабного фактора. По этим причинам в диссертации была поставлена задача вывода системы уравнений для эффекта Герценштейна на фоне расширяющегося пространства-времени ФЛРУ.

2.1.1 Действие Гейзенберга-Эйлера

Эффективное действие Гейзенберга-Эйлера описывает поправку к действию Максвелла, связанную с рассеянием света на свете. Последний процесс выражается диаграммой Фейнмана с четырьмя фотонными линиями, связанными электрон-позитронной петлей (рис. 14).

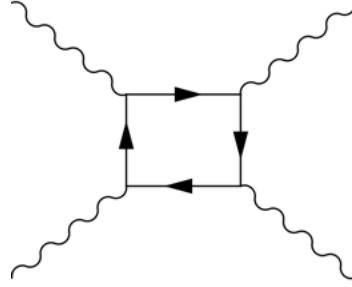


Рисунок 14 — Диаграмма рассеяния света на свете. Волнистые линии обозначают фотоны, прямые — виртуальную электрон-позитронную пару

Для малых электромагнитных полей $B \ll m_e^2$, $E \ll m_e^2$ эффективное действие Гейзенберга-Эйлера имеет вид:

$$\mathcal{A}_{\text{HE}} = \int d^4x \sqrt{-g} C_0 \left[(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + \frac{7}{4} (\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu})^2 \right], \quad (2.9)$$

где $C_0 = \alpha^2/(90m_e^4)$ и $\alpha = 1/137$ — постоянная тонкой структуры и $\tilde{F}_{\mu\nu}$ — дуальный тензор Максвелла, определенный следующим образом:

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{-g}}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Подчеркнем, что в определении (2.10) учтено, что тензорной величиной является $\sqrt{-g} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$, а не $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ (см., например, гл. 83 книги [29]).

При достаточно больших энергиях в петлю дают вклад и другие фермионы: кварки и антикварки, мюоны и антимюоны. Важно также заметить, что при высоких энергиях мы имеем дело с бегущей константой электромагнитного взаимодействия и бегущей массой частиц в петле. Так что в более общем случае множитель C в лагранжиане зависит от температуры:

$$C(T) = \sum_j \frac{\alpha^2(T) q_j^4}{90 m_j(T)^4}, \quad (2.11)$$

где q_j — заряд частиц, дающих вклад в петлю в единицах заряда электрона. Например, для кварков и антикварков $q = -1/3$ или $2/3$ [84; 85].

Действие Гейзенберга-Эйлера модифицирует классическое действие Максвелла, а потому при достаточно сильных полях меняет систему уравнений, описывающую переход гравитационной и электромагнитной волн друг в друга. Приведенный в этом параграфе материал будет использован в разделе 3.2.

2.2 Крупномасштабное космическое магнитное поле

Космический магнетизм изучается давно. Одним из крупномасштабных является магнитное поле галактик (масштаб $\sim 10 - 100$ кпк). Оно хорошо исследовано по эффекту Фарадея² в наблюдениях скоплений галактик ($\sim 2 - 10$ Мпк), а также по радио-эмиссии в гало галактик. Получаемая в наблюдениях характерная напряженность галактического магнитного поля составляет величину от одного до нескольких микрогаусс.

Аналогичными наблюдениями измерены магнитные поля в скоплениях галактик. Их напряженность составляет от 1 до 10 $\mu\text{Гс}$ на периферии и 30–70 $\mu\text{Гс}$ в центрах скоплений.

Важно заметить, что при попытке описания и моделировании генерации магнитных полей даже на галактическом масштабе и на масштабе галактических скоплений необходимо наличие затравочных полей, называемых первичными магнитными полями (ПМП) [24].

Еще более крупномасштабные, космологические, магнитные поля обнаружены на наблюдениях за гало блазаров — активных ядер галактик — в гамма-диапазоне. Магнитные поля заполняют пространства $\gtrsim 1$ Мпк, которые находятся между скоплениями, в войдах, то есть находятся там, где текущих источников магнитного поля нет. Следовательно, эти магнитные поля должны были возникнуть на ранних этапах эволюции Вселенной.

²Эффект Фарадея — это эффект вращения плоскости поляризации линейно-поляризованной электромагнитной волны при распространении в оптически не активной среде, пронизанной магнитным полем

Напряженность космологического магнитного поля чрезвычайно мала, измерить ее пока что не удалось, однако на сегодняшний день есть ограничения:

$$10^{-16} < B < 10^{-12} - 10^{-9} \text{ Гс.} \quad (2.12)$$

В общепринятой в настоящее время модели ПМП рассматривается не как однородное на больших масштабах поле, а как стохастический фон³. Стохастическое магнитное поле, в отличие от однородного, не разрушает наблюдаемую по реликтовому излучению изотропию Вселенной. Но справедливо заметим, что однородное магнитное поле слабой амплитуды тоже не дает анизотропии в пределах чувствительности наблюдений. Об этом речь пойдет ниже (см. раздел 2.2.2).

Вкладом ПМП в темп расширения, то есть в плотность энергии Вселенной обычно пренебрегают, так как он мал по сравнению со вкладами вещества и излучения. Подробнее см. Гл.19, п. 3 книги [86].

Сделаем небольшое отступление с целью уточнения терминологии. Для крупномасштабного магнитного поля Вселенной есть несколько устоявшихся терминов: первичное магнитное поле (ПМП), межгалактическое магнитное поле, внегалактическое магнитное поле, космологическое магнитное поле. В работе используются два синонимичных термина: ПМП и космологическое магнитное поле.

В последующих разделах будут перечислены основные модели магнитогенезиса, а также кратко разобраны методы наблюдений ПМП и то, как получены существующие ограничения на его напряженность.

2.2.1 Модели магнитогенезиса

Разработкой теоретического описания генерации крупномасштабного магнитного поля занимаются теории магнитогенезиса. Большинство из них сходятся на идее усиления первичных магнитных полей процессами магнитогидродинамики в плазме.

Одним из общепринятых является эффект галактического динамо. Это эффект самовозбуждения магнитного поля при движении заряженной жидкости

³Такая модель видится более естественной. Однако, нельзя с полной уверенностью полагать, что Вселенная изотропна. Соображения об отсутствии выделенного направления вне пределов точности измерений, в какой-то степени, можно назвать эстетическими

или плазмы. Усиление происходит при формировании протогалактик и обеспечивается разной скоростью тока частиц в слое в зависимости от расстояния до гравитационного центра, а также турбулентностью потоков. Разность скоростей возникает из-за наличия тепловой конвекции [87—89].

Однако, одного эффекта динамо недостаточно, так как для генерации наблюдаемой напряженности галактического магнитного поля потребовалось бы слишком много времени. К тому же есть наблюдения галактик на больших красных смещениях, в которых напряженность магнитного поля уже порядка $1 \mu\text{Гс}$. Хотя некоторые модели динамо и позволяют создавать сильное магнитное поле, но в них масштаб однородности поля составляет намного меньшую величину по сравнению с наблюдаемыми масштабами.

Есть и альтернативный способ усиления ПМП на галактических масштабах — усиление поля при адиабатическом сжатии в процессе коллапса протогалактического облака. При таком коллапсе по закону сохранения магнитного потока получается усиление напряженности ПМП в $\frac{r_{\text{initial}}^2}{r_{\text{final}}^2}$ раз, где r_{initial} и r_{final} — это характерные линейные размеры облака до коллапса и после.

Вопрос же происхождения самих ПМП для последующего усиления в галактиках и кластерах остается нерешенным. В настоящее время существует несколько классов моделей генерации ПМП:

1. *Генерация в эпоху инфляции за счет возникновения магнитного поля из квантовых флуктуаций.* Генерация электромагнитного поля конформно-плоским расширяющимся пространством возможна только в том случае, если взаимодействие между гравитационным и электромагнитным полем конформно не инвариантно. Нарушить эту инвариантность можно, например, введением тензора электромагнитного поля дилатонного типа. Такие модели рассматривают в качестве расширений Стандартной Модели физики частиц.
2. *Генерация при столкновениях стенок пузырей космологического фазового перехода первого рода.* В данном случае подразумеваются электрослабый переход, переход хромодинамики и, иногда, фазовый переход суперобъединения. В рамках стандартной модели электрослабый фазовый переход и переход хромодинамики относятся ко второму роду, поэтому для получения более быстрого перехода нужно выходить за рамки Стандартной Модели.

3. *Генерацию магнитного поля на меньших масштабах объясняют с помощью механизма Бирманна или батареи Бирманна.* Этот механизм заключается в генерировании тока в плазме с градиентом электронной плотности. Такой градиент можно создать, например, в протогалактике из-за разницы температур при движении от центра к периферии. Первичная плазма состоит из протонов и электронов. При этом на оба сорта частиц будет действовать одинаковое давление, обусловленное градиентом температур. Оно будет направлено из центра протогалактики наружу. А вот гравитационная сила, действующая на протоны, будет больше, чем действующая на электроны. В результате электроны будут быстрее перемещаться в область низких температур, чем протоны, из-за чего будет возникать разница потенциалов, и потечет электрический ток. Предполагается, что такие токи возникали в первичной плазме после момента последнего рассеяния фотона на электроне ($z \sim 1100$) и в эпоху реионизации. Эти токи, в свою очередь, генерировали первичные магнитные поля. Отличительной особенностью этого класса моделей является отсутствие необходимости введения новой физики, т.к. механизм Бирманна является чисто плазменным эффектом.
4. *Генерация в других неадиабатических процессах.* Например, при *турбулентности в первичной плазме.*

Теории астрофизического происхождения ПМП в диссертации не рассмотрены.

Таким образом, удовлетворительная теория магнитогенезиса еще не построена, и вопрос возникновения первичного магнитного поля остается открытым [24].

2.2.2 Следы первичного магнитного поля (ПМП) на космическом микроволновом фоне

Верхнее ограничение на напряженность ПМП может быть получено из анализа характеристик космического микроволнового излучения⁴[90—97]. Суще-

⁴Англоязычный термин: cosmic microwave background, CMB

ствуется несколько механизмов, через которые ПМП оставляет след на реликтовом излучении.

Первый возможный механизм — анизотропное расширение Вселенной в модели изотропного ПМП. Действительно, изотропное магнитное поле приводит к анизотропии пространства. Если направить ПМП вдоль оси z , интервал будет выражаться следующим образом:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2) - b^2(t) dz^2, \quad (2.13)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — масштабные факторы вдоль соответствующих осей координат. Разница между этими масштабными факторами не велика и спадает с течением времени. Тем не менее, ненулевое магнитное поле поддерживает их величины хоть и не сильно, но различными. В результате температура фотонов, пришедших с разных направлений, будет разной просто из-за того, что в этих направлениях Вселенная расширяется с разной скоростью, и фотоны не одинаково краснеют. Можно показать, что ПМП напряженностью $10^{-10} - 10^{-9}$ Гс привело бы к анизотропии температуры реликтового излучения $\frac{\delta T}{T} \lesssim 10^{-6}$ [86]. По данным коллаборации Planck $\frac{\delta T}{T} = 10^{-5}$. Так что наличие однородного магнитного поля такой напряженности не противоречило бы наблюдательным данным.

Второй механизм заключается в том, что давление магнитного поля препятствует падению барионов в потенциальную яму. В результате скалярные возмущения плотности, а следовательно, и скалярные возмущения метрики, становятся немного менее выраженными к моменту зарождения реликтового фона фотонов. Это приводит к уменьшению высоты первого акустического пика реликтового излучения⁵ (рис. 15). Данный результат получается в модели однородного магнитного поля и более строго выводится через теорию магнитогидродинамики первичной плазмы и моделирование.

⁵Барионные акустические осцилляции (Сахаровские осцилляции) — это колебания первичной плазмы в эпоху рекомбинации, которые оставили след на угловом спектре флуктуаций температуры реликтового излучения. При расширении Вселенной в эпоху радиационного доминирования скорость звука для возмущений плотности из-за падения давления среды быстро уменьшается, поэтому волны флуктуаций плотности различной длины застывают в пространстве, влияя, в свою очередь, на флуктуации температуры реликтовых фотонов

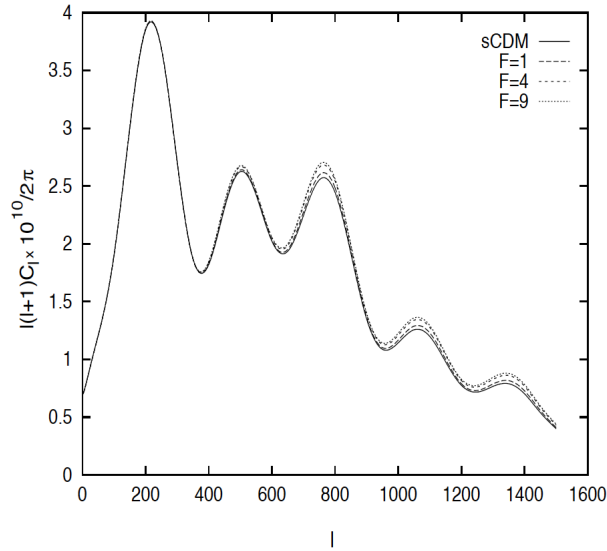


Рисунок 16 — Численное интегрирование мультиполей корреляционной функции анизотропии в стандартной модели CDM без первичного магнитного поля ($F = 0$) и с $F = 1, 4, 9$, которые соответствуют $\nu_0 = \nu_d, \nu_d/2, \nu_d/3$ соответственно, с $\nu_d \approx 27$ ГГц ($B_0/0.01$ Гаусс) $^{1/2}$ [41].

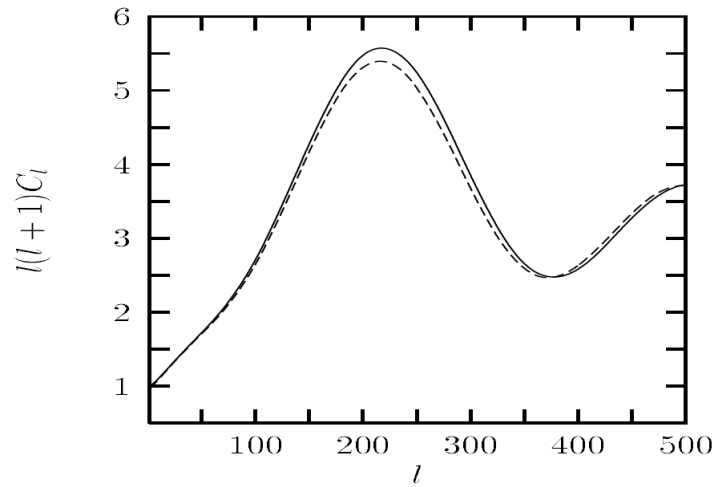


Рисунок 15 — Эффект влияния ПМП на мультипольные моменты. Сплошная линия показывает предсказание стандартной космологии CDM ($\Omega = 1, h = 0.5, \Omega_B = 0.05$). Пунктирная линия показывает эффект добавления магнитного поля, эквивалентного 2×10^{-7} Гаусс сегодня [98]

Третий механизм — деполяризация излучения в магнитном поле — также может изменить высоту пиков осцилляций Сахарова. Для него следующие после первого пика акустических осцилляций, наоборот, усиливаются (рис. 16).

Четвертый механизм связан с взаимодействием частиц первичной плазмы с ПМП, которое приводит к магнитогидродинамическим процессам: рожде-

нию плазменных колебаний (медленная и быстрая магнитозвуковая волны, Альфвеновские волны) и диссипации энергии ПМП [24]. Однако, не все моды волн в плазме диссипируют одинаково сильно. Так, Альфвеновские волны определенных длин волн затухают менее эффективно, чем магнитозвуковые, вследствие чего они влияют на статистические характеристики реликтового излучения. Наличие магнитного поля приводит к ненулевым значениям некоторых корреляционных функций между коэффициентами разложения анизотропии температуры по мультиполям. Более простыми словами, пропадает статистическая изотропия, возникает негауссовость сигналов. Получается, что анизотропию реликтового излучения, порожденную ПМП легко⁶ отличить на фоне анизотропии, произошедшей от первичных скалярных возмущений, ведь первичные скалярные возмущения возникли в процессе инфляции и имеют исключительно гауссовый характер.

Пятый механизм влияния ПМП на реликтовое излучение возникает из-за возбуждения первичным магнитным полем быстрой и медленной магнитозвуковой волн в плазме и из-за диссипации этих волн. Две упомянутые моды колебаний плазмы связаны с возмущениями плотности и приводят к генерации дополнительных скалярных возмущений метрики. Эти скалярные возмущения, как и инфляционные возмущения метрики становятся причиной анизотропии температуры реликтового излучения [24].

Наконец, наиболее известным является влияние ПМП на соотношения амплитуды E - и B -мод поляризации реликтового излучения. К этому эффекту приводит вращение Фарадея плоскости поляризации линейно-поляризованной электромагнитной волны при распространении в магнитном поле. Угол поворота плоскости поляризации зависит от частоты электромагнитной волны. Следовательно, если измерять поляризацию для фотонов, пришедших с одного направления, но имеющих разную частоту, можно определить напряженность ПМП.

Приведем современные ограничения на напряженность ПМП из анализа данных обсерватории Planck: для различных моделей, в том числе масштабнo инвариантных, на масштабе 1 Мпк ограничение составляет $B_0 < 1 - 5$ нГс [91].

⁶Если опустить другие возможные источники негауссовости анизотропии реликтового излучения

2.2.3 Влияние ПМП на первичный нуклеосинтез

Отношение числа нейтронов к числу протонов, из которых образуются реликтовые легкие химические элементы⁷, закладывается в момент так называемой закалки нейтронов. В момент закалки время свободного пробега между реакциями бета-распада становится равным времени Хаббла. То есть время жизни нейтрона становится сопоставимо с характерным временем расширения Вселенной, а реакции становятся слишком медленными, чтобы поддерживать термодинамическое равновесие. После закалки нейтронов отношение числа нейтронов к числу протонов, определяемое формулой

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{eq}} = \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{3/2} e^{-(m_n - m_p)/T}, \quad (2.14)$$

перестает меняться.

Есть несколько механизмов влияния ПМП на процессы в эпоху первичного нуклеосинтеза. Все они в конечном итоге меняют отношение (2.14), получаемое на старте эпохи первичного нуклеосинтеза [24].

Самым прямым эффектом является влияние плотности энергии магнитного поля на скорость расширения Вселенной. Вселенная в присутствии ПМП расширяется быстрее, а значит увеличивается температура закалки нейтронов. Как видно из уравнения (2.14), отношение числа нейтронов к протонам экспоненциально зависит от температуры закалки, и даже малое увеличение температуры приводит к заметному увеличению распространенности реликтового гелия, по сравнению со стандартным сценарием с отсутствующим ПМП.

Вторым механизмом влияния ПМП на первичный нуклеосинтез является увеличение скорости реакций бета-распада нейтронов в присутствии сильного магнитного поля:



Дело в том, что в магнитном поле волновые функции электронов и позитронов становятся периодическими в плоскости, перпендикулярной полю. Энергия

⁷В эпоху первичного нуклеосинтеза преимущественно образуются водород и гелий. В малой концентрации так же образуются литий 7 и бериллий

электронов становится дискретной и описывается формулой

$$E_n(B) = [p_z^2 + |e|B(2n + 1 + s) + m_e^2]^{1/2}, \quad (2.16)$$

где принято, что магнитное поле \mathbf{B} направлено по оси \mathbf{z} , n — уровень Ландау, $s = \pm 1$ — знак проекции спина электрона на вектор напряженности магнитного поля.

Помимо изменения закона дисперсии, происходит дискретизация в импульсном пространстве, что сильно меняет занимаемый частицами объем в фазовом пространстве

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(E_0) \rightarrow |e|B \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{n0}) \int \frac{dp}{(2\pi)^2} f(E_n(B), T). \quad (2.17)$$

Все это приводит к линейно растущей от напряженности ПМП скорости реакций распада нейтрона $\Gamma_{n \rightarrow pe\bar{\nu}} \propto \frac{B}{B_{\text{crit}}}$. Выше скорость реакций — ниже температура закалки нейтронов. Значит, по формуле (2.14) получается уменьшение отношения $(n/p)_{\text{eq}}$, а следовательно, и уменьшенную концентрацию реликтового гелия [24].

Два вышеперечисленных эффекта ведут к поправкам противоположного знака для температуры закалки относительно температуры, получаемой в отсутствие ПМП.

Есть и другие интересные эффекты. Например, сильное ПМП изменяет плотность энергии электрон-позитронного газа, имея влияние на темп расширения Вселенной и на количество энтропии, передаваемой от электронов и позитронов фотонам. Это влияет на отношение барионов к фотонам η_b , а чем больше значение η_b , тем меньше реликтового дейтерия образуется, т.к. $n_D \sim n_p/\eta_b$, где n_p — концентрация протонов. Для первичного гелия зависимость от η_b слабая, логарифмическая, а потому не так информативна [99].

Еще один эффект, который хотелось бы упомянуть — это влияние ПМП на химический потенциал нейтрино и на спиновые осцилляции нейтрино. ПМП может стать причиной асимметрии при конверсии левых и правых нейтрино и антинейтрино, что привело бы к возникновению лептонной асимметрии [100; 101]. Это влияние особенно интересно в контексте теорий о переходе лептонной асимметрии в барионную (Гл. 11 в книге [99]).

2.2.4 Влияние ПМП на формирование крупномасштабной структуры

Крупномасштабное магнитное поле влияет на формирование крупномасштабной структуры. Происходит это за счет возникновения силы Лоренца, которая действует на заряженные частицы первичной плазмы. Неоднородное ПМП само по себе является источником плотности энергии, источником скоростей и, следовательно, гравитационных возмущений в жидкости с ненулевой электропроводностью (плазме) [24; 102].

В некоторых работах рассматривается влияние ПМП на скорость потоков барионов в модели Вселенной с холодной темной материей [103—105]. Предполагается, что скорость потока барионов становится сопоставимой со скоростью потока частиц темной материи. Как следствие, происходит затормаживание падения барионов на гравитационный центр, что приводит к рождению галактик в масштабах больших чем те, что получаются в модели холодной темной материи без ПМП. И этот результат ближе к реальности. Таким образом, ПМП — это довольно естественное решение несоответствия предсказаний модели холодной темной материи с наблюдениями кластеров галактик.

Существуют работы, в которых авторы получают возникновение нитеобразных структур в плазме под действием ПМП с напряженностью, соответствующей современному значению $B \lesssim 10^{-9}$ Гс [106—108]. То есть ПМП могло привести к формированию нитей и войдов крупномасштабной структуры.

На галактических же масштабах ПМП могло приводить к так называемому магнитному трению при звездообразовании, которое уносит избыток вращательного момента газового облака протозвезды, что и позволяет ей схлопнуться под действием гравитации. Так, ПМП, возможно, ускоряло темпы звездообразования в протогалактиках, приводя к формированию сфероидальных галактик [109; 110].

2.2.5 Влияние ПМП на гало вокруг активных ядер галактик

Нижнее ограничение на напряженность космологического магнитного поля получено из наблюдений за блазарами [25; 111—114]. Активные ядра галактик

(АЯГ) испускают гамма-кванты высоких энергий $E \sim 10^{12}$ эВ. Такие фотоны взаимодействуют с фотонами диффузного электромагнитного поля ⁸ и рождают электрон-позитронные пары. Электрон-позитронные пары порождают электромагнитные каскады, в результате которых излучаются фотоны уже более низкой энергии, чем у первичных фотонов. В итоге вокруг АЯГ возникает гало из фотонов гамма-диапазона.

ПМП влияет на развитие электромагнитных каскадов, и, как следствие, меняет форму гало, а также может стать причиной регистрации задержанного светового сигнала от АЯГ. Астрономические наблюдения в гамма-диапазоне позволяют оценить и, возможно в будущем, позволят измерить напряженность космологического магнитного поля. Так, коллаборация гамма-телескопа Fermi-LAT из наблюдений за гало вокруг активных ядер удаленных галактик получила ограничение $B > 3 \times 10^{-16}$ Гс [114]⁹.

2.2.6 Модель стохастического магнитного поля

Рассмотрим модель стохастического магнитного поля на примере работы [117], где изучается генерация магнитного поля при фазовых переходах первого рода. Авторы предлагают следующий механизм генерации ПМП: стенки пузырей новой фазы при столкновениях порождают турбулентные потоки, вследствие чего энергия турбулентного движения плазмы частично переходит в электромагнитную энергию.

Напряженность магнитного поля связана с плотностью энергии магнитного поля ρ_B следующим образом:

$$B(\lambda, t) = \sqrt{2\rho_B(\lambda, t)}, \quad (2.18)$$

где λ — длина когерентности магнитного поля.

⁸Галактики излучают гамма-кванты, которые после улетают в межгалактическое пространство. Таким образом создается так называемый внегалактический фоновый свет, или диффузное внегалактическое электромагнитное поле. Энергия таких фотонов лежит в инфракрасном диапазоне

⁹Ранее коллаборация Fermi-LAT заявляла о первом измерении напряженности межгалактического магнитного поля [115], однако в статье [116] показано, что в работе [115] не учтен инструментальный эффект, вследствие чего сделан ошибочный вывод о наблюдении влияния магнитного поля на гало АЯГ

К моменту окончания фазового перехода t_* спектр мощности

$$\rho_B(\lambda, t_*) = \frac{17}{10} \rho_{B,*} \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{-5} & \text{если } \lambda \geq \lambda_* \\ \left(\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{2/3} & \text{если } \lambda < \lambda_* \end{cases}, \quad (2.19)$$

где λ_* — средний размер пузырей новой фазы.

Результат получен в предположении, что показатель степени в выражении для спектра энергии магнитного поля от масштаба λ ,

$$\mathcal{P}_B(\lambda, t_*) \approx \text{const} \cdot \lambda^{-n_B}, \quad (2.20)$$

$n_B = 2$. Это предположение соответствует требованию $n_B \geq 2$, выполнение которого необходимо для соблюдения причинности и ковариантного закона сохранения ТЭИ.

После установления формы начального спектра необходимо получить закон его изменения. Утверждается, что далее форма спектра не изменяется, изменяется только напряженность магнитного поля и длина его когерентности. Закон изменения зависит от модели.

Когда магнитогидродинамические процессы полностью разовьются, плотности энергии магнитного поля и турбулентности плазмы сравниваются. Это происходит на масштабе λ_{eq} . Магнитное поле на остальных масштабах затухает из-за диссипации Колмогорова.

Дальнейшие результаты являются модельно зависимыми. Рассматриваются модели с начальной нулевой и ненулевой средней спиральностью как у магнитного поля, так и у завихренной плазмы.

При отсутствии начальной средней спиральности у магнитного поля и плазмы сопутствующие величины изменяются по законам

$$\lambda_{\text{eq}} \sim t^{\frac{2}{5+n}}, \quad B(\lambda_{\text{eq}}) \sim t^{\frac{3+n}{5+n}}, \quad (2.21)$$

где n — минимальный из показателей затухания начальных спектров магнитного поля и турбулентной плазмы (то есть спектральный индекс энергетически доминирующего в начальный момент поля).

При наличии частично спирализованного магнитного поля закон изменения

$$\lambda_{\text{eq}} \sim t^{2/3}, \quad B(\lambda_{\text{eq}}) \sim t^{-1/3}. \quad (2.22)$$

Ненулевая средняя спиральность магнитного поля к концу фазового перехода может возникнуть вследствие процессов с несохранением барионного числа

и из-за турбулентности в плазме. Напомним также, что в сверхпроводящей плазме спиральность сохраняется.

Если же модель такова, что неспиральное магнитное поле полностью затухает из-за взаимодействия с плазмой, то

$$\lambda_{\text{eq}} \sim t^{1/2}, \quad B(\lambda_{\text{eq}}) \sim t^{-1/2}. \quad (2.23)$$

Во всех этих случаях, если хотим перейти в лабораторную систему отсчета, нужно домножить длину когерентности на a , а напряженность магнитного поля разделить на a^2 . Как видно, напряженность магнитного поля убывает медленнее, а длина когерентности растет быстрее, чем при адиабатическом расширении Вселенной.

В качестве заключения к главе еще раз отметим, что наличие ПМП приводит к многочисленным следам на микроволновом реликтовом фоне, влияет на формирование крупномасштабной структуры и на распространенность легких элементов во Вселенной, образующихся в эпоху первичного нуклеосинтеза.

Хотя измерить напряженность ПМП пока не удалось, из различных наблюдений и базирующихся на них теоретических расчетах можно поставить нижнее и верхнее ограничения на его величину (2.12).

Выводы из литературного обзора, мотивация и цель исследования

В результате литературного обзора стало ясно, что существует проблема отсутствия отпечатка реликтовых ГВ, предсказанных теорией инфляции, на реликтовом излучении (раздел 1.9). Остается неясным, сможем ли мы когда-нибудь зарегистрировать реликтовые ГВ в современной Вселенной с помощью интерферометров, и имеет ли сигнал NANOGraV инфляционную составляющую (раздел 1.9).

Все эти вопросы являются мотивацией исследования, как и то, что напряженность космологического магнитного поля в ранней Вселенной достигала больших значений (Гл. 2), и, следовательно, эффект Герценштейна (раздел 2.1) мог оказывать значительное влияние на эволюцию реликтовых ГВ.

Таким образом, **целью** работы является оценка влияния на спектр реликтовых гравитационных волн эффекта их конверсии в электромагнитные волны под действием космологического магнитного поля.

Ниже следующие главы диссертации посвящены аккуратному выводу и решению связанной системы дифференциальных уравнений для возмущений метрики и электромагнитных волн в присутствии космологического магнитного поля на фоне Вселенной Фридмана.

Глава 3. Система уравнений для эффекта Герценштейна

3.1 Уравнение распространения ГВ в произвольном непустом искривленном пространстве-времени

Чтобы получить систему дифференциальных уравнений для эффекта Герценштейна, необходимо будет рассмотреть анизотропный ТЭИ и нетривиальную поправку к нему, а также в дальнейшем оценить вклад в уравнения анизотропии пространства, вызванной наличием однородного космологического поля. По этой причине понадобится система уравнений для распространения метрических возмущений в общем виде: на фоне произвольной фоновой метрики и с произвольной поправкой к ТЭИ.

В подавляющем большинстве существующих работ рассматривается уравнение распространения гравитационных волн на фоне метрики Минковского и на фоне конформно-плоской метрики ФЛРУ [6; 29; 69; 118–120]. Большой интерес к этим частным случаям метрик объясняется простотой выкладок при выводе уравнений и возможностью разложения метрических возмущений по спиральностям. В результате получается три независимые системы уравнений, одна из которых описывает тензорные возмущения метрики — гравитационные волны (см. раздел 1.6).

Еще одним упрощающим предположением в существующей литературе является предположение об отсутствии поправки (возмущения) для фонового тензора энергии-импульса, либо введение поправки в упрощенной модели идеальной жидкости (см. раздел 1.7).

Все эти предположения вводятся прежде, чем приступить к выводу системы уравнений, так что необходимость в получении системы для общего случая отсутствует. По этой причине автору удалось найти только одну обзорную статью, где было явно записано уравнение распространения метрических возмущений на фоне произвольного искривленного пространства-времени: уравнение (5.11) в [121]. Подчеркнем, что в работе [121] рассмотрена линеаризация вакуумного уравнения Эйнштейна, то есть возмущение ТЭИ равно нулю.

Важно отметить, что есть и работы, в которых рассмотрено распространение метрических возмущений на фоне неизотропных пространств. Например,

на фоне пространств Бьянки [122; 123]. При такой постановке задачи возмущения метрики по спиральностям не раскладываются, так как в анизотропном пространстве уравнения на разные моды не разделяются, а потому считается, что для таких задач этот подход не имеет смысла. Получается, что и вводить в таких задачах термин ГВ не совсем корректно. И все же, задача, поставленная в диссертации, отличается тем, что в модели однородного космологического магнитного поля изначально слабо анизотропное пространство с течением времени становится все более изотропным¹, и разделение на ГВ и скалярные метрические возмущения становится вполне законно. Да и сами первичные, инфляционные, метрические возмущения в общепринятом подходе разделяются на скалярные и тензорные (см. раздел 1.8).

