


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ИРКУТСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Нгуен Дык Минь

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О  
ПОКРЫТИИ И УПАКОВКЕ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Научная специальность 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, профессор  
Козаков Александр Леонидович

# Оглавление

Введение . . . . .	5
Глава 1: Обзор исследований задач о покрытии и упаковке . . . . .	14
1.1 Прикладные задачи, приводящие к задачам о покрытии и упаковке . . . . .	14
1.2 Обзор исследований задачи о покрытии . . . . .	17
1.2.1 Задача о покрытии на плоскости . . . . .	17
1.2.2 Задача о покрытии в $E^d, d \geq 3$ . . . . .	19
1.3 Обзор исследований задачи об упаковке. . . . .	23
1.3.1 Задача об упаковке на плоскости . . . . .	23
1.3.2 Задача об упаковке в $E^d, d \geq 3$ . . . . .	23
1.4 Численные методы решения задач покрытия и упаковки . . . . .	26
1.4.1 Метод «Bottom-Left» . . . . .	27
1.4.2 Метод «Итерационный локальный поиск» . . . . .	27
1.4.3 Диаграмма Вороного . . . . .	29
1.4.4 Оптико-геометрический подход. . . . .	33
1.4.5 Бильярдное моделирование . . . . .	37
1.5 Вывод по главе 1 . . . . .	39
Глава 2: Математические модели покрытий и упаковок на поверхностях вращения . . . . .	40
2.1 Математическая формализация . . . . .	40
2.2 Геодезическое расстояние на поверхности . . . . .	46
2.2.1 Геодезическое расстояние на сфере . . . . .	46
2.2.2 Геодезическое расстояние на боковой поверхности цилиндра. . . . .	47
2.2.3 Геодезическое расстояние на боковой поверхности конуса . . . . .	48
2.2.4 Геодезическое расстояние на эллипсоиде . . . . .	49

<b>2.3 Свойства геодезического расстояния на сфере. . . . .</b>	<b>52</b>
2.3.1 Проектирование сферического сегмента на плоскость. . . . .	52
2.3.2 Упаковка геодезических кругов в сферический сегмент. . . . .	55
2.3.3 Покрытие сферических сегментов геодезическими кругами . . . . .	58
<b>2.4 Геометрические методы для построения покрытия на поверхности вра-</b>	
<b>щения . . . . .</b>	<b>66</b>
2.4.1 Для сферы. . . . .	68
2.4.2 Для боковой поверхности цилиндра. . . . .	71
<b>2.5 Вычислительные алгоритмы решения задач покрытия и упаковки . .</b>	<b>74</b>
2.5.1 О методе решения задач о покрытии и об упаковке. . . . .	74
2.5.2 Задача о покрытии и об упаковке на сфере или сферическом сегменте . .	74
2.5.3 Задача о покрытии и упаковке на поверхности цилиндра и конуса . . . .	79
2.5.4 Задача о покрытии и упаковке на эллипсоиде . . . . .	83
<b>2.6 Выводы по главе 2. . . . .</b>	<b>88</b>
<b>Глава 3: Описание и комплекса программ и решение тестовых задач . . .</b>	<b>90</b>
<b>3.1 Описание комплекса программ . . . . .</b>	<b>90</b>
3.1.1 Общая структура комплекса программ . . . . .	91
3.1.2 Обработка данных в комплексе программ . . . . .	93
<b>3.2 Вычислительные эксперименты . . . . .</b>	<b>97</b>
3.2.1 Покрытие сферы равными сферическими сегментами . . . . .	98
3.2.2 Упаковка равных сферических сегментов на сфере. . . . .	102
3.2.3 Упаковка равных геодезических кругов в сферический сегмент . . . . .	104
3.2.4 Покрытие сферического сегмента равными геодезическими кругами . . .	106
3.2.5 Покрытие поверхности цилиндра и конуса равными шарами . . . . .	109
3.2.6 Упаковка равных шаров на боковой поверхности цилиндра и конуса . . .	114
3.2.7 Покрытие эллипсоида равными шарами. . . . .	118
3.2.8 Упаковка равных шаров на эллипсоиде . . . . .	121
<b>3.3 Выводы по главе 3. . . . .</b>	<b>123</b>
<b>Глава 4: Решение прикладных задач . . . . .</b>	<b>124</b>
<b>4.1 Применение покрытия эллипсоида в медицине при настройке генера-</b>	
<b>торов гамма-излучения . . . . .</b>	<b>124</b>
4.1.1 Предметное описание объекта исследования . . . . .	124

4.1.2	Математическая модель . . . . .	126
4.1.3	Вычислительный эксперимент . . . . .	127
<b>4.2</b>	<b>Применение упаковки сферического сегмента для проектирования сферической фокальной поверхности . . . . .</b>	<b>133</b>
4.2.1	Предметное описание объекта исследования . . . . .	133
4.2.2	Математическая модель . . . . .	134
4.2.3	Вычислительный эксперимент . . . . .	136
<b>4.3</b>	<b>Применение упаковки сферы для построения равноугольных жестких фреймов и сферических кодов в пространстве <math>E^3</math> . . . . .</b>	<b>138</b>
4.3.1	Предметное описание объекта исследования . . . . .	138
4.3.2	Математическая модель . . . . .	140
4.3.3	Вычислительный эксперимент . . . . .	141
<b>4.4</b>	<b>Применение упаковки полусферы и сферы для проектирования геодезического спутника. . . . .</b>	<b>147</b>
4.4.1	Предметное описание объекта исследования . . . . .	147
4.4.2	Математическая модель . . . . .	149
4.4.3	Вычислительный эксперимент . . . . .	150
<b>4.5</b>	<b>Выводы по главе 4. . . . .</b>	<b>153</b>
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>154</b>
	<b>Приложение А: Свидетельства . . . . .</b>	<b>155</b>
	<b>Приложение Б: Акт . . . . .</b>	<b>159</b>
	<b>Литература . . . . .</b>	<b>161</b>

## Введение

**Актуальность исследования:** Исследование, анализ и эффективное распределение ресурсов на определенной территории является одной из современных задач оптимизации, которая с математической точки зрения есть задача размещения – поиск оптимального расположения объектов в заданном множестве. Двумя наиболее распространенными классами задач размещения являются задачи построения тончайших покрытий и плотнейших упаковок. Построение покрытия заключается в размещении геометрических объектов в ограниченном множестве таким образом, чтобы множество целиком лежало в объединении этих объектов. В задаче об упаковке требуется разместить объекты так, чтобы они располагались внутри множества, не пересекаясь друг с другом. Важным показателем для оценки качества размещения является плотность – как отношение суммы площадей размещаемых объектов к площади множества. Качество покрытия тем лучше, чем плотность меньше, а для упаковки, наоборот – чем больше плотность, тем лучше.

Задачи покрытия и упаковки в некотором смысле являются взаимно обратными и имеют долгую историю исследований, которая началась в XVII веке с гипотезы Кеплера [159]. В дальнейшем такие задачи рассматривали Л. Ф. Тот [238, 239], Дж. Б. М. Мелиссен [182–185], К. Дж. Нурмела [195–197], Ш. И. Галиев [20, 21], Ю. Г. Стоян [225, 226], Т. Тарнай [230–232], Р. Кершнер [160], В. С. Брусов [11], З. Гаспар [125, 126], Т. С. Хейлз [136, 137] и многие другие. Первоначально исследования были сосредоточены на решении задач покрытия и упаковки для простых геометрических объектов: круг и правильные многоугольники, в качестве покрывающих или упаковываемых объектов использовались равные круги. При малом числе кругов оптимальные покрытия найдены для квадрата, круга и равностороннего треугольника в работах Г. Ф. Тота [241, 242], Дж. Б. М. Мелиссена [182, 183, 185], А. Хепшес [139], К. Дж. Нурмелы [195] и др. В случае большого числа кругов решения строились приближенно, применялись эвристический метод Вороного (В. С. Брусов [11], Ш. И. Галиев [20, 21]), методы линейного программирования (М. Кардей [102], М. Касацца [103]), генетические алгоритмы (А. В. Подлазова [58], А. Бортфельдт [99]), методы непрерывной оптимизации (А. Л. Казаков [34, 35], К. Дж. Нурмела [196]) и другие.

В дальнейшем исследования и методы решения задач покрытия и упаковки были расширены до трехмерного пространства и выше. В работах Г. Ф. Тота [240, 242], Ю. Г. Стояна [63, 226], К. А. Роджерса [209], И. Думера [116–118], Дж. Х. Конвея [107],

А. Бездека [88, 89] и др. рассматривались задачи покрытия равными шарами таких трехмерных поверхностей, как сфера и куб. Результаты исследования нашли практическое применение в области цифровой обработки данных [107] и проектирования спутниковых сетей [54–56]. В настоящее время активно изучается задача покрытия эллипсоида равными шарами, которая, в частности, возникает в медицине при настройке аппаратуры для лечения опухолей гамма-лучами [113, 174].

Задача упаковки равных шаров на сфере, аналогичная известной задаче Таммеса, также активно изучалась в работах К. Берецкого [86], Л. Ф. Тота [64, 237], К. Шутте [214], Л. Данцера [112], Р. М. Робинсона [206], О. Р. Мусина [190–192], Н. Дж. А. Слоана [218, 219], Т. Тарнаи [230, 231] и др. Некоторые полученные результаты применялись при построении сферических кодов в теории кодирования и передачи информации на большие расстояния [107]. Для решения таких задач покрытия и упаковки применяются метод итеративной оптимизации (М. Маккей [180], Б. Клэр [106]), метод с наименьшей плотностью (И. Думер [117, 118], К. А. Роджерс [209]), подход к минимизации потенциальной функции (Э. Г. Биргин [92, 93], А. Гроссо [133]) и др. Отметим, что данные методы применимы только для решения задачи покрытия и упаковки для сферы и куба. Для поверхностей вращения, таких как эллипсоиды, конусы и цилиндры, не существует специального метода решения.

Наконец, в технологии цифровой съемки на больших расстояниях проектируется сферическая фокальная поверхность [110]. Отсюда возникает задача плотнейшей упаковки в сферический сегмент специальных объектов – геодезических кругов. До настоящего времени изучались в двумерном пространстве в немногих работах И. Вигана [247], Г. Рабанки [205], М. Г. Боргельт [98] и др. Задача упаковки геодезических кругов для поверхностей вращения изучена мало. Здесь обычно применяются сферические упаковки равных шаров (Х. С. Сон [222]), однако этот метод не гарантирует получение оптимальных упаковок и требует больших затрат процессорного времени.

При решении ряда задач покрытия и упаковки, возникающих в приложениях, например, в логистике [12, 30, 32], необходимо учитывать неравномерную скорость перемещения по поверхности, что, в свою очередь, приводит к необходимости введения специальной неевклидовой метрики, в которой мерой удаленности двух точек служит наименьшее время перемещения между ними. Задача о покрытии и упаковке с неевклидовыми метриками относительно мало изучены, отметим в этой связи работы А. Л. Казакова [34, 35, 153], А. А. Лемперт [171, 172], П. Д. Лебедева [51], однако поверхности вращения, кроме сферы (в евклидовом пространстве), в них не рассматриваются.

Таким образом, задача построения оптимальных покрытий и упаковок для поверхностей вращения, в том числе, с неевклидовой метрикой, равными шарами или геодезическими кругами является актуальной как с точки зрения вычислительной математики, так и математического моделирования.

**Объект и предмет исследования.** Объект исследования: поверхности вращения, для которых необходимо определить оптимальное расположение покрывающих и упаковываемых фигур – шаров или геодезических кругов. Предмет исследования: математические модели размещения покрывающих и упаковываемых фигур на поверхностях вращения, представленные в виде задач непрерывной оптимизации и численные методы их решения.

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является разработка модельно-алгоритмического инструментария решения задач размещения фигур с предопределенными свойствами в трехмерном пространстве на основе построения покрытий и упаковок для поверхностей вращения, и его применение для решения прикладных задач. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Выполнить математическую формализацию задач о покрытии и упаковке для поверхностей вращения в форме задач непрерывной оптимизации.
2. Доказать теорему и утверждения о свойствах геодезического расстояния, на основе чего разработать метод построения начального приближения для решения задач покрытия и упаковки геодезических кругов в сферический сегмент.
3. Разработать вычислительные алгоритмы для решения задачи оптимизации на основе оптико-геометрического подхода и диаграммы Вороного и доказать для них теоремы о релаксационности.
4. Создать комплекс программ, реализующий предложенные численные алгоритмы. Провести вычислительные эксперименты, чтобы проверить работоспособность алгоритма и убедиться в корректности вычислений.
5. Идентифицировать модели для конкретных прикладных задач из области медицины и цифровой обработки. Исследовать эти модели, используя созданный комплекс программ.

**Методы исследования.** Исследования выполнены с использованием методов математического моделирования, непрерывной оптимизации, теории аппроксимации и математической статистики. Для реализации модели используются методы вычислительной геометрии, численные методы решения дифференциальных уравнений и бильярдное моделирование. Оценка результатов расчетов проводилась с использованием методов статистической обработки данных.

**Научная новизна** исследования раскрывается в следующих аспектах:

1. Построены математические модели покрытия и упаковки равными шарами и геодезическими кругами для поверхностей вращения. Впервые для решения рассматриваемых задач были предложены модели, допускающие использование специальной метрики, характеризующей свойства моделируемого объекта.

2. Впервые предложены численные методы для построения геодезической диаграммы Вороного на поверхностях вращения с помощью оптико-геометрического подхода, учитывающие различные скорости световой волны, для которых доказаны теоремы о релаксационности.

3. На основе оптико-геометрического подхода были созданы новые численные алгоритмы, позволяющие решать задачи о покрытии и упаковке для поверхностей вращения. В отличие от известных методов, эти алгоритмы могут работать не только на сфере, но и на других поверхностях вращения.

4. Доказаны строгие математические утверждения о свойствах геодезического расстояния, на основе которых разработан метод построения начального приближения для задач покрытия и упаковки геодезических кругов в сферический сегмент.

5. Разработан новый комплекс программ, который использует предложенные численные алгоритмы и позволяет получать решения различных прикладных задач.

**Достоверность и обоснованность.** Достоверность подтверждается сопоставлением с известными научными результатами. Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными и не противоречат результатам других исследователей. В предложенном методе используются корректные математические преобразования и строго доказанные утверждения.

**Теоретическая значимость** заключается в том, что полученные результаты способствуют развитию методов математического моделирования, численных методов оптимизации, а также вносят вклад в развитие численных методов для решения различных задач покрытия и упаковки. Способ введения равномерной сетки для построения диаграммы Вороного на поверхностях вращения вносит вклад в развитие теории аппроксимации и вычислительной геометрии. Доказанные утверждения о свойствах геодезического расстояния вносят вклад в развитие теории оптимизации, а утверждения о свойствах алгоритмов – вычислительной математики.

**Практическая значимость** состоит в том, что разработанный комплекс программ позволяет построить решение задачи настройки гамма-излучения при лечении опухоли головного мозга и задачи проектирования сферической фокальной поверхности с большим

количеством датчиков. Кроме того, предложенные численные алгоритмы могут быть использованы для решения других прикладных задач, таких как создание сферических кодов, проектирование систем видеонаблюдения и физической защиты.

Результаты диссертационного исследования могут использоваться студентами различных специальностей при изучении курсов «Методы оптимизации», «Исследование операций», «Системный анализ».

### **Апробация результатов исследования**

Основные результаты диссертационного исследования были представлены на следующих научных конференциях:

X Международный семинар «Критические инфраструктуры в цифровом мире IWCI–2023» (Иркутская область, п. Большое Голоустное, 2023);

Международная (55-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (г. Екатеринбург, 2024);

XI Международный семинар «Критические инфраструктуры в цифровом мире IWCI–2024» (Иркутская область, п. Большое Голоустное, 2024);

XXIII Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций MOTOR–2024» (г. Омск, 2024);

6-я международная конференция «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения DYSC–2024» (г. Иркутск, 2024);

Baikal Solver Workshop 2024 «Mathematical Optimization and Operations Research» (г. Красноярск, 2024);

Международная (57-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (г. Екатеринбург, 2025);

Всероссийская конференция «Теория управления и математическое моделирование» (СТММ 2025) (г. Ижевск, 2025);

XXIV Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций MOTOR–2025» (г. Новосибирск, 2025).

Результаты диссертационного исследования опубликованы в 16 научных работах, из них 4 статьи в журналах, входящих в Перечень ВАК по профилю 1.2.2; 4 статьи в изданиях, индексируемых в международных базах WoS и Scopus. Получены 3 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ и 1 сертификат о победе в первом этапе челлендж-конкурса по решению прикладных задач 23-й Международной конференции MOTOR-2024.

Основные результаты исследования опубликованы в следующих работах.

**Издания, входящие в Перечень ВАК РФ:**

1. Нгуен Д. М. О задаче покрытия сферических фигур равными сферическими сегментами / А. А. Лемперт, П. Д. Лебедев, Д. М. Нгуен // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2024. – Т. 30, No. 1. – С. 142–155. DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-142-155.

2. Nguyen D. M. On Covering of Cylindrical and Conical Surfaces with Equal Balls / A. L. Kazakov, A. A. Lempert, D. M. Nguyen // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. – 2024. – Vol. 48. – P. 34–48. DOI: 10.26516/1997-7670.2024.48.34.

3. Нгуен Д. М. О методе упаковки геодезических кругов в сферический сегмент с использованием плоской проекции / А. Л. Казаков, А. А. Лемперт, Д. М. Нгуен // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2025. – Т. 65. – С. 36–53. DOI: 10.35634/2226-3594-2025-65-03.

4. Нгуен Д. М. Покрытие эллипсоида равными шарами / Д. М. Нгуен // System Analysis & Mathematical Modeling. – 2025. – Т. 7, No. 2. – С. 274–289. DOI: 10.17150/2713-1734.2025.7(2).274-289.

**Издания, индексируемые в базе данных WoS:**

5. Nguyen D. M. On the problem of the densest packing of spherical segments into a sphere / D. T. Vu, T. B. Phung, A. A. Lempert, D. M. Nguyen // Management and Administrative Professional Review. – 2023. – Vol. 14, Iss. 11. – P. 19307–19323. DOI: 10.7769/gesec.v

**Издания, индексируемые в базе РИНЦ:**

6. Nguyen D. M. Numerical Algorithm for Covering Surfaces of Revolution by Balls with Equal Radii / Nguyen D. M. // Modern Technologies and Scientific and Technological Progress, 2024. Vol. 2024, № 1. P. 156–158. DOI: 10.36629/2686-9896-2024-1-156-158.

7. Нгуен Д. М. О покрытии поверхностей вращения равными шарами / А. Л. Казаков, А. А. Лемперт, Д. М. Нгуен // Современные проблемы математики и ее приложений. Тезисы докладов Международной молодежной школы-конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2024. – С. 48-49.

8. Нгуен Д. М. О построении покрытия эллипсоида равными шарами / А. Л. Казаков, А. А. Лемперт, Д. М. Нгуен // Материалы 6-й Международной конференции «Динамические системы и компьютерные науки: Теория и приложения – DYSC 2024». Иркутск: ИГУ, 2024. – P. 111–113.

9. Нгуен Д. М. О методе упаковки геодезических кругов в сферический сегмент с использованием плоской проекции / Д. М. Нгуен // Современные проблемы математики

и ее приложений: Тезисы докладов Международной молодежной школы-конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2025.

**Прочие издания:**

10. Nguyen D. M. On the problem of covering three-dimensional bodies by spherical segments / A. L. Kazakov, D. M. Nguyen // Proceeding of International Workshop «Critical Infrastructures in the Digital World IWCI 2023». Irkutsk: ИСЭМ СО РАН, 2023. – P. 41.

11. Nguyen D. M. Construction of covering of surfaces of revolution with geodesic circles / A. L. Kazakov, D. M. Nguyen // Proceeding of International Workshop «Critical Infrastructures in the Digital World IWCI 2024». Irkutsk: ИСЭМ СО РАН, 2024. – P. 17.

12. Nguyen D. M. A heuristic algorithm for the problem of geodesic circles packing / A. A. Lempert, A. L. Kazakov, D. M. Nguyen // Сборник тезисов XXIII Международной конференции «Теория математической оптимизации и исследование операций – MOTOR 2024». Омск: ОмГУ, 2024. – С. 61–62.

13. Nguyen D. M. On Suboptimal Balls Packing in a Multidimensional Space / A. A. Lempert, D. M. Nguyen // Materials «Baikal Solver Workshop 2024 – Mathematical Optimization and Operations Research». Krasnoyarsk, 2024.

**Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ:**

14. Нгуен Д. М. Построение покрытий трехмерных поверхностей шарами / Нгуен Д. М., А. А. Лемперт, А. Л. Казаков // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. № 2024613801 от 15.02.2024. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности. — 2024.

15. Нгуен Д. М. Построение покрытий эллипсоида равными шарами / Нгуен Д. М., А. Л. Казаков, А. А. Лемперт // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. № 2025617354 от 25.03.2025. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности. — 2025.

16. Нгуен Д. М. Построение упаковки равных гиперкругов на гиперсфере / Нгуен Д. М., А. А. Лемперт, А. Л. Казаков // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. № 2025617890 от 31.03.2024. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности. — 2025.

**Тематика работы** соответствует следующим пунктам паспорта специальности 1.2.2:

- пункт 1. «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений» – в части математической формализации задачи о покрытии равными объектами поверхностей вращения и задачи об упаковке равных объектов на поверхностях вращения;

- пункт 3. «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента» – в части разработки и реализации численных алгоритмов в виде комплекса программ «Покрытия и упаковки для поверхностей вращения»;

- пункт 8. «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента» – в части решения модельных и прикладных задач из области медицины и цифровой обработки изображений.

