

норазмерных шаров с рассматриваемым многообразием. Для рассмотрения геодезических кругов в разработанный программный комплекс встроен ряд внутренних метрик на указанных поверхностях: метрика, порождаемая евклидовой метрикой трёхмерного пространства, метрики, порождаемые некоторыми функциями скорости (функциями, определяющими скорость распространения волны по поверхности многообразия и кратчайшее время движения/расстояние между точками).

В работе доказываются ряд теоретических утверждений, связанных с обоснованием сходимости предлагаемых методов. Описывается созданный программный комплекс, разработанный на языке C#. Приводятся результаты счёта ряда примеров, как модельного характера, так и возникших из реальных практических задач.

2. Актуальность темы исследования

Задачи оптимального покрытия и плотнейшей упаковки являются классическими проблемами вычислительной геометрии, комбинаторной оптимизации и дискретной математики, уходящими корнями к гипотезе Кеплера XVII века и к задаче о контактном числе шаров, решавшейся Ньютоном. Однако, если для плоскости и, отчасти, для сферы, существует обширный арсенал хорошо зарекомендовавших себя методов, и известны многие оптимальные конфигурации, то переход к более сложным поверхностям вращения: эллипсоидам, цилиндрам, конусам, торами и другим трёхмерным поверхностям сопряжен с принципиальными трудностями. Прежде всего, существенно усложняется метрика пространства. На таких поверхностях вычисление кратчайшего (геодезического) пути между точками требует учета их кривизны и зачастую не имеет аналитического решения, сводясь к трудоемким численным расчетам. Например, для трехосного эллипсоида требуется решение сложных систем нелинейных дифференциальных уравнений, что делает неприменимыми классические подходы, разработанные для случая высокосимметричных объектов, в частности, той же сферы или сферического сегмента.

Кроме того, актуальным является и учёт неевклидовых метрик, где расстояние между точками определяется не длиной кривой в метрике, порождённой евклидовой метрикой трёхмерного пространства, а некоторой иной внутренней метрикой, порождённой некоторой функцией скорости. Такие постановки адекватно отражают реальные физические процессы в анизотропных средах, например, распространение сигнала в атмосфере с переменной плотностью, или логистические задачи, где скорость перемещения

по территории зависит от положения объекта и/или направления его движения. До настоящего времени задачи покрытия и упаковки в таких метриках для поверхностей, отличных от сферы, оставались практически не изученными, а существующие методы оптимизации, такие как эвристические алгоритмы на диаграммах Вороного, линейное программирование или генетические алгоритмы, были разработаны в основном для сферического случая и не учитывали специфику более сложной геометрии.

Практическая востребованность результатов работы подтверждается широтой областей их потенциального применения: от проектирования технических систем наблюдения и передачи информации до настройки оборудования для радиотерапии.

3. Оценка научной новизны

Новизна теоретической части диссертации заключается в разработке оригинальных численных алгоритмов построения упаковок и покрытий поверхностей вращения. Центральными здесь являются авторские алгоритмы приближенного построения диаграмм Вороного на поверхностях с использованием оптико-геометрического подхода; эти алгоритмы являются новыми. К новизне предложенных алгоритмов также можно отнести возможность рассмотрения построений как в евклидовой метрике, так и в произвольной внутренней метрике, порождаемой известной функцией скорости.

Предложен новый метод построения начального приближения для покрытия и упаковки геодезических кругов в сферический сегмент, основанный на свойствах геодезического расстояния, и позволяющий существенно ускорить работу алгоритмов за счет использования известных плоских оптимальных покрытий и упаковок.

Новыми являются доказательства сходимости предложенных итерационных методов к (локальному) экстремуму в случае покрытия/упаковки на сфере или цилиндре, то есть получение в результате работы алгоритма локально оптимальных покрытия или упаковки.

Новизна работы подтверждается тем, что для большинства поверхностей вращения (кроме сферы) ранее не существовало общего подхода к решению задач покрытия и упаковки. Предложенные в исследовании методы впервые позволяют единообразно решать этот класс задач для различных типов поверхностей и метрик.

Новизна в части программного обеспечения заключается в создании комплекса программы «Покрытие и упаковки для поверхностей вращения» (ПУПоВ), реализующего предложенные численные алгоритмы.

4. Теоретическая и практическая значимость

Теоретическая значимость исследования заключается в развитии методов математического моделирования и численных методов для решения задач покрытия и упаковки на поверхностях вращения. Разработанные алгоритмы построения геодезических диаграмм Вороного и доказанные теоремы о свойствах расстояний вносят вклад в теорию оптимизации на многообразиях и вычислительную геометрию.