Более того, можно рассмотреть целый класс задач, в которых начальная тензорная ГВ переходит из изотропного пространства в анизотропное, генерируя скалярные (продольные) и, в некоторых случаях, векторные метрические возмущения². Как следствие, амплитуда тензорной ГВ изменится, а для волновых пакетов ГВ будет наблюдаться явление размытия, которое можно трактовать как наличие эффективной массы у гравитона.

Примером такой задачи является прохождение ГВ в гравитационном поле вращающегося массивного объекта или в гравитационном поле «блина» Зельдовича при формировании крупномасштабной структуры. Для оценки величины такого эффекта в физически реалистичных задачах необходимо проводить отдельное исследование. Некоторые начальные соображения на этот счет приведены в приложении 5.6. Упрощенная задача о прохождении гравитационной волны через единичное коллапсирующее пылевидное облако решена в главе 5.

Из сказанного выше можно сделать вывод о малой изученности системы уравнений, описывающей распространение метрических возмущений на фоне произвольного пространства-времени, и целесообразности самостоятельного ее вывода.

¹Это связано с тем, что вклад в плотность энергии от магнитного поля Ω_B убывает так же, как и вклад от излучения Ω_{rad} . По этой причине с переходом на стадию доминирования пыли не только Ω_B пренебрежимо по отношению к Ω_{rad} , но и само Ω_{rad} становится много меньше Ω_m

²Автор не нашел публикаций на эту тему, поэтому нужно считать, что эта идея высказывается впервые

3.1.1 Обозначения

По аналогии с изложением в разделе 1.6 разложим полную метрику $\bar{g}_{\mu\nu}$ до первого порядка по возмущению

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \\ \bar{g}^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Выпишем поправку для определителя метрического тензора. Для произвольной невырожденной матрицы $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M} + \delta\mathcal{M}$ разложение до первого порядка по возмущению выражается следующим образом

$$\det[\mathcal{M} + \delta\mathcal{M}] = \det[\mathcal{M}](1 + \text{Tr}[\mathcal{M}^{-1}\delta\mathcal{M}]).\tag{3.2}$$

Таким образом, для определителя полного метрического тензора получаем разложение

$$\det[\bar{g}_{\mu\nu}] = \det[g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}] = \det[g_{\mu\nu}](1 + h),\tag{3.3}$$

где используется обозначение для следа матрицы возмущения метрики $h \equiv g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$.

3.1.2 Вывод уравнения

Все необходимые обозначения введены. Можно приступить к выводу системы дифференциальных уравнений, начиная с уравнений Эйнштейна (1.9) для полных величин и уточнив разложение до первого порядка по возмущению для величин из уравнения (1.10):

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)}, \\ \bar{R} &= \bar{g}^{\alpha\beta}\bar{R}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}^{(1)}, \\ \bar{T}_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(1)}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

После исключения уравнений Эйнштейна для фона $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}$ остается система уравнений для первого порядка по возмущению (1.24).

Используя (1.22, 1.23), калибровочное условие $D_\mu h_\nu^\mu = \frac{1}{2}\partial_\nu h$, а также правило коммутации ковариантных производных $[D_\alpha, D_\beta] h_\nu^\mu = R^\mu_{\lambda\alpha\beta} h_\nu^\lambda - R^\lambda_{\nu\alpha\beta} h_\lambda^\mu$, из (1.24) окончательно получаем

$$\begin{aligned} D^2 h_{\mu\nu} - 2h^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\nu\beta} - (h_{\alpha\mu} R_\nu^\alpha + h_{\alpha\nu} R_\mu^\alpha) + h_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \left(h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} D^2 h \right) \\ = -2(8\pi G) T_{\mu\nu}^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В изотропном пространстве можно разложить возмущения метрики по спиральностям. В пустом пространстве нетривиальное решение будет иметь только уравнение для тензорной моды $h_{\mu\nu}^T$, которая является бесследовой $h^T \equiv g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}^T = 0$.

В метрике Минковского все компоненты тензора Римана и Риччи равны нулю, а ковариантная производная равна обычной частной производной. В результате в пустом плоском пространстве-времени уравнение для гравитационных волн (3.5) сводится к общеизвестному уравнению (1.18): $\square h_{\mu\nu}^T = 0$.

В метрике ФЛРУ общепринятое уравнение (1.38) для ГВ можно записать в следующем виде

$$D^2 h_{\mu\nu}^T - 2h^{T\alpha\beta} R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0. \quad (3.6)$$

Чтобы проверить, согласуется ли с ним уравнение (3.5), вспомним, что в метрике ФЛРУ

$$\begin{aligned} R_{ij} &= -g_{ij} \left(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right), \\ R &= -6 \left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

К тому же для тензорной моды $h_{00}^T = 0$ по определению. Значит $h_{\alpha\beta}^T R^{\alpha\beta} = h_{ij}^T R^{ij} \propto h^T = 0$. Тогда можно переписать (3.5)

$$D^2 h_{\mu\nu}^T - 2h^{T\alpha\beta} R_{\alpha\mu\nu\beta} - 2h_{\mu\nu}^T \left(H^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} \right) = -2(8\pi G) T_{\mu\nu}^{T(1)}. \quad (3.8)$$

Расширение Вселенной в метрике ФЛРУ обеспечивается ненулевым фоновым ТЭИ. В приближении идеальной жидкости $T_{\mu\nu} = -p g_{\mu\nu} + (p + \rho) u_\mu u_\nu$. В отсутствие пространственных компонент скорости $u^j = 0$ для полного ТЭИ получаем

$$\bar{T}_{\mu\nu} = -p \bar{g}_{\mu\nu} + (p + \rho) \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0}. \quad (3.9)$$

При записи поправки к ТЭИ первого порядка по возмущению остается слагаемое, пропорционально давлению,

$$T_{\mu\nu}^{T(1)} = -ph_{\mu\nu}^T, \quad (3.10)$$

где $T_{\mu\nu}^{T(1)}$ — тензорная часть ТЭИ.

Нужно заметить, что 00-компонента в тензорной части поправки ТЭИ, которая выражается уравнением (1.35), отсутствует, т.к. $h_{00}^T = 0$. А если поправка к ТЭИ $T_{00}^{(1)}$ содержит вклад $\propto \delta\rho \neq 0$, то эта компонента становится источником не ГВ, а скалярных возмущений метрики. Она вписывается, соответственно, в уравнения для продольной моды (см. уравнение (1.41)).

Для проверки уравнения (3.5) в метрике ФЛРУ воспользуемся уравнением Эйнштейна для фона и получим уравнение Фридмана

$$8\pi G\rho = -\left(H^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a}\right). \quad (3.11)$$

Приняв во внимание уравнения (3.10, 3.11), из (3.8) окончательно получаем верный для ФЛРУ результат — уравнение (3.6).

В рассматриваемой в диссертации задаче, помимо ТЭИ идеальной жидкости, присутствует анизотропный ТЭИ однородного космологического магнитного поля, поэтому разделение возмущений метрики по спиральностям сразу производиться не будет. Уравнение (3.5) на возмущения метрики будет содержать слагаемые, пропорциональные ненулевому следу h . Тем не менее, использование уравнений Фридмана тоже будет полезным при упрощении уравнений в разделе 3.3.1.

Полученное уравнение (3.8) в частных случаях плоской метрики и метрики ФЛРУ совпадает с общепринятыми.

Выведенное линеаризованное уравнение Эйнштейна в общем случае (3.5) является отправной точкой при решении любых задач на возмущения метрики. И уже из такой общей формы можно сделать важные качественные выводы еще на этапе постановки задачи. Об этом пойдет речь в следующем разделе.

3.1.3 Смешивание мод возмущений метрики

Разложение возмущений метрики по спиральностям (1.26 – 1.28) приводит к независимым уравнениям для каждой спиральности в случае аксиальной симметрии задачи, то есть при наличии только одного выделенного направления — направления распространения возмущений метрики $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$. Если же в задаче присутствует анизотропия фонового пространства, моды возмущений метрики смешиваются.

В космологии векторная мода не имеет значения, так как быстро затухает с ростом масштабного фактора. Поэтому продемонстрируем смешивание двух мод возмущений метрики — тензорной и скалярной. Возьмем след от обеих частей уравнения (3.5), получим

$$\partial^2 h + 4h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - hR = 16\pi GT_{\alpha}^{\alpha(1)}, \quad (3.12)$$

где $\partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu$. Теперь разложим тензор $h_{\mu\nu}$ на скалярную и тензорную моды

$$h_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} 2\Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\Psi + h_+ & h_{\times} & 0 \\ 0 & h_{\times} & -2\Psi - h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\Psi \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

Для следа тогда получаем $h = h_{\mu}^{\mu} = 2(\Phi - 3\Psi)$.

В изотропном пространстве $R_{ij} \propto g_{ij}$, тогда свертка во втором слагаемом в уравнении (3.12) будет содержать слагаемые с h и $h_{00} = 2\Phi$. Это означает, что в таком случае (3.12) является уравнением движения только для скалярной моды. При этом след возмущения ТЭИ является источником скалярных возмущений метрики.

Будет поучительно рассмотреть простую модель анизотропного расширения. Пусть пространство расширяется с масштабным фактором $a(t)$ вдоль осей y и z , а вдоль оси x с масштабным фактором $b(t) \neq a(t)$. Интервал тогда запишется следующим образом

$$ds^2 = dt^2 - b(t)^2 dx^2 - a(t)^2 (dy^2 + dz^2). \quad (3.14)$$

Теперь запишем ненулевые компоненты тензора Риччи для этой задачи и найдем свертку $h_{\nu}^{\mu}R_{\mu}^{\nu}$:

$$R_t^t = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b}, \quad (3.15)$$

$$R_x^x = -\left[\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{2\dot{a}\dot{b}}{ab}\right], \quad (3.16)$$

$$R_y^y = R_z^z = -\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}\right]. \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} h_{\nu}^{\mu}R_{\mu}^{\nu} = & -2\Phi \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b}\right] + 2\Psi \left[2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{4\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\ddot{b}}{b}\right] + \\ & + h_+ \left[-\frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a}\right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из последнего уравнения видно, что свертка содержит тензорную моду. Значит в (3.12), помимо скалярных мод, присутствует тензорная — они смешиваются.

Далее будет рассмотрена задача, в которой анизотропия расширения незначительна: $\Omega_B \ll \Omega_{\text{rad}}$. Можно ввести удобное обозначение $b(t) = a(t) - \xi(t)$, где $\xi \ll a$ (либо $\xi(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$). Тогда, (3.18) принимает вид

$$\begin{aligned} h_{\nu}^{\mu}R_{\mu}^{\nu} = & -2\Phi \left[3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{\xi}}{a}\right] + 2\Psi \left[6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{4\dot{a}\dot{\xi}}{a^2} - \frac{\ddot{\xi}}{a} + \frac{\xi}{a} \left(4\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right)\right] + \\ & + h_+ \left[\frac{\ddot{\xi}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{\xi}}{aa} - \frac{\xi}{a} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right)\right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В приложении 5.6 показано, что всеми вкладками, содержащими функцию ξ и ее производные, можно пренебречь. В таком случае квадратная скобка в последнем слагаемом правой части уравнения (3.19) занулится, и смешивание в таком приближении наблюдаться не будет.

С другой стороны, если след поправки для ТЭИ, по какой-то причине, содержит тензорную компоненту возмущения метрики, то смешивание мод все же появится в уравнении (3.12), только уже в правой его части. Далее будет видно, что такая ситуация реализуется для эффекта Герценштейна.

3.2 Система уравнений для эффекта Герценштейна в общем случае фоновой метрики

Этот раздел посвящен выводу системы дифференциальных уравнений для эффекта Герценштейна в произвольном пространстве-времени с учетом рождения виртуальной электрон-позитронной пары, а также упрощению полученной системы для случая метрики ФЛРУ.

Уточним, что под эффектом Герценштейна в работе подразумевается смешивание различных мод возмущений метрики и электромагнитной волны в присутствии внешнего магнитного поля.

В контексте произвольной фоновой метрики интересен не только переход гравитационных волн в электромагнитные волны, но и возможное появление продольной моды возмущений метрики. Качественные и количественные оценки влияние всех этих эффектов смешивания на амплитуду реликтовых гравитационных волн изложены в следующей главе.

3.2.1 Обозначения

Разложим полный потенциал электромагнитного поля \bar{A}_μ до первого порядка по возмущению

$$\bar{A}_\mu = A_\mu + f_\mu, \quad (3.20)$$

где A_μ — фоновый потенциал электромагнитного поля, а f_μ — малое возмущение. Соответственно тензор электромагнитного поля принимает вид

$$\bar{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu = F_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}, \quad (3.21)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ и введено обозначение для тензора возмущения электромагнитного поля

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu. \quad (3.22)$$

Для полноты изложения выразим также разложение для контравариантного и смешанного тензора электромагнитного поля. Поднимать индексы следует

полным метрическим тензором $\bar{g}^{\mu\nu}$, после чего уже производить разложение до первого порядка по возмущению. Получаем

$$\bar{F}_{\cdot\nu}^{\mu} = \bar{g}^{\mu\alpha}\bar{F}_{\alpha\nu} = -h^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu} + F_{\cdot\nu}^{\mu} + f_{\cdot\nu}^{\mu}, \quad (3.23)$$

$$\bar{F}^{\mu\nu} = \bar{g}^{\nu\alpha}\bar{F}_{\cdot\alpha}^{\mu} = -h^{\alpha\nu}F_{\cdot\alpha}^{\mu} - h^{\mu\alpha}F_{\alpha}^{\cdot\nu} + F^{\mu\nu} + f^{\mu\nu}, \quad (3.24)$$

где индексы у фонового электромагнитного тензора и у его поправки подняты с помощью фоновой метрики, то есть величины определены следующим образом

$$f_{\cdot\nu}^{\mu} \equiv g^{\mu\alpha}f_{\alpha\nu}, \quad (3.25)$$

$$f^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}f_{\alpha\beta}, \quad (3.26)$$

$$F_{\cdot\nu}^{\mu} \equiv g^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}, \quad (3.27)$$

$$F^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}. \quad (3.28)$$

В следующих двух разделах последовательно получены уравнения движения для возмущений метрики и электромагнитной волны в присутствии внешнего магнитного поля, зависимость которого от координат и времени пока не уточняется. Используется действие для электромагнитного поля, состоящее из действия Максвелла и действия Гейзенберга-Эйлера (2.9):

$$\bar{\mathcal{A}}_{\text{Max}} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} (\bar{F}^2 + \bar{A}_{\mu}\bar{J}^{\mu}), \quad (3.29)$$

где $\bar{F}^2 = \bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu}$, а верхнее подчеркивание в $\bar{\mathcal{A}}_{\text{Max}}$ означает, что действие выражено в терминах полных величин.

$$\bar{\mathcal{A}}_{\text{HE}} = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} C(T) \left[(\bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu})^2 + \frac{7}{4}(\bar{F}^{\mu\nu}\bar{F}_{\mu\nu})^2 \right]. \quad (3.30)$$

Действие электромагнитного поля выражается их суммой

$$\bar{\mathcal{A}}_{\text{EM}} = \bar{\mathcal{A}}_{\text{Max}} + \bar{\mathcal{A}}_{\text{HE}}. \quad (3.31)$$

Сделаем замечание по поводу множителя $C(T) = C(t)$ в действии Гейзенберга-Эйлера (см. уравнение (2.11)). Система дифференциальных уравнений далее решается для значений масштабного фактора $10^{-12} < a(t) < 10^{-4}$. На этом интервале максимальная температура составляет величину порядка 200 МэВ. Для простоты дальнейших вычислений пренебрежем зависимостью C от времени и положим ее равной $C_0 = \frac{\alpha^2}{90m_e^4}$. Это приближение достаточно точное по следующим причинам:

1. Постоянная тонкой структуры практически равна $1/137$ вплоть до энергий порядка массы Z -бозона (~ 90 ГэВ);
2. При малых температурах $T \lesssim 1$ МэВ единственными частицами, дающими вклад в петлю, являются электроны;
3. Вклад мюонов присутствует до $T \gtrsim 100$ МэВ, но он значительно меньше электронного в силу большей массы мюонов по сравнению с массой электронов;
4. При высоких температурах хоть и присутствует вклад u , d и s кварков, он подавлен как $1/T^4$.

Таким образом, использование C_0 в эффективном действии Гейзенберга-Эйлера позволяет получить разумную оценку эффекта.

3.2.2 Уравнения для возмущений метрики

Начнем с общих уравнений движения возмущений метрики (3.5). В правой части этой системы уравнений стоят компоненты поправки к ТЭИ. Их можно получить путем разложения до первого порядка полного ТЭИ электромагнитного поля $\bar{T}_{\mu\nu}^{\text{EM}}$. Полный ТЭИ найдем, используя соотношение

$$\bar{T}_{\mu\nu}^{\text{EM}} = \frac{2}{\sqrt{-\bar{g}}} \frac{\delta \bar{\mathcal{A}}_{\text{EM}}}{\delta \bar{g}^{\mu\nu}}. \quad (3.32)$$

Получаем ТЭИ от действия Максвелла

$$\bar{T}_{\mu\nu}^{\text{Max}} = \frac{1}{4} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{F}^2 - \bar{F}_{\mu\alpha} \bar{F}_{\nu}^{\cdot\alpha}, \quad (3.33)$$

где при выводе было использовано соотношение $dg = -gg_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}$.

Уравнение (3.33) для ТЭИ электромагнитного поля совпадает с общеизвестным: например с формулой (A.87) из книги [6].

Распишем полный ТЭИ, разложив все величины до первого порядка, и получим поправку к ТЭИ от действия Максвелла

$$\begin{aligned} \bar{T}_{\mu\nu}^{\text{Max}} = \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) (F_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}) & \left(-h^{\beta\lambda} F_{\cdot\lambda}^{\alpha} - h^{\alpha\lambda} F_{\lambda}^{\cdot\beta} + F^{\alpha\beta} + f^{\alpha\beta} \right) + \\ & + (F_{\mu\alpha} + f_{\mu\alpha}) \left(-h^{\alpha\lambda} F_{\lambda\nu} + F_{\cdot\nu}^{\alpha} + f_{\cdot\nu}^{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$T_{\mu\nu}^{\text{Max}(1)} = \frac{1}{4}h_{\mu\nu}F^2 + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(Ff - FFh) + F_{\mu\alpha}f_{\cdot\nu}^{\alpha} + f_{\mu\alpha}F_{\cdot\nu}^{\alpha} - F_{\mu\alpha}F_{\lambda\nu}h^{\alpha\lambda} \quad (3.35)$$

где

$$F^2 = F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad Ff = F_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta}, \quad FFh = h_{\lambda}^{\beta}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\lambda}. \quad (3.36)$$

Теперь запишем полученное аналогичным образом возмущений ТЭИ от действия Гейзенберга-Эйлера (подробнее см. приложение 5.6):

$$T_{\mu\nu}^{\text{HE}(1)} = C_0 \left\{ -h_{\mu\nu}F^4 - g_{\mu\nu}4F^2(Ff - FFh) + 8F^2(F_{\mu\lambda}f_{\cdot\nu}^{\lambda} + f_{\mu\lambda}F_{\cdot\nu}^{\lambda} - h^{\lambda\alpha}F_{\mu\lambda}F_{\nu\alpha}) + 16(Ff - FFh)F_{\mu\lambda}F_{\cdot\nu}^{\lambda} \right\}, \quad (3.37)$$

где использовано уравнение (3.24) и ранее введенные обозначения (3.36), а также учтено, что в отсутствие внешнего электрического поля свертка

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 0. \quad (3.38)$$

Важно помнить, что в общем случае, помимо электромагнитного поля, в задаче могут присутствовать другие виды материи, поэтому

$$T_{\mu\nu}^{(1)} = T_{\mu\nu}^{\text{medium}(1)} + T_{\mu\nu}^{\text{EM}(1)}, \quad (3.39)$$

где $T_{\mu\nu}^{\text{medium}(1)}$ — поправка к ТЭИ среды в конкретной задаче.

Далее в работе система уравнений решена для Вселенной, заполненной релятивистскими частицами в эпоху РД. Такую материю в космологии обычно рассматривают в модели идеальной жидкости.

В заключение этого раздела запишем итоговую систему уравнений для возмущений метрики на фоне произвольного пространства-времени с магнитным полем. Пользуясь (3.5, 3.35, 3.37), получаем

$$\begin{aligned} D^2h_{\mu\nu} - 2h^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\nu\beta} - (h_{\alpha\mu}R_{\nu}^{\alpha} + h_{\alpha\nu}R_{\mu}^{\alpha}) + h_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu} \left(h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}D^2h \right) \\ = -16\pi G \left[T_{\mu\nu}^{\text{medium}(1)} + T_{\mu\nu}^{\text{EM}(1)} \right], \end{aligned} \quad (3.40)$$

где

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\text{EM}(1)} &= T_{\mu\nu}^{\text{Max}(1)} + T_{\mu\nu}^{\text{HE}(1)} = \\ &= \frac{1}{4}h_{\mu\nu}F^2 [1 - 4C_0F^2] + \frac{1}{2}g_{\mu\nu} [1 - 8C_0F^2] (Ff - FFh) + \\ &[1 - 8C_0F^2] [F_{\mu\alpha}f_{\cdot\nu}^{\alpha} + f_{\mu\alpha}F_{\cdot\nu}^{\alpha} - F_{\mu\alpha}F_{\lambda\nu}h^{\alpha\lambda}] - 16C_0(Ff - FFh)F_{\mu\lambda}F_{\cdot\nu}^{\lambda}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Это уравнение можно упростить. Для этого вынесем поправку (3.35) к ТЭИ действия Максвелла за скобку

$$T_{\mu\nu}^{\text{EM}(1)} = [1 - 8C_0 F^2] T_{\mu\nu}^{\text{Max}(1)} + C_0 F^4 h_{\mu\nu} - 16C_0 (Ff - FFh) F_{\mu\lambda} F_{\cdot\nu}^{\lambda}. \quad (3.42)$$

3.2.3 Уравнения для электромагнитной волны

Выведем систему уравнений для распространения электромагнитной волны на фоне произвольного пространства-времени с магнитным полем. Для этого разложим действие до первого порядка по возмущению и возьмем вариацию по δf_μ .

Начнем с действия Максвелла. Учитывая, что в задаче отсутствуют заряд и ток, то есть $\bar{J}^\mu = 0 = \bar{J}_\mu$, из (3.29) получаем

$$\bar{\mathcal{A}}_{\text{Max}} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \left(1 + \frac{h}{2}\right) (F_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}) (F^{\mu\nu} + f^{\mu\nu} - h^{\mu\alpha} F_{\alpha}^{\cdot\nu} - h^{\nu\alpha} F_{\cdot\alpha}^{\mu}), \quad (3.43)$$

Первое слагаемое в левой части уравнения движения принимает вид

$$\frac{1}{4} \frac{\partial_\nu (\sqrt{-g} [4f^{\mu\nu} + 2hF^{\mu\nu} - 2h_\alpha^\mu F^{\alpha\nu} - 2h_\alpha^\nu F^{\mu\alpha}])}{\sqrt{-g}} \equiv Q_{\text{Max}}^\mu, \quad (3.44)$$

где по свойству антисимметричности тензора электромагнитного поля ковариантная дивергенция заменена на обычную.

Теперь сделаем то же самое для действия Гейзенберга-Эйлера (3.30). Для краткости опустим громоздкие выкладки и сразу запишем результат:

$$\begin{aligned} \frac{2C_0}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \{ \sqrt{-g} [F^2 (4f^{\mu\nu} + 2hF^{\mu\nu} - 2h_\alpha^\mu F^{\alpha\nu} - 2h_\alpha^\nu F^{\mu\alpha}) + \\ + 8F^{\mu\nu} (Ff - FFh) + 14\tilde{F}^{\mu\nu} (\tilde{F}f)] \} \equiv Q_{\text{HE}}^\mu, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где $(Ff) = F^{\mu\nu} f_{\mu\nu}$, и было учтено уравнение (3.38).

Полное уравнение движения $Q_{\text{Max}}^\mu + Q_{\text{HE}}^\mu = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \{ \sqrt{-g} [(1 - 8C_0 F^2) \left(f^{\mu\nu} + \frac{h}{2} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_\alpha^\mu F^{\alpha\nu} - \frac{1}{2} h_\alpha^\nu F^{\mu\alpha} \right) - \\ - 16 C_0 F^{\mu\nu} (Ff - FFh) - 28 C_0 \tilde{F}^{\mu\nu} (\tilde{F}f)] \} = 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Основным результатом двух последних разделов является система уравнений (3.40, 3.42, 3.46) для эффекта Герценштейна в произвольной метрике

и с магнитным полем, напряженность которого произвольно зависит от координат и времени.

Область применимости данных выводов ограничивается напряженностью магнитного поля $B \ll m_e^2$, потому что при больших значениях становится несправедливо выражение для эффективного действия Гейзенберга-Эйлера (3.30). Также следует помнить, что все выводы выполнены в пренебрежении зависимостью $C(T)$.

Еще одно замечание связано с тем, что не во всех задачах напряженность магнитного поля достигает значений, при которых необходим учет петлевой поправки рассеяния фотона на фотоне. В уравнениях (3.41, 3.46) показано, что при учете эффективного действия Гейзенберга-Эйлера максимальная поправка к слагаемым от действия Максвелла пропорциональна произведению $32 C_0 B^2$. Примем, что данная поправка играет значительную роль при условии $32 C_0 B^2 \gtrsim 10^{-3}$. Это дает условие на напряженность магнитного поля: $B \gtrsim 10^{13}$ Гс. При таком же значении напряженности перестает работать приближение эффективного действия Гейзенберга-Эйлера: при $B \sim m_e^2 \approx 10^{13}$ Гс. При более сильных магнитных полях теория становится непертурбативной — вклад от петель более высокого порядка становится сопоставим с вкладом от четырехточечной петли. Такая задача решается только численно и выходит за рамки диссертационного исследования.

К примеру, учет петлевой поправки важен при рассмотрении эффекта Герценштейна вблизи магнетара, где $B \sim 10^{15}$ Гс. Только пользоваться в такой задаче эффективным действием Гейзенберга-Эйлера некорректно.

Различные модели зарождения и эволюции космологического магнитного поля также допускают $B \gtrsim 10^{13}$ Гс. В модели, приведенной в разделе 2.2.6, в эпоху доминирования релятивистского вещества $B \propto 1/a^3$. При $B_0 = B(a = 1) = 1$ нГс такая зависимость приводит к напряженности 10^{13} Гс уже при значении масштабного фактора $a \sim 10^{-5}$ ³.

В рассматриваемых параметрах задачи ($a \in [10^{-12}, 10^{-4}]$, $B_0 = 1$ нГс) $B_{\max} = 10^{15}$ Гс. Это значение больше напряженности, для которой верно приближение эффективного действия Гейзенберга-Эйлера. На интервале масштабного фактора $10^{-12} \leq a < 3 \times 10^{-11}$ петлевая поправка может быть получена только численными методами. Таким образом, в рамках представленного исследования учет данной поправки может быть осуществлен только для значений

³Для расчетов используется, что в эпоху доминирования нерелятивистского вещества $B \propto 1/a^2$

$a \geq 3 \times 10^{-11}$, когда напряженность магнитного поля $B \leq 10^{12}$ Гс. Однако, решение системы уравнений на данном интервале показывает, что эта поправка крайне мала: разность амплитуд ГВ, получаемых к моменту $a = 10^{-4}$ с учетом и без учета эффективного действия Гейзенберга-Эйлера, составляет величину порядка 10^{-12} для волн с частотой 10^{-16} Гц и доли процента для волн с частотой 1 нГц. Максимальную пользу, которую можно извлечь из проделанной работы для учета поправки от эффективного действия Гейзенберга-Эйлера — это проверить, как качественно она влияет на эффект Герценштейна. Поправка от действия Гейзенберга-Эйлера приводит к подавлению конверсии и снижению ее влияния на спектр реликтовых гравитационных волн.

Отметим, что для напряженности поля меньшей, чем 10^{13} Гс, система уравнений все еще будет верна, но расчет слагаемых от петлевой поправки становится избыточным. При таких напряженностях достаточно учитывать только вклады в уравнения из действия Максвелла. Для этого нужно положить $C_0 = 0$ в уравнениях (3.40, 3.42, 3.46).

Полученные формулы выглядят громоздкими, но они значительно упрощаются в частном случае конформно-плоской метрики и в предположении однородности магнитного поля.

3.3 Система уравнений для эффекта Герценштейна на фоне метрики ФЛРУ

Для оценки влияния эффекта Герценштейна на амплитуду реликтовых гравитационных волн запишем полученную систему дифференциальных уравнений в метрике ФЛРУ. Интервал решения выберем соответствующий стадии РД, начиная с момента завершения адронизации кварков: $a \in [10^{-12}, 10^{-4}]^4$.

На начальном этапе рассмотрим модель однородного космологического магнитного поля и, как обсуждалось в конце раздела 3.1.3, будем пренебрегать анизотропией расширения. Анизотропное расширение является следствием

⁴Выбор начального значения масштабного фактора опционален. В данном случае значение $a_1 = 10^{-12}$ выбрано для использования в дальнейшем в качестве примера модели магнитогенезиса при фазовом переходе КХД первого рода: то есть для определенности предполагается, что до момента a_1 космологического магнитного поля не было

модели однородного магнитного поля. В дальнейшем обсудим модели стохастического магнитного поля, введя дополнительный параметр в задаче — длину когерентности магнитного поля.

Все пояснения по поводу пренебрежимой малости гравитации однородного космологического магнитного поля приведены в приложении 5.6. Отметим, что для стадии РД отношение плотности энергии однородного магнитного поля напряженностью, которая соответствует современной напряженности в 1 нГс, к плотности энергии излучения $\frac{\rho_B}{\rho_{\text{rad}}} \lesssim 10^{-6}$. В последующую эпоху расширение определяется пылевидной материей. При этом плотность энергии такой материи значительно больше плотности энергии излучения и тем более больше плотности энергии космологического магнитного поля. В результате, с течением времени Вселенная расширяется все более изотропно (Гл. 19 в [86]).

В выбранном интервале изменения масштабного фактора $a \in [10^{-12}, 10^{-4}]$ и в модели адиабатического расширения напряженность однородного магнитного поля относительно современного значения будет усилена в $10^8 - 10^{24}$ раза.

Для верхней оценки влияния эффекта на амплитуду реликтовых ГВ примем $B_0 = 1$ нГс. Тогда максимальное значение напряженности магнитного поля составит величину порядка 10^{15} Гс. Эффектом рождения виртуальной электрон-позитронной пары для модели однородного поля, меняющегося по адиабатическому закону $B \propto 1/a^2$, можно пренебречь только на интервале решения $a \in [3 \times 10^{-11}, 10^{-4}]$.

Сформулируем задачу: пусть начальная чисто тензорная гравитационная плоская волна распространяется в пространстве ФЛРУ и входит в область, заполненную магнитным полем. Магнитное поле при этом однородное и направлено по оси x .

Рассмотрим два случая направления гравитационной волны: вдоль вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ и поперек $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$. Такой подход упрощает решение и при этом позволяет сделать основные качественные выводы и оценить сверху влияние эффекта Герценштейна на спектр реликтовых гравитационных волн.

Направим ось x вдоль \mathbf{B} и запишем форму возмущений метрики и потенциала электромагнитной волны для случая $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$:

$$\mathbf{k} = (k_x, 0, 0), \quad (3.47)$$

$$f^\mu = (0, f^x, f^y, f^z), \quad (3.48)$$

$$f^\mu(t, x) \propto \exp(ik_x x) \quad (3.49)$$

$$h_\nu^\mu(t, z) = \begin{bmatrix} 2\Phi(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\Psi(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\Psi(t) + h_+(t) & h_\times(t) \\ 0 & 0 & h_\times(t) & -2\Psi(t) - h_+(t) \end{bmatrix} e^{ik_x x}, \quad (3.50)$$

где не будем сразу полагать продольную составляющую f^x электромагнитной волны равной нулю, чтобы далее убедиться в верности системы уравнений.