**Личный вклад.** Все результаты, представленные в данной диссертации, получены лично соискателем. Постановки задач о покрытии и об упаковке для поверхностей вращения выполнены А. Л. Казаковым. В совместных работах А. А. Лемперт принадлежит алгоритм распространения волны в оптически неоднородной среде, П. Д. Лебедеву – геометрический метод построения покрытия и упаковки. В комплексе программ «Покрытия и упаковки для поверхностей вращения» архитектура комплекса программ разработана А. Л. Казаковым, интерфейс разработан А. А. Лемперт, разработка алгоритма поддержки и программная реализация всех модулей принадлежит автору диссертации.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 255 наименований. Объем диссертации – 176 страницы, включая 82 рисунка и 29 таблицы.

Кратко изложим содержание основных разделов диссертационной работы:

**В главе 1** представлен обзор исследований, посвященных задачам покрытия и упаковки на плоскости, сфере и для выпуклых объектов. Описаны наиболее известные и эффективные численные методы решения задач покрытия и упаковки на плоскости и сфере. Приведено описание оптико-геометрического подхода и метода бильярдного моделирования, а также обсуждена возможность их применения для решения задач покрытия и упаковки для поверхностей вращения.

**В главе 2** выполнена математическая формализация задач о покрытии и упаковке для поверхностей вращения в форме задач непрерывной оптимизации. Обсуждаются различные варианты постановок задач, которые приводят к необходимости применения различных типов и способов модификации математической модели. Рассматриваемые поверхности включают сферу, боковую поверхность цилиндра, боковую поверхность конуса, эллипсоид и их сегменты, в том числе в неевклидовой метрике. Для решения задач разработаны новые численные алгоритмы на основе оптико-геометрического подхода и диаграммы Вороного. В данной главе также доказаны строгие математические утверждения

о свойствах геодезического расстояния, на основе которых разработан метод построения начального приближения для задач покрытия и упаковки геодезических кругов в сферический сегмент, и о релаксационности предложенных алгоритмов.

**В главе 3** представлен комплекс программ «ПУПоВ» (Покрытия и упаковки для поверхностей вращения). Комплекс разработан на языке программирования C# в среде Visual Studio 2022 и включает в себя четыре основных модуля, соответствующих четырем поверхностям: сфера, эллипсоид, боковая поверхность цилиндра и боковая поверхность конуса. Каждый модуль содержит функции для ввода данных, изменения параметров алгоритма и сохранения результатов. В данной главе также представлены примеры, позволяющие оценить точность предложенных алгоритмов и работоспособность разработанного комплекса программ. При исследовании использовались как евклидова, так и различные неевклидовы метрики.

**В главе 4** представлены решения 4 прикладных задач с использованием комплекса программ «ПУПоВ»: задача о настройке оборудования для лечения опухолей головного мозга гамма-излучением; задача размещения датчиков на сферической фокальной поверхности; задача построения равноугольных жестких фреймов, а также задача размещения отражателей на поверхности геодезического лазерного спутника. Для всех задач представлены предметные и математические модели, выполнено численное решение. По результатам расчетов сделаны выводы и высказаны содержательные рекомендации.

**В заключении** сформулированы выводы по диссертационной работе.

## Глава 1: Обзор исследований задач о покрытии и упаковке

Исследование, анализ и эффективное распределение ресурсов и объектов на определенной территории является одной из современных задач оптимизации, имеющей важное прикладное значение. С математической точки зрения необходимо решить задачу размещения, т.е. поиск оптимального расположения объектов в заданном множестве. Двумя наиболее распространенными классами задач размещения являются задачи построения тончайших покрытий и плотнейших упаковок.

Построение *покрытия* заключается в размещении геометрических объектов в ограниченном множестве таким образом, чтобы множество целиком лежало в объединении этих объектов.

В задаче об *упаковке* требуется разместить объекты так, чтобы они располагались внутри множества не пересекаясь друг с другом.

### 1.1 Прикладные задачи, приводящие к задачам о покрытии и упаковке

Задача об упаковке имеет давнюю историю, восходящую к задаче укладки пушечных ядер так, чтобы они занимали как можно меньше места. При ее решении И. Кеплер [159] в 1611 году выдвинул гипотезу о том, что способ расположения сфер одинакового размера в форме пирамиды обеспечивает самую высокую среднюю плотность заполнения пространства среди всех возможных вариантов, которая составляет  $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$  [159] (см. рис. 1.1). Заметим, что строгое математическое доказательство гипотезы было выполнено профессором Томасом Хейлсом и его коллегами лишь в 2017 году с помощью компьютерной программы под названием Flyspeck [135, 136].

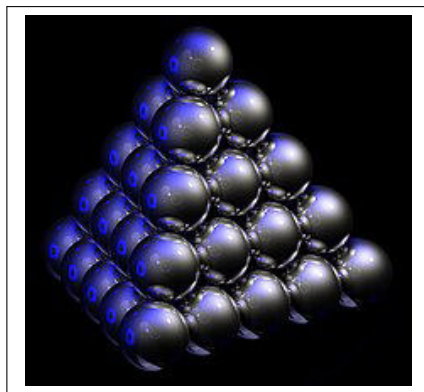


Рис. 1.1: Гранецентрированная кубическая упаковка.

Наиболее очевидным практическим применением задачи упаковки в промышлен-

ности является задача раскроя листового материала. Цель этой задачи – разрезать лист материала на части одинакового или заданного размера, либо вырезать определенные фигуры, как простой формы – круги, квадраты, треугольники, так и более сложной [104,140].

В работах [91,109,114] рассматривается задача упаковки, которая связана с загрузкой контейнеров. Если нужно разместить цилиндры в кубическом контейнере, учитывая круглое сечение цилиндров и квадратное – контейнера, эта задача сводится к задаче упаковки равных кругов в квадрат. Нелинейная оптимизационная модель, позволяющая определить, существует ли способ расположить  $N$  кругов заданного радиуса  $r$  в прямоугольник заданного размера  $A \times B$ , предложена в работе [91]. Задача размещения кабелей с круговым сечением в трубе большего размера приводит к задаче упаковки кругов в круг [104,249], также задача упаковки возникает при размещении приборов на приборной панели [104]. Кроме того, задача упаковки находит свое применение при проектировании поверхности геодезических спутников, когда на ней необходимо разместить набор круглых отражателей таким образом, чтобы они не перекрывали друг друга [105,189], что эквивалентно упаковке сферических сегментов на сфере. Аналогичная задача возникает при создании сферической фокальной поверхности гигапиксельной камеры. Линза камеры, на которой необходимо разместить имеющие форму круга микро-оптические устройства так, чтобы они были упакованы как можно плотнее, рассматривается как сферический сегмент с определенным угловым размером [222].

В работе [48] рассматривается прикладная задача динамической упаковки в контейнеры, возникающая в облачных вычислениях. Требуется разместить множество виртуальных машин с заданными характеристиками на двухузловых серверах, минимизируя их общее количество. Ключевая особенность задачи – разделение больших виртуальных машин между узлами одного сервера, что отличает ее от классических задач упаковки. Для решения задачи применяется эвристический алгоритм на основе метода генерации столбцов. Нижние оценки оптимума вычисляются путем решения статической задачи упаковки в ключевые моменты времени с пиковой нагрузкой. Для построения допустимого решения (верхней оценки) полученное статическое расписание расширяется на все временное окно с помощью алгоритма «Первый подходящий» (First Fit).

В теории кодирования задача упаковки важна при построении сферических кодов, позволяющих передавать данные на большие расстояния. Сферические коды для таблицы символов описывается как шар, на поверхности которого расположены сферические сегменты, и каждый сферический сегмент представляет собой символ в таблице. При передаче сигнала шар касается других шаров, и сигнал передается через точку контакта на

шаре. Точка контакта находится на том сегменте, на котором будет передаваться соответствующий символ этого сегмента [45]. Для построения сферических кодов для таблицы из  $N$  символов необходимо найти оптимальную упаковку  $N$  сферических сегментов на сфере [218–220].

Задача о покрытии множества возникает в ряде практических областей, где требуется оптимальным образом выбрать подмножество элементов (ресурсов, объектов, услуг), чтобы удовлетворить все необходимые требования. Наиболее ярким примером является задача оптимального размещения объектов (Facility Location), когда необходимо разместить минимальное число объектов (складов, магазинов, серверов), чтобы покрыть все точки спроса [236]. Построение оптимальных покрытий требуется при проектировании сенсорных сетей [1, 7, 9, 253, 254], разработке систем позиционирования и мониторинга [101], в цифровой обработке [80], в транспортной логистике [12, 30], коммуникации [70, 216] и в других областях.

При проектировании энергоэффективной системы мониторинга объектов с использованием беспроводных сенсоров необходимо решить задачу определения местоположения сенсоров в заданной области таким образом, чтобы каждая точка в этой области была покрыта как минимум одним сенсором. В настоящее время сенсоры могут автоматически регулировать свою зону мониторинга, в связи с чем возникает задача построения минимальных покрытий плоской области кругами. Это позволит сэкономить электроэнергию и увеличить время функционирования сенсоров [1, 9]. Зоны действия сенсоров могут представлять собой круги разного радиуса, а также эллипсы [8, 9, 253, 254]. Аналогичные проблемы возникают при размещении базовых станций, пожарных станций, станций скорой помощи и т.п. (Emergency Facility Location) [11, 15, 19, 83].

Задача о покрытии трехмерных поверхностей возникает при проектировании систем искусственных спутников, покрывающих часть или всю поверхность Земли. Построение такой системы можно рассматривать как задачу покрытия сферы шарами [16, 17, 54, 55]. Рассматривались различные модели в зависимости от структуры и орбиты спутника. В работе [54] рассматривается задача проектирования мультиспутниковой системы на круговой орбите для глобального и непрерывного покрытия. В [16, 17] также описана система спутников на круговых орбитах для непрерывного наблюдения за Землей, причем с использованием минимально возможного числа спутников. Что касается спутников с эллиптическими орбитами, то в работе [26] также описана система спутников связи, покрывающих всю поверхность Земли. В [28] проводится оценка способности спутников обеспечить полное покрытие; Земля рассматривается как шар, поверхность Земли – сфера,

а зоны покрытия спутников – равные сферические сегменты.

Для обеих задач важным показателем для оценки качества размещения является плотность – отношение суммы площадей размещаемых объектов к площади множества. Качество покрытия тем лучше, чем плотность меньше, а для упаковки, наоборот, чем больше плотность, тем лучше.

Следующие разделы данной главы посвящены обзору и анализу исследований задач о покрытии и упаковке и методов их решения.

## 1.2 Обзор исследований задачи о покрытии

### 1.2.1 Задача о покрытии на плоскости

Можно сказать, что исследования задачи о покрытии начались в начале XX века с изучения простых задач на плоскости. В 1915 году Э.Х. Невилл [194] предложил способ покрытия большего круга пятью равными кругами меньшего радиуса, основанный на популярной в то время игре, в которой требовалось замаскировать красный круг, используя пять металлических дисков так, чтобы красный круг не был виден. Однако предложенный метод оказался неточным и впоследствии был пересмотрен К. Бексдеком [88].

В 1939 году исследования задачи о разбиениях и покрытиях плоскости были проведены известным русским математиком А.Л. Александровым. В работе [2] он доказал теоремы, связанные с покрытием плоскости компактными множествами. Так, показано, что любое конечное множество на плоскости может быть покрыто конечным числом областей, границами которых являются замкнутые кривые  $L_1, L_2, \dots$  и как бы они ни были заданы, для этих кривых найдется число  $n$ , достаточно большое, так что число областей, касательных к кривой  $L_n$ , будет не меньше 6.

П. Кершнер занимался изучением задачи о покрытии, исследуя расположение сот в улье – фигуры, образованной соединением правильных шестиугольников. Он установил, что такая структура позволяет достичь двух оптимальных конфигураций. Если рассмотреть окружность, вписанную в каждый шестиугольник, то можно получить максимально плотное расположение непересекающихся окружностей на плоскости [160]. Эта идея также используется при доказательстве гипотезы Кеплера в двумерном случае [135, 136, 159].

Если же рассмотреть окружности, описанные вокруг каждого шестиугольника, эти окружности покрывают плоскость самым тонким слоем (см. рис. 1.2). В [160] показано, что минимальная плотность однократного покрытия плоскости составляет  $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ . В 1949 году, основываясь на важных результатах об оценке плотности однократного покрытия, С. Верблюнский предложил оценки минимального количества единичных кругов, необхо-

димых для покрытия квадрата [244].

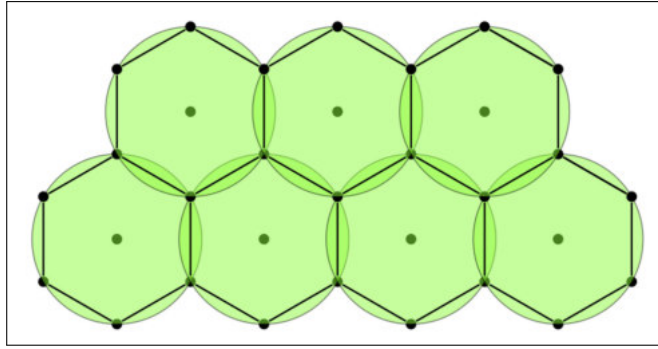


Рис. 1.2: Тончайшее покрытие в евклидовой плоскости.

В конце XX — начале XXI века исследования по данной задаче значительно активизировались. В 1971 году в работе [11] В.С. Брусов и С.А. Пиявский разработали алгоритм, основанный на методе локального поиска и диаграмме Вороного для решения задачи покрытия квадрата равными кругами, и представили наилучшие результаты для покрытий  $n \leq 15$  кругами. Можно сказать, что были это первые наилучшие (best-of-known) результаты решения задачи покрытия квадрата равными кругами. В 1995 году была опубликована работа Т. Тарнаи [232], в которой были теоретически построены и обоснованы оптимальные покрытия квадрата равными кругами для случаев, когда количество кругов не превышает 10. В [196] К.Дж. Нурмела использовал квазиньютоновский метод с обновлением секущей BFGS для поиска наилучших покрытий квадрата  $n \leq 30$  равными кругами. В работе [225] Ю.Г. Стоян модифицировал метод возможных направлений для нахождения локального минимального радиуса круга, покрывающего квадрат. Оптимальность покрытий доказана для  $n \leq 72, n = 81, n = 100$  кругов.

Задача о покрытии на плоскости не ограничивается покрытием квадрата равными кругами, она рассматривается в различных вариациях, включая покрытие треугольника и других многоугольников, круга и эллипса; покрытие кругами разного радиуса; задачу покрытия с различными неевклидовыми метриками, а также многократное покрытие. В 2000 году в статье [197] К.Дж. Нурмела предложил наилучшую конфигурацию покрытия для правильных многоугольников  $n \leq 36$  равными кругами, из которых 19 оказались лучше, чем ранее опубликованные. Не прекращаются исследования, направленные на доказательство оптимальности построенных покрытий, особенно когда количество кругов  $n$  невелико. В частности, доказанные оптимальные покрытия круга равными кругами для  $n = 6, 7$  были опубликованы в работе [126], а для  $n = 8, 9, 10$  — в работе [241]. Наилучшие известные решения для покрытия квадрата, треугольника, круга и других геометрических

фигур равными кругами можно найти на сайте [119].

Кроме того, в работах [122, 157, 158] исследована задача покрытия плоских фигур кругами нескольких типов, а также полностью различными. При этом, как правило, вводятся дополнительные ограничения на соотношения радиусов.

В работе [25] исследована задача о покрытии бесконечной полосы одинаковыми круговыми секторами. Необходимо такое расположение секторов, при котором плотность покрытия (отношение общей площади секторов к площади полосы) является минимальной. В работе доказано, что оптимальная конфигурация достигается при симметричном расположении и определенном угле наклона секторов относительно границы полосы. Для заданного угла раствора сектора выводятся уравнения для нахождения оптимального угла наклона. В результате представлено полное решение задачи, определяющее конфигурацию с наименьшей возможной плотностью покрытия. Покрытие полосы эллипсоидами представлено в [24]. Результаты данных исследований имеют практическое применение для проектирования и оптимизации сенсорных сетей, где зона обнаружения датчика моделируется сектором или эллипсом.

Отметим также работы, посвященные многократному покрытию кругами, в частности [21, 199], в которых авторы предложили метод поиска наилучшего  $k$ -кратного покрытия и оценили некоторые свойства плотности покрытия. В [95] показано, что тончайшая плотность  $\vartheta^k(n)$   $k$ -кратного покрытия  $n$  равными кругами связана с минимальной плотностью однократного покрытия плоскости  $\vartheta(n)$  [160] неравенством  $\vartheta^k(n) \leq k\vartheta(n)$ .

Отдельно выделим задачи о покрытии с неевклидовыми метриками, которые впервые приведены в работе [111], и до сих пор остаются малоизученными. Как правило, применяется манхэттенское расстояние ( $L_1$ ), расстояние Чебышева, а также вариационная метрика, когда мерой удаленности двух точек выступает минимально возможное время перемещения между ними [154, 188].

Задачи покрытия другими геометрическими фигурами также активно исследуются. Для их решения применяются методы гиперболического сглаживания [248], медиальной оси [207], оптимизации формы [93] и другие. Особенно эффективен метод оптимизации формы [93], позволяющий строить покрытия сложных негладких фигур за короткое время.

### 1.2.2 Задача о покрытии в $E^d, d \geq 3$

Для трехмерных задач наиболее хорошо изученным покрываемым объектом является сфера. Пионерской считается книга Л.Ф. Тота [64], в которой освещены вопросы

построения оптимальных покрытий и изучения их свойств. В частности, показано, что если покрыть сферу  $n \geq 3$  равными (сферическими) кругами, то плотность покрытия  $D$  будет удовлетворять условию  $D \geq \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{ctg} w_n}{\sqrt{3}}\right)$ , где  $\operatorname{ctg} w_n = \frac{n\pi}{6(n-2)}$  [64, 237]. Основываясь на этих результатах, также найдено решение задачи Таммеса для случая  $n = 3, 4, 6, 12$  [229].

В работе [209] К.А. Роджерс доказал три теоремы, касающиеся возможности размещения  $n$  сферических сегментов меньшего размера (в англоязычной литературе используется термин ‘spherical caps’) на сфере радиуса  $R$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Эта работа послужила основой для ряда более поздних исследований И. Думера [117, 118], который разработал метод построения покрытия с наименьшей плотностью, задающий среднее число сфер радиуса 1, покрывающих точку на сфере радиуса  $R$ . Для возрастающей размерности  $n$  найдено покрытие, которое дает плотность порядка  $\frac{n \ln n}{2}$  для сферы любого радиуса  $R > 1$ , что в два раза лучше, чем в [209].

Похожий результат получен в работе [90]. А. Бездек показал, что для достаточно большого числа  $n$  можно расположить  $n$  равных областей, покрывающих сферу  $S^{d-1}$ , так что ни одна точка не принадлежит более чем  $A_d \ln n$  областям, где  $A_d$  — константа, зависящая только от  $d$ .

В [240] Г.Ф. Тот установил взаимосвязь между задачами покрытия и упаковки сферы  $S^{n-1}$  в евклидовом пространстве  $E^n$  сферическими сегментами. Основываясь на расчетах радиусов сферических сегментов, полученных при разбиении сферы на области Дирихле в пространстве  $E^n$  [18], Ш.И. Галиев предложил 4 алгоритма для поиска оптимального покрытия сферы. Однако все эти алгоритмы имеют недостаток, связанный с необходимостью решения многоэкстремальных задач.

Отметим работу [107], в которой Дж. Х. Конвей и Н. Дж. А. Слоан представили оптимальные решения для задач покрытия и определения точек касания в многомерном пространстве, возникающих при построении сферических кодов и классификацией сетей.

В 2003 году в работе Б. Дж. Кароли [150] показано, что для  $d \geq 3$  и любого  $0 < \varphi < \pi/2$  единичную сферу  $S^d$  можно покрыть сферическими шарами радиуса  $\varphi$ , что каждая точка на сфере  $S^d$  будет покрыта не более чем  $400d \ln d$  раз. Максимальная плотность в этом случае равна  $d \ln d$ , если число шаров полиномиально по  $d$ . Более того, если число покрывающих сферических шаров равно  $d + 3$ , то покрытие будет оптимальным. В развитие данных результатов, в работе [245] установлен верхний предел минимального количества  $V$  шаров радиусом  $\frac{1}{2}$ , которые могут образовать шар радиусом  $T > \frac{1}{2}$  в пространстве  $R^n$  ( $n \geq 2$ ). Используя асимптотические оценки, результаты из [150] были улучшены в части минимального количества сфер одинакового размера, которые могут

покрыть единичную сферу  $S^{n-1}$ .

Основываясь на результатах, полученных в работе [90] при изучении проекции так называемых рентгеновских лучей (X-rays) на выпуклые тела постоянного размера [152], Б. Кароли с коллегами обнаружили существование перекрытий, симметричных друг другу относительно центра единичной сферы в  $n$ -мерном пространстве  $E^n$ . В этом пространстве может быть до  $2^n$  конгруэнтных сферических покрытий, радиус которых не превышает  $\arccos \sqrt{\frac{n-1}{2n}}$  в случае  $4 \leq n \leq 6$  [97]. Гипероктаэдры (кросс-многогранники) в многомерном пространстве также были изучены в работе [151], в которой авторы определили наименьший радиус  $R_n^d$   $n$  конгруэнтных шаров, охватывающих гипероктаэдр в  $d$ -мерном пространстве при  $n = 2, d, 2d$ . Для  $d = 3, n = 2, R_2^3 = \sqrt{\frac{11}{4}}$ ; для  $n = 2, d \geq 4, R_2^d = \sqrt{1 - \frac{1}{d}}$ ; для  $n = d, R_d^d = \sqrt{\frac{5}{2}}$ ; если  $d = 3, R_d^d = \sqrt{\frac{11}{20}}$ ; если  $d \geq 4, R_d^{2d} = \frac{1}{2}$ .