Практическая значимость подтверждается успешным применением разработанных методов и программных средств в различных областях. Так, разработанный комплекс программ был использован для оптимальной настройки оборудования гамма-ножа, что позволяет минимизировать площадь переоблучения здоровых тканей при лечении опухолей головного мозга. В области приборостроения решена задача проектирования сферической фокальной поверхности с большим количеством датчиков для создания систем цифровой съемки высокого разрешения, а также найдены оптимальные компоновки отражателей на поверхности геодезического спутника.

5. Обоснованность и достоверность

Обоснованность и достоверность результатов и выводов, представленных в диссертационной работе, подтверждается:

- сопоставлением с известными научными результатами. Полученные в работе решения для классических случаев (покрытие и упаковка на сфере) согласуются с оптимальными конфигурациями. В тех случаях, когда точные решения неизвестны, результаты согласуются с опубликованными данными других авторов, полученными с помощью альтернативных методов.
- правильным использованием математического аппарата. Математическая формализация задач в виде задач непрерывной оптимизации выполнена корректно. Строго доказаны теоремы и утверждения о свойствах геодезического расстояния и алгоритмов.
- применением апробированных методов исследования. В работе используются общепризнанные методы математического моделирования, непрерывной оптимизации, вычислительной геометрии (метод Вороного) и статистической обработки данных.
- результатами статистического анализа. Для оценки сходимости и точности алгоритмов проведена статистическая обработка результатов многочисленных вычислительных экспериментов. Показано, что отклонения полученных решений подчиняются определенному закону распределения

(гамма-распределению), что свидетельствует об обоснованности применения метода мультистарта.

6. Апробация и публикации

Основные результаты и научные положения диссертационного исследования были представлены и получили положительную оценку на 11 ведущих международных и всероссийских научных конференциях и семинарах, в их числе Международная молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений», Всероссийская конференция «Теория управления и математическое моделирование», Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций – MOTOR», Baikal Solver Workshop «Mathematical Optimization and Operations Research».

По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, отражающих основное содержание исследования, в том числе 4 статьи в рецензируемых научных журналах, входящих в Перечень ВАК по научной специальности 1.2.2., 4 статьи в изданиях, индексируемых в международных базах данных Web of Science (WoS) и Scopus. Получено 3 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ и сертификат о победе в первом этапе челлендж-конкурса по решению прикладных задач 23-й Международной конференции MOTOR-2024.

7. Соответствие Паспорту специальности

Диссертация полностью соответствует паспорту специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физико-математические науки):

Пункт 1 «*Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений*»: разработаны новые математические модели задач покрытия и упаковки для поверхностей вращения в виде задач непрерывной оптимизации, включая модели с использованием геодезических и неевклидовых расстояний.

Пункт 3 «*Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента*»: разработаны новые вычислительные алгоритмы, основанных на оптико-геометрическом подходе и построении геодезических диаграмм Вороного на поверхностях вращения; создан комплекс программ «ПУПоВ», реализующий предложенные алгоритмы; проведена серия вычислительных экспериментов, подтвердивших эффективность и ра-

ботоспособность разработанного программно-алгоритмического комплекса на тестовых и прикладных задачах.

Пункт 8 *«Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента»*: проведены исследования прикладных задач из различных областей, в ходе которых были построены предметные и математические модели, а также выполнены численные эксперименты. Результаты были интерпретированы с точки зрения предметной области.

Полученные результаты являются новыми одновременно для математического моделирования, численных методов и комплексов программ.

8. Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем – 176 страниц, включая 82 рисунка и 29 таблиц. Список литературы содержит 255 источников.

Введение содержит обоснование актуальности исследования, формулировку целей и задач работы, обоснование актуальности и научной новизны, теоретической и практической значимости. Приведены сведения об апробации полученных результатов и публикации автора по теме исследования.

Первая глава представляет собой весьма обширный аналитический обзор современных исследований в области задач покрытия и упаковки. Систематизированы подходы к решению этих задач на плоскости, сфере, а также и в многомерных пространствах. Кроме того, оценены возможности применения существующих методов для поверхностей вращения и обоснована необходимость разработки новых подходов. Подробно описаны оптико-геометрический подход и метод бильярдного моделирования, а также проанализирована возможность их адаптации для решения поставленных задач. Изложены и достаточно детально описаны классические алгоритмы, используемые автором для построения собственных вычислительных процедур.