Аналогично запишем форму тензора возмущения метрики h_ν^μ и потенциала f^μ для случая $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$:

$$\mathbf{k} = (0, 0, k_z), \quad (3.51)$$

$$f^\mu = (0, f^x, f^y, f^z), \quad (3.52)$$

$$f^\mu(t, x) \propto \exp(ik_z z) \quad (3.53)$$

$$h_\nu^\mu(t, z) = \begin{bmatrix} 2\Phi(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\Psi(t) + h_+(t) & h_\times(t) & 0 \\ 0 & h_\times(t) & -2\Psi(t) - h_+(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\Psi(t) \end{bmatrix} e^{ik_z z}. \quad (3.54)$$

Здесь также при решении системы уравнений должно получиться, что продольная электромагнитная волна $f^z = 0$.

В следующих двух разделах система уравнений упрощена для возмущений метрики и электромагнитных волн, распространяющихся на фоне пространства-времени ФЛРУ в однородном магнитном поле. После чего в Гл. 4 введены начальные условия и выполнен анализ полученных систем уравнений для $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ и $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ по-отдельности.

3.3.1 Уравнения для возмущений метрики

Для записи уравнений распространения метрических возмущений на фоне пространства-времени ФЛРУ воспользуемся уравнениями на компоненты тензора Риччи и скаляр кривизны (1.25).

Уточним также выражение для следа тензора метрических возмущений:

$$h = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h_{00} - \frac{h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}}{a^2} \equiv h_{00} + h_i^i, \quad (3.55)$$

где введено определение

$$h_i^i = -(h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}) / a^2. \quad (3.56)$$

Будет рассмотрена окружающая среда (имеется в виду ТЭИ $\bar{T}_{\mu\nu}^{\text{medium}}$) в приближении идеальной жидкости. Тогда полный ТЭИ среды будет выражаться уравнением (1.29).

В приложении 5.6 показано, что после учета уравнений Фридмана (1.58, 3.11) и разложения $\bar{T}_{\mu\nu}^{\text{medium}}$ до первого порядка по возмущению остается уравнение

$$D^2 h_{\mu\nu} - 2h^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\nu\beta} - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial^2 h - 3\frac{\ddot{a}}{a} h_{00} - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 \right) h_i^i \right] = -16\pi G T_{\mu\nu}^{\text{EM}(1)}. \quad (3.57)$$

Раскроем первые два слагаемых в левой части уравнения (3.57). Уравнения будут выглядеть более однообразно в смешанных компонентах, поэтому для пространственных компонент запишем уравнение в терминах h_j^i :

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \partial_t^2 + 3H\partial_t - \frac{\Delta}{2a^2} + 3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - 2H^2 \right) \right] h_{00} + \left[-\frac{1}{2} \partial_t^2 + \frac{\Delta}{2a^2} + 4H^2 - \frac{\ddot{a}}{a} \right] h_i^i &= -16\pi G T_{00}^{\text{EM}(1)}, \\ 2H \left[\partial_j h_{00} + \frac{\partial_x h_{xj} + \partial_y h_{yj} + \partial_z h_{zj}}{a^2} \right] &= -16\pi G T_{0j}^{\text{EM}(1)}, \\ \left[\partial_t^2 + 3H\partial_t - \frac{\Delta}{a^2} \right] h_j^i + \delta_j^i \left[-\frac{1}{2} \partial^2 h + \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 \right) h_{00} + \frac{\ddot{a}}{a} h_i^i \right] &= -16\pi G T_j^i \text{EM}(1), \end{aligned} \quad (3.58)$$

где $\partial^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\Delta}{a^2}$.

Далее необходимо записать в явном виде правые части уравнений системы (3.58). Воспользуемся (3.42), положив $C_0 = 0$. Таким образом мы пренебрежем петлевыми поправками, которые для напряженности магнитного поля в эпоху РД незначительны. Тогда у нас останется только поправка (3.35) к ТЭИ из действия Максвелла. Запишем в терминах смешанных компонент, подняв один

индекс фоновым метрическим тензором (см. приложение 5.6). Получим

$$T_{\nu}^{\mu \text{Max}(1)} = \frac{1}{4} h_{\nu}^{\mu} F^2 + \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} (Ff - FFh) + F_{\cdot\alpha}^{\mu} f_{\cdot\nu}^{\alpha} + f_{\cdot\alpha}^{\mu} F_{\cdot\nu}^{\alpha} - F_{\cdot\alpha}^{\mu} F_{\cdot\nu}^{\lambda} h_{\lambda}^{\alpha}, \quad (3.59)$$

где используются обозначения (3.36).

Упростим каждое слагаемое в уравнении (3.59) в предположении направления однородного магнитного поля по оси x :

$$\begin{aligned} F^2 &= 2B^2, \\ Ff &= 2Bf_{\cdot z}^y, \\ FFh &= B^2 (h_y^y + h_z^z), \\ F_{\cdot\alpha}^{\mu} f_{\cdot\nu}^{\alpha} + f_{\cdot\alpha}^{\mu} F_{\cdot\nu}^{\alpha} &= B [-f_{\cdot\nu}^y \delta_z^{\mu} + f_{\cdot\nu}^z \delta_y^{\mu} + f_{\cdot y}^{\mu} \delta_{\nu}^z - f_{\cdot z}^{\mu} \delta_{\nu}^y], \\ F_{\cdot\alpha}^{\mu} F_{\cdot\nu}^{\lambda} h_{\lambda}^{\alpha} &= B^2 [-h_z^z \delta_y^{\mu} \delta_{\nu}^y - h_y^y \delta_z^{\mu} \delta_{\nu}^z + (\delta_y^{\mu} \delta_{\nu}^z + \delta_z^{\mu} \delta_{\nu}^y) h_z^y]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Используя (3.59, 3.60), выпишем $T_{\nu}^{\mu \text{Max}(1)}$ покомпонентно:

$$\begin{aligned} T_{00}^{\text{Max}(1)} &= \frac{B^2}{2} (h_{00} - h_y^y - h_z^z) + Bf_{\cdot z}^y, \\ T_{0j}^{\text{Max}(1)} &= B (f_{ty} \delta_j^z - f_{tz} \delta_j^y), \\ T_x^x \text{Max}(1) &= \frac{B^2}{2} (h_x^x - h_y^y - h_z^z) + Bf_{\cdot z}^y, \\ T_y^y \text{Max}(1) &= \frac{B^2}{2} h_z^z - Bf_{\cdot z}^y, \\ T_z^z \text{Max}(1) &= \frac{B^2}{2} h_y^y - Bf_{\cdot z}^y, \\ T_y^x \text{Max}(1) &= \frac{B^2}{2} h_y^x - Bf_{\cdot z}^x, \\ T_z^x \text{Max}(1) &= Bf_{\cdot y}^x, \\ T_z^y \text{Max}(1) &= -\frac{B^2}{2} h_z^y. \end{aligned} \quad (3.61)$$

где учтено, что $h_{0j} = 0$ из калибровки, $h_z^x = 0$ благодаря выбору системы координат и тому, что в задаче отсутствует векторная мода метрических возмущений⁵ (см. (3.50, 3.54)).

Система дифференциальных уравнений для метрических возмущений на фоне пространства-времени ФЛРУ с однородным магнитным полем полностью записана в уравнениях (3.58, 3.61).

⁵Векторная мода метрических возмущений связана с наличием ненулевой пространственной скорости частиц в плазме, а в рассматриваемой задаче $u^j = 0$ для всех $j = 1, 2, 3$.

3.3.2 Уравнения для электромагнитной волны

Теперь приступим к упрощению системы дифференциальных уравнений для электромагнитной волны.

Калибровка для метрических возмущений была частично зафиксирована в разделе 3.1.2 при помощи калибровки Лоренца (1.14) :

$$D_\mu \psi_\nu^\mu = 0, \quad (3.62)$$

где

$$\psi_\nu^\mu \equiv h_\nu^\mu - \delta_\nu^\mu \frac{1}{2} h. \quad (3.63)$$

В метрике ФЛРУ ненулевые компоненты символов Кристоффеля выражаются следующим образом

$$\Gamma_{0j}^i = H \delta_j^i, \quad \Gamma_{ij}^0 = H a^2 \delta_{ij}. \quad (3.64)$$

Тогда для ковариантной дивергенции от тензора метрических возмущений, с учетом калибровки скалярного сектора $h_{0j} = 0$, получаем

$$D_\mu h_\nu^\mu = \partial_\mu h_\nu^\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha h_\alpha^\mu + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu h_\nu^\alpha = \partial_\mu h_\nu^\mu. \quad (3.65)$$

Следовательно, в (3.62) можно заменить ковариантную производную на частную

$$\partial_\mu \left(h_\nu^\mu - \delta_\nu^\mu \frac{1}{2} h \right) = 0. \quad (3.66)$$

Для фонового и индуцируемого электромагнитных полей введем калибровочные условия

$$\begin{aligned} D_\mu f^\mu &= 0, \\ D_\mu A^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Запишем (3.46) в метрике ФЛРУ, положив $C_0 = 0$, для индекса $\mu = 0$. Получаем классическое уравнение $\frac{\partial_\alpha [\sqrt{-g(t)} f^{t\alpha}]}{\sqrt{-g(t)}} = 0$, которое с учетом уравнения (3.67) в метрике ФЛРУ эквивалентно

$$\partial_t^2 f_t - \frac{\Delta}{a^2} f_t + \partial_t (3H f_t) = 0. \quad (3.68)$$

В начале электромагнитная волна отсутствует: $f_t(a_1) = 0$, поэтому, раз в правой части уравнения (3.68) отсутствуют члены, порождающие f_t , всегда верно тождество⁶

$$f_t = 0. \quad (3.69)$$

Уравнения (3.67, 3.69) позволяют значительно упростить выражения: уравнения (3.46) для пространственных компонент электромагнитного потенциала примут вид

$$\partial_t^2 f^j - \frac{\Delta}{a^2} f^j + 3H \partial_t f^j - \frac{1}{2} F^{ma} \partial_m h_a^j + \frac{1}{4} F^{mj} \partial_m h = 0, \quad (3.70)$$

где использованы уравнения (3.46, 3.66), а также то, что $B = B(t)$ и $h^{tj} = 0$ для любого j .

Для магнитного поля, направленного по оси x раскроем два последних слагаемых в правой части уравнения (3.70):

$$F^{ma} \partial_m h_a^j = \frac{B}{a^2} [\partial_z h_y^j - \partial_y h_z^j], \quad (3.71)$$

$$F^{mj} \partial_m h = \frac{B}{a^2} [\delta_y^j \partial_z h - \delta_z^j \partial_y h]. \quad (3.72)$$

В заключение покомпонентно запишем систему для электромагнитной волны:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 f^x + \frac{k^2}{a^2} f^x + 3H \partial_t f^x - \frac{B}{2a^2} (\partial_z h_y^x - \partial_y h_z^x) &= 0, \\ \partial_t^2 f^y + \frac{k^2}{a^2} f^y + 3H \partial_t f^y + \frac{B}{2a^2} \left(-\partial_z h_y^y + \partial_y h_z^y + \frac{1}{2} \partial_z h \right) &= 0, \\ \partial_t^2 f^z + \frac{k^2}{a^2} f^z + 3H \partial_t f^z + \frac{B}{2a^2} \left(-\partial_z h_y^z + \partial_y h_z^z - \frac{1}{2} \partial_y h \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

⁶Нельзя одновременно использовать калибровку Лоренца (3.67) для электромагнитного поля и калибровку $f_t = 0$, но в рассматриваемой задаче из первого равенства следует второе

Глава 4. Решение системы $g - \gamma$ на фоне метрики ФЛРУ в приближении однородного космологического магнитного поля

4.1 Два случая направления распространения гравитационной волны

Рассмотрим случаи направления волнового вектора гравитационной волны $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ и $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$. Убедимся, что в одном из них получается тривиальное решение системы уравнений для эффекта Герценштейна, то есть эффект перехода метрических возмущений в электромагнитную волну отсутствует.

4.1.1 $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$

Рассмотрим начальную ГВ, распространяющуюся параллельно внешнему магнитному полю. Начальные условия будут следующие:

$$f^\mu(t_1) = 0, \quad (4.1)$$

$$\dot{f}^\mu(t_1) = 0, \quad (4.2)$$

$$h_\nu^\mu(t_1, x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+^0 & h_\times^0 \\ 0 & 0 & h_\times^0 & -h_+^0 \end{bmatrix} e^{ik_x x}. \quad (4.3)$$

где $h_+^0 \equiv h_+(a_1)$, $h_\times^0 \equiv h_\times(a_1)$.

Упростив (3.73) для электромагнитной волны, получаем

$$\partial_t^2 f^j + \frac{k_x^2}{a^2} f^j + 3H \partial_t f^j = 0, \quad (4.4)$$

Из системы (4.4) очевидно, что f^y и f^z компоненты удовлетворяют обычному волновому уравнению и не смешиваются с возмущениями метрики. Значит, эти компоненты электромагнитного потенциала не возбуждаются. Как ожидалось, не возбуждается и продольная составляющая f^x .

Что же касается скалярных мод метрических возмущений — они тоже остаются нулевыми. Действительно, запишем правые части уравнений для метрических возмущений (3.61), приняв во внимание отсутствие электромагнитной волны ($f^j(t) = 0$):

$$\begin{aligned}
T_{00}^{\text{Max}(1)} &= \frac{B^2}{2} (h_{00} - h_y^y - h_z^z), \\
T_{0x}^{\text{Max}(1)} &= 0, \\
T_{0y}^{\text{Max}(1)} &= -B \dot{f}_z = 0, \\
T_{0z}^{\text{Max}(1)} &= B \dot{f}_y = 0, \\
T_x^{\text{Max}(1)} &= \frac{B^2}{2} (h_x^x - h_y^y - h_z^z), \\
T_y^{\text{Max}(1)} &= \frac{B^2}{2} h_z^z, \\
T_z^{\text{Max}(1)} &= \frac{B^2}{2} h_y^y, \\
T_y^{\text{Max}(1)} &= -ik^x B f_z = 0, \\
T_z^{\text{Max}(1)} &= ik^x B f_y = 0, \\
T_z^{\text{Max}(1)} &= -\frac{B^2}{2} h_z^y.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

В модели идеальной жидкости $\Phi = -\Psi$. Это можно получить из второго уравнения в (3.58) для $j = x$. При этом в начальный момент времени правая часть первого уравнения в (3.58) равна нулю, $T_{00}^{\text{Max}(1)}(a_1) = 0$. Это выполняется, вообще говоря, на всем интервале решения, ведь уравнения на h_y^y и h_z^z одинаковы с точностью до знака перед компонентами ГЭИ в правой части. Поэтому уравнение на скалярную моду приводит только к тривиальному решению $\Phi = 0, \Psi = 0$.

Этот результат ожидаем. Как показано в разделе 3.1.3, смешивание скалярной и тензорной мод может происходить только в анизотропном пространстве. В данном же случае направление внешнего магнитного поля совпадает с волновым вектором ГВ, поэтому аксиальная симметрия задачи сохраняется, и уравнения на тензорные и скалярные метрические возмущения являются независимыми.

Выводом из всего вышесказанного является то, что ГВ, распространяющаяся параллельно магнитному полю, не индуцирует ни скалярную моду метрических возмущений, ни электромагнитную волну.

Важно отметить, что уравнения для обеих поляризаций ГВ меняются по сравнению с теми, которые получаются в отсутствие магнитного поля. Действи-

тельно, используя (3.58) и (4.5) для yu , zz и yz компонент, получаем

$$\left[\partial_t^2 + 3H\partial_t + \left(\frac{k^2}{a^2} - 8\pi GB^2 \right) \right] h_+ = 0, \quad (4.6)$$

$$\left[\partial_t^2 + 3H\partial_t + \left(\frac{k^2}{a^2} - 8\pi GB^2 \right) \right] h_\times = 0. \quad (4.7)$$

То есть эффективная частота для обеих поляризации становится меньше. Это приводит к более позднему входу таких реликтовых ГВ под горизонт. Следовательно, амплитуда ГВ будет больше при сравнении с полученной в отсутствие космологического магнитного поля. Численные оценки приведены в разделе 4.2.

4.1.2 $k \perp B$

Запишем начальные условия для ГВ, распространяющейся перпендикулярно магнитному полю:

$$f^\mu(a_1) = 0, \quad (4.8)$$

$$\dot{f}^\mu(a_1) = 0, \quad (4.9)$$

$$h_\nu^\mu(t_1, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+^0 & h_\times^0 & 0 \\ 0 & h_\times^0 & -h_+^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{ik_z z}. \quad (4.10)$$

Система уравнений для электромагнитной волны (3.73) примет вид

$$\begin{aligned} \partial_t^2 f^x + \frac{k^2}{a^2} f^x + 3H\partial_t f^x - \frac{ikB}{2a^2} h_y^x &= 0, \\ \partial_t^2 f^y + \frac{k^2}{a^2} f^y + 3H\partial_t f^y + \frac{ikB}{2a^2} \left(-h_y^y + \frac{1}{2} h \right) &= 0, \\ \partial_t^2 f^z + \frac{k^2}{a^2} f^z + 3H\partial_t f^z - \frac{ikB}{2a^2} h_z^y &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Поправка к ТЭИ (3.61) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
T_{00}^{\text{Max}(1)} &= \frac{B^2}{2} (h_{00} - h_y^y - h_z^z) - B\partial_z f^y, \\
T_{0x}^{\text{Max}(1)} &= 0, \\
T_{0y}^{\text{Max}(1)} &= -B\dot{f}_z, \\
T_{0z}^{\text{Max}(1)} &= B\dot{f}_y, \\
T_x^{\text{Max}(1)} &= \frac{B^2}{2} (h_x^x - h_y^y - h_z^z) - B\partial_z f^y, \\
T_y^{\text{Max}(1)} &= \frac{B^2}{2} h_z^z + B\partial_z f^y, \\
T_z^{\text{Max}(1)} &= \frac{B^2}{2} h_y^y + B\partial_z f^y, \\
T_y^{\text{Max}(1)} &= \frac{B^2}{2} h_x^x + B\partial_z f^x, \\
T_z^{\text{Max}(1)} &= 0, \\
T_z^{\text{Max}(1)} &= -\frac{B^2}{2} h_z^y = 0.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

В начале $h_z^y(a_1) = 0$. Тогда из третьей строки в уравнении (4.11) следует, что продольная электромагнитная волна f^z не будет возбуждаться. А вот $h_y^x(t_1) \neq 0$ и $h_y^y(t_1) \neq 0$. Следовательно, обе поперечные компоненты f^x, f^y будут возбуждаться гравитационной волной, распространяющейся перпендикулярно внешнему магнитному полю. Также, из (3.58, 4.11, 4.12) получается, что система дифференциальных уравнений разбивается на две независимые подсистемы: $\{h_\times, f^x\}$ и $\{h_+, f^y, \Phi, \Psi\}$.

Чтобы зависимость уравнений от масштабного фактора была наглядной, будем записывать уравнения в терминах напряженности магнитного поля в современной Вселенной — B_0 . Напомним, что физическое магнитное поле меняется как $B = B_0/a^2$.

Пользуясь (3.58, 4.11, 4.12), получим две независимые подсистемы для случая $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\partial_t^2 + 3H\partial_t + \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{8\pi GB_0^2}{a^4} \right) \right] h_\times = -\frac{ik16\pi GB_0}{a^2} f^x, \\ \left[\partial_t^2 + 3H\partial_t + \frac{k^2}{a^2} \right] f^x = \frac{ikB_0}{2a^4} h_\times, \end{array} \right. \tag{4.13}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\partial_t^2 + 3H\partial_t + \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{8\pi GB_0^2}{a^4} \right) \right] h_+ = \frac{16\pi GB_0}{a^2} (ikfy - \frac{B_0}{a^2} \Psi), \\ \left[\partial_t^2 + 3H\partial_t + \frac{k^2}{a^2} \right] fy = -\frac{ikB_0}{2a^4} [h_+ + \Phi - \Psi], \\ ikH(\Phi + \Psi) = -\frac{4\pi GB_0}{a^2} \dot{f}y, \\ \Psi = -h_+ + \frac{ika^2}{B_0} fy. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

где применено разложение (3.54). Для получения первого уравнения в системе (4.14) уравнение на h_y^y было вычтено из уравнения на h_x^x (см. систему уравнений (3.58)). Третье уравнение получено для компоненты h_{0z} , а четвертое — путем сложения уравнений на h_x^x и h_y^y с одновременным вычитанием удвоенного уравнения для h_z^z .

О правилах отбора

Полученные результаты согласуются с правилами отбора по спиральности. Поляризациям h_+ и h_\times соответствуют смеси правой h_R и левой h_L спиральностей гравитона. Для правой поляризации проекция спина на направление движения равна $+2$, для левой она равна -2 . Действительно, согласно [124], запишем

$$\begin{aligned} h_R &= \frac{h_+ - ih_\times}{\sqrt{2}}, \\ h_L &= \frac{h_+ + ih_\times}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Однородному магнитному полю с вектором напряженности, направленным вдоль оси x , соответствует фотон с линейной поляризацией вдоль этой же оси. Вектор линейной поляризации является суперпозицией правой и левой круговой поляризаций:

$$\mathbf{e}_\pm = \frac{\mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}, \quad (4.16)$$

где \mathbf{e}_\pm — векторы правой и левой круговой поляризации электромагнитной волны, \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y — векторы линейной поляризации вдоль оси x и y соответственно. Левая и правая круговые поляризации отвечают спиральностям фотона -1 и $+1$.

В результате взаимодействия гравитона и внешнего магнитного поля может родиться фотон со спиральностями

$$\begin{aligned} 2 - 1 &= +1, \\ -2 + 1 &= -1, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где первому результату соответствует переход h_R в фотон с поляризацией \mathbf{e}_+ , а второму — h_L в фотон с поляризацией \mathbf{e}_- . Очевидно, что сумма уравнений для двух этих случаев приводит к системе уравнений на h_+ и фотон с поляризацией \mathbf{e}_x , разность — на h_\times и \mathbf{e}_y (см., например, уравнения (15a – 15b) в работе [125]). Так как вектором поляризации обозначено направление изменения вектора напряженности магнитного поля, выражая компоненты магнитного поля через компоненты вектор-потенциала по формуле $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{f}$, окончательно получаем системы $\{h_+, f^y\}$ и $\{h_\times, f^x\}$.

Что касается рождения скалярных возмущений метрики, то правила отбора такие реакции никак не ограничивают. Остается вопрос: почему скалярные возмущения метрики рождаются только от гравитационной волны поляризации h_+ ? Ответить на него можно, воспользовавшись формулой (3.12) смешивания мод метрических возмущений из раздела 3.1.3. Действительно, смешивание в рассматриваемой задаче можно получить только в правой части уравнения (3.12). Найдем из уравнений (4.12) след от возмущения тензора энергии-импульса

$$T_\alpha^{\alpha \text{ Max (1)}} = B^2 (\Phi + \Psi + h_+) \quad (4.18)$$

и подставим его в уравнение (3.12), преобразованное для метрики ФЛРУ

$$\begin{aligned} &\left[\partial_t^2 - \frac{\Delta}{a^2} + 6 \left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right) \right] (\Phi - 3\Psi) + \\ &+ 12 \left[\left(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right) \Psi - \frac{\ddot{a}}{a} \Phi \right] = 8\pi G B^2 (\Phi + \Psi + h_+), \end{aligned} \quad (4.19)$$

откуда явно видно, что уравнение на Φ и Ψ содержит h_+ и не содержит h_\times .

4.1.3 Генерация скалярных возмущений метрики

Кратко рассмотрим также генерацию f^y и скалярных возмущений метрики Φ и Ψ .

После подстановки четвертой строки системы уравнений (4.14) в первую строку этой же системы, получаем уравнение на «+» поляризацию ГВ в случае $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$:

$$\left[\partial_t^2 + 3H\partial_t + \left(\frac{k^2}{a^2} - \frac{8\pi G B_0^2}{a^4} \right) \right] h_+ = 0. \quad (4.20)$$

Этот результат очень интересен и требует пояснения. Распространяющаяся в магнитном поле тензорная гравитационная волна порождает электромагнитную волну, а также скалярные метрические возмущения, но электромагнитная волна и Ψ связаны таким образом, что их соответствующие компоненты ТЭИ полностью компенсируют друг друга, вследствие чего амплитуда тензорной ГВ остается неизменной (в рассматриваемом порядке по возмущению).

В рассматриваемой задаче предполагается, что

$$\Phi(a_1) = 0, \quad \Psi(a_1) = 0. \quad (4.21)$$

Это начальное условие введено в связи с тем, что целью работы была оценка влияния эффекта Герценштейна только на реликтовые тензорные метрические возмущения. Более того, как было показано в разделе 3.1.3, смешивание мод метрических возмущений происходит только в случае анизотропного фонового пространства. Таким образом, именно предположение об однородности магнитного поля приводит к такому результату. Реальности же соответствует стохастическое магнитное поле¹. Тем не менее рассмотренная упрощенная задача хорошо демонстрирует верность выводов раздела 3.1.3. Действительно, из четвертого уравнения в системе (4.14), видно, что возникает два вклада в функцию Ψ . Первый из них от гравитационной волны. Он спадает обратно пропорционально масштабному фактору, так как, согласно первому уравнению системы (4.14), h_+ определяется для частот $k > 10^{-15}$ Гц решением для свободно-распространяющихся в метрике ФЛРУ гравитационных волн

$$h_+^{\text{free}} = h_1 \frac{\cos(k\eta)}{a(\eta)}, \quad (4.22)$$

где η — конформное время, $h_1 \equiv h_+(a_1)$ — амплитуда гравитационной волны в точке a_1 . Второй вклад в Ψ , растущий как минимум пропорционально a , возникает от y компоненты потенциала генерируемой электромагнитной волны.

¹Однородность магнитного поля была предположена для верхней оценки влияния эффекта Герценштейна на спектр реликтовых гравитационных волн

Легко показать, что эти два вклада не взаимокompенсируются. Прибавим и вычтем Ψ в правой части второго уравнения в (4.14). Тогда, используя третье и четвертое уравнения из (4.14) получим уравнение на f^y :

$$\left[\partial_t^2 + \left(3H - \frac{2\pi G B_0^2}{a^6 H} \right) \partial_t + 2 \frac{k^2}{a^2} \right] f^y = -\frac{3 ik B_0}{2 a^4} h_+. \quad (4.23)$$

Оценим, когда слагаемое $\frac{2\pi G B_0^2}{a^6 H}$ значимо по сравнению с $3H$

$$\frac{2G B_0^2}{a^6 H^2} \gg 1. \quad (4.24)$$

В эпоху радиационного доминирования $H = \frac{1}{2a^2 \tau_0}$, поэтому неравенство принимает вид

$$a \ll 2\sqrt{2} \frac{B_0 \tau_0}{m_{\text{pl}} \hbar} \approx 5,3 \times 10^{-4}. \quad (4.25)$$

Таким образом, можно опустить трение Хаббла $3H$ по сравнению со слагаемым $\frac{2\pi G B_0^2}{a^6 H}$ на рассматриваемом интервале решения $a \in [10^{-12}, 10^{-4}]$.

Запишем окончательное уравнение на электромагнитный потенциал в терминах масштабного фактора

$$\left[\partial_a^2 - \frac{8\pi B_0^2 \tau_0^2}{m_{\text{pl}}^2 \hbar^2 a^3} \partial_a + 8\tau_0^2 k^2 \right] f^y = -\frac{6ik B_0 \tau_0^2 h_1}{m_{\text{pl}} \hbar a^3} \cos(2\tau_0 k a), \quad (4.26)$$

где $\partial_a = \frac{\partial}{\partial a}$ и восстановлена размерность. k нужно подставлять в герцах, τ_0 — в секундах, m_{pl} — в мегаэлектронвольтах, B_0 — в МэВ во второй степени.

Это уравнение на осциллятор с отрицательным трением и вынуждающей силой, которые зависят от аргумента. Оно не имеет аналитического решения. Однако, можно качественно оценить поведения функции $f^y(a)$. Для этого запишем уравнение в виде

$$f'' - \frac{C_1}{a^3} f' + 2C_2^2 f = -C_3 \frac{\cos(C_2 a)}{a^3}, \quad (4.27)$$

где

$$\begin{aligned} f &\equiv \text{Im}[f^y], \\ C_1 &\equiv \frac{8\pi B_0^2 \tau_0^2}{m_{\text{pl}}^2 \hbar^2}, \\ C_2 &\equiv 2\tau_0 k, \\ C_3 &\equiv \frac{6k B_0 \tau_0^2 h_1}{m_{\text{pl}} \hbar}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

В начале $f(a_1) = 0$, $f'(a_1) = 0$, поэтому амплитуда генерируется неоднородной частью уравнения. Когда слагаемое с первой производной становится достаточно большим, неоднородной частью уравнения можно пренебречь. Далее $f(a)$ продолжает нарастать и, когда значение функции становится значительно больше ее первой производной, $f(a)$ выходит на осциллирующую функцию с практически постоянной амплитудой.

Степень роста до выхода на чистое колебательное решение может быть оценена из следующих соображений. Слагаемое с первой производной f в левой части уравнения (4.27) становится значительно больше правой части практически сразу, поэтому сразу положим правую часть уравнения равной нулю, изменив начальное условие на первую производную: $f'(a_1) = C_3/C_1$. Сделаем замену переменных в оставшемся однородном уравнении

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}C_2a, \\ \gamma &= 2C_1C_2^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Получим

$$x^3 \left(\frac{d^2 f}{dx^2} + f \right) - \gamma \frac{df}{dx} = 0. \quad (4.30)$$

Переобозначим функцию

$$f(x) = e^{ix} g(x) \quad (4.31)$$

и получим уравнение

$$x^3 \frac{d^2 g}{dx^2} + (2ix^3 - \gamma) \frac{dg}{dx} - i\gamma g = 0. \quad (4.32)$$

Уравнение, отличающееся от полученного множителем 2 в последнем слагаемом, можно решить аналитически с помощью замены $z(x) = \frac{dg(x)}{dx} + 2ig(x)$. Степень роста тогда выразится следующим образом $g \sim \exp \left[\frac{\gamma}{2x_1^2} \right]$, то есть

$$f_{\max} = \text{Im} [f^y]_{\max} \sim \exp \left[\frac{C_1}{2a_1^2} \right]. \quad (4.33)$$

Есть и другие множители, зависящие от начальных условий и констант C_2 и C_3 . Они подавляют этот рост — например, для $k = 1$ нГц множитель перед экспонентой составляет $\sim 10^{-13}$ — но все равно дают сильно менее значимый

вклад, чем экспонента. Показатель же экспоненты для выбранных параметров $B_0 = 1$ нГс и $a_1 = 10^{-12}$ принимает очень большое значение $\sim 10^{16}$.

Согласно четвертой строке системы уравнений (4.14) получаем

$$\Psi_{\max} \sim \frac{ka^2}{B_0} \exp \left[\frac{C_1}{2a_1^2} \right]. \quad (4.34)$$

Таким образом, итоговая амплитуда генерируемых скалярных возмущений метрики сильно зависит от выбранных параметров, в частности от a_1 .

Важно помнить, что рассмотрена очень упрощенная задача: не учитывается взаимодействие фотонов с плазмой, которое будет приводить к диссипации энергии электромагнитной волны и к уменьшению эффекта генерации скалярных возмущений метрики. Не учитывается и то, что в реалистичной картине после инфляции присутствуют не только тензорные, но и скалярные возмущения метрики. Это приводит к необходимости ввода еще одного слагаемого в возмущение ТЭИ и модификации системы дифференциальных уравнений (4.14). Да и само приближение однородного космологического магнитного поля далеко от реальности.

Целью этого раздела была исключительно демонстрация генерации скалярных возмущений метрики значительной амплитуды при распространении гравитационной волны в анизотропном пространстве. Бесконечная вкачка энергии в электромагнитную волну и скалярные возмущения метрики от внешнего магнитного поля в реалистичной картине была бы невозможна. При этом, учет всех перечисленных эффектов сильно усложнит систему уравнений и потребует аккуратного анализа и поиска нетривиального решения, поэтому дальнейшее исследование этого вопроса остается за рамками диссертации.

Промежуточные выводы

Из качественного анализа систем уравнений (4.13 – 4.14) делаем вывод, что эффект Герценштейна оказывает влияние только на амплитуду « \times » поляризации гравитационной волны, распространяющейся перпендикулярно \mathbf{B} . Это полностью согласуется с результатами работы [11] и многих других работ,

перечисленных в разделе 2.1 только с той разницей, что система уравнений для эффекта Герценштейна на фоне метрики ФЛРУ еще никем не выводилась.