Наконец, отметим работу [153], в которой авторы предложили итерационные алгоритмы, основанные на оптико-геометрическом подходе. Эти алгоритмы предназначены для построения наилучших чебышевских  $n$ -сетей и круговых аппроксимаций компактных множеств на плоскости. С помощью этих алгоритмов можно создавать сети и покрытия, состоящие из сферических сегментов, как на сфере, так и на ее полной поверхности, то есть на поверхности с неевклидовой геометрией.

Задача о покрытии рассматривается и для других трехмерных объектов. Так, в первые задачи о покрытии поверхности цилиндра рассмотрены в [94]. Показано, что максимальная плотность упаковки единичных окружностей на цилиндре не менее  $\frac{\pi}{4}$ , и равна  $\frac{\pi}{4}$ , если периметр ортогонального сечения цилиндра равен  $2\sqrt{2}$ . Минимальная плотность покрытия единичными окружностями составляет не более  $\frac{\pi}{2}$ , и равна  $\frac{\pi}{2}$  для цилиндра с периметром ортогонального сечения 2.

Для задачи покрытия поверхности единичного куба равными шарами Дж. Шаер построил расположение 5 центров шаров так, чтобы минимальное расстояние между двумя центрами было как можно больше [212]. Он доказал, что минимальное расстояние не может превышать  $m = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , а значение  $m$  достигается, когда центральные точки находятся в позициях  $P1 = (0; 0; 0); P2 = (1; 1; 1); P3 = (0; \frac{1}{2}; 1); P4 = (\frac{1}{2}; 1; 0); P5 = (1; 0; \frac{1}{2})$ . Для 6 шаров  $m = \frac{3\sqrt{2}}{4}$  [213]. Оптимальные результаты получаются, когда центры шаров совпадают с точками  $A_i, i = 1, \dots, 6$ , а расстояние от  $R_i$  до вершины  $A_i$  куба равняется  $\frac{1}{4}$ . Эти точки образуют правильный октаэдр. Результаты представлены на рисунках 1.3, 1.4.

В статье [76] показано, что минимальный радиус шаров, необходимых для покрытия единичного куба в 4-мерном пространстве, составляет  $\frac{\sqrt{5}}{12}$ , а в [78] — что минималь-

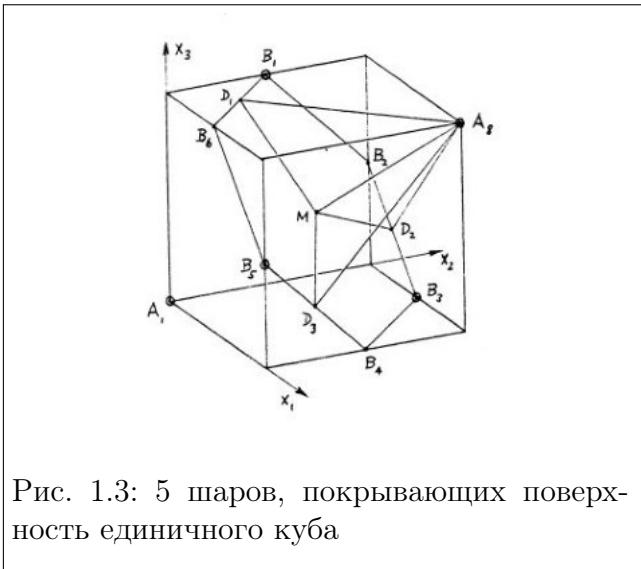


Рис. 1.3: 5 шаров, покрывающих поверхность единичного куба

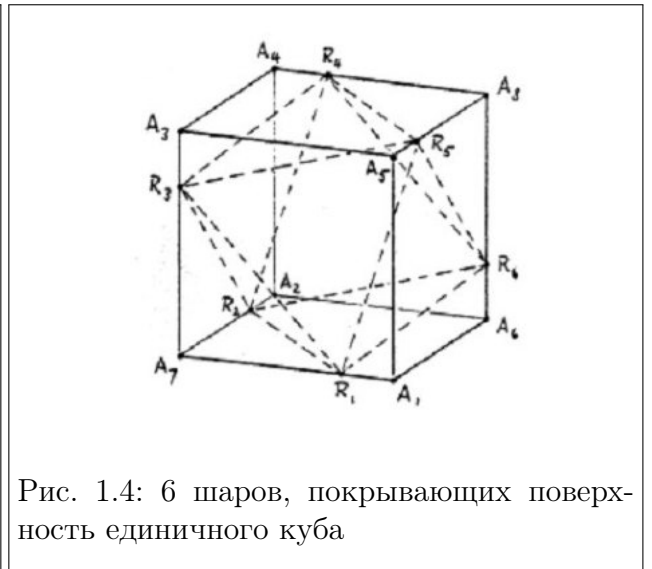


Рис. 1.4: 6 шаров, покрывающих поверхность единичного куба

ный радиус восьми конгруэнтных шаров, покрывающих единичный куб в пятимерном пространстве, равен  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

В 2009 году в статье [63] Ю. Г. Стоян и В. Н. Пацук предложили метод, который позволяет покрыть выпуклый многогранник минимальным количеством равных количеством сфер заданного радиуса. Задача сведена к последовательности задач минимизации радиуса сферы при фиксированном числе сфер. Показано, что экстремумы достигаются в вершинах многогранников Вороного, построенных по центрам сфер. Для поиска экстремумов применен метод допустимых направлений в сочетании со случайным поиском. Метод протестирован на единичном кубе и успешно вычислил радиус для случаев, когда количество покрывающих сфер не превышает 10.

Для эллипсоидов рассматривались несколько вариантов задачи покрытия. Так, в работах [115, 116] И. Думер с коллегами решили три задачи с эквивалентными свойствами: (1) покрытие эллипсоида единичными шарами; (2) покрытие эллипсоида шарами с радиусом  $\epsilon > 0$ ; (3) покрытие эллипсоида очень маленькими эллипсоидами. В результате автор доказал теорему о том, что в  $d$ -мерном пространстве  $N(E_a^d) \geq K_a^d$ , где  $N(E_a^d)$  — это логарифм минимального количества единичных шаров, необходимых для покрытия эллипсоида  $E_a^d$ ,  $E_a^d = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_d) \in R^d : \sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1 \right\}$  и  $K_a^d = \sum_{i=1}^d \log a_i$ . Кроме того, в статье [113] разработана модель для определения наименьшего количества сфер с заданным радиусом, которые могут покрыть эллипсоид. В основе предложенной модели лежит задача о рюкзаке. По оценке автора, результаты были положительными, однако встречались случаи, когда сферы не покрывали всю поверхность эллипсоида.

### 1.3 Обзор исследований задачи об упаковке

#### 1.3.1 Задача об упаковке на плоскости

Простейшая версия задачи упаковки кругов заключается в оптимальном размещении одинаковых кругов в ограниченной двумерной области. Активные исследования этой задачи начались в 1960–1970-х годах, причем изначально рассматривались только простые формы контейнеров, такие как круг или квадрат. Несмотря на кажущуюся простоту, задача остается актуальной, и ее изучение активно продолжается в настоящее время.

В статье [204] У. Пирл впервые представил наиболее плотные упаковки  $n$  равных кругов в круг для  $n \leq 10$ . Впоследствии другие исследователи расширили эти результаты, решив задачу для количества кругов вплоть до 91 [134, 179]. Дальнейший прогресс был достигнут в работе [251], где с помощью современных методов оптимизации удалось найти упаковки для почти 1000 кругов.

В работах [128, 211, 227] исследовалась задача упаковки равных кругов в квадрат для  $n \leq 200$ , причем для  $n$  от 1 до 36 приведенные решения являются строго оптимальными [227]. Параллельно изучались аналогичные задачи упаковки кругов в треугольники [177] и эллипсы [65]. Оптимальные конфигурации для различных геометрических фигур были установлены в следующих исследованиях: для квадрата — [195, 242], для круга — [183], для равностороннего треугольника — [182, 184]. Наиболее полная база данных, содержащая как оптимальные, так и рекордные (наилучшие из известных) упаковки равных кругов в квадраты, круги, треугольники и другие фигуры, представлена на специализированном ресурсе [224]. Следует особо выделить фундаментальную работу [121], в которой Л. Фейеш доказал, что максимально достижимая плотность упаковки кругов на бесконечной плоскости составляет  $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ . Этот результат имеет принципиальное значение, так как полученное значение служит теоретической верхней границей для задач упаковки в ограниченных областях.

#### 1.3.2 Задача об упаковке в $E^d$ , $d \geq 3$

Проблема упаковки в трехмерном и многомерных пространствах получила значительное развитие в работах Галиева Ш.И. [18], П.Г. Жабо [228], Г.Ф. Тота [242] и Т. Тарная [231]. Особый интерес представляет задача упаковки равных шаров для сферы, которая тесно связана с проблемой определения контактного числа и задачей Таммеса. Актуальность этого направления исследований обусловлена широким спектром практических приложений – от построения оптимальных сферических кодов в теории кодиро-

вания [218, 219] до моделирования упаковки белковых молекул в сферических капсидах вирусов [208].

Фундаментальный вклад в эту область внес П.М.Л. Таммес, который в работе [229] сформулировал ключевую задачу: «Если  $n$  точек расположены на сфере так, что наименьшее расстояние между ними максимально, то какую форму примет этот набор точек?». В 1943 году были найдены решения для  $n = 3, 4, 6, 12$  [64], а в 1951 году — для  $n = 5, 7, 8, 9$  [214]. В работах [86, 112, 190, 206] задача успешно решена для  $n \leq 24$ . Отметим, что пересечением сферы и шара является круг, поэтому задача Таммеса может быть сформулирована как задача об упаковке равных сферических сегментов на сфере.

Особый импульс развитию направления придали исследования, вдохновленные структурой вирусных оболочек. Анализируя симметрию правильных многогранников (тетраэдра, октаэдра и икосаэдра), авторы работ [125, 230] получили мультисимметричные конфигурации упаковок для ряда значений  $n$ , включая 96, 108, 144, 150, 192, 198, 216, 270, 300, 360, 372, 432, 480, 492, 750, 1080. В 2000 году в работе [234] Я. Тешима и Т. Огава предложили новый метод построения упаковок — метод наименьшего зенита, демонстрирующего эффективность для  $n \leq 150$ . Стартуя с некоторой заданной частичной конфигурации, алгоритм последовательно размещает оставшиеся круги на единичной сфере, минимизируя на каждом шаге зенитный угол. В недавней работе [168] Х. Лай решил задачу упаковки равных кругов на сфере, когда их количество не превышает 200. Однако время, затраченное на вычисления, оказалось очень большим, достигая десятков тысяч секунд. Некоторые теоремы, пределы и оценки, которые могут помочь в разработке алгоритма решения задачи об упаковке кругов на сфере, представлены в работах [82, 85].

Помимо аналитических подходов к построению оптимальных упаковок, значительное внимание уделяется разработке численных методов глобальной оптимизации. Важный результат был получен А. Маккаем в 1977 году [180], который применил метод итеративной оптимизации для решения задачи упаковки кругов на сфере при  $n \leq 27$ . Дальнейшее развитие это направление получило в работе Б. Клэра и Д. Киперта [106], где за счет минимизации специально введенной потенциальной функции (определяемой через обратные расстояния между кругами) удалось улучшить упаковки для  $n = 20 \div 40$ . Эффективность данного подхода была подтверждена в исследовании [166], расширившем область его применения до  $n = 15 \div 90$ . Впоследствии различные модификации этого метода с альтернативными потенциальными функциями нашли применение в работах [92, 104, 133, 168], хотя сохраняющаяся вычислительная сложность остается существенным ограничением при увеличении числа кругов. Современный этап развития метода связан с работой П.

Амора [75], где были устранены ключевые недостатки оригинального подхода [195] применительно к упаковкам на сферических сегментах. Полученные в этом исследовании конфигурации в настоящее время считаются наилучшими известными решениями для данного класса задач.

В работе [165] рассмотрен вариант задачи упаковки в контейнеры с ограничением на цвет, где количество предметов одного цвета в одном контейнере ограничено. Для решения этой задачи авторы предлагают гибридный метаэвристический метод, сочетающий поиск с чередующимися окрестностями (VNS) [164] и целочисленное программирование (IP). При этом VNS обеспечивает глобальный поиск для генерации приемлемых решений, в то время как модель IP используется как инструмент для локального совершенствования и улучшения этих решений. Предложенный метод был протестирован на стандартных наборах данных и показал лучшую производительность по сравнению с существующими алгоритмами.

В [186] рассмотрена задача размещения  $n$  точек на сферическом октанте так, чтобы расстояние между ними было максимальным. Оптимальные решения найдены для  $n = 2 \div 6$  точек. Кроме того, выдвинута гипотеза об оптимальных размещениях для  $n = 7 \div 15$ . Задача упаковки  $n \leq 40$  кругов на полусфере исследуется в [79], в [37] для ее решения предложен эвристический алгоритм на основе поиска центров Хаусдорфа. Для сферических сегментов с угловыми размерами  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$  и  $\frac{5\pi}{6}$ , в работе [75] предлагается метод, позволяющий упаковывать до 200 кругов, оцениваются плотность упаковки и влияние кривизны на равномерность распределения кругов. Отметим, что решение задачи упаковки равных кругов в сферические сегменты может быть применено при создании мячей для гольфа [233], построении сети лазерных динамических спутников LAGEOS (Laser Geodynamics Satellite) [108], а также для распределения детекторов сигнала и детекторов солнечной энергии на полусфере [79]. В указанных приложениях для вычисления радиуса круга используется угловой размер, который, в свою очередь, может рассматриваться как геодезическое расстояние от центра до границы круга.

Под *геодезической окружностью* будем понимать совокупность точек, расположенных на равном геодезическом расстоянии до заданной точки, называемой центром геодезической окружности [252]. *Геодезический круг* представляет собой область на поверхности, ограниченную геодезической окружностью. Задача упаковки равных геодезических кругов в сферический сегмент возникает при проектировании сферических фокальных поверхностей [110], когда необходимо упаковать большое количество датчиков (до тысячи). В работе [222] представлен метод распределения геодезических кругов, основанный

на использовании искаженной икосаэдрической геодезии, однако плотность упаковки с использованием этого метода ниже, чем у других методов и его можно применять не для любого количества кругов.

В трехмерном пространстве проблема вложения «мыльного пузыря» внутрь тетраэдра изучал известный русский математик А.В. Погорелов [57]. Эта задача аналогична задаче упаковки шаров в тетраэдр и имеет применение в горнодобывающей промышленности [255]. На основе предшествующих известных работ А.Д. Александрова о выпуклых многогранниках и выпуклых поверхностях [3, 4] он доказал, что внутри тетраэдра существует замкнутая гладкая выпуклая поверхность, касающаяся всех его граней, имеющая постоянную среднюю кривизну и целиком лежащая внутри тетраэдра.

Для пространства большой размерности ( $n \geq 3$ ) изучалась задача о гиперсферических плотных сетях. В 2016 году в работе [246] М.С. Вязовская представила оптимальную упаковку гиперсфер в восьмимерном пространстве, на основе которой в [138] доказано, что решетка Лича оптимальна в 24-мерном пространстве. Кроме того, предложен метод поиска конфигураций упаковки гиперсферы в различных пространствах [46, 221].

Количество работ, связанных с задачей о покрытии и упаковке показывает, что обе задачи привлекают внимание исследователей уже много лет. Их решение находит широкое применение в различных сферах, таких как: система распределения спутников на геостационарной орбите для наблюдения за Землей [54]; система спутниковой навигации GPS [18, 56]; расположение базовых станций сотовой связи [27, 42], космической связи [23], в логистике [12] и мониторинге окружающей среды [42] и многие другие.

Однако обе задачи являются NP-полными задачами комбинаторной оптимизации [18, 124], поэтому исследователи часто используют приближенные методы, методы оценки с высокопроизводительными алгоритмами, чтобы помочь найти наилучшее решение и максимально быстрое время выполнения. В зависимости от сложности задачи возрастает и сложность алгоритмов.

#### **1.4 Численные методы решения задач покрытия и упаковки**

Для глобальных решений задач покрытия и упаковки поиск осуществлялся лишь в отдельных случаях при малом числе объектов [119, 120]. Эффективный подход к решению таких задач заключается в их формулировке в виде задач невыпуклого квадратичного программирования с последующим применением методов глобальной оптимизации [176]. Методы и алгоритмы решения задач невыпуклого квадратичного программирования подробно изложены в работах [68, 69, 100].

Исследователи используют различные методы для решения задачи упаковки с большим количеством кругов, такие как генетические [22] и эвристические [143] алгоритмы, алгоритмы бильярдного моделирования [96, 132, 179], методы пространственного поиска [177], повторный локальный поиск [71, 133, 167], алгоритм поиска пучка [73], эвристический метод Вороного [175], смешанно-целочисленное программирование [146], жадный поиск вакансий [144], муравьиный алгоритм [74], алгоритм вероятностного поиска с запретами [47, 61] и др. Среди них некоторые методы позволяют решить задачу упаковки в квадрат с количеством кругов до 10 тыс.; 2600 кругов в круг и 299 кругов в равносторонний треугольник.

Опишем более подробно наиболее известные подходы.

#### 1.4.1 Метод «Bottom-Left»

Это один из известных базовых эвристических методов, который десятилетиями широко использовался для решения различных типов задач упаковки в двухмерном и трехмерном пространстве: упаковка разных квадратов в контейнеры разной формы, упаковка разных кругов внутри разных фигур [72, 141, 142, 149] и т.д. Метод «Bottom-Left» подразумевает размещение объектов в контейнере таким образом, чтобы они занимали как можно меньше места по высоте и оставляли больше пространства для других объектов.

Идея метода основана на выборе самой нижней и самой левой позиции для размещения следующего объектов, т.е. метод выбирает позицию  $p(x, y)$ ,  $y$ -координата которой минимальна (вниз); если таких позиций несколько, выбирает среди них ту, чья  $x$ -координата минимальна (слева). Например, для упаковки равных кругов в круг, на рис. 1.5 (а) и 1.5(б) метод соответственно выбирает  $p_5$  и  $p_6$  для размещения следующего круга. Рис. 1.5 (в) показывает окончательную конфигурацию, полученную с помощью метода, где было упаковано максимум 28 кругов, начиная с конфигурации рис. 1.5 (а)

Этот метод и его модификации активно используются для решения разнообразных задач упаковки, но у него есть существенные ограничения. Главный недостаток заключается в том, что он не оценивает оптимальность положения каждого круга в отдельности и не гарантирует построение глобально оптимального решения. Вместо этого алгоритм просто располагает все круги в левом нижнем углу, что далеко не всегда приводит к самому плотному размещению.

#### 1.4.2 Метод «Итерационный локальный поиск»

Это один из численных методов, который позволяет решать как задачи покрытия, так и задачи упаковки не только для равных кругов, но и для различных кругов в дву-

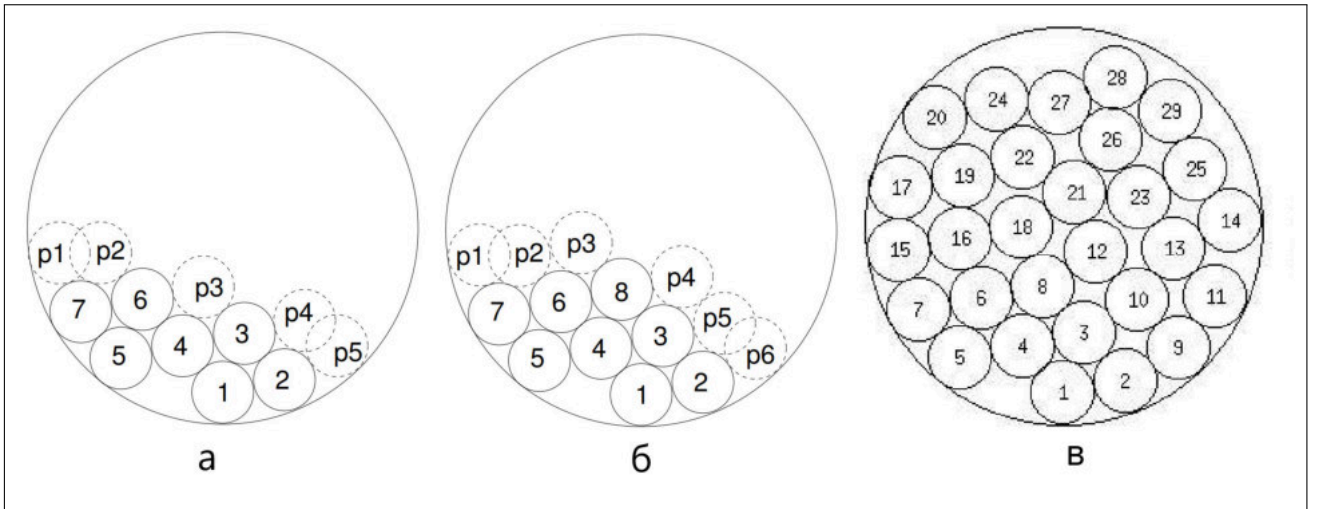


Рис. 1.5: Конфигурация 7, 8 кругов и окончательная конфигурация

мерном пространстве [71, 133, 167]. Задача упаковки разных кругов в круг формулируется следующим образом:

$$r \rightarrow \min,$$

$$x_i^2 + y_i^2 \leq (r - r_i)^2, i = \overline{1, n},$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq (r_i + r_j)^2, i \neq j,$$

$$r \geq \max_{i=\overline{1, n}} r_i,$$

где  $r_i$  – радиус  $i$ -го круга. Если  $r_i = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$ , то имеем задачу упаковки равных кругов в круг. Основными компонентами метода являются: процедура локального поиска LS, возмущение движения P и правило остановки SR.