Вторая глава является наиболее объемной и содержит основные теоретические результаты работы. В первом параграфе главы выполнена детальная математическая формализация задач о покрытии и упаковке для поверхностей вращения в форме задач непрерывной оптимизации. Рассмотрены различные варианты постановок задач для различных типов поверхностей (сфера, эллипсоид, цилиндр, конус) и покрываемых объектов (шары, сферические сегменты, геодезические круги). Второй параграф посвящен введению и анализу геодезического расстояния для каждой рассматриваемой поверхности. В третьем параграфе разработан метод выбора начального приближения

на основе специального проектирования сферического сегмента на плоскость, и доказаны теоремы о свойствах геодезического расстояния, лежащие в основе этого метода. Четвертый параграф содержит описание алгоритмов построения наилучшего покрытия на основе итеративного построения сферической диаграммы Вороного и отыскания чебышевских центров ее областей. В пятом параграфе предложены алгоритмы для решения задач, основанные на оптико-геометрическом подходе, включая общий алгоритм построения геодезической диаграммы Вороного, алгоритмы покрытия и упаковки областей диаграммы Вороного. Для случая сферы и цилиндра доказаны теоремы о сходимости предложенных численных процедур.

Третья глава посвящена программной реализации и тестированию разработанных методов. В первом параграфе представлена архитектура комплекса программ «ПУПоВ» (Покрытия и упаковки для поверхностей вращения). Второй параграф содержит результаты вычислительных экспериментов, проведенных на модельных примерах и позволивших оценить точность предложенных алгоритмов и работоспособность программного комплекса. Рассматривались задачи покрытия и упаковки для всех типов поверхностей с использованием как евклидовой, так и различных неевклидовых метрик. Проведена статистическая обработка результатов расчетов, показавшая, что отклонение найденного радиуса покрытия от минимального из известных подчиняется гамма-распределению. Результаты экспериментов демонстрируют, что предложенные алгоритмы находят решения, близкие к оптимальным, а в ряде случаев являющиеся оптимальными. Также приводятся результаты измерений быстродействия предложенных программных процедур.

Четвертая глава демонстрирует применение разработанного модельно-алгоритмического аппарата для решения практических задач: оптимизация конфигурации оборудования для лечения опухоли гамма-лучами, проектирование сферической фокальной поверхности, построение равноугольных жестких фреймов и расчет упаковки отражателей на поверхности геодезических спутников.

В заключении подведены основные научные и практические результаты исследования, а также сформулированы основные выводы.

Содержание автореферата полностью соответствует содержанию диссертации.

9. Рекомендации по использованию результатов диссертации

Считаем, что разработанные автором математические модели покрытий и упаковок для поверхностей вращения, предложенный численный метод, а также созданный комплекс программ «ПУПоВ» могут быть использованы в научно-исследовательских организациях, занимающихся задачами оптимального размещения объектов в трехмерном пространстве. К таким организациям относятся ИДСТУ СО РАН, ИММ УрО РАН, Центр оптимизации Ханойского политехнического университета и отдел оптимизации Института математики Вьетнамской академии наук и технологий.

Разработки уже нашли применение в медицине в компании «OnlifeCo» во Вьетнаме. Кроме того, их можно использовать в больницах и медицинских исследовательских центрах, где проводится лечение опухолей головного мозга с использованием гамма-лучей или оборудования «Гамма-нож», таких как ФГАУ «НМИЦ нейрохирургии им. ак. Н. Н. Бурденко», Российский научный центр радиологии и хирургических технологий (Россия), больницы К, «Новая надежда», Чо-Рэй (Вьетнам). Результаты и выводы, полученные в данной диссертации, также могут быть полезны в области цифровой обработки изображений. В частности, они могут быть применены в компаниях, занимающихся исследованиями в области обработки изображений дистанционного зондирования, таких как корпорация FPT Software (Вьетнам).

Кроме того, предложенные методы и алгоритмы могут быть использованы студентами различных специальностей при изучении курсов «Методы оптимизации», «Исследование операций» и «Системный анализ» в ИРНТУ (Иркутск, Россия), а также студентами других вузов в рамках аналогичных курсов. Во Вьетнаме они также могут быть применены в научных исследованиях и преподавании в Ханойском политехническом университете, Университете Дананга и Вьетнамском национальном университете в Ханое, где ведется обучение по предметам «Исследование операций» и «Теория кодирования».