Нужно отметить, что в уравнении на h_+ при $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ (4.20) и в уравнениях на обе поляризации при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ (4.6, 4.7) все-таки присутствует влияние космологического магнитного поля: появляется эффективная частота $\left(k^2 - \frac{8\pi GB_0^2}{a^2}\right)$. В уравнении (4.13) подобный вклад тоже присутствует. В связи с этим есть несколько вариантов аппроксимаций для частот различных диапазонов. Этому посвящен следующий раздел.

4.2 Решение для длинных реликтовых ГВ

Оценим, когда можно пренебречь слагаемым $\frac{8\pi GB_0^2}{a^4}$ в уравнениях (4.6, 4.7, 4.20) и в уравнении (4.13) по сравнению со слагаемым, которое содержит k^2/a^2 :

$$ka \gg \sqrt{8\pi} \frac{B_0}{m_{\text{pl}}} \approx 6,1 \times 10^{-23} \text{ Гц}. \quad (4.35)$$

Как отмечалось выше, для определенности рассматривается эпоха РД, начиная с адронной эпохи, то есть в предположении, что первичное магнитное поле зародилось в результате фазового перехода КХД первого рода. Таким образом, начальное значение масштабного фактора равно $a_1 = 10^{-12}$.

Значение произведения ka будет минимальным в точке a_1 . Тогда условие пренебрежимой малости второго слагаемого в круглых скобках в левой части уравнений (4.6, 4.7, 4.20, 4.13)

$$k \gg 6,1 \times 10^{-11} \text{ Гц} \sim 10^{-10} \text{ Гц}. \quad (4.36)$$

Для значений $a > a_1$ правая часть неравенства $k \gg 10^{-10} \frac{a_1}{a_2}$ будет только уменьшаться, так что данное условие будет работать на всем промежутке решения.

Отсюда можно сделать вывод о необходимости поиска решения для уравнений (4.6, 4.7, 4.20) только для частот $10^{-18} \leq k \leq 10^{-11}$ Гц.

Рассматривая конверсию в (4.13), также можно увидеть, что вклад $\frac{k16\pi GB_0}{a^2} f^{x2}$ мал относительно $\frac{8\pi GB_0^2}{a^4} h_{\times}$ для тех же самых частот даже в довольно

²В правой части первого уравнения в системе (4.13) присутствует мнимая единица. Она пропадает при рассмотрении мнимой части f^x . В связи с тем, что было применено разложение Фурье по

грубом предположении $f^x \sim h_x$. Численное решение (4.13) для низких частот $k = 10^{-18} - 10^{-11}$ Гц показывает, что генерируемый потенциал электромагнитного поля, а следовательно и электромагнитная волна действительно остается слабой по сравнению с гравитационной, поэтому для этого диапазона частот можно пренебречь конверсией в фотоны и рассматривать только изменение эффективной частоты.

Резюмируем: для $k \leq 10^{-11}$ Гц для обеих поляризаций при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ имеется система уравнений

$$\left[\partial_t^2 + 3H\partial_t + \left(\frac{k^2}{a^2} - 8\pi GB^2 \right) \right] h_+ = 0, \quad (4.37)$$

$$\left[\partial_t^2 + 3H\partial_t + \left(\frac{k^2}{a^2} - 8\pi GB^2 \right) \right] h_x = 0. \quad (4.38)$$

При численном решении этой системы в диапазоне $a \in [10^{-12}, 10^{-4}]$ для частот $10^{-18} \leq k \leq 10^{-11}$, оставивших отпечаток на реликтовом излучении, получается слабое усиление³ амплитуды реликтовых ГВ порядка 0.01% для частот $10^{-18} \leq k \leq 10^{-14}$ Гц, порядка 0.1% для $10^{-13} \leq k \leq 10^{-12}$ Гц и порядка 0.5% для $k = 10^{-11}$ Гц. По анизотропии и поляризации реликтового излучения определяют отношение мощности скалярных возмущений к мощности тензорных (см. (1.61)). Это отношение определяют для масштаба 0.05 Мпк^{-1} ($k = 5 \times 10^{-16}$ Гц) с точностью до третьего знака после запятой, а не до четвертого. Следовательно, рассчитанный эффект от слагаемого $8\pi GB^2$ слишком слаб, чтобы его можно было обнаружить экспериментально.

В заключение этого раздела можно сделать вывод о том, что гипотеза о заметном влиянии эффекта Герценштейна на длинные реликтовые ГВ не подтвердилась. Остается сделать оценку влияния эффекта на спектр высокочастотных реликтовых ГВ. Анализ и результаты решения системы уравнений для $k \geq 10^{-10}$ Гц представлены в следующем разделе.

пространственным координатам, это означает всего-навсего относительный сдвиг на $\pi/2$ в фазах гравитационной и электромагнитной волн

³Из-за изменения эффективной частоты реликтовая ГВ заходит под горизонт позже, поэтому наблюдается усиление ее амплитуды относительно полученной при решении уравнения без учета космологического магнитного поля

4.3 Решение для коротких реликтовых ГВ

Здесь будем рассматривать только систему (4.13), переписав ее для частот $k \geq 10^{-10}$ Гц с учетом неравенства (4.36) следующим образом:

$$\begin{cases} \left[\partial_t^2 + 3H\partial_t + \frac{k^2}{a^2} \right] h_{\times} = -\frac{ik16\pi GB_0}{a^2} f^x, \\ \left[\partial_t^2 + 3H\partial_t + \frac{k^2}{a^2} \right] f^x = \frac{ikB_0}{2a^4} h_{\times}. \end{cases} \quad (4.39)$$

Сделаем небольшое отступление по поводу используемого термина «коротковолновые ГВ». Конечно, в общем случае частоты $k \geq 10^{-10}$ Гц нельзя назвать высокими, но так как в рассматриваемой задаче эволюция реликтовых ГВ описывается другой системой уравнений именно для этой части спектра, автор счёл удобным назвать его «коротковолновым». Дальше будет показано заметное влияние эффета в том числе на ГВ с частотой 1 нГц и выше, а такие частоты уже можно отнести к высоким в контексте реликтовых ГВ.

Сделаем замену

$$\begin{aligned} \tilde{h} &\equiv a(\eta)h_{\times}(\eta), \\ \tilde{f} &\equiv a(\eta)f^x(\eta) \end{aligned} \quad (4.40)$$

и перепишем уравнение (4.39) в терминах конформного времени η . Получаем

$$\begin{aligned} \tilde{h}'' - \frac{a''}{a}\tilde{h} + k^2\tilde{h} &= -ik16\pi GB_0\tilde{f}, \\ \tilde{f}'' - \frac{a''}{a}\tilde{f} + k^2\tilde{f} &= \frac{ik\pi B_0}{2a(\eta)^2}\tilde{h}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Здесь и далее штрих означает производную по η .

Гравитационные волны с частотами $k \gg a'/a$ являются подгоризонтными для рассматриваемого интервала значений масштабного фактора. Следовательно, для них можно пренебречь членом, пропорциональным $\frac{a''}{a}$. В результате окончательная система имеет очень простой вид двух связанных маятников с переменной неоднородной частью. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{h}'' + k^2\tilde{h} &= -\frac{ik16\pi B_0}{m_{\text{pl}}\hbar}\tilde{f}, \\ \tilde{f}'' + k^2\tilde{f} &= \frac{ik2\pi B_0\tau_0^2}{m_{\text{pl}}\hbar\eta^2}\tilde{h}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Здесь заменен размерный электромагнитный потенциал на безразмерный $\tilde{f}^x \equiv \tilde{f}^x/m_{\text{pl}}$, и сразу опущена вторая тильда. Также использовано, что для эпохи РД из $ad\eta = dt$ следует $\eta = 2\sqrt{\tau_0 t} = 2\tau_0 a$, где $\tau_0 = 35\tau$ — делитель в выражении масштабного фактора $a = \sqrt{\frac{t}{\tau_0}}$ в естественной калибровке $a(\tau) = 1$, τ — время жизни Вселенной. Частота k подставлена в герцах, поэтому для точности соответствия размерностей была возвращена постоянная Планка \hbar .

На самом деле, для эпохи РД член $\frac{a''}{a} = 0$ всегда. Это означает, что система уравнений (4.42) верна для более низких частот, а не только для $k \gg a'/a$. Таким образом, единственное условие, которому нужно удовлетворить, это условие (4.36).

Отметим также, что наличие мнимой единицы в правых частях уравнений (4.42) означает, что фазы гравитационной и электромагнитной волн сдвинуты относительно друг друга на $\pi/2$. Это ожидаемо, так как в начальный момент времени присутствует только гравитационная волна, а амплитуда электромагнитной волны равна нулю.

План решения следующий. Сначала нужно получить уравнение четвертого порядка для одной из функций $\tilde{f}^x(\eta)$, $\tilde{h}(\eta)$ из системы уравнений (4.42). После этого найти решение в виде интегральной функции комплексной переменной. На заключительном этапе решения важно выбрать оптимальный контур интегрирования, который даст наиболее простой вид решения, либо несколько контуров для нахождения всех четырех линейно независимых решений.

Сразу можно увидеть, что решением будет синусоида с некоторой модулирующей функцией.

Неизвестные коэффициенты решений нужно будет получить из начальных условий. Для произвольных начальных значений $h(\eta_1) \equiv h_1$ и $h'(\eta_1) \equiv h'_1$ имеем

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\eta_1) &= a_1 h_1, \\ \tilde{h}'(\eta_1) &= \frac{h_1}{2\tau_0} + a_1 h'_1, \\ \tilde{f}(\eta_1) &= 0, \\ \tilde{f}'(\eta_1) &= 0,\end{aligned}\tag{4.43}$$

то есть предполагается, что электромагнитная волна отсутствует в начальный момент времени.

Необходимо объяснить, почему может существовать ненулевая первая производная h'_1 при η_1 . Разные частоты входят под горизонт в разное время⁴. После входа под горизонт закон $h(\eta) = const$ сменяется на

$$h(\eta) = a(\eta)h(\eta) = \tilde{h}_0 \frac{a(\eta_{\text{hor}})}{a(\eta)} \cos(k\eta + \varphi_{\text{hor}}) \quad (4.44)$$

(см. раздел 1.7), где \tilde{h}_0 — амплитуда реликтовых ГВ в конце инфляции, а φ_{hor} — фаза, рассчитанная из сшивки с постоянной модой в момент входа под горизонт η_{hor}

$$\tilde{h}_0 \cos(k\eta_{\text{hor}} + \varphi_{\text{hor}}) = \tilde{h}_0. \quad (4.45)$$

В результате, для разных k в точке η_1 можно получить отличные от нуля фазы $(k\eta_1 + \varphi_{\text{hor}})$ под знаком косинуса в $\tilde{h}_1 = \tilde{h}_0 \cos(k\eta_1 + \varphi_{\text{hor}})$ и под знаком синуса в $\tilde{h}'_1 = -\tilde{h}_0 k \sin(k\eta_1 + \varphi_{\text{hor}})$. Приблизительное время входа под горизонт можно вычислить из условия

$$k\eta_{\text{hor}} \sim 1. \quad (4.46)$$

Как станет ясно ниже, частотная зависимость не меняется при учете эффекта Герценштейна — накладывается лишь модуляция на высокочастотные колебания. Поэтому для простоты изложения эти постоянные фазы не будут выписываться явно, а результат будет представлен в виде отношения амплитуды с учетом эффекта Герценштейна к амплитуде, полученной в теории эволюции тензорных возмущений без учета данного эффекта. Так косинусы с постоянной фазой просто сократятся.

Для упрощения дальнейших расчетов введем константы

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv -\frac{ik16\pi B_0}{m_{\text{pl}}\hbar}, \\ C_2 &\equiv \frac{ik2\pi B_0\tau_0^2}{m_{\text{pl}}\hbar}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Тогда система уравнений (4.42) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{h}'' + k^2\tilde{h} &= C_1\tilde{f}, \\ \tilde{f}'' + k^2\tilde{f} &= \frac{C_2}{\eta^2}\tilde{h}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

⁴Несмотря на то, что член a''/a равен нулю для эпохи РД, здесь предполагается, что на некотором этапе второй член в правой части уравнений (4.42) пренебрежимо мал для режима за горизонтом, поэтому амплитуда ГВ постоянна

Первая константа размерная, вторая — безразмерная. Поэтому правые части уравнений, как и все члены левой части, имеют размерность c^{-2} .

Теперь продифференцируем первое уравнение системы (4.48) дважды. Получим

$$\tilde{h}'''' + 2k^2\tilde{h}'' + k^4\tilde{h} = \frac{C_1C_2}{\eta^2}\tilde{h}. \quad (4.49)$$

Также будет удобно обезразмерить аргумент функции. Введем переменную

$$x \equiv \sqrt{C_1C_2}\eta \approx 3 \times 10^{-3} k \eta. \quad (4.50)$$

Заменяя все производные по η на производные по x , получим довольно простое выражение

$$\frac{d^4\tilde{h}}{dx^4} + 2\gamma\frac{d^2\tilde{h}}{dx^2} + \gamma^2\tilde{h} = \frac{\tilde{h}}{x^2}, \quad (4.51)$$

где введен параметр

$$\gamma \equiv \frac{k^2}{C_1C_2} = -\frac{m_{\text{pl}}^2\hbar^2}{32\pi^2 B_0^2 \tau_0^2} \approx 0.9 \times 10^5. \quad (4.52)$$

Подчеркнем, что γ больше нуля и не зависит от частоты k .

4.3.1 Аналитическое решение

В этом разделе будем искать решение уравнения (4.51) в виде интегрального представления.

Уравнение (4.51) имеет вид:

$$\frac{d^4\tilde{h}}{dx^4} + 2\gamma\frac{d^2\tilde{h}}{dx^2} + \left(\gamma^2 - \frac{1}{x^2}\right)\tilde{h} = 0. \quad (4.53)$$

Найдем решение этого уравнения в следующем виде:

$$\tilde{h}(x) = \int_c Z(y)e^{xy} dy, \quad (4.54)$$

где $Z(y)$ — функция комплексной переменной y , а c под интегралом означает контур интегрирования, вдоль которого подынтегральная функция однозначна.

Подставляя (4.54) в (4.53), получаем

$$\int_c Z(y) [F(y)x^2 - 1] e^{xy} dy = 0,$$

$$F(y) = (y^2 + \gamma)^2. \quad (4.55)$$

Необходимо исключить зависимость от x . Для этого дважды интегрируем по частям

$$\int_c \left(\frac{d^2(ZF)}{dy^2} - Z \right) e^{xy} dy + xZF e^{xy} |_{\partial c} - \frac{d(ZF)}{dy} e^{xy} |_{\partial c} = 0. \quad (4.56)$$

Исходя из начального предположения, что ни контур интегрирования, ни функция $Z(y)$ не зависят от x , единственный способ исключить последние два члена в уравнении (4.56) — это приравнять каждый из них к нулю. Удовлетворить этому условию можно, выбрав подходящий контур.

Тогда уравнение на $Z(y)$:

$$\frac{d^2(ZF)}{dy^2} - Z = 0. \quad (4.57)$$

Два решения данного ДУ:

$$Z_{1,2}(y) = A_{1,2} (y + i\sqrt{\gamma})^{-\frac{3}{2} \pm \frac{\beta}{2}} (y - i\sqrt{\gamma})^{-\frac{3}{2} \mp \frac{\beta}{2}}, \quad (4.58)$$

где

$$\beta \equiv \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma}}, \quad (4.59)$$

A_1 и A_2 — произвольные константы. Эта функция мероморфна на комплексной плоскости с разрезом по мнимой оси между полюсами $y = \pm i\sqrt{\gamma}$.

Теперь нам нужно выбрать подходящий контур интегрирования, чтобы занулить два внеинтегральных члена в уравнении (4.56).

Первый вариант — замкнутый контур. Однако, если этот контур не включает в себя особые точки $y = \pm i\sqrt{\gamma}$ функции $Z_{1,2}(y)$, то $\tilde{h} \equiv 0$, что является тривиальным решением уравнения (4.53).

Второй вариант — замкнутый контур, охватывающий область, содержащую одну или обе эти точки. В этом случае интеграл равен сумме вычетов в этих точках. На рис. 17 показан пример такого контура c_1 . Тогда для функции \tilde{h} с точностью до произвольной константы имеем:

$$\tilde{h}_{\pm}(x) = \oint_{c_1} (y + i\sqrt{\gamma})^{-\frac{3}{2} \pm \frac{\beta}{2}} (y - i\sqrt{\gamma})^{-\frac{3}{2} \mp \frac{\beta}{2}} e^{xy} dy. \quad (4.60)$$

Для вычисления интеграла в уравнении (4.60) разложим подынтегральное выражение в ряд Лорана:

$$(y + i\sqrt{\gamma})^{-\frac{3}{2} \pm \frac{\beta}{2}} (y - i\sqrt{\gamma})^{-\frac{3}{2} \mp \frac{\beta}{2}} e^{xy} = y^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\pm} \left(\frac{i\sqrt{\gamma}}{y} \right)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(xy)^m}{m!},$$

$$c_k^{\pm} = \frac{\Gamma\left(\pm\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\right) {}_2F_1\left(\pm\frac{\beta}{2} + \frac{3}{2}, -k; \pm\frac{\beta}{2} - k - \frac{1}{2}; -1\right)}{\Gamma\left(\pm\frac{\beta}{2} - k - \frac{1}{2}\right) k!}, \quad (4.61)$$

где Γ — гамма-функция, а ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция. Оба ряда сходятся, так как $|y| > \sqrt{\gamma}$ на контуре интегрирования.

Далее заменим переменные на $y = re^{i\varphi}$, где φ меняется от 0 до 2π , r — постоянный радиус ($r > \sqrt{\gamma}$). Тогда для (4.60) получим

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\pm}(x) &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-2i\varphi}}{r^2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\pm} e^{-ik\varphi} \left(\frac{i\sqrt{\gamma}}{r} \right)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(xr)^m}{m!} e^{im\varphi} d\varphi \\ &= 2\pi x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^{\pm} (i\sqrt{\gamma} x)^k}{(n+2)!}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

В полученном ряду члены можно перегруппировать таким образом, чтобы выделить показатель степени и получить решения в виде:

$$\tilde{h}_{1,2}(x) = B_{1,2} e^{\pm i\sqrt{\gamma} x} x^2 {}_1F_1\left(\frac{3}{2} + \frac{\beta}{2}, 3, \mp 2i\sqrt{\gamma} x\right), \quad (4.63)$$

где $B_{1,2}$ — константы интегрирования.

Теперь стало ясно, что уравнение (4.53) является уравнением Куммера.

Еще два линейно независимых решения можно получить, взяв в качестве контура интегрирования в уравнении (4.54) прямую линию от точки $y_1 = i\sqrt{\gamma}$ до $y_2 = -\infty + i\sqrt{\gamma}$ (c_2 на рис. 17).

В результате для искомой функции имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x) &= \int_{i\sqrt{\gamma}}^{-\infty + i\sqrt{\gamma}} (y + i\sqrt{\gamma})^{-\frac{3}{2} - \frac{\beta}{2}} (y - i\sqrt{\gamma})^{-\frac{3}{2} + \frac{\beta}{2}} e^{xy} dy = \\ &= e^{i\sqrt{\gamma} x} \int_0^{-\infty} (y + 2i\sqrt{\gamma})^{-\frac{3}{2} - \frac{\beta}{2}} y^{-\frac{3}{2} + \frac{\beta}{2}} e^{xy} dy. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Этот интеграл дифференцированием по частям сводится к интегральному представлению функции Трикоми $U\left(\frac{3}{2} + \frac{\beta}{2}, 3, -2i\sqrt{\gamma} x\right)$. Эта функция является

вторым линейно независимым решением уравнения Куммера. Таким образом:

$$\tilde{h}_{3,4}(x) = B_{3,4} e^{\pm i\sqrt{\gamma}x} x^2 U\left(\frac{3}{2} + \frac{\beta}{2}, 3, \mp 2i\sqrt{\gamma}x\right). \quad (4.65)$$

Стоит отметить, что сведение исходного уравнения (4.53) к уравнению Куммера с помощью подстановки $\tilde{h}(x) = e^{\pm\sqrt{\gamma}x} x^2 H(x)$, где $H(x)$ — неизвестная функция, не является тривиальной задачей. В то же время описанный выше подход с поиском решений в интегральной форме позволил найти все решения.

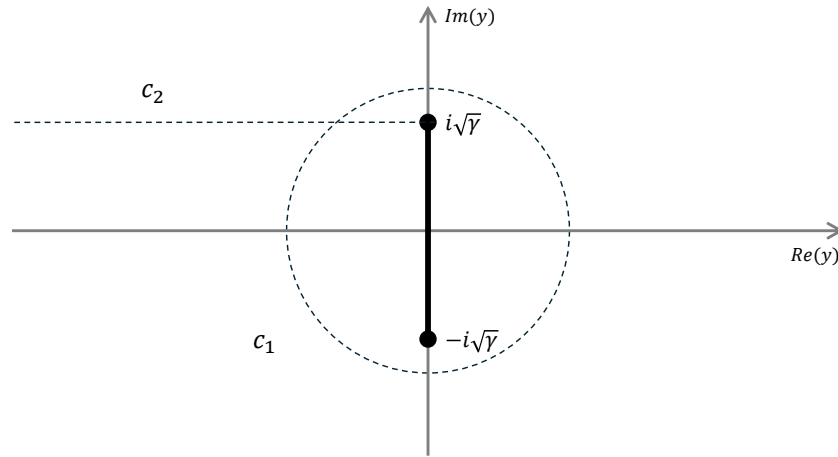


Рисунок 17 — Два контура c_1, c_2 для решения в интегральной форме (4.54), которые удовлетворяют условиям равенства нулю внеинтегральных членов в уравнении (4.56) и дают линейно независимые решения. Жирной линией обозначен разрез

Проанализируем полученные решения (4.63, 4.65). Поведение амплитуд этих двух пар решений определяется следующими асимптотами:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{1,2}(x) &\propto x^{\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}}, \\ \tilde{h}_{3,4}(x) &\propto x^{\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2}}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Обе группы дают растущие функции, поскольку $\beta < 1$ по определению (4.59). Поведение амплитуды ГВ на конечном интервале x зависит от начальных условий, так как они определяют соотношение между вкладом двух групп решений. При этом γ зависит только от напряженности магнитного поля. Следовательно, степень роста для всех частот при фиксированном значении напряженности магнитного поля будет одинаковой.

4.3.2 Решение в пределе $\beta \rightarrow 1$

Предел $\beta \rightarrow 1$ эквивалентен условию $\gamma \rightarrow \infty$ или $\gamma^2 \gg \frac{1}{x^2}$.

Ясно, что при некоторых соотношениях между интервалом решения $[x_1, x_2]$ и параметром γ можно пренебречь членом $1/x^2$ в уравнении (4.53). Действительно, γ не зависит от частоты и имеет большую абсолютную величину (см. уравнение (4.52)), тогда как $\eta_1 = 2\tau_0 a_1 = 3.08 \cdot 10^{10}$ сек и, следовательно, из уравнения (4.50) $x_1 \approx 10^8 k$ [Гц]. В результате для круглых скобок в уравнении (4.53) в начальной точке x_1 имеем:

$$\left(\gamma^2 - \frac{1}{x_1^2}\right) \approx 0.8 \cdot 10^{10} - \left(\frac{10^{-8}}{k [\text{Гц}]}\right)^2. \quad (4.67)$$

Общее решение уравнения

$$\frac{d^4 \tilde{h}}{dx^4} + 2\gamma \frac{d^2 \tilde{h}}{dx^2} + \gamma^2 \tilde{h} = 0 \quad (4.68)$$

имеет вид

$$\tilde{h} = [A_1 + A_2 x] \cos(\sqrt{\gamma} x) + [A_3 + A_4 x] \sin(\sqrt{\gamma} x), \quad (4.69)$$

где A_i — константы интегрирования, которые можно найти из начальных условий.

Напомним, что для свободно распространяющейся ГВ решение в расширяющейся Вселенной имеет вид

$$\tilde{h}_{\text{free}} \sim \cos(k\eta). \quad (4.70)$$

Напротив, в уравнении (4.69) присутствуют резонансные члены, пропорциональные $x \cos(k\eta)$. Но усиление амплитуды ГВ зависит от значения соответствующих констант интегрирования, то есть от начальных условий.

Используя начальные условия (4.43), для второй и третьей производных \tilde{h} в начальной точке получаем

$$\begin{aligned} \tilde{h}''(x_1) &= \frac{\tilde{f}(x_1)}{C_2} - \gamma \tilde{h}(x_1), \\ \tilde{h}'''(x_1) &= \frac{\tilde{f}'(x_1)}{C_2} - \gamma \tilde{h}'(x_1), \end{aligned} \quad (4.71)$$

где

$$\tilde{f}(x_1) = 0, \quad \tilde{f}'(x_1) = 0. \quad (4.72)$$

Теперь можно найти константы A_i явно, и решение будет таким:

$$\begin{aligned} \tilde{h} = & \left(\tilde{h}(x_1) - \frac{\tilde{f}'(x_1)}{2\gamma C_2}(x - x_1) \right) \cos(\sqrt{\gamma}(x - x_1)) + \\ & + \left(\tilde{h}'(x_1) + \frac{\tilde{f}'(x_1)}{2\gamma C_2} + \frac{\tilde{f}(x_1)}{2C_2}(x - x_1) \right) \frac{\sin(\sqrt{\gamma}(x - x_1))}{\sqrt{\gamma}}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Принимая во внимание уравнения (4.71, 4.72), его можно переписать как

$$\tilde{h} = \tilde{h}(x_1) \cos(\sqrt{\gamma}(x - x_1)) + \tilde{h}'(x_1) \frac{\sin(\sqrt{\gamma}(x - x_1))}{\sqrt{\gamma}} \quad (4.74)$$

В уравнении для рассматриваемых начальных условий нет членов, пропорциональных x . Ненулевое начальное $\tilde{f}^x(x_1)$ дает более высокие значения A_2 и A_4 , но в рассматриваемой задаче начальная электромагнитная волна отсутствует.

В следующем разделе показано, в чем разница между результатом в приближении $\beta \rightarrow 1$ и точным решением уравнения (4.53). Здесь же нужно подчеркнуть, что при очень малых напряженностях магнитного поля не происходит никаких изменений в спектре реликтовых ГВ (в модели, где в эпоху РД $B \propto 1/a^2$). Это значит, что если точные измерения межгалактического магнитного поля дадут $B_0 \ll 1$ нГс, то эффект отсутствует.

4.3.3 Результат решения задачи Коши

Используя условия (4.43, 4.71, 4.72), составим систему для четырех констант интегрирования в точном аналитическом решении (4.63, 4.65) стандартным образом

$$\begin{bmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{h}' \\ \tilde{h}'' \\ \tilde{h}''' \end{bmatrix} (x_1) = \begin{bmatrix} \tilde{h}_1(x_1) & \tilde{h}_2(x_1) & \tilde{h}_3(x_1) & \tilde{h}_4(x_1) \\ \tilde{h}'_1(x_1) & \tilde{h}'_2(x_1) & \tilde{h}'_3(x_1) & \tilde{h}'_4(x_1) \\ \tilde{h}''_1(x_1) & \tilde{h}''_2(x_1) & \tilde{h}''_3(x_1) & \tilde{h}''_4(x_1) \\ \tilde{h}'''_1(x_1) & \tilde{h}'''_2(x_1) & \tilde{h}'''_3(x_1) & \tilde{h}'''_4(x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}, \quad (4.75)$$

где \tilde{h}_i определены в уравнениях (4.63, 4.65).

На рис. 18 показаны графики аналитического решений уравнения (4.53) и, для сравнения, аналитического решения для свободно распространяющейся ГВ $\tilde{h}_{\text{free}} = \tilde{h}_0 \cdot \cos k\eta = \tilde{h}_0 \cos \sqrt{\gamma}x$ при различных k . Все графики нормированы на начальную амплитуду ГВ \tilde{h}_0 .

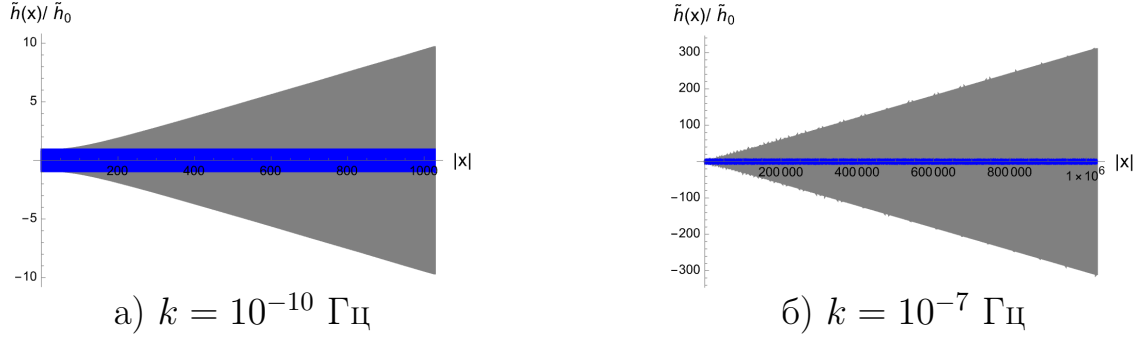


Рисунок 18 — Зависимость амплитуды ГВ от $x = 3 \cdot 10^{-3}k\eta(a)$ на интервале $a \in [10^{-12}, 10^{-4}]$ для $B_0 = 1$ нГс: серый — аналитическое решение уравнения (4.53) согласно (4.63, 4.65); синий — аналитическое решение для свободно распространяющейся гравитационной волны. Амплитуда нормирована на начальную амплитуду ГВ \tilde{h}_0 . Высокочастотные колебания не различимы

Почти такая же картина, как на правой панели рис. 18, получается для всех частот $k > 10^{-7}$ Гц: усиление амплитуд ГВ в триста раз к концу эпохи доминирования излучения.

Нам, в конце концов, все же необходимо рассматривать B_0 как свободный параметр задачи. Действительно, точная напряженность магнитного поля пока не измерена. Кроме того, в реалистичных моделях величина магнитного поля уменьшается быстрее, чем $1/a^2$ из-за диссипации в турбулентной плазме. Это означает, что максимальная величина магнитного поля, а следовательно, и величина эффекта Герценштейна могут быть даже выше для рассматриваемого интервала $a \in [10^{-12}, 10^{-4}]$ ⁵.

Например, для одной из моделей с исходной ненулевой средней спиральностью плазмы закон изменения величины магнитного поля в эпоху РД $B \propto 1/a^3$ (см. (2.23)). Такая зависимость на рассматриваемом интервале решения увеличивает среднюю напряженность магнитного поля на пять порядков.

Конечно, для любой модели нужно модифицировать систему уравнений (4.13), и, где необходимо, учитывать петлевую поправку рассеяния света на

⁵Момент возникновения начального магнитного поля a_1 также является модельно-зависимым параметром

свете (см. Гл.(3)). Тем не менее, наивная оценка эффекта для магнитного поля, на порядок большего изначально принятого 1 нГс, влечет за собой увеличение амплитуды реликтовых ГВ еще на два порядка больше для частот $k \gtrsim 10^{-10}$ Гц (рис. 19) по сравнению с результатами, приведенными на рис. 18.