**Шаг 1:** Пусть  $X$  – локальный минимум удовлетворяет определенным условиям (оптимальности). Случайно сгенерированной может быть стартовая точка.

**Шаг 2:** Пусть  $Y := LS(P(X))$ .

**Шаг 3:** Если  $f(Y) < f(X)$ , то  $X := Y$ .

**Шаг 4:** Если критерий SR не удовлетворен, повторить шаг 2. В противном случае алгоритм завершается.

Задача локального поиска может быть рассмотрена как невыпуклая с непрерывно дифференцируемыми бесконечным числом раз целевыми и ограничительными функциями. В таких случаях можно использовать любой метод локального поиска.

Ключом к успешному применению метода является возмущение движения. Основная идея заключается в том, что метод должен перемещаться между различными, но «близкими» локальными минимумами. Для этого необходимо равномерно случайным об-

разом возмущать каждую координату каждого центра окружности в некотором интервале  $[-\Delta, \Delta]$ .

Правило остановки заключается в том, чтобы прекратить процесс поиска, когда не наблюдается улучшений в течение определенного количества итераций *MaxNoImp*.

### 1.4.3 Диаграмма Вороного

Диаграмма Вороного представляет собой фундаментальные структуры данных, которые активно исследуются в области вычислительной геометрии [81] и применяются на практике. Она активно используется в распознавании образов [163, 202], робототехнике [62], компьютерной графике [60, 198] и многих других областях. Диаграмму Вороного можно рассматривать как инструмент минимизации конечного набора непрерывных функций, каждая из которых интерпретируется как функция расстояния до определенного объекта. Диаграмма Вороного разбивает пространство на области, состоящие из точек, которые находятся ближе к заданному объекту, чем к любым другим. Именно это свойство делает ее полезным инструментом при исследовании задач упаковки, покрытия и оптимального размещения [20, 22, 89]. Дадим определение диаграммы Вороного.

**Определение.** Пусть  $P = p_1, p_2, \dots, p_n \subset R^2$  — множество из  $2 < n < \infty$  попарно различных точек (см. рис. 1.6); для произвольных точек  $a$  и  $b$  плоскости обозначим через  $\|a - b\|$  расстояние от  $a$  до  $b$ . Назовем  $V_i = V(p_i) = \{x \in R^2 : \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|, j = 1, 2, \dots, n\}$  многоугольником (ячейкой) Вороного точки  $p_i$ , являющим множеством, в котором точки более близких к  $p_i$ , чем к любым остальным точкам множества (см. рис. 1.7). Множество  $V = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\}$  — разбиением или диаграммой Вороного, порожденной множеством  $P$ . Точку  $p_i$  назовем порождающей для множества  $V(p_i)$ , а множество  $P$  — порождающим для диаграммы Вороного.

К определению диаграмм Вороного существует альтернативный подход [59], который позволяет конструктивно строить нужное разбиение.

Назовем биссектрисой для точек  $p_i$  и  $p_j$  серединный перпендикуляр к отрезку  $[p_i p_j]$  и обозначим его  $b(p_i, p_j)$ ; биссектриса разбивает плоскость на две части  $H(p_i, p_j)$  и  $H(p_j, p_i)$ .  $H(p_i, p_j) = \{x \in R^2 : \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|\}$  — множество точек, расположенных ближе к  $p_i$ , чем к  $p_j$ . Очевидно,  $H(p_i, p_j)$  — полуплоскость; назовем ее областью близости точки  $p_i$  относительно точки  $p_j$ . В результате пересечения  $n - 1$  полуплоскостей образуется множество точек  $V(p_i)$ . Это множество представляет собой выпуклую многоугольную область, которая имеет не более  $n - 1$  сторон.

$$V(p_i) = H(p_i, p_1) \cap H(p_i, p_2) \cap \dots \cap H(p_i, p_n)$$

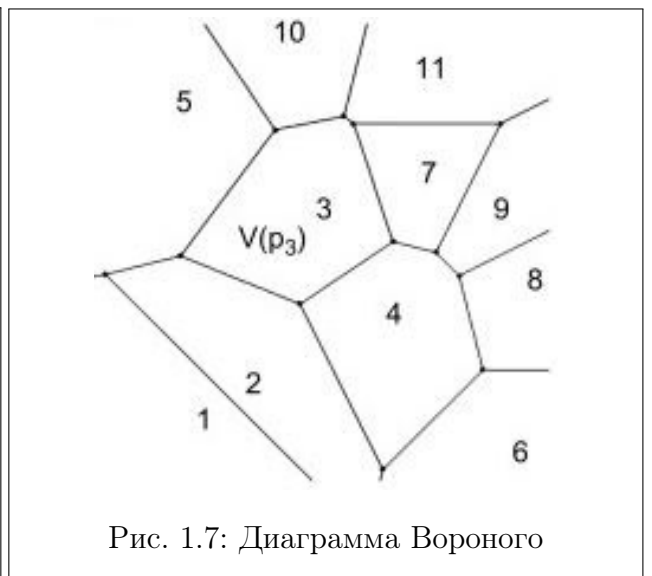
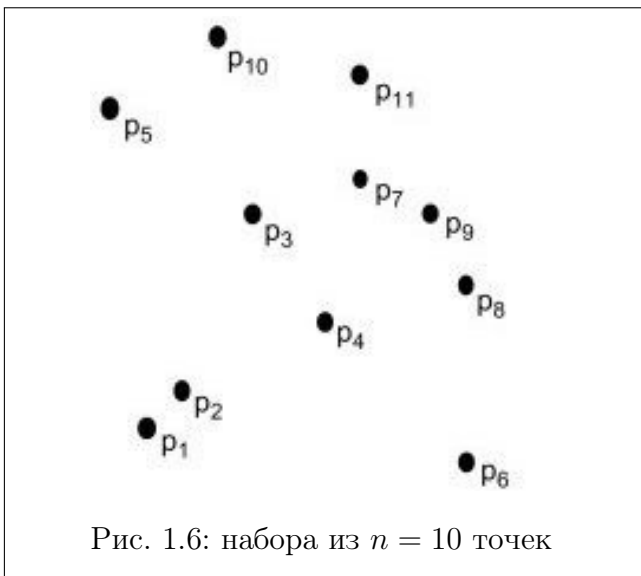
**Свойства.** При создании диаграммы Вороного на плоскости следует обратить внимание на основные свойства:

1. В диаграмме Вороного каждая вершина является точкой, где сходятся ровно три ребра. Это свойство можно сформулировать иначе: вершины диаграммы Вороного представляют собой центры окружностей  $C(v)$ , каждая из которых определяется тремя точками из исходного множества  $P$ .

2. Для каждого многоугольника Вороного  $V(p_i)$  его каждое ребро образуется от серединного перпендикуляра отрезка, соединяющего точку  $p_i \in P$  с ближайшими соседями точки  $p_i$ .

3. Многоугольник  $V(p_i)$  является ограниченным тогда и только тогда, когда точка  $p_i \in P$  лежит внутри в выпуклой оболочке множества  $P$ .

4. Для набора из  $n \geq 3$  точек диаграмма Вороного имеет не более  $2n - 5$  вершин и  $3n - 6$  ребер.



Диаграмму Вороного можно определить не только в двумерном пространстве, но и обобщить на пространства произвольной размерности. Например, в трехмерном пространстве ее можно построить для сферы [187, 193], а также для всего пространства  $\mathbb{R}^3$ . В этом случае биссекторные плоскости разбивают пространство на полупространства близости, аналогично тому, как в двумерном случае биссектрисы разделяют плоскость. В результате вместо многоугольников Вороного возникают многогранники. Это определение естественным образом обобщается на векторное пространство  $\mathbb{R}^d$  любой размерности.

### Методы построения диаграммы Вороного на плоскости

Для создания диаграммы Вороного было разработано множество алгоритмов, которые демонстрируют оптимальную асимптотическую сложность  $O(n \log n)$ . Некоторые из них даже показывают среднюю сложность  $O(n)$ . Рекурсивный алгоритм [59] и алгоритм Форчуна [87, 123] являются самыми известными алгоритмами.

**Рекурсивный алгоритм:** Сложность:  $O(n \log n)$

Шаг 1: Множество точек  $P$  сортируется по одной из координат и делится на два примерно равных подмножества  $P_1$  и  $P_2$  (количество точек может быть нечетным);

Шаг 2: Каждое из полученных подмножеств также делится на два новых до тех пор, пока в каждом из них не останется не более двух точек. Этот процесс повторяется рекурсивно для обоих множеств, позволяя нам построить диаграммы Вороного для  $P_1$  и  $P_2$ .

Шаг 3: Для каждого из подмножеств строятся свои диаграммы Вороного, а затем они объединяются в одну в порядке, обратном их делению. Эта объединенная диаграмма и будет окончательным результатом.

**Алгоритм Форчуна:** Сложность:  $O(n \log n)$

Заданы  $n$  точек на плоскости. Алгоритм поддерживает заметающую прямую и береговую линию, которые двигаются по плоскости. Заметающая прямая — это прямая двигается сверху вниз. В процессе выполнения алгоритма заметающая прямая разделяет набор точек на две группы. Часть над заметающей прямой — это точки, которые были созданы и включены в диаграмму Вороного. Часть под заметающей прямой — точки, которые еще не обработаны.

Когда заметающая прямая встречается с новой точки, она создает новую параболу, центром которой является этой точкой, а директрисой — заметающая прямая. Эта парабола делит плоскость на две части: внутренняя область соответствует точкам, которые находятся ближе к сайту, а внешняя — тем, что ближе к заметающей прямой. Точки, расположенные на самой параболе, равноудалены от точки и заметающей прямой. Форма параболы изменяется в зависимости от расстояния между заметающей прямой и точкой. По мере удаления от точки, расположенной внизу, заметающая прямая становится все более пологой, а парабола — все более широкой. В начальной точке парабола представляет собой отрезок, направленный вверх.

Далее, по мере расширения параболы, у нее появляются две контрольные точки — точки пересечения с остальными параболами, образующими «береговую линию». В этой «береговой линии» хранятся дуги парабол, простирающиеся от одной точки пересечения до другой. При пересечении парабол эти точки пересечения станут вершинами ячейки

Вороного, дуги между этими двумя точками будут удалены от «береговой линии» и соединившись, получим ребро ячейки Вороного.

Шаг 1: Задано  $n$  различных точек на плоскости.

Шаг 2: Построить «заметающую прямую» – горизонтальную линию, перемещая ее сверху вниз.

Шаг 3: Границы сегментов строятся относительно точек  $A_i$ , которые находятся над «заметающей прямой» (см. рис. 1.8).

Граница сегмента определяется как множество точек пересечения парабол, которые представляют собой геометрическое место точек, равно удаленных от прямой и заданной точки. Согласно работе [87], парабола описывается уравнением  $y_i = \frac{x_i^2 - 2A_{i,x}x_i + A_{i,x}^2 + A_{i,y}^2 - l_y^2}{2(A_{i,y} - l_y)}$ , где  $x_i, y_i$  представляют собой координаты параболы для точки  $A_i (i = \overline{1, n})$ ,  $A_{i,x}$  и  $A_{i,y}$  – абсцисса и ордината точки  $A_i$  соответственно,  $l_y$  – это ордината «заметающей прямой».

Шаг 3: Если прямая, которая проходит через всю плоскость, замечает ее, то решение найдено. Если прямая не сканировала всю плоскость, перейти к шагу 2.

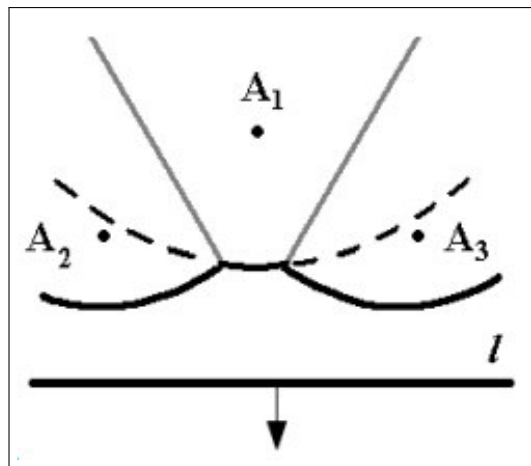


Рис. 1.8: Применение заметающей прямой

**Алгоритм «в лоб»:** Сложность:  $O(n^4)$

Идея алгоритма заключается в том, чтобы вместо полуплоскостей пересекать серединные перпендикуляры отрезков, соединяющих данную точку со всеми остальными. Этот алгоритм основан на основном свойстве диаграммы Вороного: каждое ребро ячейки Вороного определяется как перпендикуляр, проведенный из середины отрезка, соединяющего две ближайшие точки. Таким образом, каждая ячейка Вороного представляет собой область, образованную пересечением двух полуплоскостей. Следуя определению ячейки Вороного, мы будем строить область диаграммы Вороного для точки  $p$  следующим образом:

Шаг 1: Получаем  $n - 1$  прямых (серединные перпендикуляры), так как мы провели серединные перпендикуляры всех отрезков, соединяющих данную точку  $p$  с остальными;

Шаг 2: Пересекаем попарно все прямые, получая  $O(n^2)$  точек пересечения (потому что каждая прямая может пересечь все остальные в «худшем случае»);

Шаг 3: Проверяем все эти  $O(n^2)$  точек на принадлежность каждой из  $n - 1$  полуплоскостей, что приводит к асимптотике  $O(n^3)$ . Такие точки будут вершинами ячейки Вороного  $V(p)$ , если они принадлежат всем полуплоскостям.

Шаг 4: Повторяем первые три шага для всех  $n$  точек, что приводит к итоговой асимптотике  $O(n^4)$ .

#### **Алгоритм на основе пересечения полуплоскостей:**

Сложность:  $O(n^2 \log n)$

Заданы  $n$  различных точек  $p_i, i = \overline{1, n}$  на плоскости.

Шаг 1: Для каждой точки  $p_i$  на плоскости строим  $n - 1$  прямых, являющихся серединными перпендикулярами отрезков, соединяющих  $p_i$  с остальными точкам  $p_j (i \neq j)$ . Обозначим такие прямые  $H_{ij}$ .

Шаг 2: Каждая прямая  $H_{ij}$  делит плоскость на две полуплоскости:  $H_{ij}^+$ , содержащую точку  $p_i$ , и  $H_{ij}^-$ , содержащую точку  $p_j$ . Очевидно, что область Дирихле точки  $p_i$  будет лежать в полуплоскости  $H_{ij}^+$ .

Шаг 3: Пересечение всех полуплоскостей  $H_{ij}^+, j \neq i$  определяет область Дирихле искомой точки  $p_i$ . В этом случае можно сделать за  $O(n \log n)$  время работы алгоритма.

Шаги 1–3 выполняются для всех заданных  $n$  точек. В итоге асимптотическое значение временной сложности алгоритма равно  $nO(n \log n) = O(n^2 \log n)$ .

#### **1.4.4 Оптико-геометрический подход**

Описанные выше методы позволяют эффективно решать задачи построения покрытий и упаковок когда расстояние между точками полагается евклидовым. Однако при моделировании прикладных задач в ряде случаев необходимо разрабатывать специальные методы и уметь работать в пространстве с неевклидовыми метриками. Например, для расчета расстояния между двумя городами с заданными координатами используется геодезическое расстояние. При построении маршрутов в городе, когда не всегда можно перейти из одной точки в другую по прямой из-за застройки, запретных зон и т.д., используется манхэттенское расстояние. В задачах логистики, связанных с доставкой товара, ключевую роль играет время доставки, а не пройденное при этом расстояние, в связи с чем вводится специальная вариационная метрика, оперирующая временем перемещения

между двумя точками. Для решения задачи покрытия и упаковки с такой метрикой применяются методы, основанные на оптико-геометрическом подходе, который базируется на двух фундаментальных физических принципах Ферма и Гюйгенса [6, 49, 67] и позволяет заменить расстояние между точками минимальным временем перемещения между ними.

Согласно принципу Ферма, свет выбирает из множества путей между двумя точками тот путь, который потребует наименьшего времени, это обозначает, что световая волна двигается из одной точки в другую по маршруту, преодолеваемому за минимальное возможное время. В соответствии с принципом Гюйгенса, каждая точка на фронте световой волны является источником новых вторичных волн, а распространение света в целом представляет собой сумму вторичных волн, исходящих из каждой точки среды, через которую прошла волна. Таким образом, появляется возможность отыскания быстрого пути между точками: выполнив распространение световой волны из точки  $a$ , зафиксируйте первую точку распространения до целевой точки  $b$  и двигаясь в обратном направлении по времени, восстанавливая траекторию распространения волны. Таким образом, кратчайшее расстояние между этими точками можно вычислить, если известна траектория световой волны, движущейся от одной точки к другой.

Пусть в некоторой оптической среде источник света начал излучать световую волну – поток фотонов, обладающих определенной энергией и нулевой массой. *Фронтом волны* называется поверхность, до которой дошел волновой процесс к заданному моменту времени. Форма этой поверхности зависит от оптических свойств среды.

Если среда является оптически однородной, то скорость распространения волны постоянна, и фронт световой волны, порожденной точечным источником, является окружностью (в пространстве является сферой), а «быстрейший» путь – отрезком прямой. В случае оптически неоднородной среды, скорость распространения световой волны становится переменной, форма ее фронта искажается, а «быстрейший» путь из прямой превращается в кривую.

Помимо естественных приложений в физике, в частности, в оптике, данный подход использовался для решения ряда задач безопасности: определения вероятных маршрутов проникновения на охраняемую территорию, охраны периметра, мониторинга протяженных объектов. Так, в работе [10] В.В. Башуров применил оптико-геометрический подход, чтобы найти кратчайший путь от объекта к объекту, а затем, в сочетании с предложенной им моделью безопасности, решить задачу усиления защиты объекта.

В области транспортной логистики оптико-геометрический подход впервые применен в научной школе А.Л. Казакова. В работе [29] предложены алгоритмы для решения

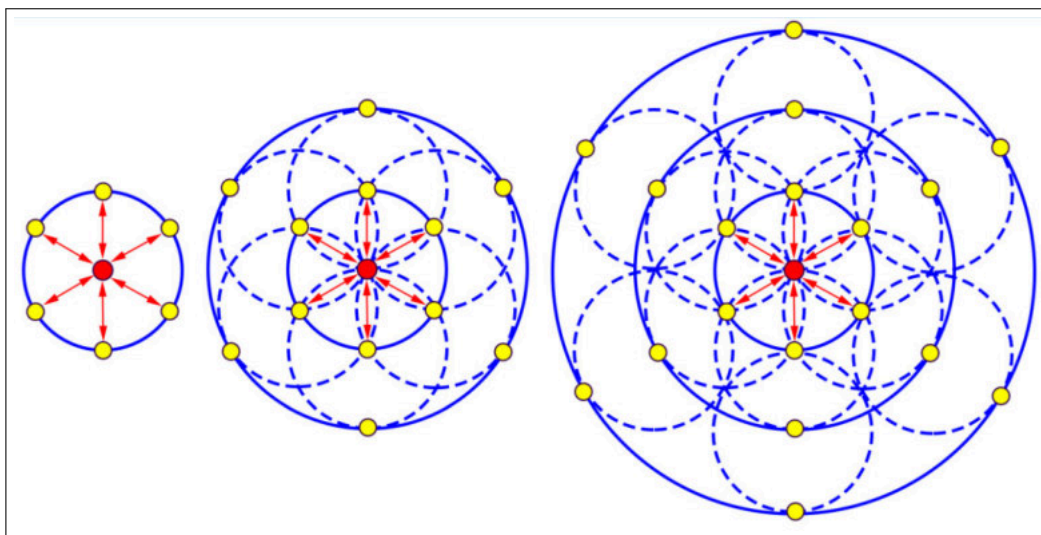


Рис. 1.9: Иллюстрация процесса распространения световой волны.

задачи оптимального размещения логистического центра на полигоне обслуживания и сегментации логистических зон, а в [30] – нескольких логистических центров в условиях, когда потребители непрерывно распределены на всей территории обслуживания. Эти численные алгоритмы были реализованы в рамках программной системы «ВИГОЛТ» [13]. Кроме того, в [31] была рассмотрена задача о построении оптимальной сети коммуникаций в виде неориентированного графа с учетом различных особенностей местности.

Позднее, оптико-геометрический подход совместно с диаграммой Вороного был использован для решения задач о покрытии и упаковке специального вида. В работах [34, 35] предложены эвристические алгоритмы для решения упаковки равных кругов и покрытия замкнутого множества равными кругами в двумерном пространстве. Алгоритмы включает в себя 3 этапа: (1) построение диаграммы Вороного позволяет разделить множество на области, тем самым свести задачу покрытия/упаковки  $n$  кругов к последовательности из  $n$  задач покрытия/упаковки для одного круга; (2) решение задач покрытия/упаковки для одного круга; (3) замена центров области Дирихле на новые центры, что позволяет улучшить результат покрытия. Алгоритмы были использованы для создания программного комплекса «ОТЛП» [32, 36].