10. Замечания

1. Название диссертационной работы кажется чересчур общим. Заявлено исследование поверхностей вращения, но рассматриваются только квадрики — сфера, цилиндр, конус, эллипсоид вращения. Также словосочетание «поверхность вращения» регулярно встречается в названиях разделов (например, раздел 2.4), где явно рассматриваются конкретные поверхности (сфера и цилиндр, если говорить о разделе 2.4).

2. В главе 2 на стр. 41-42 приводятся некоторые базовые определения, которые тоже страдают некоторой ненужной общностью, а кроме того являются не вполне аккуратными:

- написано «... метрическое пространство X ...», хотя рассматривается только трёхмерное евклидово пространство;
- объект «поверхность вращения» упоминается без определения;
- не очень понятно ограничение β сверху на значение f , поскольку кажется, что большие значения f ничему не противоречат;
- верно ли, что минимум достигается в формулах (2.1) и (2.2)?
- в (2.2) имеется функциональная зависимость $z(x, y)$, однако, верно ли, что рассматриваемая поверхность может быть описана функциональной зависимостью $z = z(x, y)$?

3. Регулярно употребляется выражение «равные объекты» в отношении тех *геодезических* кругов, которые упаковываются или которыми покрывается поверхность (например, на стр. 43, абзац после формулы (2.3); на стр. 44 в постановке задач П1, П2, П3; на стр. 45 после формулы (2.10); на стр. 46 в постановке задачи У3; стр. 66 перед формулой (2.54); возможно, где-то ещё). Однако, что значит слово «равные» в случае неевклидовой внутренней метрики на рассматриваемом многообразии?

4. В обзорной главе 1 на стр. 36-37 приводится описание алгоритмов Wave3D и WaveSurface. По всей видимости, эти алгоритмы не являются авторскими, однако отсутствует ссылка на источники.

5. Разделы 2.2.2 и 2.2.3 на стр. 47 и 48. Выписываются явные формулы (2.24) и (2.25) геодезического расстояния на поверхности цилиндра и конуса, получаемые через рассмотрение прямолинейного пути между этими точка на развёртке боковой поверхности этих фигур. Однако, для получения развёртки разрез боковой поверхности производится по нулевому «меридиану» (образующей с нулевым углом долготы) вне зависимости от взаимного расположения точек и этого меридиана. В итоге, если точки расположены близко друг от друга, но по разные стороны этого меридиана,

то на развёртке они будут далеки и формулы дадут неправильное значение расстояния.

6. Раздел 2.2.4, стр. 50, первая выключная формула. Эта формула определяет длину некоторой кривой μ двумя точками на поверхности эллипсоида вращения. Предполагается, что функция μ описывает широту точки на рассматриваемой кривой в зависимости от долготы θ . Однако, не очень понятно, как применяется данная формула к кривым, где зависимость широты от долготы не является функциональной, например, для кривых, проходящих через полюс эллипсоида.

7. В разделе 2.4, где фактически доказывается сходимость предложенного алгоритма построения упаковки геодезических шаров на поверхности сферы и цилиндра, внизу стр. 66 вводится обозначение модуля $|\cdot|$ для длины отрезка, по всей видимости, как евклидовой длины в трёхмерном пространстве; по крайней мере, объекты, которые рассматриваются внизу стр. 66 являются шаром и сферой в трёхмерном пространстве. Однако тогда не очень понятным становится определение диаграммы Вороного, которое даётся в середине стр. 67. Так, как дано соответствующее описание, мы имеем не диаграмму Вороного на поверхности M (в терминах геодезического расстояния на поверхности M), а пересечение с поверхностью M диаграммы Вороного в трёхмерном пространстве, построенной для набора точек W . В случае произвольной поверхности M построенные области V_i могут существенно отличаться от областей Дирихле для диаграммы Вороного, построенной в терминах геодезического расстояния на поверхности M . Верно ли такое понимание введённой диаграммы Вороного? Подходит ли она для приводимой ниже формулировки алгоритма 3? Возможно, ответы на эти вопросы — да, поскольку дальнейшие рассуждения проводятся на поверхности сферы и цилиндра, которые имеют достаточно регулярное строение. Однако, внизу стр. 74 в описании вычислительного алгоритма построение областей Дирихле V_i ведётся уже в терминах геодезического расстояния ρ . И далее на стр. 75 описание алгоритма 4 привлекает алгоритм WaveSurface, который ориентирован на использование геодезического расстояния на рассматриваемой поверхности. Таким образом, не очень понятно, каким образом доказательства в разделе 2.4 связаны с обоснованием сходимости алгоритмов, изложенных в разделе 2.5.