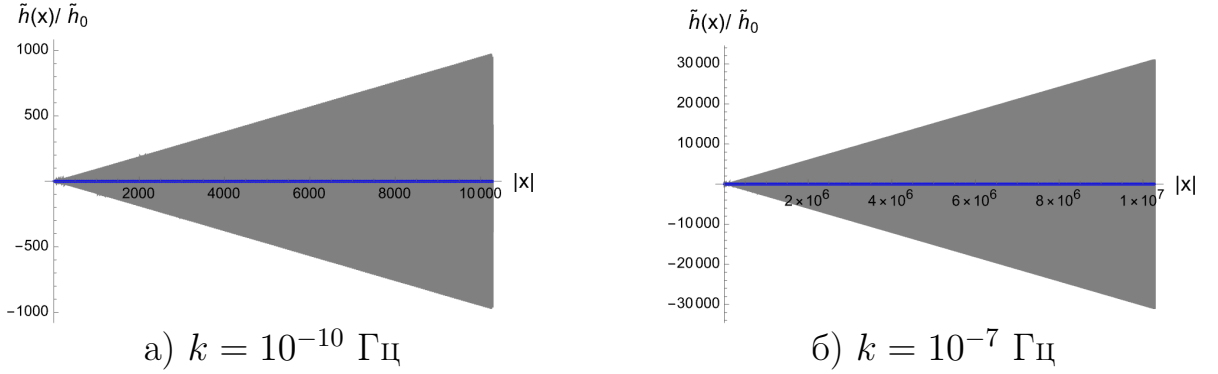


Рисунок 19 — Зависимость амплитуды ГВ от $x = 3 \cdot 10^{-2} k \eta(a)$ на интервале $a \in [10^{-12}, 10^{-4}]$ для $B_0 = 10$ нГс: серый — аналитическое решение уравнения (4.53) согласно (4.63, 4.65); синий — аналитическое решение для свободно распространяющейся гравитационной волны. Амплитуда нормирована на начальную амплитуду ГВ \tilde{h}_0 . Высокочастотные колебания не различимы

В заключение можно сделать вывод, что эффект Герценштейна приводит к значительному увеличению амплитуды реликтовых гравитационных волн h_{\times} -поляризации ($\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$) с частотами $k \gtrsim 10^{-10}$ Гц для рассматриваемых напряженностей магнитного поля.

4.4 Модель стохастического космологического магнитного поля

Пока что выполнены оценки затухания амплитуды гравитационных волн к концу стадии РД в предположении однородности магнитного поля, что практически равносильно условию очень большой длины его когерентности (см. раздел 2.2.6).

Если же воспользоваться общепринятой моделью стохастического магнитного поля, то, в зависимости от длины его когерентности, можно получить либо такой же эффект, либо значительно более слабый. Это связано с тем, что когда гравитационная волна будет преодолевать характерное расстояние, где напряженность магнитного поля может считаться постоянной, направление

магнитного поля будет случайным образом меняться. Это будет приводить к изменению направления вынуждающей силы в правой части уравнения (4.13). В результате ослабление ГВ будет сменяться усилением, и в среднем эффект изменения амплитуды на большом количестве пройденных длин когерентности магнитного поля обратится в ноль.

Оценим длину когерентности магнитного поля к началу РД стадии, и выясним, успевает ли фронт гравитационной волны преодолеть хотя бы одну длину когерентности до момента рекомбинации $a_2 = 10^{-4}$. Важно понимать, что длина когерентности в вышеуказанных моделях растет быстро, и волновой фронт, движущийся со скоростью света, может ее не догнать.

Законы изменения напряженности магнитного поля и его длины когерентности в предыдущих главах получены только с учетом расширения Вселенной и без учета потерь энергии из-за нагрева первичной плазмы и ее турбулентности.

В разделе 2.2.6 разобрана работа, где авторы получают точные зависимости длины когерентности и напряженности магнитного поля для различных моделей генерации ПМП фазовыми переходами первого рода. Общий вывод заключается в том, что сопутствующая длина когерентности увеличивается со временем из-за подавления магнитного поля на меньших масштабах. Следовательно, в реалистичных моделях λ_{coh} увеличивается даже быстрее, чем пропорционально $a(t)$.

Выполним простые оценки для адиабатической модели. Имеем

$$\lambda_{\text{coh}}(a) = \lambda_{\text{coh } 0} a, \quad (4.76)$$

где $\lambda_{\text{coh } 0}$ — длина когерентности современного межгалактического магнитного поля. Фронт волны движется со скоростью света. Определим значение масштабного фактора при пересечении фронтом волны $\lambda_{\text{coh}}(a)$ для эпохи РД:

$$c(t - t_1) = \lambda_{\text{coh } 0} a, \quad (4.77)$$

$$a(t) = \sqrt{\frac{t}{\tau_0}}, \quad (4.78)$$

где t_1 — начальное время, $t > t_1$, $\tau_0 \approx 35\tau$ и $\tau = 4.4 \times 10^{17}$ сек — время жизни Вселенной. Перепишем уравнение (4.77) в терминах масштабного фактора:

$$a \left[1 - \left(\frac{a_1}{a} \right)^2 \right] = \frac{\lambda_{\text{coh } 0}}{c\tau_0}. \quad (4.79)$$

Подставляя значение $a_1 = 10^{-12}$ и τ_0 , получаем

$$a \left[1 - \left(\frac{10^{-12}}{a} \right)^2 \right] \approx 6.8 \times 10^{-6} \frac{\lambda_{\text{coh } 0}}{1 \text{ Мпс}}. \quad (4.80)$$

Мотивацией использования характерного масштаба 1 Мпк является то, что текущие наблюдения комптоновского охлаждения фотонов нечувствительны к длинам когерентности $\lambda_{\text{coh } 0} > 1 \text{ Мпк}$.

Сделаем переобозначение для масштабного фактора первого преодоления (overcoming) длины когерентности магнитного поля

$$a_{\text{over}} = x \cdot 10^{-12} > a_1, \quad (4.81)$$

где $1 < x \leq 10^5$, и получим квадратное уравнение

$$x^2 - Ax - 1 = 0, \quad (4.82)$$

с корнями

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(A \pm \sqrt{A^2 + 4} \right) \quad (4.83)$$

где $A = 6.8 \times 10^6 \frac{\lambda_{\text{coh } 0}}{1 \text{ Мпс}}$. x должно быть больше нуля по определению (4.81). Положительное x можно получить только для знака «+» в уравнении (4.83). Масштабный фактор первого пересечения $a_{\text{over}} = x \cdot 10^{-12}$ для эпохи РД представлен как функция $\lambda_{\text{coh } 0}$ на рис. 20 .

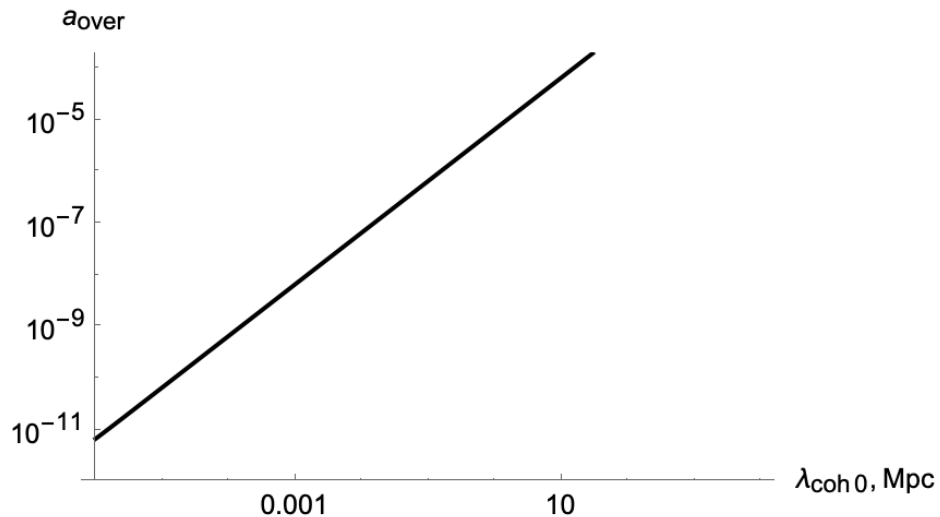


Рисунок 20 — Значение масштабного фактора при первом пересечении длины когерентности космологического магнитного поля фронтом ГВ для эпохи РД как функция длины когерентности в современной Вселенной. Зависимость получена в предположении, что магнитное поле зародилось в момент $a_1 = 10^{-12}$

Важно отметить, что тот факт, что при значении $\lambda_{\text{coh } 0} \sim 1$ Мпк ГВ начинает догонять длину когерентности к концу эпохи РД, не означает, что эффект равен нулю. Конечно, он уменьшается, но в среднем не равен нулю⁶. При этом, чем меньше длина когерентности магнитного поля сегодня, тем меньше будет изменение амплитуды реликтовых ГВ из-за эффекта Герценштейна.

Стоит еще раз подчеркнуть, что объектом исследования является реликтовый спектр ГВ, который мы можем наблюдать на космическом микроволновом фоне (СМВ). Тем не менее, интересен вопрос: влияет ли эффект Герценштейна на реликтовые ГВ в эпоху доминирования материи (ДМ)?

Аналогичным образом можно оценить и масштабный фактор первого пересечения длины когерентности фронтом ГВ для эпохи ДМ.

Действительно, заменим закон изменения масштабного фактора со временем на

$$a = \left(\frac{t}{\tau} \right)^{2/3} \quad (4.84)$$

и подставим его в уравнение (4.77), а также примем, что $a_{\text{MD}1} = 10^{-4}$. Получим

$$a_{\text{over}} = 10^{-4} \left(2.4 \cdot 10^{-2} \frac{\lambda_{\text{coh } 0}}{1 \text{ Мпс}} - 1 \right)^2 \quad (4.85)$$

По определению $a_{\text{over}} > a_{\text{MD}1}$. Следовательно

$$\left(2.4 \cdot 10^{-2} \frac{\lambda_{\text{coh } 0}}{1 \text{ Мпк}} - 1 \right) > 1, \quad (4.86)$$

и решение этого уравнения существует для $\lambda_{\text{coh } 0} \geq 83$ Мпк. При меньших значениях $\lambda_{\text{coh } 0}$ фронт гравитационной волны не догонит длину когерентности космологического магнитного поля.

На рис. 21 показан масштабный фактор первого пересечения для эпохи ДМ как функция $\lambda_{\text{coh } 0}$.

⁶Важно помнить, что величина магнитного поля также уменьшается как $1/a(t)^2$ и преобразование в обоих направлениях ($g \leftrightarrow \gamma$) становится слабее для более поздних времен эволюции Вселенной

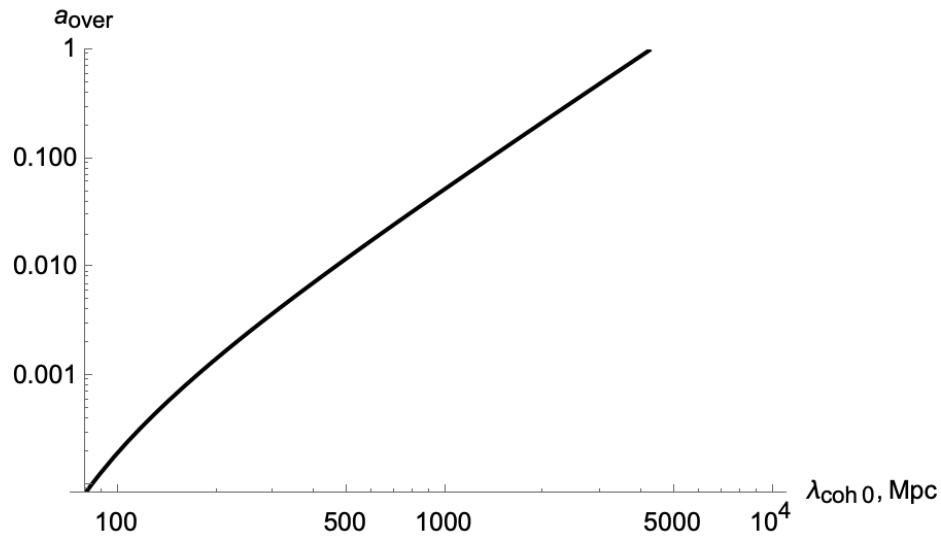


Рисунок 21 — Значение масштабного фактора при первом пересечении длины когерентности космологического магнитного поля фронтом ГВ для эпохи ДМ как функция длины когерентности в современной Вселенной. Рассматривается первое пересечение от момента $a_1 = 10^{-4}$

В зависимости от $\lambda_{\text{coh } 0}$, после того, как реликтовые ГВ пройдут эпоху ДМ, накопленное в течение эпохи РД изменение их спектра может быть в той или иной степени нейтрализовано. В этом случае, если эффект достаточно велик, чтобы быть наблюдаемым, он будет сильнее проявляться в спектре ГВ, полученном из наблюдений реликтового излучения, чем в спектре из наблюдений в современной Вселенной⁷ (см. раздел 1.4).

Однако даже в эпоху доминирования нерелятивистской материи происходит преобразование гравитационных волн в электромагнитные, но под действием магнитного поля меньшей напряженности, чем в эпоху доминирования релятивистского вещества. Поэтому здесь могут быть два противодействующих эффекта.

Действительно, если длина когерентности слишком мала, то не будет никакого влияния эффекта Герценштейна на реликтовые ГВ в эпоху РД. Тогда можно ожидать его проявление в эпоху ДМ из-за быстрого роста длины когерентности магнитного поля.

Подводя итоги этого обсуждения, можно сделать вывод, что эволюция длины когерентности ПМП зависит от модели. Из-за этого становится модельно-зависимой и величина влияния эффекта Герценштейна на спектр реликтовых

⁷Космические интерферометры или РТА (Pulsar Timing Array)

гравитационных волн — будь то спектр в эпоху рекомбинации или современный спектр.

Справедливо заметить, что для длины когерентности $\lambda_{\text{coh } 0} \sim 10$ Мпк приближение однородного магнитного поля верно как на протяжении эпохи РД, так и на протяжении эпохи ДМ. Но, в конечном итоге, решающее значение в решении этого вопроса имеет точное измерение параметра $\lambda_{\text{coh } 0}$, что, вероятно, станет возможным в будущем⁸.

4.5 Эффект взаимодействия с плазмой

Последний важный эффект, который нужно рассмотреть, — это взаимодействие генерируемой электромагнитной волны с первичной плазмой в эпоху РД. Есть две составляющие этого эффекта: коэффициент затухания ζ и плазменная частота Ω_{pl} . Уравнение для плазменной частоты для релятивистских частиц с $m < T$ имеет вид

$$\Omega_{\text{pl}}^2 = \frac{2T^2}{9} \sum_j e_j^2, \quad (4.87)$$

где суммирование производится по всем релятивистским заряженным частицам с зарядами e_j . Итак, оценим $\Omega_{\text{pl}}^2 \sim \alpha T^2$.

Для слагаемого, связанного с затуханием, используем следующую оценку

$$\zeta = c\sigma n \sim \alpha^2 T, \quad (4.88)$$

где c — скорость света, $n = 0.1g_*T^3$ — плотность заряженных частиц в плазме, $g_* = 10 - 100$ — количество видов заряженных частиц и $\sigma = \alpha^2/T^2$ — сечение рассеяния.

Запишем эти величины в виде функций от $a(\eta)$:

$$\Omega_{\text{pl}}^2(\eta) = \Omega_{\text{pl}}^2(a_{\text{crit}}) \frac{a_{\text{crit}}^2}{a(\eta)^2}, \quad \zeta(\eta) = \zeta(a_{\text{crit}}) \frac{a_{\text{crit}}}{a(\eta)}, \quad (4.89)$$

где $a_{\text{crit}} = a(\eta_{\text{crit}}) \approx 4.6 \times 10^{-10}$ — масштабный фактор, при котором температура становится порядка массы электрона.

⁸На сегодняшний день некоторые ограничения на длину когерентности магнитного поля можно получить из наблюдения за комптоновским охлаждением фотонов, но этот метод чувствителен к длинам когерентности $\lesssim 1$ Мпк.

Вторая строка в уравнении (4.48) на интервале $a \in [10^{-12}, a_{\text{crit}}]$ принимает вид

$$\tilde{f}'' + \left[k^2 + \Omega_{\text{pl}}^2(a_{\text{crit}})a_1^2 - \zeta(a_{\text{crit}})a_1 \frac{a'}{a} \right] \tilde{f} + \zeta(a_{\text{crit}})a_1 \tilde{f}' = \frac{C_2}{\eta^2} \tilde{h}, \quad (4.90)$$

где все производные берутся по отношению к конформному времени η .

Наконец, получаем уравнение четвертого порядка на \tilde{f} ⁹

$$\begin{aligned} & \tilde{f}'''' + \zeta \tilde{f}''' + \left[2k^2 - \Omega^2 - \frac{\zeta}{\eta} \right] \tilde{f}'' + \zeta \left[\frac{2}{\eta^2} + k^2 \right] \tilde{f}' \\ & + \left[k^2 \left(k^2 - \Omega^2 - \frac{\zeta}{\eta} \right) - \frac{C_1 C_2}{\eta^2} - \frac{2\zeta}{\eta^3} \right] \tilde{f} = 0, \end{aligned} \quad (4.91)$$

где сделана замена $\zeta \equiv \zeta(a_{\text{crit}})a_1$ и $\Omega \equiv \Omega_{\text{pl}}(a_{\text{crit}})a_1$.

При $a > a_{\text{crit}}$ плазменная частота и коэффициент затухания определяются массой покоя электрона, однако они все еще зависят от плотности электронов в плазме, а потому меняются с течением времени:

$$\Omega_{\text{pl}} \propto a(\eta)^{-3/2}, \quad \zeta \propto a(\eta)^{-3}. \quad (4.92)$$

Уравнение (4.91) намного сложнее, чем система уравнений (4.48), и его анализ и решение выходят за рамки диссертации¹⁰.

По-видимому, взаимодействие с плазмой может подавлять эффект усиления амплитуды ГВ, полученный в Гл. 4. Однако на реликтовом спектре ГВ может оставаться характерный отпечаток от суммы эффекта Герценштейна и эффекта взаимодействия фотонов с плазмой: например усиление амплитуды реликтовых ГВ с частотами только выше определенной ω_{crit} , в виде ступеньки на спектре.

⁹Если пытаться найти уравнение четвертого порядка на \tilde{h} , то не удастся исключить первую производную от \tilde{f}

¹⁰Результатам численного интегрирования в данном случае доверять нельзя из-за жесткости (stiffness) полученной системы дифференциальных уравнений

Глава 5. Гравитационная волна в коллапсирующем асферичном пылевом облаке

В разделе 3.1.3 обсуждается класс задач, в которых происходит смешивание мод метрических возмущений. Смешивание мод в анизотропном пространстве — известный математический факт. Есть множество работ, где рассмотрено смешивание возмущений метрики в случае анизотропной космологии: например в работах [126—132].

В данной главе предлагается рассмотреть смешивание мод метрических возмущений на фоне локальной анизотропии в облаках формирования структур во Вселенной с сохранением фоновой Фридмановской космологии. Такая постановка задачи не требует модификации стандартной космологической модели и, вероятно, имеет следствия для эволюции космологических гравитационных волн.

Рассмотрим коллапс эллипсоида, который однородно заполнен материей и помещен в расширяющуюся Вселенную в эпоху доминирования нерелятивистской материи (пространство Эйнштейна – де Ситтера: космологическая постоянная $\Lambda = 0$, кривизна $k_{\text{curve}} = 0$). Пусть имеется контраст плотности энергии, причем плотность внутри эллипсоида больше, чем снаружи: $\delta\rho = \rho_e - \rho_b$, где ρ_e, ρ_b — плотность энергии внутри и снаружи эллипсоида соответственно. Также введем безразмерный контраст плотности

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho} \equiv \frac{\rho_e - \rho_b}{\rho_b}. \quad (5.1)$$

Одну из главных полуосей эллипсоида изначально зададим более вытянутой, чем две другие, и направим ее вдоль оси Ox (см. рисунок 22). Важно отметить, что если в системе останется цилиндрическая симметрия, то есть две полуоси будут равны по величине, то тензорная мода отделится от скалярной моды в уравнениях¹.

Пусть внешняя гравитационная волна с поляризациями h_{\times} и h_{+} в момент времени t_1 влетает в область эллипсоида вдоль оси Oz так, что траектория ГВ пересекает точку начала координат, помещенную в середину эллипсоида.

¹Смешивание мод будет происходить и при наличии цилиндрической симметрии, но только между скалярной и векторной модами метрических возмущений

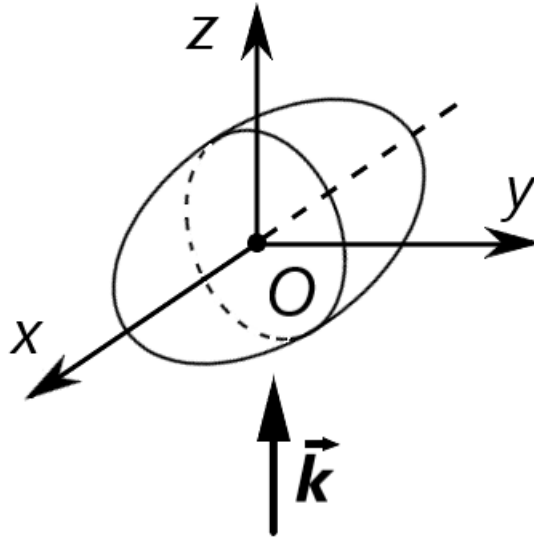


Рисунок 22 — Эллипсоид и система координат; \vec{k} указывает направление волнового вектора гравитационной волны

Целью задачи является оценка степени изменения амплитуды гравитационной волны на выходе из коллапсирующего эллипсоида по отношению к ее начальной амплитуде.

Так как зарождение структуры происходит из сферического облака при возникновении флуктуации его формы, эллипсоид является правдоподобным приближением асферичного коллапса при формировании структур во Вселенной.

5.1 Описание процесса

В связи с наличием начальной анизотропии облака, внутри которого заключен контраст плотности энергии, расширение по длинной оси эллипсоида происходит быстрее, чем по двум коротким. Масштабные факторы внутри эллипсоида не только меняются отлично от фонового масштабного фактора из-за большей плотности энергии, но и становятся анизотропными из-за дей-

ствия приливных сил². Такое пространство можно описать с помощью метрики Бьянки I типа.

Подобный подход к описанию эволюции асферических структур метрикой Бьянки используется в V разделе работы [133], где дословно указано применение метрики Кантовски-Сакса. Метрика Кантовски-Сакса является частным случаем метрики Бьянки I типа и возникает при учете вязкости в модели идеальной жидкости, а также при введении переменной гравитационной постоянной и переменной космологической постоянной. Эта метрика впервые была использована в работе Кантовски и Сакса [134].

Для получения закона эволюции эллипсоида со временем мы будем использовать модель «блинов» Зельдовича. Эта модель описывает нелинейную стадию гравитационного коллапса возмущений плотности во Вселенной, когда первоначально сферически симметричные флуктуации переходят в плоские, «блинообразные», структуры [135]. Приближенное решение коллапса записывается аналитически и с хорошей точностью описывает коллапс начиная от $\delta = 1$, когда линейный режим сменяется нелинейным [135; 136]. Область применимости модели Зельдовича определена максимальным контрастом плотности, при котором происходит коллапс вдоль одной из сторон. В этот момент траектории частиц пересекаются, и возникает сингулярность плотности, то есть плотность энергии обращается в бесконечность. После пересечений траекторий возникают ударные волны и вихри, которые в модели Зельдовича описать нельзя. В работе [137] численными методами рассчитана динамика облака и показано, что первому пересечению траекторий частиц предшествует контраст плотности в диапазоне 10 – 100.

В статье [138] показано, что эволюция главных осей эллипсоида может быть приблизительно описана с помощью формулы

$$R_i(t) = R_{char} \left(\frac{t}{t_1} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\left[1 - \frac{3}{10} \alpha_i(t_1) \frac{\delta \rho}{\rho} \left(\frac{t}{t_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right]}{\left[1 - \frac{3}{10} \alpha_i(t_1) \frac{\delta \rho}{\rho} \right]}, \quad (5.2)$$

где R_{char} — характерный размер пылевого облака в начальное время, $\alpha_i(t_1)$ — параметры анизотропии эллипсоида в начальный момент времени t_1 .

²Пылевое облако должно быть причинно связанным, то есть при выборе начальных длин главных осей эллипсоида нужно потребовать, чтобы диаметр облака был меньше горизонта Хаббла на момент времени t_1 влёта ГВ в эллипсоид

Контраст плотности меняется со временем и высчитывается из закона сохранения массы внутри эллипсоида. Для простоты пренебрежем зависимостью контраста плотности от времени.

Для применимости решения (5.2) требуется, чтобы начальные параметры анизотропии не были слишком большими: $\alpha_i \ll 1$. Вычислить их можно по приближенной формуле

$$\alpha_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^3 \alpha_i / \alpha_j}. \quad (5.3)$$

Из выражений (5.2) получаем выражения для эволюции безразмерных масштабных факторов

$$a_i(t) = \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\left[1 - \frac{3}{10} \alpha_i(t_1) \frac{\delta\rho}{\rho} \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}{\left[1 - \frac{3}{10} \alpha_i(t_1) \frac{\delta\rho}{\rho}\right]}. \quad (5.4)$$

Видно, что начальные значения масштабных факторов

$$a_x(t_1) = a_y(t_1) = a_z(t_1) = 1. \quad (5.5)$$

Далее выражения (5.4) для масштабных факторов вдоль осей координат уже нужно будет подставить в уравнение для интервала

$$ds^2 = dt^2 - a_x^2(t)dx^2 - a_y^2(t)dy^2 - a_z^2(t)dz^2. \quad (5.6)$$

5.2 Начальные значения в задаче

Запишем тензор метрических возмущений в момент времени t_1 , когда фронт гравитационной волны находится в точке z_1 . Значение z_1 равно начальной длине главной полуоси эллипсоида по оси Oz со знаком минус.

$$h_{\nu}^{\mu}(t_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+^0 & h_{\times}^0 & 0 \\ 0 & h_{\times}^0 & -h_+^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

где $h_{\times}^0 \equiv h_{\times}(t_1)$ и $h_{+}^0 \equiv h_{+}(t_1)$ — начальные значения амплитуды двух поляризаций гравитационной волны (тензорного возмущения метрики). Производные по времени от амплитуд в начальный момент времени примем равными нулю

$$\dot{h}_{\times}(t_1) = 0, \quad \dot{h}_{+}(t_1) = 0. \quad (5.8)$$

Со временем будут возникать скалярные моды возмущений метрики. Запишем форму тензора в последующее время $t > t_1$, когда ГВ находится внутри коллапсирующего эллипсоида,

$$h_{\nu}^{\mu}(t) = \begin{bmatrix} 2\Phi(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\Psi(t) + h_{+}(t) & h_{\times}(t) & 0 \\ 0 & h_{\times}(t) & -2\Psi(t) - h_{+}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\Psi(t) \end{bmatrix} e^{ik_z(z-z_1)}. \quad (5.9)$$

Здесь не указаны векторные моды, так как далее показано, что они не возникают в рассматриваемой задаче из-за отсутствия поля скоростей частиц в пылевом облаке.

Начальные параметры эллипсоида R_{char} , $\alpha_i(t_1)$, и $\delta\rho/\rho_b$, наравне со моментом времени t_1 , являются параметрами задачи и могут варьироваться. Конкретные значения этих параметров приведены ниже, после получения системы уравнений.

Интервал решения задачи определяется временем вылета t_{out} ГВ из эллипсоида, если только коллапс эллипсоида вдоль одной из осей не происходит раньше. Соотношение t_{collapse} и t_{out} зависит от размера облака, начального контраста плотности и параметров анизотропии эллипсоида.

5.3 Система уравнений

Используя уравнения Эйнштейна без космологической постоянной $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$, получим в анизотропной метрике (5.6) аналог уравнений Фридмана в изотропной Вселенной. Для компоненты tt получаем

$$H_x H_y + H_x H_z + H_y H_z = \frac{8\pi G}{c^2} \rho, \quad (5.10)$$

где H_x, H_y, H_z — параметры Хаббла вдоль соответствующих осей координат. Диагональные пространственные компоненты тензора Эйнштейна дают следующие уравнения:

$$\begin{aligned} G_{xx} &= H_y H_z + \frac{\ddot{a}_y}{a_y} + \frac{\ddot{a}_z}{a_z} = -\frac{8\pi G}{c^4} p, \\ G_{yy} &= H_x H_z + \frac{\ddot{a}_x}{a_x} + \frac{\ddot{a}_z}{a_z} = -\frac{8\pi G}{c^4} p, \\ G_{zz} &= H_x H_y + \frac{\ddot{a}_x}{a_x} + \frac{\ddot{a}_y}{a_y} = -\frac{8\pi G}{c^4} p. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Так как в рассматриваемой задаче давление отсутствует, то есть $p = 0$, то правые части в (5.11) тождественно равны нулю.

Аналоги уравнений Фридмана (5.10, 5.11) позволяют упростить уравнения эволюции возмущений метрики, которые мы получим из уравнения (3.5) подстановкой метрики (5.6).

Для начала рассмотрим уравнения связи, которые получаются из компонент tj ($j = x, y, z$) уравнения (3.5)

$$H_j \partial_j h_t^t - (H_x \partial_x h_j^x + H_y \partial_y h_j^y + H_z \partial_z h_j^z) = 0, \quad (5.12)$$

где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. С учетом того, что только z -компонента волнового вектора не равна нулю, используем разложение Фурье по пространственным координатам. Получаем соответственно для tx, ty и tz -компонент

$$\begin{aligned} ik_z h_x^z &= 0, \\ ik_z h_y^z &= 0, \\ ik_z \Phi + ik_z \Psi &= 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Отсюда видно, что $\Phi = -\Psi$, как и должно быть для однородных пространств. Заметим, что две компоненты поперечной векторной моды, которые изначально отсутствовали, впоследствии не возникают. Векторные моды метрических возмущений действительно не могут существовать в отсутствие анизотропного тензора напряжений. В задаче нет вихрей в поле скоростей — скорости вообще положены равными нулю.

Теперь запишем уравнения для компонент ij , где $i \neq j$

$$\begin{aligned} \left[\partial^2 + (3H_x - H_y + H_z) \partial_t - 2 \left(H_y H_z + \frac{\ddot{a}_y}{a_y} + \frac{\ddot{a}_z}{a_z} \right) \right] h_y^x &= 0, \\ \left[\partial^2 + (3H_x + H_y - H_z) \partial_t - 2 \left(H_y H_z + \frac{\ddot{a}_y}{a_y} + \frac{\ddot{a}_z}{a_z} \right) \right] h_z^x &= 0, \\ \left[\partial^2 + (H_x + 3H_y - H_z) \partial_t - 2 \left(H_x H_z + \frac{\ddot{a}_x}{a_x} + \frac{\ddot{a}_z}{a_z} \right) \right] h_z^y &= 0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где

$$\partial^2 = \partial_t^2 - \frac{\partial_x^2}{a_x^2} - \frac{\partial_y^2}{a_y^2} - \frac{\partial_z^2}{a_z^2}. \quad (5.15)$$

Если учесть аналоги уравнений Фридмана (5.11) при условии $p = 0$, все третьи слагаемые внутри квадратных скобок в уравнениях (5.14) зануляются. Это приводит к тому, что генерация изначально отсутствующих компонент h_z^x и h_z^y не происходит в метрике Бьянки I. Такой же результат получился выше из уравнений связи (5.13).

Еще одно следствие уравнений — отсутствие смешивания поляризации $h_{\times} = h_y^x$ со скалярными возмущениями метрики Φ и Ψ . Заметим, что в анизотропном пространстве изменен множитель, отвечающий за трение Хаббла. Это ожидаемый результат, как и то, что в пределе $H_x = H_y = H_z$ мы получаем общепринятое уравнение

$$[\partial^2 + 3H\partial_t] h_y^x = 0. \quad (5.16)$$

Для исчерпывающего описания системы необходимо получить еще два дифференциальных уравнения. Первое мы получим вычитанием уравнения (3.5) на yy -компоненту из уравнения на zz -компоненту, а второе — сложением уравнений на компоненты xx и yy . Получаем

$$\begin{aligned} \ddot{h}_+ + (H_x + H_y + H_z) \dot{h}_+ + \left[\frac{k_z^2}{a_z^2} + 2(H_y - H_z)(H_x - H_y) \right] h_+ &= 0, \\ \ddot{\Phi} + (H_x + H_y + H_z) \dot{\Phi} + \frac{k_z^2}{a_z^2} \Phi &= \frac{H_y^2 - H_x^2}{2} h_+, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где мы учли аналоги уравнений Фридмана (5.11) при $p = 0$ и полученное из уравнений связи (5.13) равенство $\Psi = -\Phi$.