В работе [51] П.Д. Лебедев и А.А. Лемперт обратились к задаче упаковки кругов в выпуклые компактные множества на плоскости. Они предложили итерационные алгоритмы, основанные на оптико-геометрическом подходе и чебышевских центрах множеств, для построения оптимальных однократных упаковок равных кругов. Для реализации этих алгоритмов и представления результатов расчетов был разработан программный комплекс в среде MATLAB.

В статье [153] оптико-геометрический подход был модифицирован для задачи упаковки двух типов кругов, а в [157] — для покрытия различными кругами, путем введения световых волн с различными моментами импульса. В последующих работах [171, 172] изучены задачи многократной упаковки равных кругов и многократного покрытия равными кругами [38].

Для решения задачи упаковки шаров в трехмерном пространстве с неевклидовой метрикой разработаны алгоритмы, сочетающие в себе оптико-геометрические методы и элементы бильярдного моделирования. Решены задачи упаковки одинаковых шаров в ограниченные односвязные контейнеры [155]; равных шаров в многосвязные множества [156]; шаров двух различных типов [39] и неравных (различных) шаров [40].

В рамках данной диссертации применяются алгоритмы моделирования распространения волн как в пространстве, так и вдоль поверхности вращения. Пусть заданы поверхность  $S$  в метрическом пространстве  $X$  и точки  $A, B \in S$ . Мгновенная скорость распространения волны в каждой точке пространства  $(x, y, z) \in X$  задана скалярной функцией  $f(x, y, z) \geq 0$ . Для вычисления кратчайшего времени прохождения волнового фронта из точки  $A$  в точку  $B$  применяется метод типа быстрого марша (Fast Marching Method) [215]. Алгоритм заключается в построении фронта волны, последовательно обходящего узлы расчетной сетки в порядке возрастания времени прихода волны, которое находится как решение уравнения эйконала.

**Алгоритм 1 (Wave3D).** Алгоритм распространения волны в пространстве

*Шаг 1: Вводится равномерная сетка  $X_h$  с шагом  $h$  в метрическом пространстве  $X$ ,  $X_h \subset X$ . Для каждой точки  $p(x_p, y_p, z_p) \in X_h$  устанавливается время распространения волны  $T_p = +\infty$ , для начальной точки  $A$ :  $T_A = 0$ . Создается приоритетная очередь  $Q$ ,  $Q = \{A\}$ .*

*Шаг 2: Если  $Q \neq \emptyset$ , для первого элемента  $p \in Q$  определяется множество  $M$ , включающее 26 точек, соседних по сетке с точкой  $p$*

$$M = \{m(x_p + \delta_x, y_p + \delta_y, z_p + \delta_z) : \delta_x \in \{-h, 0, h\}, \delta_y \in \{-h, 0, h\}, \delta_z \in \{-h, 0, h\}\}.$$

*Шаг 3: Для каждой точки  $m \in M$  вычисляется время прохождения световой волны от точки  $A$  до  $m$ :  $T'_m = T_p + t_{pm}$ , где*

$$t_{pm} = 2 \frac{\sqrt{(x_p - x_m)^2 + (y_p - y_m)^2 + (z_p - z_m)^2}}{f(x_p, y_p, z_p) + f(x_m, y_m, z_m)}.$$

*Шаг 4: Если найденное значение  $T'_m < T_m$ , то  $T_m = T'_m$  и  $Q = Q \cup \{m\}$ .*

Шаги 3 и 4 выполняются независимо для каждого элементов  $t \in M$ .

Шаг 5: Точка  $p$  исключается из очереди  $Q = Q \setminus \{p\}$ . Если  $Q = \emptyset$ , алгоритм завершается, иначе переход к шагу 2.  $\square$

По завершении алгоритма получаем набор времен распространения волны из точки  $A$  до всех точек  $p \in X_h$ , включая точку  $B$ .

В отличие от алгоритма **Wave3D**, в представленном ниже алгоритме **WaveSurface** световая волна будет распространяться по поверхности  $S$ . Пусть  $\rho(p, q)$  — геодезическое расстояние между двумя точками  $p, q \in S$ , а поверхность вращения  $S$  задана параметрически в сферических или цилиндрических координатах  $\alpha, \beta$ .

**Алгоритм 2 (WaveSurface).** Алгоритм распространения волн по поверхности

Шаг 1: Вводится равномерная сетка  $S(s\alpha, s\beta) \subset S$  с шагами параметров  $s\alpha, s\beta$ . Для каждой точки  $p(\alpha_p, \beta_p) \in S(s\alpha, s\beta)$  устанавливается время распространения волны  $T_p = +\infty$ , для начальной точки  $A$ :  $T_A = 0$ . Создается приоритетная очередь  $Q$ ,  $Q = \{A\}$ .

Шаг 2: Если  $Q \neq \emptyset$ , для первого элемента  $p \in Q$  определяется множество  $M$ , включающее 8 точек, соседних по сетке с точкой  $p$

$$M = \{m(\alpha_p + \delta_\alpha, \beta_p + \delta_\beta) : \delta_\alpha \in \{-s\alpha, 0, s\alpha\}, \delta_\beta \in \{-s\alpha, 0, s\alpha\}\}.$$

Шаг 3: Для каждой точки  $m \in M$  определяется время прохождения световой волны от точки  $A$  до  $m$ :  $T'_m = T_p + t_{pm}$ , где  $t_{pm}$  — время прохождения световой волны по поверхности от точки  $p$  до  $m$ :

$$t_{pm} = 2 \frac{\rho(p, m)}{f(p) + f(m)}.$$

Шаг 4: Если найденное значение  $T'_m < T_m$ , то  $T_m = T'_m$  и  $Q = Q \cup \{m\}$ .

Шаги 3 и 4 выполняются независимо для каждого элементов  $m$  множества  $M$ .

Шаг 5: Точка  $p$  исключается из очереди  $Q = Q \setminus \{p\}$ . Если  $Q = \emptyset$ , алгоритм завершается, иначе переход к шагу 2.  $\square$

Главное отличие в алгоритмах состоит в том, что алгоритм **Wave3D** для вычисления времени перемещения между точками использует евклидово расстояние, тогда как алгоритм **WaveSurface** — геодезическое расстояние.

#### 1.4.5 Бильярдное моделирование

Бильярдное моделирование — один из немногих методов глобальной оптимизации, применяемых для решения задач покрытия и упаковки как в двухмерном, так и в трехмерном пространстве. Этот метод был представлен в работе [178] при рассмотрении задачи

упаковки кругов в двумерном пространстве. Основной метод заключается в следующем: каждый шар рассматривается как бильярдный шар, способный свободно перемещаться в определенном пространстве, но при этом он должен соответствовать двум правилам: не накладываться на другие и не выходить за границы множества. Впоследствии ученые объединили этот метод с другими методами для решения задачи упаковки в трехмерном пространстве.

В двумерном пространстве Р.Л. Грехем и его коллеги использовали метод бильярдного моделирования в сочетании с моделированием тяги, чтобы найти плотнейшие упаковки равных кругов в единичный круг. Метод, представленный в работе [132], заключается в следующем: каждый круг в контейнере рассматривается как бильярдный шар с небольшим радиусом и случайным начальным направлением движения. Процесс нахождения результата осуществляется после серии столкновений и постепенного увеличения размеров шариков. Путем итерационного запуска алгоритма можно найти глобально оптимальное решение. Оптимальные результаты были достигнуты при количестве шаров  $25 \leq n \leq 65$ . Среди них были случаи, когда оптимальных решений было два варианта. С помощью этого метода были найдены оптимальные упаковки  $n$  равных шаров в равносторонний треугольник при количестве шаров  $22 \leq n \leq 34$  [129] и в квадрат в некоторых особых случаях  $n$  [130].

В трехмерном пространстве в работе [127] автор применил данный метод для размещения равных сфер и нашел несколько оптимальных решений за конечное число шагов. Предложенный метод заключается следующим: сначала случайным образом выбираются  $n$  точек в качестве центров сфер в кубе, при этом диаметр сфер выбирается по кратчайшему расстоянию между их центрами. Далее рассматриваются два типа движения сфер. Первый тип представляет собой случайное движение сфер: направление движения сфер выбирается произвольно и остается неизменным, сферы движутся последовательно, одна за другой. При этом радиус сфер не изменяется, и если какая-либо сфера перекрывает другую, то такое перемещение не происходит. Второй тип представляет собой одновременное хаотичное движение всех сфер. Сферы хаотично движутся, при этом их радиус постепенно увеличивается.

В работе [39] Казаков А.Л. и его коллеги использовали бильярдный метод для решения задачи упаковки двух типов шаров в замкнутое ограниченное множество в трехмерном пространстве. Авторы объединили оптико-геометрический подход и бильярдное моделирование для максимизации радиуса шаров при известном количестве шаров каждого типа и определенном соотношении между радиусами. Эта комбинация выполняется

не только в евклидовой, но и в неевклидовой метрике, а также может использоваться с различными типами замкнутых множеств, такими как кубы, сферы и другие.

### 1.5 Вывод по главе 1

Проведенный анализ литературы свидетельствует о тесной связи задач построения оптимальных покрытий и упаковок с прикладными проблемами. Основные исследования сосредоточены на решении двумерных задач с простыми множествами-контейнерами, такими как квадраты, круги и прямоугольники. Однако даже в этих случаях оптимальные конфигурации найдены лишь для небольшого числа покрывающих или упаковываемых элементов. Несмотря на наличие теоретических оценок максимальной плотности покрытий и упаковок, они не предлагают конструктивных методов их построения. Важно отметить, что эти задачи относятся к классу NP-трудных, что стимулировало развитие численных методов поиска рекордных (best of known) конфигураций. Среди них можно выделить подходы, основанные на математическом программировании и конечномерной оптимизации, геометрические и эвристические методы, а также методы, использующие физические аналогии.

В трехмерном пространстве и пространствах большей размерности задачи построения оптимальных покрытий и упаковок исследованы в значительно меньшей степени. Большинство известных методов ориентировано на работу со сферой или эллипсоидом, тогда как другие поверхности вращения остаются практически не изученными в этом контексте.

Эффективным инструментом решения задач с неевклидовой метрикой зарекомендовал себя оптико-геометрический подход, который демонстрирует высокую результативность как в двумерном, так и в трехмерном случаях.

В данной диссертационной работе развиваются исследования, проводимые в научной школе А.Л. Казакова. Автор разрабатывает математические модели в форме задач покрытия и упаковки для поверхностей вращения, а также предлагает методы их решения на основе модификации оптико-геометрического подхода.

## Глава 2: Математические модели покрытий и упаковок на поверхностях вращения

### 2.1 Математическая формализация

*Задача о покрытии:* в системах мониторинга требуется разместить устройства в трехмерном пространстве таким образом, чтобы их совокупное поле зрения полностью охватывало заданную поверхность. При этом отдельные участки поверхности могут находиться в зоне действия нескольких устройств, а радиус покрытия каждого устройства зависит от характеристик окружающей среды, таких как оптическая плотность. Поскольку радиус действия устройства напрямую связан с его энергопотреблением, важно минимизировать этот параметр, что позволяет снизить требования к емкости источников питания.

Покрываемая поверхность в общем случае может иметь сложную геометрическую форму. В рамках данного исследования рассматриваются поверхности вращения: сфера, эллипсоид, цилиндр и конус. Сферическая и эллипсоидная модели актуальны, например, при проектировании спутниковых сетей связи, где необходимо расположить спутники так, чтобы обеспечить покрытие всей поверхности Земли. В таких задачах Землю часто аппроксимируют сферой [210]. Аналогичная проблема возникает в радиохирургии при лечении опухолей головного мозга с помощью гамма-излучения. Врач должен так распределить сферические зоны облучения, чтобы опухоль была равномерно покрыта, избегая участков с чрезмерной дозой радиации, что может негативно сказаться на здоровье пациента. В данном случае форма опухоли моделируется эллипсоидом [113, 174]. Цилиндрические и конические поверхности характерны для архитектурных конструкций и их элементов.

*Задача об упаковке:* необходимо организовать систему наблюдения таким образом, чтобы поле зрения каждого устройства на поверхности было максимально возможным, а зоны действия не пересекались. Как и в задаче о покрытии, рассматриваются различные геометрические формы поверхности: сфера, эллипсоид, цилиндр, конус и другие. Такие задачи возникают, например, при размещении датчиков для регистрации сигналов на больших расстояниях или при проектировании солнечных энергетических установок [79]. В частности, при создании сферических фокальных поверхностей необходимо размещать микрооптические элементы на сферическом сегменте с заданным угловым шагом, максимизируя плотность упаковки [145, 222]. Кроме того, задача об упаковке широко приме-

няется в теории информации при построении сферических кодов. Такие коды используются для повышения помехоустойчивости при передаче данных на большие расстояния, например, в спутниковой связи [218, 219]. Для их реализации требуется решить задачу оптимального размещения равных кругов на сфере [14, 216].

При исследовании задач покрытия и упаковки необходимо учитывать следующие ключевые аспекты:

- Геометрическая форма рассматриваемых поверхностей может существенно варьироваться: сфера, цилиндр, конус, эллипсоид и другие поверхности вращения.
- Важным фактором является неравномерность движения по поверхности, что требует введения специальной неевклидовой метрики для корректного математического описания.
- В системах мониторинга возможны два варианта размещения устройств: непосредственно на поверхности или на некотором расстоянии от нее. Однако поскольку зоны действия устройств в обоих случаях проецируются на одну и ту же поверхность, в рамках данного исследования рассматривается только первый вариант - размещение непосредственно на поверхности.
- Форма зоны действия устройства существенно зависит от типа поверхности:
  - Для сферической поверхности зона действия представляет собой сферический сегмент (см. рис. 2.1)
  - В случае цилиндрической или конической поверхности зона действия образуется пересечением цилиндра (конуса) и шара, что дает кривую четвертого порядка [169]
- В отдельных случаях зону действия целесообразно определять как «*геодезический круг*», что позволяет учитывать геодезические расстояния между точками на поверхности. Такой подход применяется, например, при проектировании сферических фокальных поверхностей [252].

Выполним математическую формализацию предметных моделей.

Пусть в метрическом пространстве  $X$  заданы поверхность вращения  $S \subset X$ ;  $n$  — количество устройств;  $O_i(x_i, y_i, z_i) \in S$ ,  $i = \overline{1, n}$  — координаты  $i$ -ого устройства, которые принадлежат поверхности вращения  $S$  и непрерывная функция  $0 \leq f(x, y, z) \leq \beta$ , определяющая мгновенную скорость движения в каждой точке  $(x, y, z) \in X$ . Минимальное

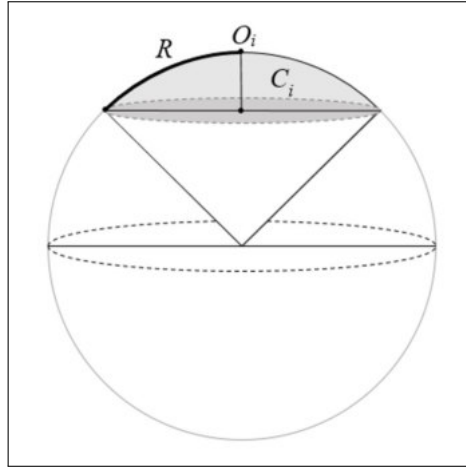


Рис. 2.1: Сферический сегмент  $C_i$  центром  $O_i$  с геодезическим радиусом  $R$ .

время перемещения между двумя точками  $a, b \in X$  определяется из решения задачи

$$\sigma(a, b) = \min_{\Gamma \in H(a, b)} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{f(x, y, z)}, \quad (2.1)$$

где  $H(a, b)$  — множество непрерывных кривых, соединяющих точки  $a$  и  $b$ . Иначе говоря, кратчайшим путем между двумя точками мы будем считать кривую, на перемещение вдоль которой требуется наименьшее время [29].

Если  $f(x_i, y_i, z_i) = 0$ , то точка  $(x_i, y_i, z_i)$  считается непроходимой. Если  $f(x, y, z) = 1$ , выражение  $\sigma(a, b)$  определяет обычное евклидово расстояние. В остальных случаях (2.1) определяет минимальное время перемещения между  $a$  и  $b$ , которое будет использоваться как мера удаленности этих точек.

Рассматривается множество  $G(a, b)$  — множество непрерывных кривых, принадлежащих  $S$  и соединяющих точки  $a$  и  $b$ , тогда минимальное время перемещения между двумя точками  $a, b$  вдоль поверхности  $S$  определяется из решения

$$\rho(a, b) = \min_{\Gamma \in G(a, b)} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{f(x, y, z(x, y))}. \quad (2.2)$$

Если  $f(x, y, z(x, y)) = 1$ , интеграл из (2.2) легко вычисляется и выражение  $\rho(a, b)$  определяет наименьшее расстояние на поверхности  $S$  между двумя точками  $a$  и  $b$  — *геодезическое расстояние*. В остальных случаях (2.2) определяет минимальное время перемещения между  $a$  и  $b$ , которое будет использоваться как мера удаленности этих точек.

Рассматриваем задачу о покрытии и упаковке в следующем виде:

**Постановка задачи о покрытии.** Необходимо разместить  $n \geq 1$  устройств с одинаковыми радиусами действия  $R$  на поверхности  $S$  так, чтобы поверхность  $S$  принадлежала объединению зон действия устройств и радиус действия устройств был минимально возможным.

Поскольку в этой постановке устройства имеют одинаковый радиус действия  $R$ , зона действия  $i$ -го устройства определяется формулой

$$D_i = \{p \in S : \sigma(O_i, p) \leq R\},$$

и условие, гарантирующее, что поверхность  $S$  принадлежала объединению зон действия устройств, можно записать как

$$S \subset \bigcup_{i=1}^n D_i.$$

Это также значит, что каждая точка  $p$  на поверхности  $S$  будет покрыта минимум одним устройством:

$$\forall p \in S, \exists i: \sigma(O_i, p) \leq R.$$

Кроме того, поскольку устройства находятся на поверхности,  $O_i \in S, i = \overline{1, n}$ .

С другой стороны, необходимо минимизировать радиус действия устройств, поэтому целевая функция задачи может быть описана следующим образом:

$$F_{cov} = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{p \in D_i} \sigma(O_i, p) \rightarrow \min. \quad (2.3)$$

Функция (2.3) минимизирует время распространения сигнала от устройства до границы его зоны действия. Если рассматривать зону действия устройства как единый объект, то положение устройства  $O_i$  – центр объекта и радиус зоны действия – радиус объекта, тогда решение задачи с целевой функцией (2.3) аналогично решению задачи о покрытии поверхности равными объектами с минимальным радиусом. Задачу о покрытии можно представить следующим образом.

Необходимо разместить  $n$  одинаковых объектов  $C_i$  с центрами  $O_i = (x_i, y_i, z_i) \in S$  и одинаковыми радиусами  $R$ , который будем называть радиусом покрытия, чтобы поверхность  $S$  принадлежала объединению объектов и радиус  $R$  был минимальным:

$$R \rightarrow \min, \quad (2.4)$$

$$\forall p \in S, \exists i: \sigma(O_i, p) \leq R, \quad (2.5)$$

$$O_i \in S, i = \overline{1, n}, \quad (2.6)$$

Целевая функция (2.4) минимизирует радиус покрытия. Условие (2.5) гарантирует, что любая точка поверхности  $S$  принадлежит по крайней мере одному покрывающему объекту, а (2.6) означает, что все центры объектов располагаются на поверхности  $S$ .

Исходя из разных типов поверхностей и типов объектов, мы рассматриваем следующие варианты:

**Вариант П1.** Поверхность  $S$  является единичной сферой и принадлежит объединению заданного числа шаров. Исключим из рассмотрения части шаров, лежащие внутри сферы, тогда сфера будет покрыта набором поверхностей, представляющими собой пересечения шаров и сферы. Иначе говоря, покрывающие объекты  $C_i$  будут равными сферическими сегментами, а радиус покрытия  $R$  есть их угловой размер — геодезическое расстояние между центром и границей сферического сегмента (см. рис. 2.1). Тогда задача (2.4)–(2.6) примет вид:

$$R \rightarrow \min, \quad (2.7)$$

$$\forall p \in S, \exists i: \rho(O_i, p) \leq R, \quad (2.8)$$

$$O_i \in S, i = \overline{1, n}, \quad (2.9)$$

**Вариант П2.** Поверхность  $S$  является сферическим сегментом с угловым размером  $\theta$ , а объекты  $C_i$  — геодезические круги. Тогда радиус покрытия  $R$  — радиус геодезического круга. Данный вариант соответствует задаче покрытия сферического сегмента равными геодезическими кругам. Задача (2.7)–(2.9) не изменится.

**Вариант П3.** Поверхность  $S$  является эллипсоидом, боковой поверхностью цилиндра или боковой поверхностью конуса, а объекты  $C_i$  — шары. Тогда зона действия устройства понимается как пересечение шара  $C_i$  и поверхности  $S$ , поэтому радиус покрытия  $R$  — радиус шара. Данный вариант соответствует задаче покрытия поверхности  $S$  равными шарами.

**Постановка задачи об упаковке:** Необходимо разместить  $n$  устройств с одинаковыми радиусами действия  $R$  на поверхности  $S$  так, чтобы радиус действия  $R$  был максимальным, все зоны действия устройств не пересекались и не выходили за границу поверхности  $S$ .