8. Алгоритмы, представленные в диссертации, разработаны и протестированы для поверхностей вращения. Не в полной мере ясно, насколько предложенные методы будут применимы к работе с поверхностями более сложной формы, например, с поверхностью, полученной вращением

синусоиды, то есть с поверхностью с впадинами и выступами, характерные для реальных биологических объектов.

9. В работе предложен метод выбора начального приближения, основанный на проекции сферического сегмента на плоскость, который применяется к задаче покрытия и упаковки геодезических кругов в сферический сегмент. Однако в диссертации не обсуждается возможность подобного построения начального приближения при построении упаковки/покрытия на других рассмотренных поверхностях: цилиндре, конусе, эллипсоиде. В предложенных алгоритмах центры областей начальной диаграммы Вороного выбираются случайным образом на поверхности.

10. В главе 3 приведены примеры работы алгоритма с большим количеством объектов. Однако в диссертации не указаны предельные возможности алгоритма относительно максимального количества покрывающих или упаковываемых объектов, а также не проанализировано, как изменение их количества влияет на качество покрытия/упаковки. Также не приведены объёмы памяти, используемые программой при вычислениях, проводимых в приведённых примерах.

11. В тексте диссертации утверждается, что комплекс программ «ПУПоВ» позволяет работать с различными неевклидовыми метриками. Однако анализ представленных экранных форм интерфейса показывает, что пользователю доступен только выбор из ограниченного набора предопределённых метрик. В работе отсутствует описание механизма, позволяющего пользователю задавать свои собственные метрики.

12. В описании разработанного программного комплекса «ПУПоВ» не указано, в каком режиме запускается счёт: в синхронном или в асинхронном. При ощутимых временах счёта (минуты, как следует из описания примеров) синхронный запуск счёта приводит к «замораживанию» интерфейса программы, что может негативно восприниматься пользователем. Хотя асинхронный запуск вычислительного потока делает структуру комплекса более сложной

13. В примерах не приведены шаги $s\alpha$ и $s\beta$ сеток, накладываются на поверхность для приближенного построения областей Дирихле диаграмм Вороного (мелкость шагов определяет размеры сеток и время счёта).

Также было обнаружено некоторое количество опечаток и стилистических неточностей, которые, возможно, следует исправить в авторском варианте текста (в опубликованном варианте работы ничего исправить, очевидно, уже не получится):

1. Стр. 31, 4 строка сверху: вместо «этой точкой» должно быть «эта точка».
2. Стр. 31, 6 строка сверху, «... находятся ближе к сайту ...»: непонятно слово «сайт» в данном контексте.
3. Стр. 37, 3 строка снизу: разделить пробелом «... метода были ...».
4. Стр. 63, подпись к рис. 2.16: дублируется 5 в номере утверждения.
5. Стр. 68, строка после формулы (2.60): потеряны скобки вокруг ссылки на формулу (2.60).
6. Стр. 71, формулировка леммы 3: пропущен мягкий знак в слове «пусть».

11. Заключение

Указанные замечания относятся, скорее, не к содержательной части работы, а к представлению полученных результатов, кроме, разве что, замечания, относящегося к применимости утверждений о сходимости предложенных алгоритмов. Как следствие, эти замечания не снижают научной значимости работы и не влияют на ее общую оценку. Диссертационная работа «Математические модели и алгоритмы решения задач о покрытии и упаковке для поверхностей вращения» представляет собой законченную научную работу на актуальную тему и содержащую новые научные результаты.

Диссертационная работа удовлетворяет требованиям ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, сформулированным в пп. 9-14 Положения о порядке присуждения ученых степеней (постановление Правительства Российской Федерации № 842 от 24 сентября 2013 г., ред. от 16.10.2024).

Результаты исследований апробированы на российских и международных конференциях. Основные результаты диссертационной работы в достаточной степени отражены в опубликованных автором научных трудах, в том числе, в рецензируемых научных изданиях, входящих в соответствующий Перечень. Уровень и объем публикаций соответствует требованиям п. 11 и п. 13 Положения.

По результатам рассмотрения диссертации не обнаружены какие-либо факты использования заимствованных материалов без ссылки на источники (п. 14 Положения).

Автор Нгуен Дык Минь заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физико-математические науки).