В системе уравнений (5.17) прослеживается смешивание тензорной и скалярной мод метрических возмущений. Именно в результате смешивания

h_+ -поляризация гравитационной волны обретает эффективную массу

$$m_{\text{eff}}^2 = 2(H_y - H_z)(H_x - H_y). \quad (5.18)$$

Эта масса является переменной, так как параметры Хаббла зависят от времени.

После подстановки (5.4) в уравнение (5.18) получаем следующее выражение:

$$m_{\text{eff}}^2 = \frac{2(\alpha_x - \alpha_y)(\alpha_y - \alpha_z)}{\left(\alpha_x \delta - \frac{10}{3} \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{2}{3}}\right) \left(\alpha_z \delta - \frac{10}{3} \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}. \quad (5.19)$$

Здесь $\delta = \delta\rho/\rho_b$.

Если квадрат эффективной массы больше нуля, то эффективная частота гравитационной волны становится выше, чем в случае изотропного фонового пространства. Тогда ГВ, проходя внутри асферичного облака, быстрее войдет под горизонт и начнет затухать. Так как параметры анизотропии предполагаются малыми, то эффект будет более значимым для низких частот.

Если квадрат эффективной массы меньше нуля, то нужно ожидать неустойчивость, которая приводит к экспоненциальному росту или затуханию амплитуды ГВ. Такое решение получается для выбранного k_z на интервале масштабного фактора, если

$$k_z < a_z m_{\text{eff}}. \quad (5.20)$$

Если же выполняется обратное неравенство, то эффективная частота снижается. В результате получается более позднее вхождение под горизонт и увеличение амплитуды ГВ по сравнению с амплитудой ГВ, распространяющейся в изотропном пылевом облаке.

Из-за равновероятного распределения пропорций у асферичных структур на пути ГВ два верхних множителя в уравнении (5.19) дают попеременно то положительные значения, то отрицательные. При большой статистике прохождений через облака эффект изменения амплитуды ГВ усреднялся бы к нулю. Однако в выражении присутствует также знаменатель, который уже не обеспечивает такого очевидного результата. Здесь нужно говорить о некоторых характерных значениях параметров анизотропии эллипсоида и о значениях контраста плотности энергии. Эти параметры будут отличаться для облаков разного масштаба и, к тому же, зависят от рассматриваемого интервала времени

на протяжении эволюции Вселенной. Подробному решению такой задачи будет посвящено будущее исследование, выходящее за рамки диссертационного.

Сложно сказать, каким будет усредненный эффект после прохождения гравитационной волной большого количества асферичных облаков. Все, что можно сделать в рамках упрощенной задачи, — оценить изменение амплитуды после прохождения одного облака и выяснить качественную зависимость эффекта от параметров эллипсоида.

5.4 Параметры в задаче

В задаче есть большой набор параметров, многие из которых должны удовлетворять ограничениям рассматриваемой модели, а также области применимости теории Зельдовича.

Список условий следующий:

1. *Весь интервал решения $[t_1, t_2]$ должен принадлежать эпохе доминирования нерелятивистской материи во Вселенной.* Воспользуемся общепринятыми значениями времен смены эпох (см. [99]) и запишем условия на интервал решения

$$\begin{aligned} t_1 &> t_{\text{RD} \rightarrow \text{MD}}, \\ t_{\text{RD} \rightarrow \text{MD}} &\approx 380 \text{ тысяч лет}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} t_2 &< t_{\text{MD} \rightarrow \text{AD}}, \\ t_{\text{MD} \rightarrow \text{AD}} &\approx 9.8 \text{ миллиардов лет}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Для пересчета масштабных факторов и времен будем использовать выражение

$$a_{\text{MD}}(t) = \left(\frac{t}{\tau_{\text{MD}}} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (5.23)$$

где $\tau_{\text{MD}} \approx 5.44 \times 10^{17}$ с — нормировочное значение, полученное из формулы (5.23) и выражения $\left(\frac{\dot{a}_{\text{MD}}}{a_{\text{MD}}} \right)^2 = H_0^2 \Omega_m(a_0) \left(\frac{a_0}{a_{\text{MD}}} \right)^3$ в естественной калибровке, где $a_0 = 1$. $\Omega_m(a_0)$ — отношение плотности энергии нерелятивистской материи в современной Вселенной к критической плотности энергии, H_0 — параметр Хаббла в современной Вселенной.

2. Диаметр пылевого облака должен быть причинно связанным в момент времени t_1 .

На момент времени t_1 размер горизонта составляет величину

$$\begin{aligned} l_{\text{horizon}} &= a(t_1) \left[\int_0^{t_{\text{RD} \rightarrow \text{MD}}} \frac{dt}{a_{\text{RD}}(t)} + \int_{t_{\text{RD} \rightarrow \text{MD}}}^{t_1} \frac{dt}{a_{\text{MD}}(t)} \right] = \\ &= 2 \frac{a(t_1)}{a_{\text{RD} \rightarrow \text{MD}}} t_{\text{RD} \rightarrow \text{MD}} + 3t_1 \left[1 - \left(\frac{t_{\text{RD} \rightarrow \text{MD}}}{t_1} \right)^{1/3} \right], \end{aligned} \quad (5.24)$$

Эпоха инфляционного расширения очень короткая, поэтому ею можно пренебречь. Таким образом, начальный радиус пылевого облака должен удовлетворять условию

$$R_{\text{char}} \leq 3.6 \times 10^{21} \frac{a_1}{a_{\text{RD} \rightarrow \text{MD}}} + \frac{3}{2} ct_1 \left[1 - \left(\frac{t_{\text{RD} \rightarrow \text{MD}}}{t_1} \right)^{1/3} \right] \text{ м}, \quad (5.25)$$

где $a_1 = a(t_1)$, а $a_{\text{RD} \rightarrow \text{MD}} = \frac{1}{1100}$ [99]. Для удобства расчетов в уравнении возвращена скорость света c .

3. Параметры начальной анизотропии облака должны быть не слишком большими — $\alpha_i < 1$.
4. Контраст плотности энергии внутри эллипсоида должен быть в пределах $1 < \delta \leq 10$.
5. Решение ищется вплоть до момента времени t_2 , которое определяется как $\min(t_{\text{out}}, t_{\text{collapse}})$. Здесь t_{out} — время вылета ГВ из эллипсоида, t_{collapse} — время, при котором происходит коллапс вдоль одной из осей эллипсоида.

Время t_{collapse} рассчитаем как минимальное из трех значений времён, получаемых из условий равенства нулю масштабных факторов (5.4).

Время t_{out} получим следующим образом: проинтегрируем дифференциал конформного времени и приравняем его к удвоенному значению начальной координаты вдоль оси Oz . Напомним, что мы полагаем начальные значения масштабных факторов равными единице. Так как масштабные факторы безразмерные, значения $R_x(t_1)$, $R_y(t_1)$ и $R_z(t_1)$ измеряются в единицах длины и являются начальными координатами границ эллипсоида вдоль соответствующих осей. В таких предположениях выражение для времени вылета гравитационной волны из облака

определяется простым условием

$$\int_{t_1}^{t_{\text{out}}} \frac{dt}{a_z(t)} = \frac{2 R_z(t_1)}{c}, \quad (5.26)$$

где $a_z(t)$ записывается согласно уравнению (5.4).

В случае, если коллапс происходит раньше, фронт волны не успевает вылететь из пылевого облака.

5.5 Решение системы уравнений

Для простоты будем решать первое дифференциальное уравнение системы (5.17) в предположении, что коэффициенты являются постоянными и равны своим значениям в момент времени t_1 . Постоянным положим и контраст плотности. Такие предположения позволяют качественно оценить рассматриваемый эффект.

Начальные параметры анизотропии зададим через начальные длины главных полуосей эллипсоида. Пусть для примера

$$R_x(t_1) = 2.2 \times R_{\text{char}}, \quad R_y(t_1) = 1.5 \times R_{\text{char}}, \quad R_z(t_1) = 1.0 \times R_{\text{char}}. \quad (5.27)$$

Тогда, согласно уравнению (5.3), получаем следующие параметры анизотропии:

$$\alpha_x(t_1) = 0.43, \quad \alpha_y(t_1) = 0.64, \quad \alpha_z(t_1) = 0.94. \quad (5.28)$$

Все эти значения удовлетворяют требованию третьего пункта в разделе 5.4.

Известно, что рекомбинация произошла при значении масштабного фактора $a \approx 0.0009$ (в естественной калибровке, в которой $a_0 = 1$), а переход к эпохе доминирования темной энергии — при $a \approx 0.77$. Для примера положим

$$a_b(t_1) = 0.003, \quad (5.29)$$

где индекс b означает фон. Он показывает, что значение масштабного фактора записано для фона, а не для эллипсоида. Из этого значения $a_b(t_1)$ получаем по формуле (5.23), что

$$t_1 \approx 8.94 \times 10^{13} \text{ с} \approx 2.83 \text{ млн лет}. \quad (5.30)$$

Нужно подобрать такие R_{char} и δ , чтобы фронт гравитационной волны преодолел облако раньше коллапса вдоль одной из осей. Положим

$$R_{\text{char}} = 5 \times 10^{21} \text{ м} = 162 \text{ кпк}, \quad \delta = 2.5. \quad (5.31)$$

Согласно уравнению (5.25), характерный размер должен быть меньше 3.15×10^{22} м, так что это условие выполнено³. Соблюдено и условие на контраст плотности энергии, указанное в разделе 5.4.

Теперь рассчитаем время коллапса по самой короткой оси. В данном случае это ось, вдоль которой распространяется гравитационная волна — ось Oz . Из уравнения (5.4) и условия $a_z(t_{\text{collapse}}) = 0$ получаем

$$t_{\text{collapse}} \approx 1.5 \times 10^{14} \text{ с}. \quad (5.32)$$

Время вылета волны из облака найдем, приравнивая интеграл к целевому значению согласно уравнению (5.26). Поскольку интеграл от функции

$$a_z(t) = \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\left[1 - \frac{3}{10} \alpha_z(t_1) \delta \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}{\left[1 - \frac{3}{10} \alpha_z(t_1) \delta\right]} \quad (5.33)$$

является сложной функцией времени, выразить t_{out} явно не представляется возможным. Находим его численно и получаем

$$t_{\text{out}} \approx 1.44 \times 10^{14} \text{ с}. \quad (5.34)$$

Таким образом, $t_{\text{out}} < t_{\text{collapse}}$ для выбранных параметров.

Решим первое уравнение системы (5.17) для заданной частоты ГВ 10^{-18} Гц. Так как в задаче введена калибровка $a_z(t_1) = 1$, то в уравнение нужно подставлять $k = 10^{-18}/a_b(t_1) \approx 0.3 \times 10^{-15}$ Гц. Время $t_2 = t_{\text{out}}$. При этом масштабный фактор $a_z(t_2) \approx 1.37$ и незначительно отличается от $a_z(t_1) = 1$.

Каждое слагаемое в первом уравнении системы (5.17) на интервале $[t_1, t_2]$ монотонно растет на один порядок, поэтому предположение о постоянности коэффициентов достаточно грубое. Однако, монотонность функций $\omega^2/a_z(t)^2$, $[H_x(t) + H_y(t) + H_z(t)] \omega/a_z(t)$ и $2[H_y(t) - H_z(t)][H_x(t) - H_y(t)]$ все же позволяет сделать качественные выводы и без учета временной зависимости.

³Правильнее проверять наиболее длинную полуось эллипсоида на причинную связность. В рассматриваемом примере это $R_x(t_1) = 2.2 \times R_{\text{char}}$, и её длина удовлетворяет этому условию.

В приближении постоянных коэффициентов первое уравнение системы (5.17) принимает вид

$$\ddot{h}_+ + [H_x(t_1) + H_y(t_1) + H_z(t_1)] \dot{h}_+ + \left\{ \frac{k_z^2}{a_z^2(t_1)} + 2 [H_y(t_1) - H_z(t_1)] [H_x(t_1) - H_y(t_1)] \right\} h_+ = 0. \quad (5.35)$$

Из решения этого уравнения в точке t_2 , $h_+(t_2)$, вычтем решение $h_{+\text{no-mixing}}(t_2)$ уравнения без учёта смешивания со скалярной модой возмущений метрики:

$$\ddot{h}_+ + [H_x(t_1) + H_y(t_1) + H_z(t_1)] \dot{h}_+ \frac{k_z^2}{a_z^2(t_1)} h_+ = 0. \quad (5.36)$$

Для выбранных параметров эллипсоида (5.27, 5.30, 5.31) ослабление гравитационной волны за счет перехода в скалярные возмущения метрики составляет приблизительно 13%. Заметим, что если изменить пропорции облака на

$$R_x(t_1) = 1.5 \times R_{\text{char}}, \quad R_y(t_1) = 2.2 \times R_{\text{char}}, \quad R_z(t_1) = 1.0 \times R_{\text{char}}, \quad (5.37)$$

оставив остальные параметры неизменными, получится усиление амплитуды ГВ также на 13%.

В таблице 2 приведены характерные размеры $2R_0$ и контрасты плотности δ_0 для структур в современной Вселенной.

Таблица 2 — Диапазоны характерных параметров структур в современной Вселенной

Тип структуры	$2R_0$, Мпк	δ_0
Сверхскопление	100 – 150	8 – 12
Скопление галактик	10 – 20	100 – 200
Группа галактик	1 – 3	200 – 500
Галактика	0.1 – 0.3	$10^4 - 10^5$

$2R_0$ — диаметр, δ_0 — контраст плотности энергии

В таблице 3 выбраны размеры и контрасты плотности энергии из диапазонов, указанных в таблице 2. В дополнение рассчитаны значения масштабного фактора a_1 и характерные размеры структур $2R(a_1)$, когда контраст плотности энергии внутри них был порядка единицы.

Значения a_1 получены по закону роста неоднородностей во Вселенной Фридмана: в эпоху доминирования темной энергии $\delta(a(t)) = \text{const}$, а в эпоху

доминирования нерелятивистского вещества контрасты плотностей структур с масштабами, вошедшими под горизонт, растут пропорционально масштабному фактору.

Таблица 3 — Характерные параметры структур

$2R_0$, Мпк	δ_0	a_1 такой, что $\delta(a_1) \sim 1$	$2R(a_1)$
100	10	7.7×10^{-2}	7.7 Мпк
10	100	7.7×10^{-3}	77.8 кпк
1	300	2.6×10^{-3}	2.6 кпк
0.1	10^4	7.7×10^{-5}	7.7 пк

$2R_0, \delta_0$ — диаметр и контраст плотности энергии в современной Вселенной, a_1 — значение масштабного фактора, при котором контраст плотности $\delta(a_1)$ был порядка единицы, $2R(a_1)$ — диаметр структуры при значении масштабного фактора a_1 . Величины в двух последних колонках рассчитаны приблизительно.

Уточним диапазон масштабов скалярных возмущений, находящихся под горизонтом в начале эпохи доминирования пыли. Это масштабы, волновые числа k которых удовлетворяют неравенству $k\eta_{\text{rec}} \geq 1$, где η_{rec} — конформное время в момент рекомбинации. Получаем, что $k \gtrsim 150$ Мпк. Таким образом, все приведенные в таблице 3 масштабы в эпоху доминирования нерелятивистского вещества меняются по закону $\delta(a) \propto a$.

Формула для пересчета контраста плотности принимает вид

$$\delta(a) = \frac{\delta_0}{0.77} a, \quad (5.38)$$

где знаменатель соответствует масштабному фактору перехода к эпохе доминирования темной энергии⁴. Остается потребовать $\delta(a) = 1$ в уравнении (5.38) и найти a_1 .

Диаметр структур $2R(a_1)$ при масштабном факторе a_1 получен из закона пропорциональности линейных размеров масштабному фактору.

Жирным шрифтом в таблице выделено значение a_1 , которое меньше масштабного фактора в момент рекомбинации $\sim 9 \times 10^{-4}$. Значит, чтобы рассмотреть масштаб галактик в эпоху доминирования нерелятивистской материи, нужно требовать значений контраста плотности больше единицы на 1 – 2 порядка. С другой стороны, для значений $\delta = 10 - 100$ теория Зельдовича плохо применима.

⁴На самом деле, контраст плотности внутри структур во Вселенной растет и в эпоху доминирования темной энергии, так как вклад плотности темной материи еще сравним со вкладом плотности темной энергии. Однако, такая точность в задаче будет излишней.

Делаем вывод, что в рамках введенных в задаче приближений будет некорректно рассматривать масштабы порядка 0.1 Мпк и меньше.

В примере с параметрами (5.29, 5.31) используется масштаб, который при пересчете в современные размеры дает $2R_0 \approx 108$ Мпк с контрастом плотности $\delta_0 \approx 642$. Из данных таблицы 3 видно, что контраст плотности в примере завышен. Для более реалистичных оценок следует при неизменном контрасте плотности уменьшить размер облака на 2 порядка. Такой масштаб соответствует параметрам группы галактик. Тогда эффект изменения амплитуды ГВ с частотой 10^{-18} Гц составляет величину порядка тысячной доли процента. Для более высоких частот эффект еще менее значим. Малость эффекта связана с тем, что волна находится внутри эллипсоида короткий промежуток времени.

Однако ситуация меняется при переходе к бóльшим масштабам. Для гравитационных волн в диапазоне частот $10^{-18} - 10^{-16}$ Гц эффект достигает нескольких процентов при использовании параметров, характерных для скоплений галактик. При частоте 10^{-13} Гц изменение амплитуды ГВ составляет доли процента. В диапазоне чувствительности эксперимента по точному таймингу пульсаров ($10^{-9} - 10^{-6}$ Гц) влияние одного облака масштаба скопления галактик оказывается практически нулевым ($\sim 10^{-9}$).

Нужно помнить, что упрощающее предположение о постоянстве контраста плотности может значительно исказить количественный результат. То же можно сказать и о предположении постоянства коэффициентов в дифференциальном уравнении (5.17).

При больших значениях начальных параметров анизотропии можно ожидать большее различие параметров Хаббла вдоль осей эллипсоида и, следовательно, более сильного влияния на амплитуду ГВ. Однако, приближенное аналитическое решение в таком случае получить нельзя, так как теория Зельдовича для больших α_i неприменима.

Понять, будет ли эффект изменения амплитуды ГВ нулевым после прохождения большого количества коллапсирующих облаков, невозможно без детального и аккуратного рассмотрения формирования крупномасштабной структуры Вселенной. Сложность ответа на этот вопрос заключается в несимметричном по α_i выражении для квадрата эффективной массы гравитона (5.19) и в зависимости параметров формирующихся структур от времени. К тому же, теория нелинейного коллапса Зельдовича является приближенной; а в реаль-

ных пылевых облаках частицы обладают скоростью, что становится причиной генерации векторных мод возмущений метрики.

5.6 Выводы

В главе было рассмотрено изменение амплитуды гравитационных волн при прохождении анизотропных коллапсирующих пылевых облаков. В приближении неизменного контраста плотности энергии в модели нелинейного коллапса Зельдовича получено изменение амплитуды ГВ с частотой 10^{-18} Гц и поляризацией h_+ на доли процента при прохождении одного облака с реалистичными параметрами структур во Вселенной в эпоху доминирования нерелятивистского вещества.

В перспективе планируется найти численное решение системы (5.17) с учетом зависимости коэффициентов дифференциальных уравнений от времени. Планируется также исследование вопроса о суммарном эффекте после прохождения гравитационной волной большого количества асферичных структур.

Рассмотрение изменения спектра реликтовых гравитационных волн в эпоху доминирования излучения видится нецелесообразным в силу того, что в ранней Вселенной контрасты плотности усиливаются для структур небольших масштабов. Таким образом, ГВ будет находиться внутри анизотропной структуры слишком малый период времени, чтобы эффект был значительным. Ведь результаты показывают, что даже для структур с масштабами скоплений галактик эффект остается слабым, $\sim 10^{-3}$ при $k \sim 10^{-13}$ Гц.

При точном моделировании коллапса с высокими значениями параметров анизотропии эффект, вероятно, будет сильнее. Однако, говорить об это с уверенностью пока рано. Исследование этого вопроса выходит за рамки диссертации.

Автор предполагает, что в некоторых задачах при прохождении **астрофизических гравитационных волн** в окрестностях объектов с сильно анизотропной метрикой (например, около пульсаров [139] или вращающихся черных дыр) или внутри массивных асферичных скоплений галактик, может возникать значительная эффективная масса у гравитона из-за смешивания со скалярными и векторными модами возмущений метрики. Эта эффективная масса может изменить изначальные характеристики гравитационного излучения, и потому должна учитываться при анализе гравитационных сигналов,

зарегистрированных интерферометрами Майкельсона. Этот аспект станет особенно важным для нового поколения детекторов гравитационных волн в рамках проверки теорий массивной гравитации.

Заключение

В диссертации исследовано влияние на спектр реликтовых гравитационных волн эффекта их конверсии в электромагнитные волны под действием космологического магнитного поля. Оценки выполнены в упрощенной модели однородного космологического магнитного поля для двух случаев направления волнового вектора гравитационной волны относительно магнитного поля: параллельного и перпендикулярного. Также в работе не учтено взаимодействие генерируемых электромагнитных волн с первичной плазмой в эпоху доминирования релятивистского вещества во Вселенной.

В начале исследования выведено уравнение распространения метрических возмущений на фоне произвольного пространства-времени.

Посредством взятия следа от полученного уравнения продемонстрировано смешивание скалярной и тензорной моды в случае анизотропного фонового пространства. На основе данного общеизвестного вывода предложен класс задач, где начальная тензорная гравитационная волна попадает в анизотропную метрику. В таких задачах остается целесообразным разложение возмущений метрики по спиральностям, так как генерация и детектирование производятся именно в тензорном секторе. В анизотропной метрике происходит конверсия тензорных возмущений метрики в скалярные и, следовательно, изменяется амплитуда начальной гравитационной волны.

Примером такой задачи является прохождение реликтовых гравитационных волн через «блины» Зельдовича при формировании крупномасштабной структуры Вселенной. Упрощенная задача о прохождении гравитационной волны через единичный коллапсирующее пылевидный эллипсоид решена в главе 5 с применением приближенной теории нелинейного коллапса Зельдовича. В результате прохождения ГВ с частотой 10^{-13} Гц через одно облако с характеристиками, свойственными скоплению галактик, в эпоху доминирования нерелятивистского вещества получено изменение амплитуды ГВ на доли процента. В диапазоне чувствительности эксперимента по точному таймингу пульсаров ($10^{-9} - 10^{-6}$ Гц) влияние на амплитуду ГВ оказывается практически нулевым ($\sim 10^{-9}$).

Следующим шагом в диссертации получена система уравнений для связанного распространения гравитационной и электромагнитной волн во внешнем магнитном поле произвольной конфигурации на фоне произвольного искрив-

ленного пространства-времени. Затем данная система уравнений записана в пространстве-времени ФЛРУ, заполненном однородным магнитным полем. Отметим, что в более ранних работах других авторов эффект Герценштейна рассматривался только на фоне метрики Минковского.

Далее выполнена оценка вкладов в уравнения от эффективного действия Гейзенберга-Эйлера. Показано, что на интервале масштабного фактора $10^{-12} \leq a < 3 \times 10^{-11}$ петлевая поправка может быть получена только численными методами, так как для напряженности магнитного поля более 10^{13} Гс необходимо учитывать вклады петель высшего порядка. В рамках представленного исследования учет петлевой поправки может быть осуществлен только для значений $a \geq 3 \times 10^{-11}$, когда напряженность магнитного поля $B \leq 10^{12}$ Гс. Решение системы уравнений на данном интервале показывает, что подавление амплитуд ГВ, получаемых к моменту $a = 10^{-4}$ с учетом и без учета эффективного действия Гейзенберга-Эйлера, составляет величину порядка 10^{-12} для волн с частотой 10^{-16} Гц и доли процента для волн с частотой 1 нГц. Эти значения незначительны, поэтому в рассматриваемой задаче автор пренебрегает петлевыми поправками рассеяния света на свете.

После рассмотрения двух случаев направления волнового вектора относительно вектора напряженности магнитного поля сделаны следующие качественные выводы:

- эффект Герценштейна оказывает влияние только на амплитуду h_{\times} -поляризации гравитационной волны, распространяющейся перпендикулярно магнитному полю;
- для поляризации h_{+} при $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ присутствует генерация электромагнитной волны и скалярных возмущений метрики без изменения амплитуды изначальной гравитационной волны;
- для обеих поляризаций гравитационной волны при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ и для h_{+} поляризации при $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ присутствует эффективная масса $\propto \frac{B}{m_{\text{pl}}}$ из-за наличия однородного космологического магнитного поля. Однако показано, что данная поправка для частот $10^{-18} \leq k \leq 10^{-11}$ дает слабое усиление амплитуды реликтовых ГВ к концу эпохи РД: порядка 0.01% для частот $10^{-18} \leq k \leq 10^{-14}$ Гц, порядка 0.1% для $10^{-13} \leq k \leq 10^{-12}$ Гц и порядка 0.5% для $k = 10^{-11}$ Гц. Таким образом, рассматриваемый эффект не приводит к новой трактовке современных наблюдательных ограничений

на скалярно-тензорное отношение, полученное из анализа анизотропии и поляризации реликтового излучения.

В завершение исследования система дифференциальных уравнений для конверсии h_{\times} -поляризации гравитационной волны в случае $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ решена аналитически. В результате показано, что эффект Герценштейна приводит к значительному усилению амплитуды реликтовых гравитационных волн с частотами $k \gtrsim 10^{-10}$ Гц. Для частоты 10^{-10} Гц $\lesssim k < 10^{-7}$ Гц и напряженности магнитного поля, которая соответствует сегодняшнему значению 1 нГс, получается усиление в 10 раз к концу эпохи доминирования релятивистского вещества. Для частот $k \gtrsim 10^{-7}$ Гц — усиление в 300 раз.

Для более реалистичных моделей магнитное поле в эпоху радиационного доминирования спадает быстрее, чем $1/a^2$, поэтому для оценки качественного результата в таких моделях было получено усиление для напряженности магнитного поля 10 нГс. Оно составило величину более трех порядков для частот $k \gtrsim 10^{-10}$ Гц.

На основе вышесказанного можно сделать вывод, что значительное усиление амплитуды реликтовых гравитационных волн должно наблюдаться для $B_0 \gtrsim 1$ нГс, а также для напряженностей на один-два порядка меньше 1 нГс. Данная граничная величина модельно зависима, т. к. на окончательный эффект влияет то, какая модель эволюции напряженности магнитного поля соответствует действительности.

Немаловажную роль играет длина когерентности первичного магнитного поля и ее эволюция в модели стохастического магнитного поля. В разделе 4.4 диссертации приведены качественные соображения и графики. Для закона $\lambda \propto a$ они показывают, при каких длинах когерентности космологического магнитного поля в современной Вселенной эффект Герценштейна будет оставлять отпечаток на спектре реликтовых гравитационных волн как в эпоху радиационного доминирования, так и в эпоху доминирования пыли. Так, в модели с длиной когерентности, соответствующей современному значению ≥ 10 Мпк, оценки, полученные в модели однородного магнитного поля, остаются верными. Пока что модельную зависимость невозможно исключить, т. к. на сегодняшний день нет ни достоверных измерений напряженности межгалактического магнитного поля, ни измерений его длины когерентности.

В конце четвертой главы также получена система уравнений с учетом взаимодействия фотонов с первичной плазмой. Данный вопрос требует даль-

нейшего исследования. Отметим лишь, что такое взаимодействие, даже если оно уменьшит эффект усиления реликтовых гравитационных волн с частотами $k \gtrsim 10^{-10}$ Гц, может оставить характерный след на спектре реликтовых гравитационных волн.

Результаты, полученные в процессе исследования, имеют практическую значимость:

- уравнение распространения метрических возмущений на фоне произвольного пространства-времени позволяет рассмотреть задачи о распространении гравитационных волн в более сложных метриках, чем метрика Минковского или метрика ФЛРУ;
- демонстрация возникновения эффективной массы у гравитона вследствие смешивания тензорных и скалярных метрических возмущений на фоне асферичного коллапсирующего облака открывает круг задач о распространении астрофизических и космологических гравитационных волн в реалистичных, не требующих расширения стандартной космологической модели, анизотропных метриках;
- система уравнений для эффекта Герценштейна в произвольном пространстве-времени позволяет решать широкий круг задач с различными фоновыми метриками и в присутствии электромагнитных полей с напряженностью менее 10^{13} Гс.

Выводы исследования о значительном усилении коротких реликтовых гравитационных волн под действием эффекта Герценштейна в рассмотренной упрощенной задаче указывают на необходимость продолжения исследований. Если после учета взаимодействия фотонов с первичной плазмой результат останется неизменным, он повлечет за собой необходимость пересмотра ожидаемого современного спектра реликтовых гравитационных волн. Это важно, так как значительный рост амплитуды гравитационных волн с частотами выше одного наногерца будет говорить о возможности детектирования реликтовых гравитационных волн с помощью космических интерферометров и в эксперименте по точному таймингу пульсаров РТА.

Список литературы

1. *Einstein A.* Die Feldgleichungen der Gravitation / A. Einstein // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. — 1915. — P. 844—847.
2. *Einstein A.* On gravitational waves / A. Einstein, N. Rosen // Journal of the Franklin Institute. — 1937. — Vol. 223, no. 1. — P. 43—54. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0016-0032\(37\)90583-0](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(37)90583-0).
3. *Abbott B. P.* Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 116, issue 6. — P. 061102. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>.
4. *Starobinsky A. A.* Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe / A. A. Starobinsky // JETP Lett. / ed. by I. M. Khalatnikov, V. P. Mineev. — 1979. — Vol. 30. — P. 682—685.
5. *Linde A. D.* Inflationary Cosmology / A. D. Linde // Lect. Notes Phys. — 2008. — Vol. 738. — P. 1—54. — DOI: [10.1007/978-3-540-74353-8_1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-74353-8_1). — arXiv: 0705.0164 [hep-th].
6. *Горбунов Д.* Введение в теорию ранней Вселенной: космологические возмущения, инфляционная теория / Д. Горбунов, В. Рубаков. — URSS, 2009. — 552 с. — URL: <https://books.google.ru/books?id=XDt4DwEACAAJ>.
7. *Galloni G.* Updated constraints on amplitude and tilt of the tensor primordial spectrum / G. Galloni, N. Bartolo, S. Matarrese [et al.] // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2023. — Vol. 2023, no. 04. — P. 062. — DOI: [10.1088/1475-7516/2023/04/062](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2023/04/062).
8. *Starobinsky A. A.* A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity / A. A. Starobinsky // Phys. Lett. B / ed. by I. M. Khalatnikov, V. P. Mineev. — 1980. — Vol. 91. — P. 99—102. — DOI: [10.1016/0370-2693\(80\)90670-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(80)90670-X).
9. *Kalosh R.* Universality class in conformal inflation / R. Kalosh, A. Linde // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2013. — Vol. 2013, no. 07. — P. 002. — DOI: [10.1088/1475-7516/2013/07/002](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2013/07/002).