В этой постановке задачи устройства находятся на поверхности, поэтому  $O_i \in S, i = \overline{1, n}$ . Кроме того, что зона действия  $i$ -го устройства определяется формулой

$$D_i = \{p \in S : \sigma(O_i, p) \leq R\},$$

тогда условие, гарантирующее, что все зоны действия устройств не пересекались, будет эквивалентно условию, что расстояние между двумя устройствами должно быть больше радиуса действия. Это можно записать как

$$\sigma(O_i, O_j) \geq 2R, \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j.$$

Условие, гарантирующее, что все зоны действия устройств не выходят за границу поверхности, задается следующими образом. Пусть  $\partial S$  – граница поверхности  $S$ , тогда

$$\sigma(O_i, \partial S) \leq R, \forall i = \overline{1, n}.$$

Отметим, что в случае, когда поверхность  $S$  замкнута (например, сфера или эллипсоид), данное условие выполняется автоматически.

Необходимо максимизировать радиус действия устройств, поэтому целевая функция задачи может быть описана следующим образом:

$$F_{pack} = \min_{1 \leq i \leq n} \max_{p \in D_i} \sigma(O_i, p) \rightarrow \max \quad (2.10)$$

Если рассматривать зону действия устройства как единый объект, то положение устройства  $O_i$  – центр объекта и радиус зоны действия – радиус объекта, тогда решение задачи с целевой функцией (2.10) аналогично решению задачи о упаковке равных объектов с максимальным радиусом на поверхности  $S$  с метрикой (2.1). Тогда задача переформулируется следующим образом:

Необходимо разместить  $n$  одинаковых объектов  $C_i$  с центрами  $O_i = (x_i, y_i, z_i) \in S$  и одинаковыми радиусами  $R$ , который будем называть радиусом упаковки, чтобы радиус  $R$  был максимальным, объекты  $C_i$  не пересекались друг с другом и не выходили за границу  $\partial S$  поверхности  $S$ :

$$R \rightarrow \max, \quad (2.11)$$

$$\sigma(O_i, O_j) \geq 2R, \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j \quad (2.12)$$

$$\sigma(O_i, \partial S) \geq R, \forall i = \overline{1, n} \quad (2.13)$$

$$O_i \in S, i = \overline{1, n}, \quad (2.14)$$

Целевая функция (2.11) максимирует радиус упаковки. Условие (2.12) гарантирует, что расстояние между двумя центрами объектов не меньше чем  $2R$ , т.е. объекты не пересекаются. Условие (2.13) обеспечивает, что объекты не пересекают границу  $\partial S$ . Условие (2.14) означает, что все центры объектов располагаются на поверхности  $S$ . Если поверхность  $S$  является сферой или эллипсоидом, то условие (2.13) выполняется автоматически.

Исходя из разных типов поверхностей и типов объектов, мы рассматриваем следующие варианты:

**Вариант У1.** Множество  $S$  является единичной сферой, а упаковываемые объекты  $C_i$  – сферические сегменты. Тогда радиус упаковки  $R$  является угловым размером сегмента. В этом варианте, условие (2.13) автоматически выполняется и угловой размер

$R$  определяется как геодезическое расстояние между центром и границей сферического сегмента (см. рис. 2.1), поэтому задача (2.11)-(2.14) примет вид:

$$R \rightarrow \max, \quad (2.15)$$

$$\rho(O_i, O_j) \geq 2R, \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j \quad (2.16)$$

$$\rho(O_i, \partial S) \geq R, \forall i = \overline{1, n} \quad (2.17)$$

$$O_i \in S, i = \overline{1, n}, \quad (2.18)$$

**Вариант У2.** Множество  $S$  является сферическим сегментом с углом размером  $\theta$ , а  $C_i$  – геодезические круги. Тогда радиус упаковки  $R$  – радиус геодезического круга. В этом варианте геодезические круги не выходят за границу  $\partial S$  сферического сегмента  $S$  и радиус  $R$  определяется как геодезическое расстояние от центра до геодезической окружности. Отсюда, задача (2.11)-(2.14) примет вид:

$$R \rightarrow \max, \quad (2.19)$$

$$\rho(O_i, O_j) \geq 2R, \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j \quad (2.20)$$

$$O_i \in S, i = \overline{1, n}, \quad (2.21)$$

**Вариант У3.** Множество  $S$  является эллипсоидом, боковой поверхностью цилиндра или боковой поверхностью конуса, а  $C_i$  – шары. Тогда радиус упаковки  $R$  – радиус шара. Данный вариант соответствует задаче упаковки равных шаров на поверхности  $S$ . Тогда задача (2.11)-(2.14) не изменится.

## 2.2 Геодезическое расстояние на поверхности

В рассматриваемых постановках важной задачей является определение геодезического расстояния между двумя точками на поверхности. Для каждого типа поверхности геодезическое расстояние определяется по-разному. В данном разделе вводится геодезическое расстояние для сферы, боковых поверхностей цилиндра и конуса, а также для эллипсоида.

### 2.2.1 Геодезическое расстояние на сфере

Если поверхность  $S$  представляется собой единичную сферу, тогда представим единичную сферу  $S$  в сферических координатах:

$$S = \{(\alpha, \beta) : 0 \leq \alpha < 2\pi, -\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2\},$$

где  $(\alpha, \beta)$  — долгота и широта соответственно. Тогда

$$\begin{cases} x = \cos \beta \cos \alpha, \\ y = \cos \beta \sin \alpha, \\ z = \sin \beta. \end{cases}$$

Из геометрии сферы следует, что геодезическое расстояние  $d_{sph}(a, b)$  между двумя точками  $a$  и  $b$  на сфере  $S$  равно длине наименьшей дуги, соединяющей точки  $a$  и  $b$  на  $S$ :

$$d_{sph}(a, b) = \arccos(\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad (2.22)$$

где  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  — скалярное произведение векторов  $\vec{Oa}$  и  $\vec{Ob}$ ,  $O$  — начала координат (см. рис 2.2).

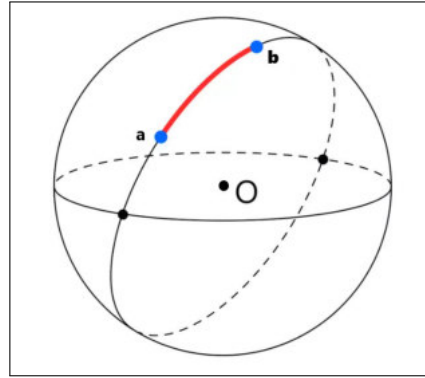


Рис. 2.2: Дуга большого круга, соединяющая точки  $a$  и  $b$ .

### 2.2.2 Геодезическое расстояние на боковой поверхности цилиндра

Если поверхность  $S$  представляется собой боковую поверхность прямого цилиндра с радиусом основания  $r$  и высотой  $h$ , тогда  $S$  может быть описана как:

$$S = \{x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha, z = u : \alpha \in [0, 2\pi); u \in [0, h]\}, \quad (2.23)$$

где  $\alpha$  — угол вращения, и  $u$  — высота точки.

Пусть  $a(\alpha_1, u_1)$  и  $b(\alpha_2, u_2)$  лежат на поверхности цилиндра. Развернув боковую поверхность цилиндра, получим прямоугольник с размерами  $2\pi r$  и  $h$ . Каждой точке  $a$  на боковой поверхности будет соответствовать одна и только одна точка  $a'$  на прямоугольнике. Координаты точки  $a'$  будут  $(\pi\alpha_1, u_1)$  и  $b'(\pi\alpha_2, u_2)$  (см. рис. 2.3). Тогда длина кратчайшей кривой  $d_{cyl}(a, b)$  между двумя точками  $a$  и  $b$  на боковой поверхности прямого цилиндра будет равна длине  $d(a', b')$  прямой, соединяющей две точки  $a'$  и  $b'$  на плоскости:

$$d_{cyl}(a, b) = d(a', b') = \sqrt{\pi^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (u_1 - u_2)^2}. \quad (2.24)$$

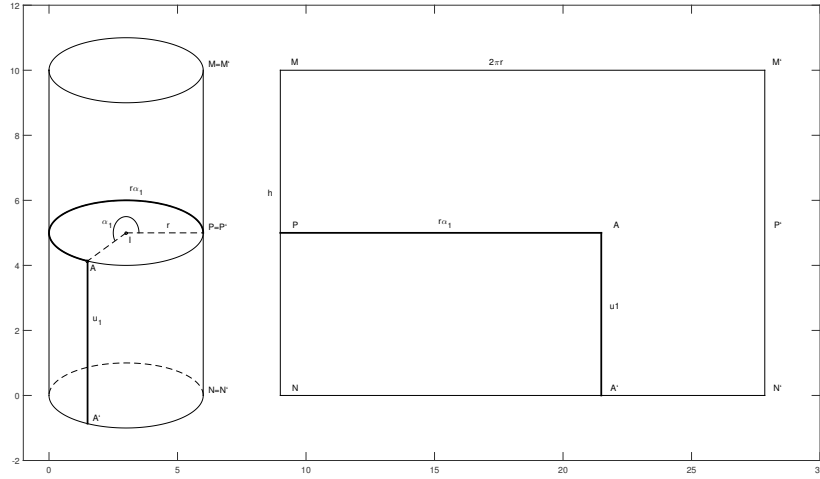


Рис. 2.3: Развертка боковой поверхности цилиндра

### 2.2.3 Геодезическое расстояние на боковой поверхности конуса

Боковая поверхность конуса с радиусом основания  $r$  и высотой  $h$  имеет вид

$$S = \left\{ x = u \cos \alpha, y = u \sin \alpha, z = h \left( 1 - \frac{u}{r} \right) : \alpha \in [0, 2\pi); u \in [0, r] \right\}, \quad (2.25)$$

где  $\alpha$  – угол вращения, и  $u$  – отношение радиуса к высоте.

Пусть  $a(\alpha_1, u_1)$  и  $b(\alpha_2, u_2)$  лежат на поверхности конуса. Кратчайшая кривая  $d_{con}(a, b)$ , соединяющая эти точки есть часть спирали. Развернув боковую поверхность конуса, получим сектор, в котором центр сектора  $O$  является вершиной конуса, радиус сектора равен образующей конуса, а длина дуги сектора равна периметру основания конуса. Каждой точке  $a$  на поверхности конуса будет соответствовать одна и только одна точка  $a'$  в секторе. Тогда  $Oa' = \sqrt{\frac{u_1^2}{r^2}(h^2 + r^2)}$  и угол вращения  $\alpha_1$  (см. рис. 2.4). Аналогично, точке  $b$  соответствует точка  $b'$ . Кратчайшее расстояние  $d_{con}(a, b)$  между точками  $a$  и  $b$  на поверхности конуса равно евклидову расстоянию  $d(a', b')$  между соответствующими точками на плоскости развертки. Применяя теорему косинусов к треугольнику  $Oa'b'$ , получаем:

$$d_{cyl}(a, b) = d(a', b') = \sqrt{\left( 1 + \frac{h^2}{r^2} \right) \left( u_1^2 + u_2^2 - 2u_1u_2 \cos \frac{r|\alpha_1 - \alpha_2|}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right)} \quad (2.26)$$

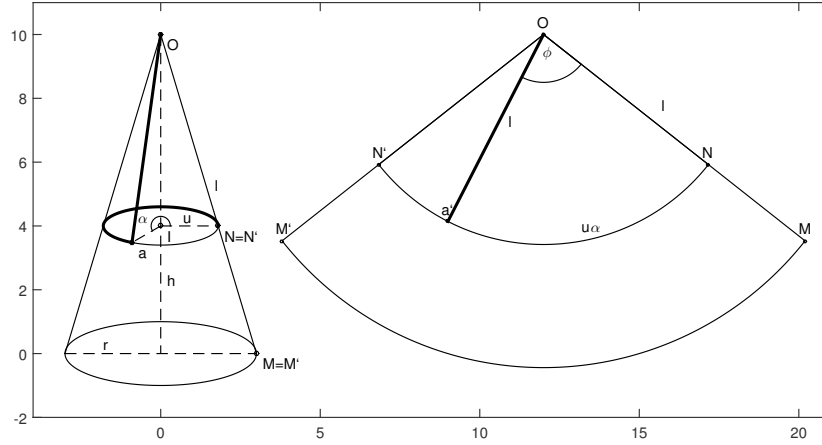


Рис. 2.4: Развертка поверхности конуса

### 2.2.4 Геодезическое расстояние на эллипсоиде

Пусть поверхность  $S$  представляется собой эллипсоид с центром в начале координат, заданный параметрически:

$$\begin{cases} x = a \cos \mu \cos \theta \\ y = b \cos \mu \sin \theta \\ z = c \sin \mu \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 2\pi; \frac{-\pi}{2} \leq \mu \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2.27)$$

где величины  $a, b, c$  — полуоси эллипсоида,  $\theta$  — долгота и  $\mu$  — широта.

Геодезическое расстояние  $ds$  определяется из решения уравнения

$$ds^2 = Hd\mu^2 + Gd\theta^2, \quad (2.28)$$

где значения  $H$  и  $G$  разные для каждого типа эллипсоида.

Рассмотрим двухосный эллипсоид, полуоси которого удовлетворяют условию  $a = b > c$  [200], тогда

$$H = \frac{a^2(1 - d^2)^2}{(1 - d^2 \sin^2 \mu)^3}, G = \frac{a^2 \cos^2 \mu}{1 - d^2 \sin^2 \mu}, d = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2}.$$

Для трехосного эллипсоида [201] с полуосями  $a > b > c$  параметры  $H$  и  $G$  определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} H &= H_\mu(h_y^2 \cos^2 \mu + h_z^2 \sin^2 \mu), G = G_\theta(h_y^2 \cos^2 \mu + h_z^2 \sin^2 \mu), \\ H_\mu &= \frac{b^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu}{h_x^2 - h_y^2 \sin^2 \mu}, G_\theta = \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}{h_x^2 - h_z^2 \sin^2 \theta}, \\ h_x &= \sqrt{a^2 - c^2}, h_y = \sqrt{b^2 - c^2}, h_z = \sqrt{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Мы считаем, что кривая на эллипсоиде описывается соотношением  $\mu = \mu(\theta)$ , т.е. эллипсоидальная широта является функцией эллипсоидной долготы. Из (2.28) следует, что криволинейный элемент имеет вид:  $ds = \sqrt{H(u')^2 + G}d\theta$ , где  $u' = \frac{d\mu}{d\theta}$ .

Следовательно, длина  $s$  кривой  $\mu = \mu(\theta)$  из  $\theta_0$  до  $\theta_1$  ( $\theta_0 < \theta_1$ ) определяется как

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} g(\theta, \mu, \mu')d\theta,$$

где  $g(\theta, \mu, \mu') = \sqrt{H(u')^2 + G}$ .

Пусть  $\theta_0 \neq \theta_1$ , иначе говоря,  $s \neq 0$ . Тогда  $\mu = \mu(\theta)$  удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа:  $\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial g}{\partial \mu'} \right) - \frac{\partial g}{\partial \mu} = 0$ . Записывая полную производную, получим:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \mu' \partial \mu'} \mu'' + \frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial \mu'} \mu' + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial \mu'} - \frac{\partial g}{\partial \mu} = 0. \quad (2.29)$$

Подставляя выражение  $g(\theta, \mu, \mu') = \sqrt{H(u')^2 + G}$ , получаем

$$\frac{\partial g}{\partial \mu'} = \frac{H\mu'}{\sqrt{H(u')^2 + G}}, \quad \frac{\partial g}{\partial \mu} = \frac{H_\mu((\mu')^2 + G')}{2\sqrt{H(u')^2 + G}}, \quad (2.30)$$

где  $H_\mu = \frac{dH}{d\mu}$ ,  $G_\mu = \frac{dG}{d\mu}$ ,  $H_\theta = \frac{dH}{d\theta}$ ,  $G_\theta = \frac{dG}{d\theta}$ .

Подставив соотношения (2.29) в уравнение (2.30), получаем

$$2HG\mu'' + HH_\theta(\mu')^3 - (2HG_\mu - H_\mu G)(\mu')^2 + (2H_\theta G - HG_\theta)\mu' - GG_\mu = 0. \quad (2.31)$$

Это нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с краевыми условиями

$$\mu(\theta_0) = \mu_0, \mu(\theta_1) = \mu_1. \quad (2.32)$$

Краевая задача (2.31), (2.32) преобразуются в задачу Коши, в которой уравнение (2.31) записывается как система двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\theta}(\mu) = f_1(\theta, \mu, \mu') \\ \frac{d}{d\theta}(\mu') = f_2(\theta, \mu, \mu') \end{cases}, \quad (2.33)$$

где  $f_1(\theta, \mu, \mu') = \mu'$  и  $f_2(\theta, \mu, \mu') = -\frac{H_\theta}{2G}(\mu')^3 + \frac{(2HG_\mu - H_\mu G)(\mu')^2}{2HG} - \frac{2H_\theta G - HG_\theta}{2HG}\mu' + \frac{G_\mu}{2H}$ .

Начальные значения, связанные с этой системой, следующие:

$$\mu(\theta_0) = \mu_0, \mu'_0 = \mu'(\theta_0), \quad (2.34)$$

где  $\mu'_0 = \mu'(\theta_0)$  - неизвестное значение и необходимо найти. При заданных начальных значениях (2.34) система уравнений (2.33) может быть численно интегрирована, что позволяет определить решение  $\mu = \mu(\theta)$ , которое соответствует начальным значениям (2.34).

По этой причине геодезическую линию удобнее описать как  $\mu = \mu(\mu_0, \mu'_0, \theta)$ . Поэтому нам нужно определить неизвестное значение  $\mu'_0$ , удовлетворяющее  $\mu(\mu_0, \mu'_0, \theta) = \mu_1$ .

Мы начнем с значением  $\mu_0^{(0)}$  и система уравнений (2.33) может быть интегрирована на интервале  $[\theta_0; \theta_1]$  любым удобным численным методом (например, методом Рунге-Кутты 4-го порядка). Таким образом, мы определяем геодезическую линию  $\Gamma^{(0)} : \mu = \mu(\mu_0, \mu_0^{(0)}, \theta)$ , где  $\mu(\mu_0, \mu_0^{(0)}, \theta_1) = \mu_1^{(0)} \neq \mu_1$  (см. рис. 2.5).

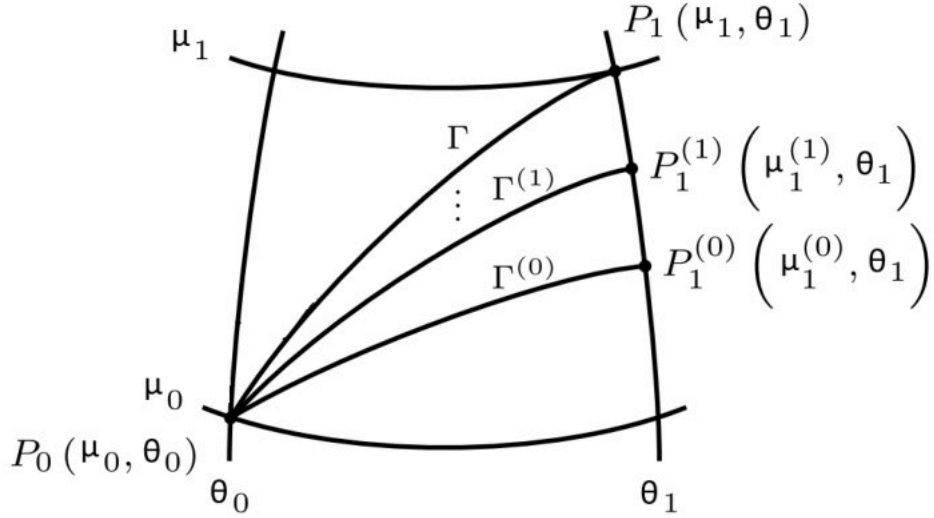


Рис. 2.5: Геодезическая линия на эллипсоиде

После этого, мы ищем поправку  $\Delta^{(0)}$  такую, что:  $\mu(\mu_0, \mu_0^{(0)} + \Delta^{(0)}, \theta_1) = \mu_1$ . Используем теорему Тейлора для произвольных дифференцируемых функций (только свободный член и член первого порядка), получаем:

$$\mu_1 = \mu(\mu_0, \mu_0^{(0)} + \Delta^{(0)}, \theta_1) = \mu(\mu_0, \mu_0^{(0)}, \theta_1) + \frac{\partial \mu}{\partial \mu_0^{(0)}} \Delta^{(0)},$$

откуда  $\Delta^{(0)} = \frac{\mu_1 - \mu_1^{(0)}}{\frac{\partial \mu}{\partial \mu_0^{(0)}}}$ . В этом уравнении есть неизвестное значение, поэтому для решения, система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial \mu}{\partial \mu_0'} \right) = \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mu_0'} + \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \mu_0'} + \frac{\partial f_1}{\partial \mu'} \frac{\partial \mu'}{\partial \mu_0'}, \\ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial \mu'}{\partial \mu_0'} \right) = \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mu_0'} + \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \mu_0'} + \frac{\partial f_2}{\partial \mu'} \frac{\partial \mu'}{\partial \mu_0'}. \end{cases} \quad (2.35)$$

Интегрируя и решая систему уравнений (2.33) и (2.35), мы получаем геодезическую линию  $\Gamma^{(0)}$  и значение  $\Delta^{(0)}$ , которое требуется для начала новой итерации.

Теперь мы начинаем со значения:  $\mu_0^{(1)} = \mu_0^{(0)} + \Delta^{(0)}$ . С помощью численного интегрирования на интервале  $[\theta_0; \theta_1]$  определяем геодезическую линию  $\Gamma^{(1)} : \mu = \mu(\mu_0, \mu_0^{(1)}, \theta)$ , где  $\mu(\mu_0, \mu_0^{(1)}, \theta_1) = \mu_1^{(1)} \neq \mu_1$  (см. рис. 2.5) и снова находим поправку  $\Delta^{(1)} = \frac{\mu_1 - \mu_1^{(1)}}{\frac{\partial \mu}{\partial \mu_0^{(1)}}}$ .