10. *Gertsenshtein M. E.* Wave resonance of light and gravitational waves / M. E. Gertsenshtein // Sov. Phys. JETP. — 1962. — Vol. 14. — P. 84—85.
11. *Palessandro A.* A simple derivation of the Gertsenshtein effect / A. Palessandro, T. Rothman // Physics of the Dark Universe. — 2023. — Vol. 40. — P. 101187. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dark.2023.101187>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686423000213>.
12. *Macedo P. G.* Propagation of gravitational waves in a magnetized plasma / P. G. Macedo, A. H. Nelson // Phys. Rev. D. — 1983. — Vol. 28, issue 10. — P. 2382—2392. — DOI: [10.1103/PhysRevD.28.2382](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.28.2382). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.28.2382>.
13. *Fargion D.* Prompt and delayed radio bangs at kilohertz by SN 1987A: a test for graviton-photon conversion / D. Fargion // Gravit. Cosmol. — 1995. — Vol. 1, issue 301.
14. *Cruise A. M.* The potential for very high-frequency gravitational wave detection / A. M. Cruise // Classical and Quantum Gravity. — 2012. — Vol. 29, no. 9. — P. 095003. — DOI: [10.1088/0264-9381/29/9/095003](https://doi.org/10.1088/0264-9381/29/9/095003). — URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/29/9/095003>.
15. *Ejlli D.* Graviton-photon mixing / D. Ejlli, V. R. Thandlam // Phys. Rev. D. — 2019. — Vol. 99, issue 4. — P. 044022. — DOI: [10.1103/PhysRevD.99.044022](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.044022). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.044022>.
16. *Dolgov A. D.* Conversion of relic gravitational waves into photons in cosmological magnetic fields / A. D. Dolgov, D. Ejlli // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2012. — Vol. 2012, no. 12. — P. 003. — DOI: [10.1088/1475-7516/2012/12/003](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2012/12/003). — URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2012/12/003>.
17. *Govoni F.* Magnetic fields in clusters of galaxies / F. Govoni, L. Feretti // International Journal of Modern Physics D. — 2004. — T. 8. — DOI: [10.1142/S0218271804005080](https://doi.org/10.1142/S0218271804005080).
18. *Wolfe A. M.* Magnetic Fields in Damped LY alpha Systems / A. M. Wolfe, K. M. Lanzetta, A. L. Oren // Astrophysical Journal. — 1992. — T. 388. — C. 17. — DOI: [10.1086/171125](https://doi.org/10.1086/171125).

19. *Clarke T. E.* A New radio - X-ray probe of galaxy cluster magnetic fields / T. E. Clarke, P. P. Kronberg, H. Boehringer // *Astrophys. J. Lett.* — 2001. — T. 547. — C. L111—L114. — DOI: 10.1086/318896. — arXiv: astro-ph/0011281.
20. *Xu Y.* A Faraday Rotation Search for Magnetic Fields in Large-scale Structure / Y. Xu, P. P. Kronberg, S. Habib [et al.] // *Astrophysical Journal*. — 2006. — Vol. 637, no. 1. — P. 19—26. — DOI: 10.1086/498336. — arXiv: astro-ph/0509826 [astro-ph].
21. *Yamazaki D. G.* The search for a primordial magnetic field / D. G. Yamazaki, T. Kajino, G. J. Mathews [et al.] // *Physics Reports*. — 2012. — Vol. 517, no. 5. — P. 141—167. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.02.005>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157312000725> ; The search for a primordial magnetic field.
22. *Hanasz M.* Building the Fast Galactic Dynamo / M. Hanasz, R. Kosinski, H. Lesch // *Astrophysics and Space Science*. — 2004. — T. 289, № 3. — C. 303—306. — DOI: 10.1023/B:ASTR.0000014958.53843.79.
23. *Rieder M.* A small-scale dynamo in feedback-dominated galaxies as the origin of cosmic magnetic fields – I. The kinematic phase / M. Rieder, R. Teyssier // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2016. — T. 457, № 2. — C. 1722—1738. — DOI: 10.1093/mnras/stv2985. — eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/457/2/1722/2885294/stv2985.pdf>. — URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stv2985>.
24. *Grasso D.* Magnetic fields in the early universe / D. Grasso, H. R. Rubinstein // *Phys. Rept.* — 2001. — Vol. 348. — P. 163—266. — DOI: 10.1016/S0370-1573(00)00110-1. — arXiv: astro-ph/0009061.
25. *Neronov A.* Evidence for strong extragalactic magnetic fields from Fermi observations of TeV blazars / A. Neronov, I. Vovk // *Science*. — 2010. — T. 328. — C. 73—75. — DOI: 10.1126/science.1184192. — arXiv: 1006.3504 [astro-ph.HE].
26. *Pshirkov M. S.* New limits on extragalactic magnetic fields from rotation measures / M. S. Pshirkov, P. G. Tinyakov, F. R. Urban // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — T. 116, № 19. — C. 191302. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.191302. — arXiv: 1504.06546 [astro-ph.CO].

27. *Dolgov A.* Electromagnetic radiation accompanying gravitational waves from black hole binaries / A. Dolgov, K. Postnov // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2017. — Vol. 2017, no. 09. — P. 018. — DOI: 10.1088/1475-7516/2017/09/018. — URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2017/09/018>.
28. *Flanagan E. E.* The Basics of gravitational wave theory / E. E. Flanagan, S. A. Hughes // New J. Phys. — 2005. — Vol. 7. — P. 204. — DOI: 10.1088/1367-2630/7/1/204. — arXiv: gr-qc/0501041.
29. *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика. Том 2. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Москва : Физмалит, 2020. — 536 с.
30. *Zhao W.* Relic gravitational waves and their detection / W. Zhao, Y. Zhang // Phys. Rev. D. — 2006. — Vol. 74. — P. 043503. — DOI: 10.1103/PhysRevD.74.043503. — arXiv: astro-ph/0604458.
31. *Salamida F.* Multimessenger Astrophysics / F. Salamida, I. Tamborra // PoS. — 2017. — Vol. NOW2016. — P. 057. — DOI: 10.22323/1.283.0057.
32. *Kitajima N.* Gravitational waves from domain wall collapse, and application to nanohertz signals with QCD-coupled axions / N. Kitajima, J. Lee, K. Murai [et al.] // Phys. Lett. B. — 2024. — Vol. 851. — P. 138586. — DOI: 10.1016/j.physletb.2024.138586. — arXiv: 2306.17146 [hep-ph].
33. *Kolesova H.* Update on gravitational wave signals from post-inflationary phase transitions / H. Kolesova, M. Laine // Phys. Lett. B. — 2024. — Vol. 851. — P. 138553. — DOI: 10.1016/j.physletb.2024.138553. — arXiv: 2311.03718 [gr-qc].
34. *Salvio A.* Pulsar timing arrays and primordial black holes from a supercooled phase transition / A. Salvio // Phys. Lett. B. — 2024. — Vol. 852. — P. 138639. — DOI: 10.1016/j.physletb.2024.138639. — arXiv: 2312.04628 [hep-ph].
35. *Smolin L.* Lessons from Einstein's 1915 discovery of general relativity / L. Smolin. — 2015. — arXiv: 1512.07551 [physics.hist-ph].
36. *Goenner H. F. M.* A Golden Age of General Relativity? Some remarks on the history of general relativity / H. F. M. Goenner // Gen. Rel. Grav. — 2017. — Vol. 49, no. 3. — P. 42. — DOI: 10.1007/s10714-017-2203-1. — arXiv: 1607.03319 [physics.hist-ph].

37. *Lan C.* Regular Black Holes: A Short Topic Review / C. Lan, H. Yang, Y. Guo [et al.] // International Journal of Theoretical Physics. — 2023. — Vol. 62. — DOI: 10.1007/s10773-023-05454-1.
38. *Герценштейн М. Е.* К вопросу об обнаружении гравитационных волн малых частот / М. Е. Герценштейн, В. И. Пустовойт // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1962. — Т. 43, 2(8). — С. 605—607. — URL: https://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e_043_02_0605.pdf.
39. *Abbott B. P.* Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 116, issue 6. — P. 061102. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102.
40. *Weisberg J. M.* The Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis. Vol. 328 / J. M. Weisberg, J. H. Taylor ; ed. by F. A. Rasio, I. H. Stairs. — 2005. — 25 p. — (Astronomical Society of the Pacific Conference Series). — DOI: 10.48550/arXiv.astro-ph/0407149. — arXiv: astro-ph/0407149 [astro-ph].
41. *Sengupta A. S.* LIGO-Virgo searches for gravitational waves from coalescing binaries: A status update / A. S. Sengupta, (L. S. Collaboration, the Virgo Collaboration) // Journal of Physics: Conference Series. — 2010. — Vol. 228, no. 1. — P. 012002. — DOI: 10.1088/1742-6596/228/1/012002. — URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/228/1/012002>.
42. *Брагинский В.* Классические и квантовые ограничения при обнаружении слабых воздействий на макроскопический осциллятор / В. Брагинский // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1968. — Т. 53, № 4. — С. 1434—1441.
43. *Брагинский В.* Пределы разрешения в макроскопических измерениях: достижения и перспективы / В. Брагинский // Успехи физических наук. — 1988. — Т. 156, № 1. — С. 93—115. — DOI: 10.3367/UFNr.0156.198809e.0093.
44. *Bilenko I.* Thermal and excess noise in suspension fibres / I. Bilenko, V. Braginsky, N. Markova // Classical and Quantum Gravity. — 2002. — Vol. 19, no. 7. — P. 2035. — DOI: 10.1088/0264-9381/19/7/410. — URL: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/19/7/410>.

45. *Брагинский В.* Дорога к открытию гравитационных волн / В. Брагинский, И. Биленко, С. Вятчанин // Успехи физических наук. — 2016. — Т. 186, № 9. — С. 968—974. — DOI: 10.3367/UFNr.2016.04.037797.
46. *Rudenko V. N.* Gravitational wave detector OGRAN as multi-messenger project of RAS-MSU / V. N. Rudenko, Y. M. Gavrilyuk, A. Gusev // Int. J. Mod. Phys. A / ed. by V. M. Mostepanenko, E. N. Velichko. — 2020. — Vol. 35, no. 2/3. — P. 2040007. — DOI: 10.1142/S0217751X20400072. — arXiv: 1911.03773 [physics.ins-det].
47. *Ushiba T.* Status of the underground gravitational wave detector KAGRA / T. Ushiba // PoS. — 2024. — Vol. TAUP2023. — P. 116. — DOI: 10.22323/1.441.0116.
48. *Abbott B.* Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger / B. Abbott, R. Abbott, T. Abbott [et al.] // The Astrophysical Journal Letters. — 2017. — Vol. 848, no. 2. — A54. — DOI: 10.3847/2041-8213/aa91c9.
49. *Evans P.* Swift and NuSTAR observations of GW170817: Detection of a blue kilonova / P. Evans, S. Cenko, Kennea // Science. — 2017. — Vol. 358, no. 6370. — P. 1565—1570. — DOI: 10.1126/science.aap9580.
50. *Korol V.* How can LISA probe a population of GW190425-like binary neutron stars in the Milky Way? / V. Korol, M. Safarzadeh // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2021. — Vol. 502, no. 4. — P. 5576—5583. — DOI: 10.1093/mnras/stab310. — arXiv: 2012.03070 [astro-ph.HE].
51. *Kawamura S.* Current status of space gravitational wave antenna DECIGO and B-DECIGO / S. Kawamura, M. Ando // Progress of Theoretical and Experimental Physics. — 2021. — Vol. 2021. — DOI: 10.1093/ptep/ptab019.
52. *Ghayour B.* Detection of relic gravitational waves in thermal case by using Adv.LIGO data of GW150914 / B. Ghayour, J. Khodagholizadeh // Eur. Phys. J. C. — 2017. — Vol. 77, no. 8. — P. 560. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-5135-8. — arXiv: 1608.08973 [astro-ph.CO].
53. *Agazie G.* The NANOGrav 15 yr Data Set: Looking for Signs of Discreteness in the Gravitational-wave Background / G. Agazie, P. T. Baker // The Astrophysical Journal. — 2025. — Vol. 978, no. 1. — P. 31. — DOI: 10.3847/1538-4357/ad93d5.

54. *Sazhin M. V.* Opportunities for detecting ultralong gravitational waves / M. V. Sazhin // *Astron. Zh.* — 1978. — Vol. 22. — P. 36—38.
55. *Das A.* Pulsars as Weber gravitational wave detectors / A. Das, S. S. Dave, O. Ganguly et. all // *Physics Letters B.* — 2019. — Vol. 791. — P. 167—171. — DOI: 10.1016/j.physletb.2019.02.031. — arXiv: 1804.00453 [astro-ph.HE].
56. *Komatsu E.* Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation / E. Komatsu, J. Dunkley, M. R.olta [et al.] // *Astrophys. J. Suppl.* — 2009. — Vol. 180. — P. 330—376. — DOI: 10.1088/0067-0049/180/2/330. — arXiv: 0803.0547 [astro-ph].
57. *Planck Collaboration.* Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters / Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim [et al.] // *Astron. Astrophys.* — 2014. — Vol. 571. — A16. — DOI: 10.1051/0004-6361/201321591. — arXiv: 1303.5076 [astro-ph.CO].
58. *Teply G. P.* Measurement of the Polarization of the Cosmic Microwave Background with the BICEP2 and Keck Array Telescopes : PhD thesis / Teply Grant Paul. — Caltech, 2015. — DOI: 10.7907/Z9XP72WM.
59. *Coulton W.* Atacama Cosmology Telescope: High-resolution component-separated maps across one third of the sky / W. Coulton, M. S. Madhavacheril, A. J. Duivenvoorden [et al.] // *Phys. Rev. D.* — 2024. — Vol. 109, issue 6. — P. 063530. — DOI: 10.1103/PhysRevD.109.063530. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.109.063530>.
60. *Ruhl J.* The South Pole Telescope / J. Ruhl, P. Ade, J. Carlstrom [et al.] // *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.* — 2004. — Vol. 5498. — P. 11. — DOI: 10.1117/12.552473. — arXiv: astro-ph/0411122.
61. *ODell A.* Rising Tides: Analytic Modeling of Tidal Effects in Binary Neutron Star Mergers / A. ODell, M. Babiuc // *Astronomy.* — 2024. — Vol. 3, no. 3. — P. 167—188. — URL: <https://www.mdpi.com/2674-0346/3/3/11>.
62. *Soker N.* Predicting Gravitational Waves from Jittering-jets-driven Core Collapse Supernovae / N. Soker // *Research in Astronomy and Astrophysics.* — 2023. — Vol. 23, no. 12. — P. 121001. — DOI: 10.1088/1674-4527/ad013e. — URL: <https://doi.org/10.1088/1674-4527/ad013e>.

63. *Fierz M.* On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1939. — T. 173. — C. 211–232. — DOI: 10.1098/rspa.1939.0140.
64. *Rham C. de.* Resummation of Massive Gravity / C. de Rham, G. Gabadadze, A. J. Tolley // Phys. Rev. Lett. — 2011. — T. 106. — C. 231101. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.231101. — arXiv: 1011.1232 [hep-th].
65. *Clesse S.* Massive primordial black holes from hybrid inflation as dark matter and the seeds of galaxies / S. Clesse, J. Garcia-Bellido // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 92, issue 2. — P. 023524. — DOI: 10.1103/PhysRevD.92.023524. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.023524>.
66. *Bogomazov A. I.* The Mass Spectrum of Black Holes in Close Binary Systems / A. I. Bogomazov, M. K. Abubekеров, V. M. Lipunov // Astronomy Reports. — 2005. — Vol. 49, issue 8. — P. 664—653. — DOI: 10.1134/1.2010653.
67. *Linde A.* Inflationary cosmology / A. Linde // physrep. — 2000. — Vol. 333. — P. 575—591. — DOI: 10.1016/S0370-1573(00)00038-7.
68. *Aghanim N.* Planck 2018 results: VI. Cosmological parameters / N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown [et al.] // Astronomy and Astrophysics. — 2020. — Vol. 641. — A6. — DOI: 10.1051/0004-6361/201833910.
69. *Вайнберг С.* Космология / С. Вайнберг. — URSS, 2018. — 608 с.
70. *Сажин М.* Современная космология в популярном изложении / М. Сажин. — Москва : URSS, 2002. — 240 с.
71. *Grishchuk L. P.* The Amplification of Gravitational Waves and Creation of Gravitons in the Isotropic Universe / L. P. Grishchuk // Lett. Nuovo Cim. — 1975. — T. 12. — C. 60—64. — DOI: 10.1007/BF02813731. — [Erratum: Lett.Nuovo Cim. 12, 432 (1975)].
72. *Workman R.* Review of Particle Physics / R. Workman, V. Burkert, V. Crede [et al.] // PTEP. — 2022. — Vol. 2022. — P. 083C01. — DOI: 10.1093/ptep/ptac097.
73. *Rubakov V. A.* Harrison-Zeldovich spectrum from conformal invariance / V. A. Rubakov // JCAP. — 2009. — Vol. 09. — P. 030. — DOI: 10.1088/1475-7516/2009/09/030. — arXiv: 0906.3693 [hep-th].

74. *Zhao W.* Relic gravitational waves and their detection / W. Zhao, Y. Zhang // Phys. Rev. D. — 2006. — Vol. 74, issue 4. — P. 043503. — DOI: 10.1103/PhysRevD.74.043503.
75. *The POLARBEAR Collaboration.* A Measurement of the Cosmic Microwave Background B-mode Polarization Power Spectrum at Subdegree Scales from Two Years of polarbear Data / The POLARBEAR Collaboration, P. A. R. Ade, M. Aguilar [et al.] // The Astrophysical Journal. — 2017. — Vol. 848, no. 2. — P. 121. — DOI: 10.3847/1538-4357/aa8e9f.
76. *Ade P. A. R.* Bicep2. II. EXPERIMENT AND THREE-YEAR DATA SET / P. A. R. Ade, R. W. Aikin, M. Amiri [et al.] // The Astrophysical Journal. — 2014. — Vol. 792, no. 1. — P. 62. — DOI: 10.1088/0004-637X/792/1/62. — URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/792/1/62>.
77. *Planck Collaboration.* Planck intermediate results. XXX. The angular power spectrum of polarized dust emission at intermediate and high Galactic latitudes / Planck Collaboration, R. Adam, P. Ade [et al.] // Astronomy and Astrophysics. — 2016. — Vol. 586. — A133. — DOI: 10.1051/0004-6361/201425034. — arXiv: 1409.5738 [astro-ph.CO].
78. *Zeldovich Y.* Electromagnetic and gravitational waves in a stationary magnetic field / Y. Zeldovich // Soviet Physics JETP. — 1974. — Vol. 38. — P. 652.
79. *Kushwaha A.* / A. Kushwaha, S. Malik, S. Shankaranarayanan // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2023. — Vol. 527, no. 3. — P. 4378—4387. — DOI: 10.1093/mnras/stad3545.
80. *Cruise A.* An electromagnetic detector for very-high-frequency gravitational waves / A. Cruise // Classical and Quantum Gravity. — 2000. — Vol. 17. — P. 2525. — DOI: 10.1088/0264-9381/17/13/305.
81. *Li F.-Y.* Electromagnetic response of a Gaussian beam to high-frequency relic gravitational waves in quintessential inflationary models / F.-Y. Li, M.-X. Tang, D.-P. Shi // Phys. Rev. D. — 2003. — Vol. 67, issue 10. — P. 104008. — DOI: 10.1103/PhysRevD.67.104008. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.104008>.

82. *Kolosnitsyn N. I.* Gravitational Hertz experiment with electromagnetic radiation in a strong magnetic field / N. I. Kolosnitsyn, V. N. Rudenko // *Physica Scripta*. — 2015. — Т. 90, № 7. — С. 074059. — DOI: 10.1088/0031-8949/90/7/074059. — arXiv:1504.06548 [gr-qc].
83. *Руденко В. Н.* Гравитационно-волновой эксперимент в России / В. Н. Руденко // *Успехи физических наук*. — 2017. — Т. 187, № 8. — С. 892—905. — DOI: 10.3367/UFNr.2016.09.037982.
84. *Dunne G. V.* Heisenberg-Euler effective Lagrangians: Basics and extensions / G. V. Dunne // *From fields to strings: Circumnavigating theoretical physics. Ian Kogan memorial collection (3 volume set)* / ed. by M. Shifman, A. Vainshtein, J. Wheeler. — 2004. — P. 445—522. — DOI: 10.1142/9789812775344_0014. — arXiv: hep-th/0406216.
85. *Niemi A.* Finite-temperature quantum field theory in Minkowski space / A. Niemi, G. Semenoff // *Annals of Physics*. — 1984. — Vol. 152, no. 1. — P. 105—129. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(84\)90082-4](https://doi.org/10.1016/0003-4916(84)90082-4). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491684900824>.
86. *Зельдович Я.* Строение и эволюция Вселенной / Я. Зельдович, И. Новиков. — М.: Наука, 1975. — 736 с.
87. *Zeldéovich Y. B.* Kinematic dynamo problem in a linear velocity field / Y. B. Zeldéovich, A. Ruzmaikin, S. Molchanov [et al.] // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1984. — Vol. 144. — P. 1—11. — DOI: 10.1017/S0022112084001488.
88. *Shukurov A.* Galactic dynamo and helicity losses through fountain flow / A. Shukurov, D. Sokoloff, K. Subramanian [et al.] // *Astronomy and Astrophysics*. — 2006. — Vol. 448. — P. L33—L36. — DOI: 10.1051/0004-6361:200600011.
89. *Kulsrud R. M.* The Origin of Astrophysical Magnetic Fields / R. M. Kulsrud, E. G. Zweibel // *Rept. Prog. Phys.* — 2008. — Vol. 71. — P. 0046091. — DOI: 10.1088/0034-4885/71/4/046901. — arXiv: 0707.2783 [astro-ph].
90. *Subramanian K.* Cosmic Microwave Background Bispectrum from Primordial Magnetic Fields on Large Angular Scales / K. Subramanian // *Physical review letters*. — 2009. — Vol. 103. — P. 081303. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.081303.

91. *Ade P.* Planck 2015 results. XIX. Constraints on primordial magnetic fields / P. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud [et al.] // The Astrophysical Journal. — 2015. — A19.
92. *Jedamzik K.* Damping of cosmic magnetic fields / K. Jedamzik, V. Katalinic, A. V. Olinto // Phys. Rev. D. — 1998. — Vol. 57. — P. 3264—3284. — DOI: 10.1103/PhysRevD.57.3264. — arXiv: astro-ph/9606080.
93. *Jedamzik K.* Limit on Primordial Small-Scale Magnetic Fields from Cosmic Microwave Background Distortions / K. Jedamzik, V. Katalinic, A. Olinto // Physical review letters. — 2000. — Vol. 85. — P. 700—3. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.700.
94. *Barrow J. D.* Constraints on a Primordial Magnetic Field / J. D. Barrow, P. G. Ferreira, J. Silk // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78, issue 19. — P. 3610—3613. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.3610. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.3610>.
95. *Durrer R.* Tensor microwave anisotropies from a stochastic magnetic field / R. Durrer, P. G. Ferreira, T. Kahniashvili // Phys. Rev. D. — 2000. — Vol. 61. — P. 043001. — DOI: 10.1103/PhysRevD.61.043001. — arXiv: astro-ph/9911040.
96. *Yamazaki D. G.* The Search for a Primordial Magnetic Field / D. G. Yamazaki, T. Kajino, G. J. Mathew [et al.] // Phys. Rept. — 2012. — Vol. 517. — P. 141—167. — DOI: 10.1016/j.physrep.2012.02.005. — arXiv: 1204.3669 [astro-ph.CO].
97. *Trivedi P.* Primordial magnetic field limits from cosmic microwave background bispectrum of magnetic passive scalar modes / P. Trivedi, K. Subramanian, T. R. Seshadri // Phys. Rev. D. — 2010. — Vol. 82, issue 12. — P. 123006. — DOI: 10.1103/PhysRevD.82.123006. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.123006>.
98. *Adams J.* Distortion of the acoustic peaks in the CMBR due to a primordial magnetic field / J. Adams, U. Danielsson, D. Grasso [et al.] // Phys. Lett. B. — 1996. — Vol. 388. — P. 253.
99. *Горбунов Д.* Введение в теорию ранней Вселенной: теория горячего Большого взрыва / Д. Горбунов, В. Рубаков. — URSS, 2008. — 616 с. — URL: <https://books.google.ru/books?id=97lTNwAACAAJ>.

100. *Akhmedov E. K.* Neutrinos with mixing in twisting magnetic fields / E. K. Akhmedov, S. T. Petcov, A. Y. Smirnov // *Phys. Rev. D.* — 1993. — Vol. 48. — P. 2167—2181. — DOI: 10.1103/PhysRevD.48.2167. — arXiv: hep-ph/9301211.
101. *Dvornikov M.* Neutrino oscillations in matter and in twisting magnetic fields / M. Dvornikov // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics.* — 2008. — Vol. 35, no. 2. — P. 025003. — DOI: 10.1088/0954-3899/35/2/025003. — URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/35/2/025003>.
102. *Peebles P.* *Principles of Physical Cosmology* / P. Peebles. — Princeton University Press, 1993. — 718 p.
103. *Coles P.* Primordial Magnetic Fields and the Largescale Structure of the Universe / P. Coles // *Comments on Astrophysics.* — 1992. — Vol. 16. — P. 45.
104. *Kim E.-J.* Generation of Density Perturbations by Primordial Magnetic Fields / E.-J. Kim, A. V. Olinto, R. Rosner // *Astrophysical Journal.* — 1996. — Vol. 468. — P. 28. — DOI: 10.1086/177667. — arXiv: astro-ph/9412070 [astro-ph].
105. *Wasserman I.* On the origins of galaxies, galactic angular momenta, and galactic magnetic fields. / I. Wasserman // *Astrophysical Journal.* — 1978. — Vol. 224. — P. 337—343. — DOI: 10.1086/156381.
106. *Battaner E.* Magnetic Fields and Large Scale Structure in a hot Universe. I. General Equations / E. Battaner, E. Florido, J. Jimenez-Vicente // *Astronomy and Astrophysics.* — 1997. — Vol. 326. — P. 13—22. — arXiv: astro-ph/9602097 [astro-ph].
107. *Florido E.* Magnetic fields and large scale structure in a hot universe. 2. Magnetic flux tubes and filamentary structure / E. Florido, E. Battaner // *Astron. Astrophys.* — 1997. — Vol. 327. — P. 1. — arXiv: astro-ph/9710196.
108. *Battaner E.* Magnetic fields and the large scale structure / E. Battaner, E. Florido // *ASP Conf. Ser.* / ed. by A. Mazure, O. Le Fevre, V. Le Brun. — 2000. — Vol. 200. — P. 144—147. — arXiv: astro-ph/9911423.
109. *Totani T.* Galaxy Formation by Galactic Magnetic Fields / T. Totani // *The Astrophysical Journal.* — 1999. — Vol. 517, no. 2. — P. L69. — DOI: 10.1086/312048. — URL: <https://dx.doi.org/10.1086/312048>.

110. *Vallée J.* Magnetic Field versus Gas Density, in Different Physical Conditions / J. Vallée // *Astrophysics and Space Science*. — 1995. — Vol. 234, no. 1. — P. 1—10. — DOI: 10.1007/BF00627277.
111. *Tavecchio F.* The intergalactic magnetic field constrained by Fermi/LAT observations of the TeV blazar 1ES 0229+200 / F. Tavecchio, G. Ghisellini, L. Foschini [et al.] // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2010. — Vol. 406. — P. L70—L74. — DOI: 10.1111/j.1745-3933.2010.00884.x. — arXiv: 1004.1329 [astro-ph.CO].
112. *Essey W.* Determination of intergalactic magnetic fields from gamma ray data / W. Essey, S. Ando, A. Kusenko // *Astroparticle Physics*. — 2010. — Vol. 35. — P. 135—139. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118631068>.
113. *Chen W.* Search for GeV γ -Ray Pair Halos Around Low Redshift Blazars / W. Chen, J. H. Buckley, F. Ferrer // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 115, issue 21. — P. 211103. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.115.211103. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.211103>.
114. *Ackermann M.* The Search for Spatial Extension in High-latitude Sources Detected by the Fermi Large Area Telescope / M. Ackermann, M. Ajello, L. Baldini [et al.] // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. — 2018. — Vol. 237, no. 2. — P. 32. — DOI: 10.3847/1538-4365/aacdf7. — URL: <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4365/aacdf7>.
115. *Ando S.* Evidence for Gamma-ray Halos Around Active Galactic Nuclei and the First Measurement of Intergalactic Magnetic Fields / S. Ando, A. Kusenko // *The Astrophysical Journal Letters*. — 2010. — Vol. 722, no. 1. — P. L39—L44. — DOI: 10.1088/2041-8205/722/1/L39. — arXiv: 1005.1924 [astro-ph.HE].
116. *Neronov A.* No evidence for gamma-ray halos around active galactic nuclei resulting from intergalactic magnetic fields / A. Neronov, D. Semikoz, P. Tinyakov [et al.] // *Astronomy and Astrophysics*. — 2011. — Vol. 526. — A90. — DOI: 10.1051/0004-6361/201015892. — arXiv: 1006.0164 [astro-ph.HE].

117. *Ellis J.* Intergalactic Magnetic Fields from First-Order Phase Transitions / J. Ellis, M. Fairbairn, M. Lewicki [et al.] // JCAP. — 2019. — Vol. 09. — P. 019. — DOI: 10.1088/1475-7516/2019/09/019. — arXiv: 1907.04315 [astro-ph.CO].
118. *Maggiore M.* Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments / M. Maggiore. — Oxford University Press, 2007. — 576 p. — DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198570745.001.0001.
119. *Misner C. W.* Gravitation / C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler. — San Francisco : W. H. Freeman, 1973. — 1279 p.
120. *Mukhanov V.* Physical Foundations of Cosmology / V. Mukhanov. — Cambridge University Press, 2005. — 421 p.
121. *Flanagan É. É.* The basics of gravitational wave theory / É. É. Flanagan, S. A. Hughes // New Journal of Physics. — 2005. — Vol. 7, no. 1. — P. 204. — DOI: 10.1088/1367-2630/7/1/204. — URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/7/1/204>.
122. *Gioia F.* Linear perturbations of an anisotropic Bianchi I model with a uniform magnetic field / F. Gioia, G. Montani // The European Physical Journal C. — 2019. — Vol. 79. — P. 921—940. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-7411-2.
123. *Miedema P.* Cosmological perturbations in Bianchi type-I universes / P. Miedema, v. WA // Physical review D: Particles and fields. — 1993. — Vol. 47. — P. 3151—3164. — DOI: 10.1103/PhysRevD.47.3151.
124. *Carroll S. M.* Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity / S. M. Carroll. — Cambridge University Press, 2019. — 513 p. — DOI: 10.1017/9781108770385.
125. *Kushwaha A.* Maximal chirality transfer in the photon-graviton conversion in the early Universe / A. Kushwaha, R. K. Jain // Phys. Rev. D. — 2025. — Vol. 111, no. 2. — P. 023517. — DOI: 10.1103/PhysRevD.111.023517. — arXiv: 2410.07338 [astro-ph.CO].
126. *Gumrukcuoglu A. E.* CMB Anomalies from Relic Anisotropy / A. E. Gumrukcuoglu, C. R. Contaldi, M. Peloso // 11th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity. — 2006. — C. 1641—1646. — DOI: 10.1142/9789812834300_0218. — arXiv: astro-ph/0608405.

127. *Pereira T. S.* Theory of cosmological perturbations in an anisotropic universe / T. S. Pereira, C. Pitrou, J.-P. Uzan // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2007. — T. 2007, № 09. — C. 006. — DOI: 10.1088/1475-7516/2007/09/006. — URL: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2007/09/006>.
128. *Gumrukcuoglu A. E.* Inflationary perturbations in anisotropic backgrounds and their imprint on the cosmic microwave background / A. E. Gumrukcuoglu, C. R. Contaldi, M. Peloso // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2007. — T. 2007, № 11. — C. 005. — DOI: 10.1088/1475-7516/2007/11/005. — URL: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2007/11/005>.
129. *Soda J.* Statistical Anisotropy from Anisotropic Inflation / J. Soda // Class. Quant. Grav. — 2012. — T. 29. — C. 083001. — DOI: 10.1088/0264-9381/29/8/083001. — arXiv: 1201.6434 [hep-th].
130. Anisotropic Universes in Light of Background Cosmological Observations / J. L. Palacios-Córdoba [et al.] // Phys. Rev. D. — 2026. — Vol. 113, issue 4. — P. 043511. — DOI: 10.1103/kvvs-97ly. — arXiv: 2507.09351 [astro-ph.CO].
131. *Mészáros P.* Evolution of superhorizon perturbations in early Universe with anisotropic solid remnant / P. Mészáros, D. Račko // Eur. Phys. J. C. — 2025. — T. 85. — C. 1077. — DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-025-14738-1>.
132. Statistical Anisotropies in Gravitational Waves in Solid Inflation / M. Akhshik [и др.] // JCAP. — 2014. — T. 09. — C. 012. — DOI: 10.1088/1475-7516/2014/09/012. — arXiv: 1405.4179 [astro-ph.CO].
133. *Barrow J. D.* The growth of anisotropic structures in a Friedmann universe / J. D. Barrow, J. Silk // The Astrophysical Journal. — 1981. — T. 250. — C. 432–449. — DOI: 10.1086/159391.
134. *Kantowski R.* Some Spatially Homogeneous Anisotropic Relativistic Cosmological Models / R. Kantowski, R. K. Sachs // Journal of Mathematical Physics. — 1966. — T. 7. — C. 443–446. — DOI: 10.1063/1.1704952.
135. *Zeldovich Y. B.* Gravitational instability: An Approximate theory for large density perturbations / Y. B. Zeldovich // Astronomy and Astrophysics. — 1970. — T. 5. — C. 84–89.