Процесс повторяется  $m$  раз до тех пор, пока не будет получено значение  $\mu_0^{(m)}$ , такое, что  $|\mu_0^{(m)} - \mu_1| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – это точность, которая должна быть достигнута. Отсюда также определяются и рассчитываются координаты любой точки геодезической линии [200, 201]. Следовательно, этот метод можно использовать для расчета и построения геодезических линий между двумя заданными точками на двухосном или трехосном эллипсоиде.

Решение системы уравнений (2.35) положим  $g_1 = \mu, g_2 = \mu', g_3 = \frac{\partial \mu}{\partial \mu_0}, g_4 = \frac{\partial \mu'}{\partial \mu_0}$ . Система уравнений (2.35) примет вид

$$\begin{cases} g_1' = g_2, \\ g_2' = p_3(g_2)^3 + p_2(g_2)^2 + p_1g_2 + p_0, \\ g_3' = g_4, \\ g_4' = [q_3(g_2)^3 + q_2(g_2)^2 + q_1g_2 + q_0]g_3 + [3p_3(g_2)^2 + 2p_2g_2 + p_1]g_4, \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\text{где } p_3 = -\frac{H_\theta}{2G}, p_2 = \frac{2HG_\mu - H_\mu G}{2HG}, p_1 = -\frac{2H_\theta G - HG_\theta}{2HG}, p_0 = \frac{G_\mu}{2H},$$

$$q_3 = \frac{\partial p_3}{\partial \mu} = \frac{H_{\theta\mu}G - H_\theta G_\mu}{2G^2}, q_2 = \frac{\partial p_2}{\partial \mu} = \frac{GG_{\mu\mu} - G_\mu G_\mu}{G^2} - \frac{HH_{\mu\mu} - H_\mu H_\mu}{H^2},$$

$$q_1 = \frac{\partial p_1}{\partial \mu} = \frac{GG_{\mu\theta} - G_\mu G_\theta}{2G^2} - \frac{HH_{\mu\theta} - H_\mu H_\theta}{H^2}, q_0 = \frac{\partial p_0}{\partial \mu} = \frac{HG_{\mu\mu} - H_\mu G_\mu}{2H^2}.$$

Следовательно, система (2.36) четырех дифференциальных уравнений первого порядка может быть решена на интервале  $[\theta_0; \theta_1]$  с использованием подходящего метода численного интегрирования.

## 2.3 Свойства геодезического расстояния на сфере

Рассмотрим единичную сферу  $\Theta$  с центром  $O$ , который находится в начале координат. На сфере задан сферический сегмент  $S(A, \theta) \subset \Theta$ , где  $A$  – центр сегмента и одновременно северный полюс сферы,  $\theta$  – угловой размер сегмента ( $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ). Пусть  $\partial S$  – замкнутая кривая на сфере, ограничивающая поверхность  $S(A, \theta)$ .

### 2.3.1 Проектирование сферического сегмента на плоскость

Идея предлагаемого способа проектирования состоит в следующем. На сфере выбираются полюс и нулевой меридиан. Для каждой точки сферы определяются две геодезические координаты, первая из которых – геодезическое расстояние  $\rho$  до полюса, а

вторая — угол  $\varphi$ , который составляет между собой проекции на экваториальную плоскость нулевого меридиана и дуги, соединяющей точку с полюсом. Далее, на плоскости вводится полярная система координат. Проекцией точки сферы с геодезическими координатами  $\rho$  и  $\varphi$  на плоскость будет точка, имеющая те же самые полярные координаты. Можно без труда убедиться, что данный метод не является ортогональным проектированием и переводит сферу и любой сферический сегмент в круг, причем каждой точке круга соответствует единственная точка на сфере. Исключением является южный полюс полной сферы, который может быть спроектирован в любую точку на окружности.

Единичную сферу запишем в сферических координатах

$$\Theta = \{(\varphi, \beta) : 0 \leq \varphi < 2\pi, -\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2\},$$

где  $(\varphi, \beta)$  — долгота и широта соответственно. Пусть  $\Pi$  — координатная плоскость  $z = 0$ . Зададим отображение

$$F : S(A, \theta) \mapsto \Pi,$$

следующим образом. Сначала спроецируем центр  $A$  сегмента в начало координат  $O$  на плоскость  $\Pi$ . Каждой точке  $P(\varphi_0, \beta_0) \in S(A, \theta)$  с геодезическим расстоянием до центра сегмента  $\rho(A, P)$  и углом вращения  $\varphi_0$  будет соответствовать одна и только одна точка  $P'(\rho_0, \alpha_0)$  на плоскости, где  $\rho_0 = \frac{\pi}{2} - \beta_0$ ,  $\alpha_0 = \varphi_0$  (см. рис. 2.6). Образом сферического сегмента при подобном проектировании будет круг  $S'$  радиуса  $\theta$  с центром  $O$ .

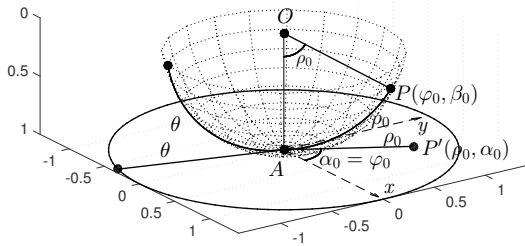


Рис. 2.6: Метод проекции

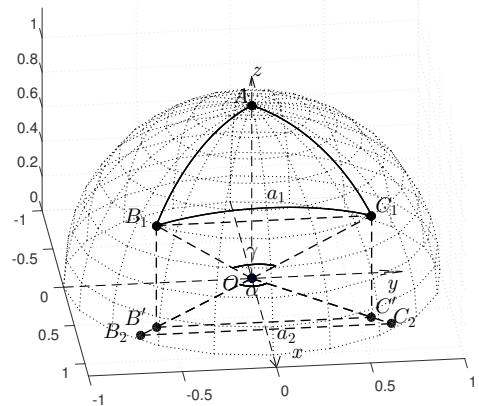


Рис. 2.7: Иллюстрация леммы

Пусть точки  $B_1, C_1$  принадлежат сферическому сегменту  $S(A, \theta)$ , причем  $\rho(A, B_1) = \rho_1, \rho(A, C_1) = \rho_2$ . Точки  $B_2, C_2 \in \Pi$ , причем  $B_2 = F(B_1), C_2 = F(C_1)$  (см. рис. 2.7). Пусть  $\rho(B_1, C_1) = a_1$  и  $B_2C_2 = a_2$ .

**Лемма 1.** Если  $\rho_1 = \rho_2 = q$ , то

$$\sin \frac{a_1}{2} = \frac{a_2 \sin q}{2q}. \quad (2.37)$$

*Доказательство.* Пусть угол  $\widehat{B_1OC_1} = \gamma$ ,  $\widehat{B_2OC_2} = \alpha$ ,  $B', C'$  – проекции  $B_1, C_1$  на плоскость  $\Pi$ , соответственно. Геодезическое расстояние между  $B_1$  и  $C_1$  будет частью дуги большого круга сферы  $\Theta$  (см. рис. 2.7), поэтому  $a_1 = \rho(B_1, C_1) = \gamma$ . Нетрудно видеть, что  $B'C' = B_1C_1 = 2 \sin \frac{\gamma}{2} = 2 \sin \frac{a_1}{2}$  и  $OC' = \cos(\frac{\pi}{2} - q) = \sin q$ .

Из подобия треугольников  $OB_2C_2$  и  $OB'C'$  имеем, что  $\frac{B'C'}{B_2C_2} = \frac{OC'}{OC_2}$ , следовательно  $\frac{2 \sin \frac{a_1}{2}}{a_2} = \frac{\sin q}{q}$ , т.е.  $\sin \frac{a_1}{2} = \frac{a_2 \sin q}{2q}$ . Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 1.** Геодезическое расстояние между двумя точками на сегменте не превосходит расстояния между двумя их образами на плоскости.

*Доказательство.* Введем обозначение  $\widehat{B_2OC_2} = \alpha$ . Пусть для определенности  $\rho_1 \geq \rho_2$ . Покажем, что  $a_1 \leq a_2$  для всех  $\rho_1, \rho_2 \in (0; \frac{\pi}{2}]$ , для этого выразим  $a_1$  и  $a_2$  через  $\rho_1, \rho_2, \alpha$ .

По теореме косинусов для треугольника  $B_2OC_2$  имеем, что

$$a_2^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \alpha = (\rho_1 + \rho_2)^2 \frac{1 - \cos \alpha}{2} + (\rho_1 - \rho_2)^2 \frac{1 + \cos \alpha}{2}. \quad (2.38)$$

Применяя формулу для нахождения длины ортодромии, получаем

$$\cos a_1 = \cos \rho_1 \cos \rho_2 + \sin \rho_1 \sin \rho_2 \cos \alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \cos(\rho_1 + \rho_2) + \frac{1 + \cos \alpha}{2} \cos(\rho_1 - \rho_2). \quad (2.39)$$

Введем дополнительные обозначения  $\xi = (\rho_1 + \rho_2)^2$ ,  $\chi = (\rho_1 - \rho_2)^2$ ,  $\xi \geq \chi \geq 0$ ,  $\zeta = (1 - \cos \alpha)/2$ ,  $\zeta \in [0; 1]$ . Можно видеть, что из равенства  $\xi = \chi$  следует, что  $a_1 = a_2$ . Будем далее считать, что  $\xi > \chi$ . С учетом введенных обозначений из формул (2.38) и (2.39) получаем, что

$$\cos a_1 - \cos a_2 = \zeta \cos \sqrt{\xi} + (1 - \zeta) \cos \sqrt{\chi} - \cos \sqrt{\zeta \xi + (1 - \zeta) \chi}. \quad (2.40)$$

Покажем, что правая часть (2.40) неотрицательна.

Для этого достаточно доказать выпуклость функции  $h(t) = \cos \sqrt{t}$  при  $t \in (0, \pi^2)$ .

В самом деле, найдем вторую производную

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{\sin \sqrt{t}}{4t\sqrt{t}} - \frac{\cos \sqrt{t}}{4t} = \frac{1}{4t\sqrt{t}} (\sin \sqrt{t} - \sqrt{t} \cos \sqrt{t}). \quad (2.41)$$

Легко убедиться, что функция  $\sin s - s \cos s > 0$  при  $s \in (0, \pi)$ , откуда следует положительность (2.41) при  $t \in (0, \pi^2)$ , то есть выпуклость функции  $h(t)$  на целевом интервале.

Применим теперь неравенство Йенсена к (2.40)

$$\zeta \cos \sqrt{\xi} + (1 - \zeta) \cos \sqrt{\chi} - \cos \sqrt{\zeta \xi + (1 - \zeta) \chi} \geq \cos \sqrt{\zeta \xi + (1 - \zeta) \chi} - \cos \sqrt{\zeta \xi + (1 - \zeta) \chi} = 0,$$

при этом неравенство является равенством только при  $\zeta = 0$  и  $\zeta = 1$ .

Отсюда следует, что  $\cos a_1 - \cos a_2 \geq 0$ , то есть  $a_1 \leq a_2$ . Теорема 1 доказана.  $\square$

### 2.3.2 Упаковка геодезических кругов в сферический сегмент

В данном разделе рассматривается задача упаковки геодезических кругов в сферический сегмент (задача **У2**), решение которой находится с использованием теоремы 1 и леммы 1. Идея построения решения состоит в следующем.

Сначала используется метод проекции, который позволяет отобразить сферический сегмент  $S(A, \theta)$  на круг  $S'$  радиуса  $\theta$ , сохраняя при этом некоторые важные свойства геодезического расстояния между полюсом и точками на сегменте. Затем круг  $S'$  преобразуется в единичный, для которого используется наилучшая из известных упаковок [132, 224], если таковая имеется. В противном случае применяется оптико-геометрический подход [29, 52], основанный на аналогии между распространением световой волны в оптически однородной среде и минимизацией интегрального функционала. На следующем шаге выполняется обратная проекция, и находится соответствующая упаковка на сферическом сегменте. Доказывается теорема, согласно которой геодезическое расстояние между двумя точками на сегменте не превышает расстояния между их образами на плоскости. Наконец, после построения обратной проекции выполняется процедура улучшения.

Для восстановления упаковки геодезических кругов в сферический сегмент достаточно выполнить обратное проектирование только центров упакованных кругов в круг, которые принимаются за центры элементов сферической упаковки, при этом теорема 1 позволяет оценить геодезический радиус упаковки сверху радиусом кругов плоской упаковки. Процесс преобразования осуществляется следующим образом.

Пусть  $M_0$  — множество из  $N$  равных кругов, упакованных в единичный круг

$$M_0 = \left\{ (J_i, R'), i = \overline{1, N} \right\},$$

где  $(J_i, R'), i = \overline{1, N}$  — круг с центром  $J_i \in \Pi$ , имеющий полярные координаты  $(\rho_i, \alpha_i)$  и радиус  $R'$  (см. рис. 2.8). Тогда  $M_1$  — множество  $N$  равных кругов, упакованных в круг радиуса  $\theta$  определяется как

$$M_1 = \left\{ (I_i, R' \theta), i = \overline{1, N} \right\},$$

где  $I_i \in \Pi$  имеет полярные координаты  $(\rho_i\theta, \alpha_i)$  и  $M_2$  — множество точек  $O_i \in S(A, \theta)$ , которые находятся обратной проекцией точек  $I_i \in \Pi$ :

$$M_2 = \{O_i = F^{-1}(I_i), i = \overline{1, N}\}.$$

Найдем геодезический радиус элементов сферической упаковки. Из леммы 1 и теоремы 1 следует, что геодезические круги с центрами  $O_i \in M_2$  и радиуса

$$\bar{R}_i = 2 \arcsin \left( \frac{R'}{2\rho_i} \sin(\rho_i\theta) \right) \quad (2.42)$$

образуют упаковку для сферического сегмента  $S(A, \theta)$ . Для того, чтобы упаковываемые круги были равными, выберем

$$R = \min_{i=\overline{1, N}} \bar{R}_i. \quad (2.43)$$

На рисунках 2.8 и 2.9 показаны результаты упаковки равных кругов в единичный круг и упаковки равных геодезических кругов в сферический сегмент в случае  $N = 10$  после преобразования.

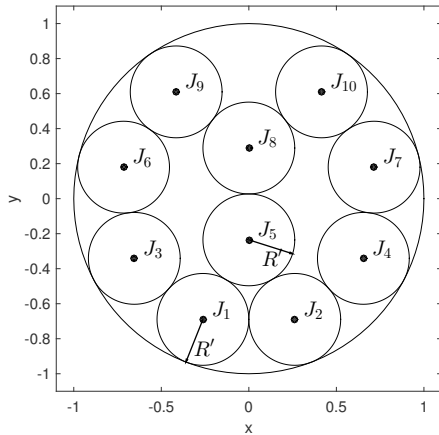


Рис. 2.8: Упаковка 10 равных кругов в единичный круг

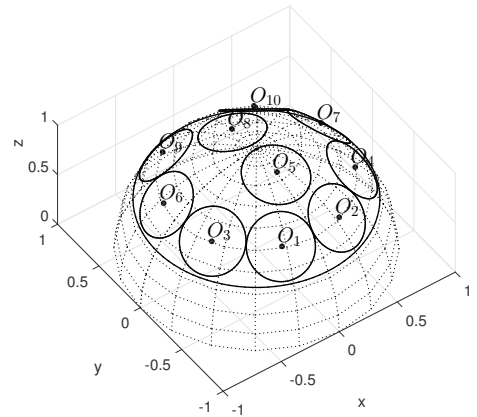


Рис. 2.9: Упаковка 10 равных геодезических кругов в сферический сегмент

### Метод улучшения упаковки

**Утверждение 1.** Если  $\rho_i \geq \rho_j$ , то  $\bar{R}_i \leq \bar{R}_j, \forall i, j = \overline{1, N}, i \neq j$ .

*Доказательство.* Действительно, в формуле (2.42), функция  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  убывает на  $(0; \frac{\pi}{2}]$  и функция  $\arcsin(x)$  возрастает на  $(0; 1]$ , получаем:

$$\bar{R}_i = 2 \arcsin \left( \frac{R'}{2\rho_i} \sin(\rho_i\theta) \right) \leq 2 \arcsin \left( \frac{R'}{2\rho_j} \sin(\rho_j\theta) \right) = \bar{R}_j, \forall i, j = \overline{1, N}, i \neq j.$$

Утверждение 1 доказано. □

Из утверждения 1 следует что, чем ближе центр геодезического круга к полюсу  $A$ , тем больше радиус геодезического круга. Тогда, в силу (2.43), некоторые геодезические круги могут не иметь точек касания.

Кроме того, при построении упаковки равных кругов в единичный круг  $\rho_i \leq 1 - R'$ . Тогда расстояние  $\rho(O_i, \partial S)$  от точки  $O_i$  до границы  $\partial S$  удовлетворяет неравенству

$$\rho(O_i, \partial S) = \left(\frac{\pi}{2} - \rho_i\theta\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \theta - \rho_i\theta \geq R'\theta.$$

Из теоремы 1 и формулы (2.43) получаем  $R = \min_{i=1, \overline{N}} \bar{R}_i < R'\theta \leq \rho(O_i, \partial S)$ , поэтому геодезические круги могут не иметь точек касания границей сегмента.

Вышесказанное означает, что построенная упаковка, вообще говоря, не является оптимальной. Выполним ее улучшение с помощью метода бильярдного моделирования.

**Утверждение 2.** Если  $\Delta = \gamma(R'\theta - R)$ ,  $0 < \gamma < 1$ ,  $\phi_i = \rho_i\theta + \Delta$ ,  $O_i^* \left(\frac{\pi}{2} - \phi_i, \alpha_i\right) \in S(A, \theta)$ ,  $\forall i = \overline{1, N}$ ,

$$R_{imp} = \min \left\{ \min_{i, j = \overline{1, N}, i \neq j} \frac{\rho(O_i^*, O_j^*)}{2}, R'\theta - \Delta \right\}, \quad (2.44)$$

то

$$R_{imp} > R.$$

*Доказательство.* Сначала докажем  $R'\theta - \Delta > R$ ,  $\forall 0 < \gamma < 1$ . Действительно, из теоремы 1 получаем  $R'\theta > \bar{R}_i \geq R$ , откуда  $R'\theta - \Delta = (1 - \gamma)R'\theta + \gamma R > (1 - \gamma)R + \gamma R = R$ ,  $\forall \gamma \in (0, 1)$ .

Далее покажем, что

$$\min_{i, j = \overline{1, N}, i \neq j} \rho(O_i^*, O_j^*) > \min_{i, j = \overline{1, N}, i \neq j} \rho(O_i, O_j) \geq 2R.$$

Легко видеть, что точка  $O_i$  расположена на геодезической линии между  $A$  и  $O_i^*$ , т. е.  $\phi_i > \rho_i\theta$ ,  $\forall i = \overline{1, N}$ . Для каждой пары  $\{i, j\}$  из формулы определения длины ортодромии получаем:

$$\cos \rho(O_i^*, O_j^*) = \cos \phi_i \cos \phi_j + \sin \phi_i \sin \phi_j \cos \zeta = \frac{1 + \cos \zeta}{2} \cos(\phi_i - \phi_j) + \frac{1 - \cos \zeta}{2} \cos(\phi_i + \phi_j),$$

$$\cos \rho(O_i, O_j) = \frac{1 + \cos \zeta}{2} \cos(\rho_i\theta - \rho_j\theta) + \frac{1 - \cos \zeta}{2} \cos(\rho_i\theta + \rho_j\theta),$$

где  $\zeta$  — угол  $\angle O_i A O_j$  в сферическом треугольнике  $O_i A O_j$ .

Так как  $\phi_i - \phi_j = \rho_i\theta - \rho_j\theta$  и  $\phi_i + \phi_j > \rho_i\theta + \rho_j\theta$  получаем  $\rho(O_i^*, O_j^*) > \rho(O_i, O_j)$ .

Тогда

$$\min_{i, j = \overline{1, N}, i \neq j} \rho(O_i^*, O_j^*) > \min_{i, j = \overline{1, N}, i \neq j} \rho(O_i, O_j) \geq 2R.$$

Утверждение 2 доказано.  $\square$

Из утверждения 2 следует, что для всех значений  $0 < \gamma < 1$  геодезические круги с новыми центрами  $O_i^* \left( \frac{\pi}{2} - \rho_i \theta - \Delta, \alpha_i \right)$  и радиусом  $R_{imp}$  образуют лучшую упаковку, чем предыдущая упаковка с радиусом  $R$ .

Нетрудно видеть, что при увеличении коэффициента  $\gamma$  значение  $R' \theta - \Delta$  уменьшается, а  $\min_{i,j=\overline{1,N}, i \neq j} \rho(O_i^*, O_j^*)$  увеличивается. Наилучший радиус упаковки достигается при выполнении равенства

$$R' \theta - \Delta = \min_{i,j=\overline{1,N}, i \neq j} \rho(O_i^*, O_j^*). \quad (2.45)$$

**Процесс улучшения осуществляется следующим образом:**

Шаг 1:  $\gamma = \frac{1}{m}$ , где  $m$  — заданный большой натуральный параметр.

Шаг 2: Вычисляется  $R_{imp}$  из утверждения 2. Если значение  $R_{imp}$  больше предыдущего, оно сохраняется в качестве решения задачи.

Шаг 3: Увеличивается значение  $\gamma = \gamma + \frac{1}{m}$  и выполняется переход к шагу 2.