136. *Shandarin S. F.* The large-scale structure of the universe: Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium / S. F. Shandarin, Y. B. Zeldovich // *Reviews of Modern Physics*. — 1989. — T. 61, № 2. — C. 185–220. — DOI: 10.1103/RevModPhys.61.185.
137. Coherent Structures in the Universe and the Adhesion Model / L. Kofman [et al.] // *The Astrophysical Journal*. — 1992. — Vol. 393. — P. 437. — DOI: 10.1086/171517.
138. *White S. D. M.* The growth of aspherical structure in the universe: Is the Local Supercluster an unusual system? / S. D. M. White, J. Silk // *The Astrophysical Journal*. — 1979. — T. 231. — C. 1–9. — DOI: 10.1086/157156.
139. *Hacyan S.* Effects of gravitational waves on the polarization of pulsars / S. Hacyan // *Int. J. Mod. Phys. A*. — 2016. — Vol. 31, no. 3. — P. 1641023. — DOI: 10.1142/S0217751X16410232.
140. *Guth A. H.* Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems / A. H. Guth // *Phys. Rev. D*. — 1981. — Vol. 23, issue 2. — P. 347–356. — DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347.
141. *Linde A. D.* Chaotic Inflation / A. D. Linde // *Phys. Lett. B*. — 1983. — Vol. 129. — P. 177–181. — DOI: 10.1016/0370-2693(83)90837-7.
142. *Milani F.* Modified $f(R,G,T)$ Gravity in the Quintom model, and Inflation / F. Milani. — 2024. — arXiv: 2409.00656 [gr-qc].
143. *Liu J. C. H.* Inflation and dark matter from the low entropy hypothesis and modeling mechanism of modified gravity / J. C. H. Liu // *Class. Quant. Grav.* — 2024. — Vol. 41, no. 19. — P. 195011. — DOI: 10.1088/1361-6382/ad721c.
144. *Deb B.* Slow-roll Hilltop Inflation in $f(\varphi,T)$ gravity / B. Deb, A. De-shamukhya // *Springer Proc. Phys.* — 2026. — Vol. 322. — P. 137–140.
145. *Yuennan J.* Gravity extquoterights rainbow effects on higher curvature modification of R^2 inflation / J. Yuennan, P. Channuie, D. Momeni // *Eur. Phys. J. C*. — 2024. — Vol. 84, no. 8. — P. 766. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-024-13155-0.

Основные модели инфляции

Первая модель инфляции была предложена Аланом Гутом [140]. В ней вакуумная энергия выражалась через потенциал, имеющий локальный и глобальный минимумы (Рис. 23). Первый отвечает за состояние ложного вакуума, $\rho_{\text{vac}} = V(\varphi_1)$, второй — истинного вакуума, $\rho_{\text{vac}} = V(\varphi_0)$. Ложный вакуум переходит в истинный за счет эффекта квантового туннелирования. Это приводит к образованию пузырей новой фазы. В модели Гута, модели «старой инфляции», предполагалось, что рождение частиц и разогрев происходят при столкновении стенок пузырей новой фазы. Однако было показано, что из-за экспоненциального расширения ложного вакуума пузыри новой фазы разбегаются далеко друг от друга, и столкновения не происходят.

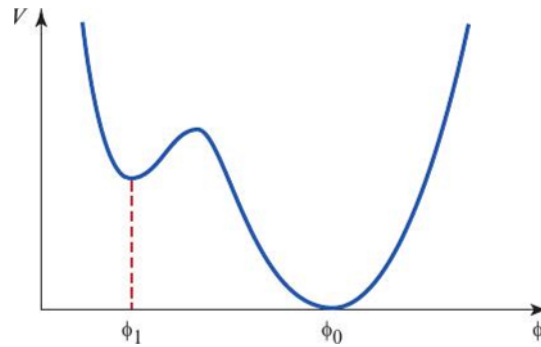


Рисунок 23 — Форма потенциала скалярного поля в модели старой инфляции

Далее, был предложен другой класс моделей. В их основе лежит механизм медленного скатывания (slow-roll).

Запишем действие для минимально взаимодействующего с гравитацией скалярного поля

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right]. \quad (39)$$

Откуда для метрики ФЛРУ получаем уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0. \quad (40)$$

Это уравнение физически эквивалентно механическому скатыванию в потенциальной яме $V(\varphi)$ с трением $3H$, которое зависит от времени.

Первое условие медленного скатывания состоит в требовании, чтобы «трение» было много больше ускорения, то есть

$$\left| \frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} \right| \ll 1. \quad (41)$$

Выполнение этого условия обеспечивает достаточную длительность инфляции благодаря медленному перемещению φ по профилю потенциала.

Второе условие заключается в требовании, чтобы кинетическая энергия скалярного поля была пренебрежимо мала по сравнению с потенциальной энергией

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2V(\varphi)} \ll 1. \quad (42)$$

Благодаря этому условию приблизительно выполняется равенство $p \approx -\rho$, и режим расширения является квази-экспоненциальным.

Из решения уравнения (40) в совокупности с уравнением Фридмана

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{\text{pl}}^2} \rho = \frac{8\pi}{3m_{\text{pl}}^2} \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) \right] \quad (43)$$

при выполнении условий медленного скатывания (41-42) можно получить следующие ограничения на форму потенциала $V(\varphi)$:

$$\varepsilon \equiv \frac{m_{\text{pl}}^2}{48\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1, \quad (44)$$

$$\eta \equiv \frac{m_{\text{pl}}^2}{24\pi} \left| \frac{V''}{V} \right| \ll 1, \quad (45)$$

где введены общепринятые параметры медленного скатывания ε и η . Они используются при определении инфляционной модели и в расчетах амплитуд и спектров первичных скалярных и тензорных возмущений. Малость величин данных параметров обеспечивает медленное скатывания поля φ . Это скалярное поле, часто называемое инфлатоном, на протяжении стадии инфляции дает доминирующий вклад в ТЭИ.

Разберем несколько наиболее простых моделей инфляции, в которых выполняются условия медленного скатывания — модели инфлатона со степенным потенциалом $V(\varphi) = g\varphi^n$, где g — константа взаимодействия. Из первого условия медленного скатывания (44) получаем

$$\varphi \gg \frac{nm_{\text{pl}}}{4\sqrt{3\pi}}. \quad (46)$$

То есть необходимы сверхпланковские значения инфлатона. Инфляция с большим, в планковских единицах, полем называется хаотической инфляцией. Она была предложена Линде [141].

Важно также учесть, что значение поля должно удовлетворять условию пренебрежимой малости эффектов квантовой гравитации. Уравнения Эйнштейна будут справедливы, если:

$$\begin{aligned} V(\varphi) &\ll m_{\text{pl}}^4, \\ \varphi &\ll g^{-1/n} m_{\text{pl}}^{4/n}. \end{aligned} \quad (47)$$

Отсюда видно, что чем меньше константа взаимодействия, тем шире интервал возможных значений поля, удовлетворяющих обоим условиям (46)-(47).

Наиболее распространены варианты потенциалов с $n = 2$ и $n = 4$ со следующей общепринятой формой записи:

$$V(\varphi) = \frac{m^2}{2} \varphi^2, \quad (48)$$

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4} \varphi^4, \quad (49)$$

где m имеет размерность массы, λ - безразмерная. При этом

$$m \ll m_{\text{pl}}, \quad (50)$$

$$\lambda \ll 1. \quad (51)$$

Хаотическая инфляция начинается в условиях сильной неоднородности пространства, отличной от нуля кривизны и высокой плотности энергии $\rho \sim m_{\text{pl}}^4$.

Присутствует поле инфлатона со степенным потенциалом. Само поле φ также сильно флуктуирует, из-за чего вклад в ТЭИ членов с производными $\partial_i \varphi \partial_j \varphi$ сравним с вкладом потенциальной энергии. Важен также вклад кривизны в уравнение Фридмана. Оба члена спадают обратно пропорционально квадрату масштабного фактора, поэтому они быстро убывают при расширении.

Переход к инфляционному расширению происходит, если в какой-то области размером $l \gtrsim l_{\text{pl}}$ флуктуации приводят к тому, что вклад от членов с производными $\partial_i \varphi \partial_j \varphi$ и вклад кривизны становятся меньше потенциального члена. Эта разница не обязательно должна быть большой. Даже при незначительном перевесе потенциальной энергии начинается расширение и спад доли градиентных слагаемых и кривизны. Так, режим медленного расширения быстро сменяется экспоненциальным.

Продолжается инфляция до тех пор, пока поле не скатится в минимум потенциала. Далее инфлатон начинает быстро осциллировать, и, при условии наличия его взаимодействия с другими полями, рождает частицы.

Характерным отличием модели хаотической инфляции является отсутствие требования начального термодинамического равновесия. Равновесие достигается в конце периода инфляционного расширения, после прохождения ряда нестационарных процессов.

Еще одна модель инфляции — «новая инфляция» вблизи максимума потенциала. Здесь рассматривается потенциал вида

$$V(\varphi) = V_0 - g\varphi^n. \quad (52)$$

В сценарии данной модели предполагается начальное состояние, близкое к термодинамическому равновесию. Однородность, изотропность и плоскостность не требуются.

Форма потенциала зависит от температуры. При высокой температуре минимум потенциала находится при $\varphi = 0$. При понижении температуры, вследствие расширения Вселенной, форма потенциала видоизменяется — появляется другой минимум, так что состояние $\varphi = 0$ становится неустойчивым (рис. 24). Из-за квантовых флуктуаций, инфлатон выходит из состояния равновесия, и начинается инфляционная стадия.

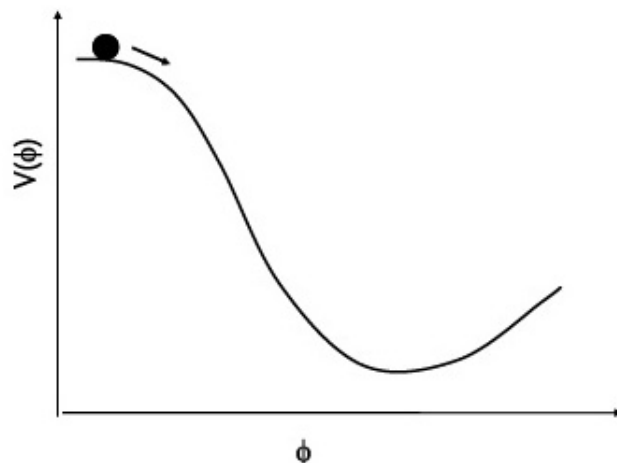


Рисунок 24 — Форма потенциала скалярного поля в модели новой инфляции

Данная модель будет считаться отличной от хаотической инфляции в случае, если инфляционная стадия заканчивается при небольших значениях инфлатона. Например, для $n = 4$, $V(\varphi) = V_0 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4$, это условие принимает

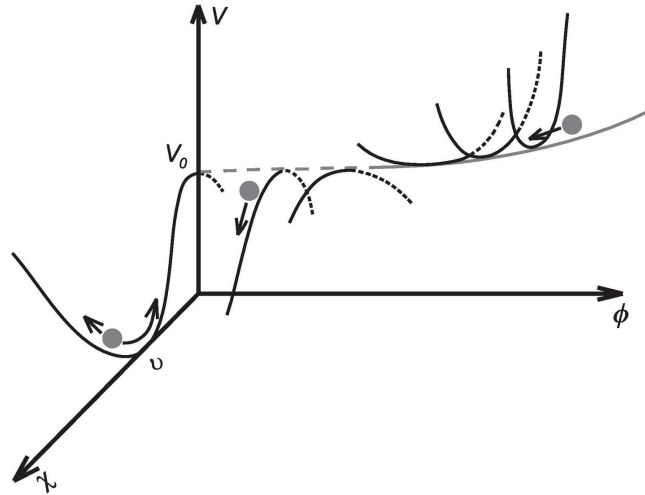


Рисунок 25 — Динамика формы потенциала для двух скалярных полей в гибридной модели инфляции

форму следующего неравенства:

$$\frac{V_0}{m_{\text{pl}}^4} \ll \left(\frac{3}{8\pi}\right)^2 \lambda. \quad (53)$$

Существует также модель инфляции с двумя и более скалярными полями — гибридная инфляция. Для примера кратко опишем механизм для случая двух скалярных полей ϕ и χ (рис. 25). Инфляция происходит вдоль долины $\chi = 0$. После охлаждения и появления седла в двумерном потенциале происходит скатывание вдоль другой оси при $\phi = 0$ и осцилляции в окрестности минимума $\chi = v$, вследствие чего происходит переход на стадию разогрева [6].

Хотелось бы упомянуть также модель Старобинского. Подход здесь несколько иной: в лагранжиан вводится нелинейный по скалярной кривизне член.

В этой связи процитируем авторов книги [6] (параграф 11.2): «Теории гравитации с лагранжианами, нелинейными по скаляру кривизны, эквивалентны общей теории относительности со скалярным полем».

Действие выглядит следующим образом:

$$S = -\frac{m_{\text{pl}}^2}{16\pi} \int \sqrt{-g} d^4x f(R), \quad (54)$$

где $f(R) = R - \frac{R^2}{6m^2}$ и m - параметр. Такое действие эквивалентно потенциалу вида:

$$V = \frac{3m^2 m_{\text{pl}}^2}{32\pi^2} \left(1 - e^{\frac{-4\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} \frac{\phi}{m_{\text{pl}}}}\right)^2. \quad (55)$$

Существуют и другие модели модифицированной гравитации. См. например работы [142—145].

Модели инфляции, основанные на механизме медленного скатывания, предсказывают плоский спектр первичных скалярных возмущений, соответствующий наблюдениям. Тем не менее, у данного класса моделей существуют и нерешенные проблемы.

Одна из них заключается в нетривиальности требования достаточно длинного плато в максимуме потенциала. На самом деле, динамику инфлатона задает эффективный потенциал, который определяется, в том числе, квантовыми поправками. Для перехода на стадию разогрева и рождения частиц необходимо наличие взаимодействия инфлатона с обычными частицами. Это влечет за собой большие квантовые поправки к потенциалу, лишая его необходимого для медленного скатывания свойства — плоскостности. Сильно усугубляется эта проблема в модели хаотической инфляции, где само поле принимает сверхпланковские значения, и начинают доминировать поправки вида $\Delta V(\varphi) = c_6 \frac{\varphi^6}{m_{\text{pl}}^2} + c_8 \frac{\varphi^8}{m_{\text{pl}}^4} + \dots$, которые разрушают режим медленного скатывания. До сих пор не придуман механизм, который может обеспечить плоскостность потенциала для реализации режима медленного скатывания. Отметим, что данная проблема решается в суперсимметричных теориях.

Второе замечание о необязательной связи механизма инфляции именно со скатыванием скалярного поля по профилю потенциала. Существуют альтернативные модели: модели с неминимальными кинетическими членами скалярных полей, модели с векторными полями и другие. Однако, в этих моделях, как правило, нет такого естественного окончания инфляционного режима и перехода на стадию разогрева [6].

Про поднятие и опускание индексов в уравнении Эйнштейна

Возможно, вывод в конце этого раздела покажется очевидным. Автор к нему пришел не сразу, поэтому счел полезным поместить данный раздел в приложение.

Начнем с полного уравнения в смешанных компонентах,

$$\bar{G}_\nu^\mu = \bar{T}_\nu^\mu, \quad (56)$$

где $G_\nu^\mu = R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R$ — тензор Эйнштейна, и для краткости множитель $8\pi G$ внесен в определение ТЭИ.

Разложим уравнение (56) до первого порядка по возмущению

$$G_\nu^\mu + G_\nu^{\mu(1)} = T_\nu^\mu + T_\nu^{\mu(1)}. \quad (57)$$

Это все еще уравнение для полных величин, пусть и разложенных, поэтому опускать индекс нужно полной метрикой $\bar{g}_{\mu\nu}$. Получаем:

$$G_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha}G_\nu^\alpha + g_{\mu\alpha}G_\nu^{\alpha(1)} = T_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha}T_\nu^\alpha + g_{\mu\alpha}T_\nu^{\alpha(1)} \quad (58)$$

Пользуясь уравнением Эйнштейна для фона, получаем сокращение первого слагаемого слева и справа, и так же для второго слагаемого слева и справа:

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (59)$$

$$h_{\mu\alpha}G_\nu^\alpha = h_{\mu\alpha}T_\nu^\alpha. \quad (60)$$

В итоге само уравнение для возмущения метрики:

$$g_{\mu\alpha}G_\nu^{\alpha(1)} = g_{\mu\alpha}T_\nu^{\alpha(1)}. \quad (61)$$

Вывод: в полученном уравнении для первого порядка по возмущению можно и нужно опускать и поднимать индексы одной только фоновой метрикой. Если хочется использовать полную метрику при перемещении индексов, то это нужно делать в полном уравнении Эйнштейна, где и слева и справа есть нулевой порядок разложения. Тогда слагаемые с произведениями $h_{\mu\nu}$ и фоновых величин полностью сократятся.

Анизотропия пространства с однородным космологическим полем

В работе рассмотрена модель однородного космологического поля. Ясно, что такое поле приводит к анизотропии фонового пространства, что в свою очередь приводит к поправкам к компонентам тензора Риччи и меняет уравнение движения метрических возмущений. Чтобы учесть эти поправки и оценить их порядок, начнем с вывода уравнений для фона с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - b^2 dx^2 - a^2(dy^2 + dz^2), \quad (62)$$

где масштабный фактор $a \neq b$, а также ни a , ни b не равны масштабному фактору изотропного пространства ФЛРУ. Воспользуемся уравнениями Эйнштейна для фоновых величин

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}R = 8\pi G \left(T_{\nu}^{(\text{medium})\mu} + T_{\nu}^{(\text{EM})\mu} \right), \quad (63)$$

где индексом *medium* обозначен ТЭИ излучения в эпоху РД, а индексом *EM* — ТЭИ космологического магнитного поля.

Выпишем ненулевые компоненты тензора Риччи и скаляр кривизны

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b}, \\ R_x^x &= -2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\ddot{b}}{b}, \\ R_y^y &= R_z^z = -\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2, \\ R &= -2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 4\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - 4\frac{\ddot{a}}{a} - 2\frac{\ddot{b}}{b}. \end{aligned} \quad (64)$$

Покомпонентно получаем аналоги уравнений Фридмана для фона:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 8\pi G \left(\rho + \frac{B^2}{2} \right), \quad (65)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G \left(-p + \frac{B^2}{2} \right), \quad (66)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 8\pi G \left(-p - \frac{B^2}{2} \right). \quad (67)$$

Далее воспользуемся п.3 в Гл. 19 книги [86]. Введем аналогичные обозначения

$$\alpha = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \beta = \frac{\dot{b}}{b}, \quad (68)$$

$$n = \frac{2\alpha + \beta}{3}, \quad r = \frac{\alpha - \beta}{n} \quad (69)$$

Теперь, стартуя с (3.5), получим уравнения на метрические возмущения. Наиболее простым будет вывод для недиагонального элемента h_y^x . Теперь ясно, что в (3.9) будет присутствовать вклад и от давления, вызываемого магнитным полем. В результате поправка к ТЭИ среды $T_{\mu\nu}^{\text{medium}(1)}$ тоже изменится на величину, пропорциональную $\frac{B^2}{2}h_{\mu\nu}$.

Опустим вывод и сразу запишем результат

$$\left[\partial_t^2 + 3\frac{\dot{b}}{b}\partial_t - \frac{\partial_x^2}{b^2} - \frac{\partial_y^2 + \partial_z^2}{a^2} - 2\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \right] h_y^x = 16\pi G \left[\left(p - \frac{B^2}{2}\right) h_y^x + B f_{.z}^x \right], \quad (70)$$

где использована третья снизу строка в уравнении (3.61) для поправки к ТЭИ. Поправка $\propto \frac{B^2}{2}h_{\mu\nu}$ здесь уже учтена.

Однако, давление теперь иначе выражается, чем без учета космологического магнитного поля. Используя (66), получаем

$$\left[\partial_t^2 + 3\frac{\dot{b}}{b}\partial_t - \frac{\partial_x^2}{b^2} - \frac{\partial_y^2 + \partial_z^2}{a^2} \right] h_y^x = 16\pi G B f_{.z}^x. \quad (71)$$

Теперь обратим внимание, что $\frac{\dot{b}}{b} \neq H_{\text{FLRW}}$. На самом деле, параметр Хаббла вдоль магнитного поля будет меньше, чем в изотропной вселенной ФЛРУ. Эта поправка может быть рассчитана из следующего соотношения

$$r = 6\frac{\rho_B}{\rho_{\text{rad}}} = \frac{3B^2}{3H_{\text{FLRW}}^2/(8\pi G)} = \frac{8\pi G B^2}{H_{\text{FLRW}}^2}, \quad (72)$$

а также из приближенного равенства

$$n \approx H_{\text{FLRW}} \quad (73)$$

Получаем систему уравнений

$$\frac{2\alpha + \beta}{3} = H_{\text{FLRW}}, \quad (74)$$

$$\frac{\alpha - \beta}{H_{\text{FLRW}}} = \frac{8\pi G B^2}{H_{\text{FLRW}}^2}, \quad (75)$$

Найдем из нее β

$$\beta = H_{\text{FLRW}} \left(1 - \frac{16\pi G B^2}{3H_{\text{FLRW}}^2} \right) \quad (76)$$

Оценим второе слагаемое в правой части полученного уравнения. Корень из него равен

$$\frac{B}{m_{\text{pl}} H_{\text{FLRW}}} \approx \frac{B_0}{a \dot{m}_{\text{pl}}} = \frac{B_0 \tau_0}{m_{\text{pl}}} \approx 2.4 * 10^{-4}, \quad (77)$$

где $B_0 = 1$ нГс, τ_0 — параметр для обезразмеривания масштабного фактора ($a = \sqrt{\frac{t}{\tau_0}}$), он равен времени жизни вселенной с некоторой поправкой, необходимой для нормировки $a_0 = 1$.

Получается, что поправка к изотропному параметру Хаббла составляет

$$\frac{16\pi G B^2}{3H_{\text{FLRW}}^2} \approx 10^{-6}, \quad (78)$$

и можно ей пренебречь.

Осталось разобраться с разными знаменателями в слагаемых, которые содержат вторую производную по пространственным координатам. Из-за различных параметров Хаббла в направлениях вдоль и поперек к магнитному полю, масштабные факторы растут по-разному. То есть $a \neq b \neq a_{\text{FLRW}}$. Можно найти поправку к a_{FLRW} , просто проинтегрировав β

$$\int_{b_2}^{b_1} \frac{db}{b} = \int_{t_2}^{t_1} \frac{(1 - 10^{-6})}{2t} dt \quad (79)$$

Получаем

$$\frac{b_2}{b_1} = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}^{(1-10^{-6})} \approx \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} \left(1 - 10^{-6} \ln \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} \right). \quad (80)$$

То есть

$$b = a_{\text{FLRW}} (1 - 10^{-6} \ln a_{\text{FLRW}}), \quad (81)$$

$$\frac{\partial_x^2}{b^2} \approx \frac{\partial_x^2}{a_{\text{FLRW}}^2} (1 + 2 * 10^{-6} \ln a_{\text{FLRW}}) \quad (82)$$

Наибольшее значение поправка принимает при $a_{\text{FLRW}} = 10^{-9}$ из интервала, который выбран для решения. Так, в начальной точке решения поправка составит

величину порядка 10^{-5} , далее она будет только уменьшаться, а потому можно ей пренебречь на всем интервале решения.

Отсюда же можно получить условие малости параметра $\xi = a - b$ относительно a_{FLRW} , который был введен в конце раздела 3.1.3 для общего случая малой анизотропии. Действительно

$$\xi \propto 10^{-6} \ln a_{\text{FLRW}}, \quad \dot{\xi} \propto 10^{-6} \dot{a}_{\text{FLRW}}, \quad \ddot{\xi} \propto 10^{-6} \ddot{a}_{\text{FLRW}}, \quad (83)$$

и смешивания мод метрических возмущений в таком приближении действительно не будет.

Перепишем (71), приняв во внимание все вышесказанное,

$$\left[\partial_t^2 + 3H_{\text{FLRW}} \partial_t - \frac{\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2}{a_{\text{FLRW}}^2} \right] h_y^x = 16\pi G B f_{.z}^x. \quad (84)$$

Можно показать, что для остальных поляризаций возникнет такая же поправка из неизотропности фонового пространства, и во всех уравнениях (4.6, 4.7, 4.20) последнее слагаемое слева, меняющее эффективную частоту ГВ, на самом деле в два раза больше.

Подведем итог: единственная важная поправка, которая вызвана неизотропностью фонового пространства, заполненного однородным магнитным полем, — это поправка к фоновому тензору Риччи. Она влечет за собой изменение уравнений Фридмана (сравнить (91) и (65 – 67)). Эта поправка включает слагаемое того же порядка, что и правая часть в уравнениях на тензор метрических возмущений. Остальными эффектами, такими как отличие параметра Хаббла и масштабных факторов от величин в изотропном пространстве, можно пренебречь ввиду их малости.

Изменение эффективной частоты, полученное в основной части диссертации, приводит к незначительному эффекту влияния на спектр реликтовых гравитационных волн, и оно не имеет значения для частот $> 10^{-15}$ Гц при рассмотрении эффекта конверсии. Поэтому выше приведенные рассуждения помещены в приложение.

Поправка к электромагнитному ТЭИ из действия Гейзенберга–Эйлера

Используя формулу (3.32) и временно опустив верхнее подчеркивание, получим ТЭИ из действия Гейзенберга–Эйлера (3.30):

$$T_{\mu\nu}^{\text{HE}} = -g_{\mu\nu}C_0 \left[(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})^2 + \frac{7}{4}(\tilde{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})^2 \right] + \\ + 8C_0 \left[(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})F_{\mu\lambda}F_{\nu}^{\cdot\lambda} + \frac{7}{4}(\tilde{F}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})\tilde{F}_{\mu\lambda}F_{\nu}^{\cdot\lambda} \right], \quad (85)$$

где последнее слагаемое во второй квадратной скобке получено путем раскрытия соответствующего слагаемого под интегралом в действии (3.30) следующим образом:

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2 = (\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) (\tilde{F}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) = \\ = \left(\frac{1}{2\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\eta} F_{\lambda\eta} F_{\mu\nu} \right) \left(\frac{\sqrt{-g}}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\varphi\xi} F^{\varphi\xi} F^{\alpha\beta} \right). \quad (86)$$

Такая форма записи убирает зависимость от определителя метрического тензора, но оставляет зависимость от контравариантного метрического тензора, по которому проводится дифференцирование. Действительно, запишем выражение так, чтобы остались только ковариантные компоненты электромагнитного тензора

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2 = \frac{1}{4} (\varepsilon^{\mu\nu\lambda\eta} F_{\lambda\eta} F_{\mu\nu}) (\varepsilon_{\alpha\beta\varphi\xi} g^{\varphi\rho} g^{\xi\zeta} F_{\rho\zeta} g^{\alpha\sigma} g^{\beta\tau} F_{\sigma\tau}) \quad (87)$$

Можно воспользоваться другим вариантом записи квадрата свертки дуального и обычного тензоров Максвелла:

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2 = (\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) (\tilde{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) = \\ = \left(\frac{1}{2\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\eta} F_{\lambda\eta} F_{\mu\nu} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{-g}} \varepsilon^{\alpha\beta\varphi\xi} F_{\varphi\xi} F^{\alpha\beta} \right) \propto \frac{1}{-g}. \quad (88)$$

Таким образом, сразу получится выражение, содержащее только ковариантные компоненты электромагнитного тензора.

Теперь, с учетом меры интегрирования $\sqrt{-g}$ в действии (3.30), у слагаемого с дуальным тензором остается только зависимость от определителя метрического тензора в виде $\propto 1/\sqrt{-g}$.

Воспользуемся формой записи (88) и получим более простое выражение для ТЭИ от действия Гейзенберга-Эйлера. А также вернем верхнее подчеркивание и для краткости опустим немые индексы в некоторых свертках:

$$\overline{T}_{\mu\nu}^{\text{HE}} = C_0 \left\{ -\overline{g}_{\mu\nu} \left[\overline{F}^4 - \frac{7}{4} (\overline{F}\overline{F})^2 \right] + 8\overline{F}^2 \overline{F}_{\mu\lambda} \overline{F}_{\nu}^{\cdot\lambda} \right\}. \quad (89)$$

Разложим (89) до первого порядка по возмущению и запишем выражение для поправки к ТЭИ из действия Гейзенберга-Эйлера

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\text{HE}(1)} = C_0 \{ & -h_{\mu\nu} F^4 - g_{\mu\nu} 4F^2 (Ff - FFh) + \\ & + 8F^2 (F_{\mu\lambda} f_{\nu}^{\cdot\lambda} + f_{\mu\lambda} F_{\nu}^{\cdot\lambda} - h^{\lambda\alpha} F_{\mu\lambda} F_{\nu\alpha}) + 16 (Ff - FFh) F_{\mu\lambda} F_{\nu}^{\cdot\lambda} \}, \end{aligned} \quad (90)$$

где использовано уравнение (3.24) и обозначения (3.36), а также учтено, что в отсутствие внешнего электрического поля свертка $\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 0$.

Приложение Д

**Уравнение для метрических возмущений для фонового ТЭИ
в модели идеальной жидкости**

Примем во внимание уравнения Фрийдмана

$$8\pi G\rho = -\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2\right), \quad 8\pi Gp = 3H^2. \quad (91)$$

Положим, что пространственная скорость газа равна нулю $u^j = 0$. При этом $u^0 = 1$.

С учетом (1.34), разложим (1.29) до первого порядка по возмущению. В результате для правой части уравнения (3.40) для возмущений метрики получаем:

$$\begin{aligned} -16\pi GT_{\mu\nu}^{(1)} &= -16\pi G \left(T_{\mu\nu}^{\text{medium}(1)} + T_{\mu\nu}^{\text{EM}(1)} \right) = \\ &= 16\pi G\rho h_{\mu\nu} [1 - \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0] - 16\pi G\rho h_{00} \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - 16\pi GT_{\mu\nu}^{\text{EM}(1)} = \\ &= -2 \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 \right) h_{\mu\nu} [1 - \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0] - 6H^2 h_{00} \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - 16\pi GT_{\mu\nu}^{\text{EM}(1)}, \end{aligned} \quad (92)$$

где в последнем равенстве учтено (91), а скобкой с произведением символов Кронекера показано, что первое слагаемое не равно нулю только для пространственных компонент тензора $h_{\mu\nu}$.

Запишем левую часть уравнений Эйнштейна (3.40) для случая фоновой метрики ФЛРУ, пока что оставив первые два слагаемых без изменения. Используя (1.25, 3.56) и (92), получаем

$$\begin{aligned} D^2 h_{\mu\nu} - 2h^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\nu\beta} - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial^2 h - 3\frac{\ddot{a}}{a} h_{00} - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 \right) h_i^i \right] - \\ - 6H^2 h_{00} \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - 2 \left(\frac{2\ddot{a}}{a} + H^2 \right) h_{\mu\nu} [1 - \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0] = \\ = -2 \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 \right) h_{\mu\nu} [1 - \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0] - 6H^2 h_{00} \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - 16\pi GT_{\mu\nu}^{\text{EM}(1)}. \end{aligned} \quad (93)$$

Теперь можно сократить одинаковые слагаемые в левой и правой частях уравнения. Тогда

$$D^2 h_{\mu\nu} - 2h^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\nu\beta} - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial^2 h - 3\frac{\ddot{a}}{a} h_{00} - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 \right) h_i^i \right] = -16\pi GT_{\mu\nu}^{\text{EM}(1)}. \quad (94)$$