Процесс завершается после  $m$  итераций. Чем больше значение  $m$ , тем точнее выполняется равенство (2.45).

Время работы алгоритма упаковки равных геодезических кругов в сферический сегмент складывается из времени выполнения алгоритма упаковки равных кругов в круг большего радиуса и процесса улучшения. При этом, если используется известная оптимальная упаковка на плоскости, то первый этап не требуется, и выполняется только процесс улучшения. Отметим, что, поскольку координаты точки  $O_i^*$  зависят от единственного параметра  $\gamma = 1/m$ , а значения  $R', \theta, \rho_i, \alpha_i, \bar{R}_i$  не изменяются после  $m$  циклов, то время выполнения процесса улучшения относительно невелико.

### 2.3.3 Покрывание сферических сегментов геодезическими кругами

В данном разделе рассматривается задача покрытия сферических сегментов геодезическими кругами (задача **П2**), решение которой находится с использованием теоремы 1 и леммы 1.

**Следствие 1.** *После выполнения обратной проекции покрытие круга равными кругами окажется покрытием сферического сегмента геодезическими кругами того же радиуса.*

*Доказательство.* Пусть  $M_0$  — множество из  $n$  равных кругов, покрывающих единичный круг

$$M_0 = \left\{ (J_i, R'), i = \overline{1, N} \right\},$$

где  $(J_i, R'), i = \overline{1, N}$  — круг с центром  $J_i \in \Pi$ , имеющий полярные координаты  $(\rho_i, \alpha_i)$  и радиус  $R'$  (см. рис. 2.10). Тогда  $M_1$  — множество  $N$  равных кругов, покрывающих круг

радиуса  $\theta$  определяется как

$$M_1 = \{(I_i, R'\theta), i = \overline{1, N}\},$$

где  $I_i \in \Pi$  имеет полярные координаты  $(\rho_i\theta, \alpha_i)$ , а  $M_2$  — множество точек  $O_i \in S(A, \theta)$ , которые находятся обратной проекцией точек  $I_i \in \Pi$ :

$$M_2 = \{O_i = F^{-1}(I_i), i = \overline{1, N}\}.$$

Покажем, что сферический сегмент  $S$  будет покрыт геодезическими кругами с центрами  $O_i$  и радиусом  $R'\theta$ . Действительно, из теоремы 1 следует, что

$$\forall P \in S, \exists O_i : \rho(O_i, P) \leq |I_i P'| \leq R'\theta,$$

где  $P' = F(P)$  и  $|\cdot|$  — длина отрезка.

Следствие 1 доказано. □

Для построения покрытия сферического сегмента геодезическими кругами достаточно выполнить обратное проектирование центров кругов плоского покрытия на сферу. Эти проекции будут служить центрами геодезических кругов. Согласно теореме 1, радиусы покрывающих кругов на плоскости можно использовать в качестве радиусов соответствующих геодезических кругов на сфере, что обеспечивает корректность построения покрытия.

На рисунке 2.10 представлено покрытие единичного круга семью равными кругами, а на рисунке 2.11 показано соответствующее покрытие сферического сегмента семью равными геодезическими кругами, полученное в результате преобразования исходной плоской конфигурации.

### Метод улучшения покрытия

**Утверждение 3.** Если  $P \in \partial S$ , то  $\exists i^*, \rho(O_{i^*}, P) < R'\theta$ .

*Доказательство.* Из теоремы 1 следует что, для всех точек  $P$  на границе сегмента  $\partial S$  и всех центров  $O_i, i = \overline{1, n}$ , геодезическое расстояние между  $O_i$  и  $P$  не превосходит расстояния между  $I_i$  и  $P'$ , где  $P' = F(P)$ . Тогда получаем:

$$\rho(O_i, P) \leq |I_i P'|, \forall P \in \partial S, P' = F(P), i = \overline{1, N}.$$

С другой стороны  $I_i, i = \overline{1, N}$  — центры кругов, образующие покрытие круга радиуса  $\theta$ , поэтому существует круг с центром  $I_{i^*}$  такой, что  $|I_{i^*} P'| \leq R'\theta$ . Это, в свою очередь, означает выполнение неравенств

$$\rho(O_{i^*}, P) \leq |I_{i^*} P'| \leq R'\theta. \quad (2.46)$$

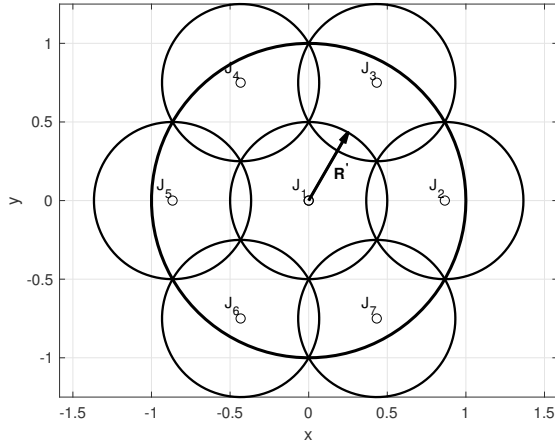


Рис. 2.10: Покрытие единичного круга 7 равными кругами.

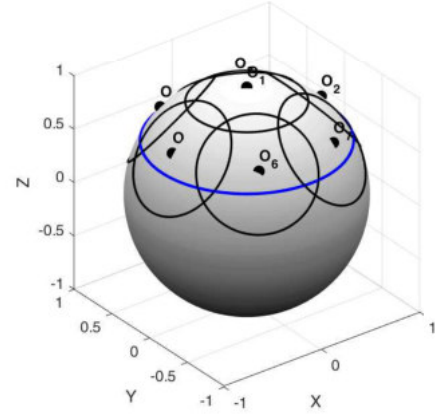


Рис. 2.11: Покрытие сферического сегмента 7 равными геодезическими кругами

Неравенства (2.46) не выполняются как равенства одновременно поскольку, если  $\rho(O_{i^*}, P) = |I_{i^*} P'|$ , то три точки  $A, O_{i^*}, P$  должны лежать на одной геодезической линии. Однако, если  $|I_{i^*} P'| = R'\theta$ , то точки  $A, O_{i^*}, P$  не могут располагаться на одной геодезической линии (рис. 2.12). Полученное противоречие доказывает утверждение.  $\square$

**Определение 1.** Обозначим  $\Upsilon = \bigcup_{i \neq j} \{P \in \Theta : \rho(O_i, P) = R'\theta, \rho(O_j, P) = R'\theta, \rho(A, P) > \theta\}$ , — множество точек пересечения геодезических окружностей, лежащих вне сферического сегмента  $S$ .

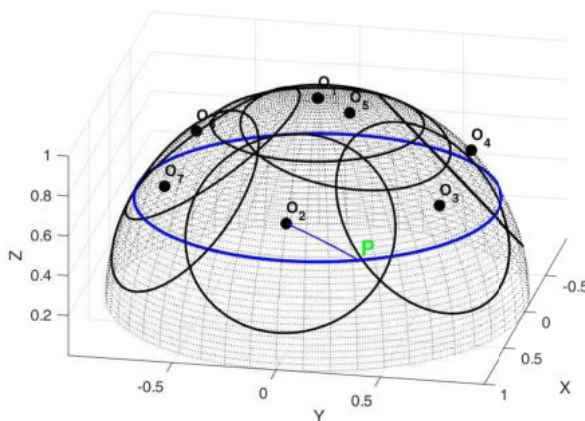


Рис. 2.12: Иллюстрация утверждения 3.

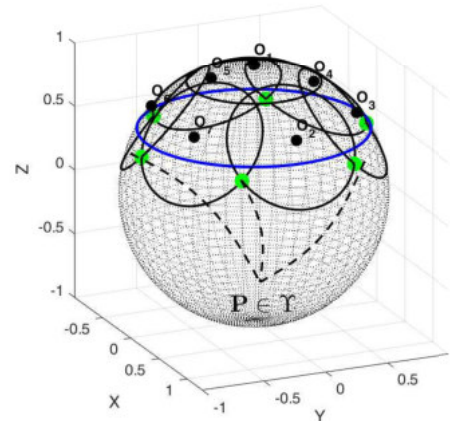


Рис. 2.13: Иллюстрация определения 1.

**Утверждение 4.** Множество  $\Upsilon$  непусто,  $\Upsilon \neq \emptyset$ .

*Доказательство.* Предположим противное: пусть множество  $\Upsilon$  пусто, то есть все точки пересечения геодезических окружностей лежат либо строго внутри сегмента  $S$ , либо на его границе  $\partial S$ .

Если пересечения лежат строго внутри  $\partial S$ , то имеем, что некоторые точки границы не принадлежат ни одной из геодезических окружностей. Это противоречит условию полноты покрытия.

Пусть теперь существует точка  $P^* \in \partial S$ , являющаяся пересечением двух геодезических окружностей радиуса  $R'\theta$ . Согласно утверждению 3, точка  $P^*$  должна лежать внутри некоторой геодезической окружности радиуса, меньшего  $R'\theta$ . Однако это невозможно, поскольку  $P^*$  по определению принадлежит двум окружностям радиуса ровно  $R'\theta$ , и никакая меньшая окружность не может содержать ее в своей внутренней области. Полученное противоречие доказывает, что исходное предположение неверно, а значит, множество  $\Upsilon$  непусто (рис.2.13).

Утверждение 4 доказано. □

Из утверждений 3 и 4 следует, что система геодезических кругов с центрами в точках  $O_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) и радиусом  $R'\theta$  покрывает границу  $\partial S$  сегмента, но при этом их попарные пересечения содержат точки, лежащие вне  $\partial S$ . Следовательно, построенное покрытие не является оптимальным, поскольку содержит избыточные области перекрытий.

Для его улучшения применим метод бильярдного моделирования, который позволит минимизировать радиусы покрывающих кругов при сохранении условия полного покрытия.

**Определение 2.** Три точки  $I_i, I_j, I_k$  называются смежными тогда и только тогда, когда расстояние между любыми двумя из них не больше  $2R'\theta$ . Обозначим  $\Psi$  – множество смежных точек:

$$\Psi = \left\{ \{i, j, k\} : \forall a, b \in \{i, j, k\}, a \neq b, |I_a I_b| \leq 2R'\theta \right\}.$$

На рисунке 2.14 изображено множество из трех смежных точек в случае  $R = 0.5$  и  $\theta = 1$ :  $\Psi = \{\{1, 2, 3\}; \{1, 3, 4\}; \{1, 4, 5\}; \{1, 5, 6\}; \{1, 6, 7\}; \{1, 7, 2\}\}$ .

**Определение 3.** Пусть  $\{i, j, k\} \in \Psi$ ,  $O_i = F^{-1}(I_i)$ ,  $O_j = F^{-1}(I_j)$ ,  $O_k = F^{-1}(I_k)$ . Обозначим  $\Delta_{\Theta} O_i O_j O_k$  – сферический треугольник с вершинами  $O_i, O_j, O_k \in \Theta$  и  $\bar{R}_{O_i O_j O_k}$  – наименьший возможный радиус геодезического круга, в который может быть вложен сферический треугольник  $\Delta_{\Theta} O_i O_j O_k$ .

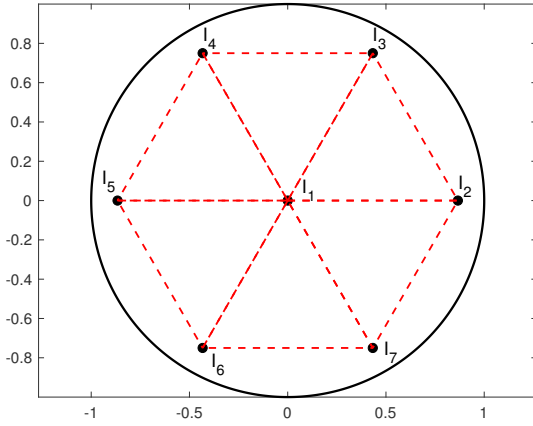


Рис. 2.14: Иллюстрация определения 2.

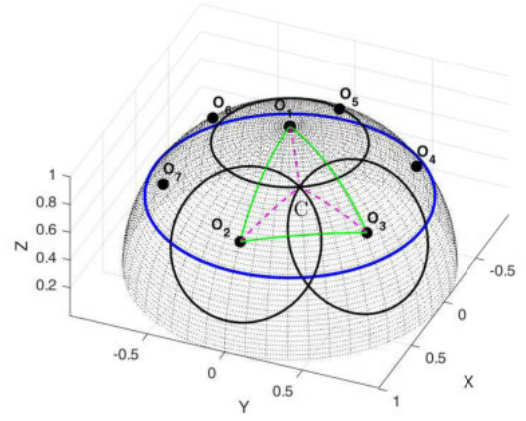


Рис. 2.15: Иллюстрация утверждения 5.

**Утверждение 5.** Если  $\{i, j, k\} \in \Psi$ , то  $\Delta_{\Theta} O_i O_j O_k$  будет покрыт объединением трех геодезических кругов с центрами  $O_i, O_j, O_k$  и радиусом  $\bar{R}_{O_i O_j O_k}$ .

*Доказательство.* Покажем, что  $\forall P \in \Delta_{\Theta} O_i O_j O_k, \min_{a \in \{i, j, k\}} \{\rho(O_a, P)\} \leq \bar{R}_{O_i O_j O_k}$ .

Действительно, пусть  $C$  – центр геодезического круга наименьшего радиуса  $R$ , покрывающей сферический треугольник  $\Delta_{\Theta} O_i O_j O_k$ . Из точки  $C$  проведем геодезические линии, перпендикулярные сторонам сферического треугольника  $\Delta_{\Theta} O_i O_j O_k$ . Тогда каждая точка  $P \in \Delta_{\Theta} O_i O_j O_k, P \neq C$  будет лежать в одной из частей, разделенных перпендикулярами и сторонами  $\Delta_{\Theta} O_i O_j O_k$  (рис. 2.16). Отсюда получаем

$$\min_{a \in \{i, j, k\}} \{\rho(O_a, P)\} < \min_{a \in \{i, j, k\}} \{\rho(O_a, C)\}.$$

Далее из определения 3 получаем

$$\bar{R}_{O_i O_j O_k} = \max_{a \in \{i, j, k\}} \{\rho(O_a, C)\} \geq \min_{a \in \{i, j, k\}} \{\rho(O_a, C)\} > \min_{a \in \{i, j, k\}} \{\rho(O_a, P)\}.$$

Утверждение 5 доказано.  $\square$

**Утверждение 6.** Если  $\{i, j, k\} \in \Psi$ , то  $\bar{R}_{O_i O_j O_k} < R' \theta$ .

*Доказательство.* Пусть  $C'$  – центр круга наименьшего радиуса, покрывающей треугольник  $I_i I_j I_k$ , а  $\tilde{R}$  – радиус этого круга. Тогда точка  $C'$  лежит внутри треугольника  $I_i I_j I_k$ . Легко видеть, что  $\tilde{R} \leq R' \theta$  поскольку, если  $\tilde{R} > R' \theta$ , то треугольник  $I_i I_j I_k$  не может быть полностью покрыт кругами с центрами  $I_i, I_j, I_k$  и радиусом  $R' \theta$ . Отсюда получаем:

$$R' \theta \geq \tilde{R} = \max_{a \in \{i, j, k\}} \{|I_a C'|\} \quad (2.47)$$

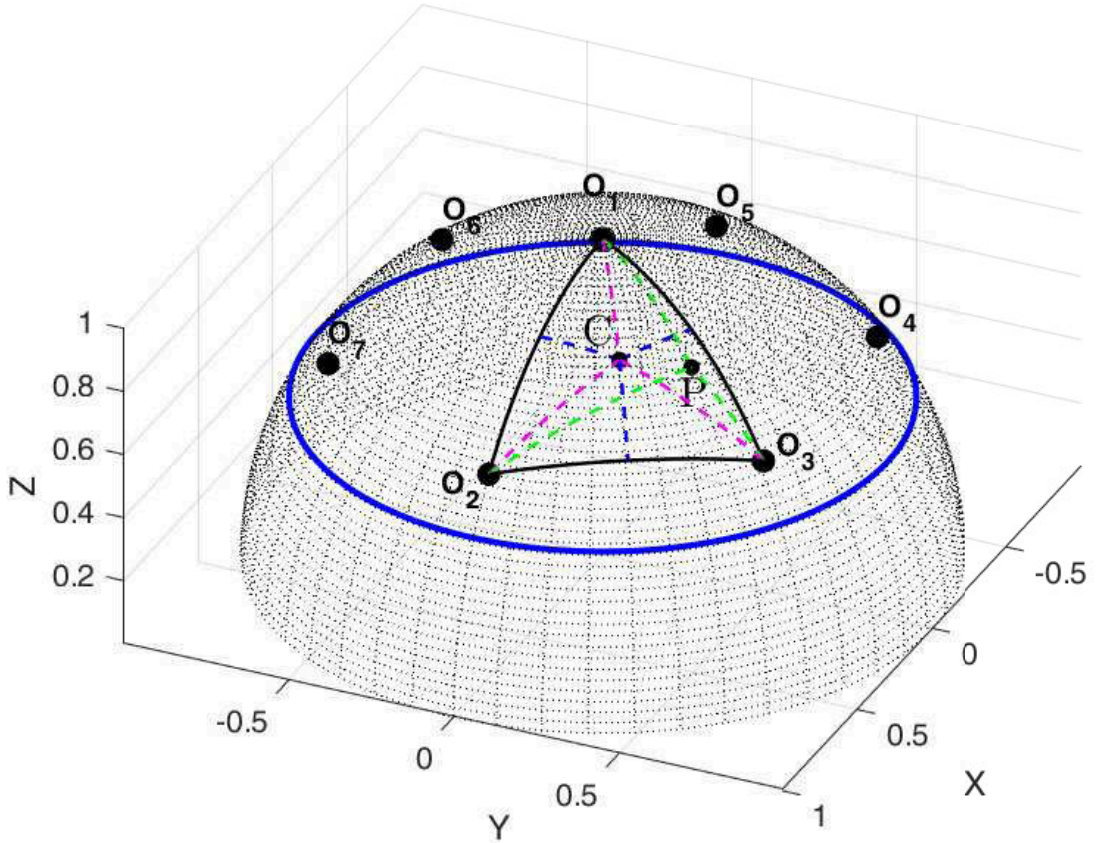


Рис. 2.16: Иллюстрация доказательства утверждения 5 5.

С другой стороны, пусть  $C = F^{-1}(C')$ . Тогда из теоремы 1 следует, что

$$\rho(O_i, C) \leq |I_i C'|; \rho(O_j, C) \leq |I_j C'|; \rho(O_k, C) \leq |I_k C'|,$$

т.е.

$$\max_{a \in \{i,j,k\}} \{|I_a C'|\} \geq \max_{a \in \{i,j,k\}} \{\rho(O_a, C)\}. \quad (2.48)$$

Из (2.47) и (2.48) получаем неравенство:

$$\bar{R}_{O_i O_j O_k} = \max_{a \in \{i,j,k\}} \{\rho(O_a, C)\} \leq R' \theta. \quad (2.49)$$

Однако (2.49) не может выполняться как равенство, так как тогда точки  $O_i, O_j, O_k, C$  должны лежать на одной геодезической линии, что невозможно. Утверждение доказано.  $\square$

Из утверждения 5 следует, что сферический сегмент  $S$  покрывается геодезическими кругами с центрами в точках  $O_i$  и радиусом  $R = \max \left\{ \max_{\{i,j,k\} \in \Psi} \bar{R}_{O_i O_j O_k}; \max_{P \in \partial S} \min_{i=1, \bar{N}} \rho(O_i, P) \right\}$ .

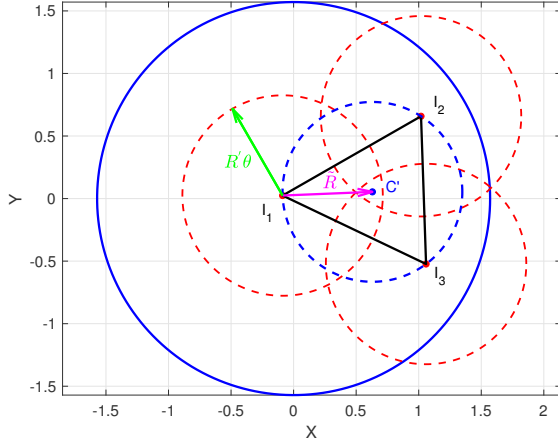


Рис. 2.17: Иллюстрация доказательства утверждения 6.

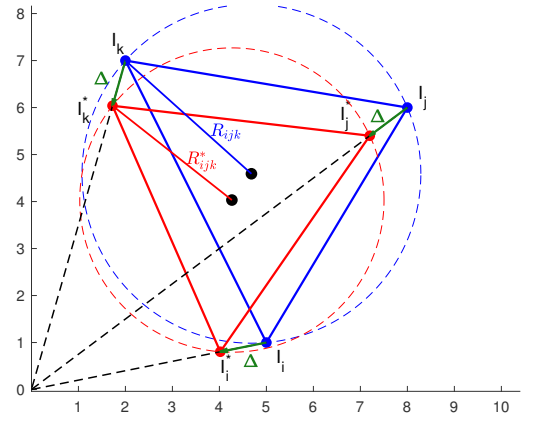


Рис. 2.18: Иллюстрация доказательства неравенства 2.50.

Кроме того, из утверждений 3 и 6 следует, что  $R < R'\theta$ , т.е. такое покрытие лучше, чем покрытие с радиусом  $R'\theta$ , однако может не быть оптимальным.

Как показано в утверждениях 3 и 4, в покрытии существуют избыточности вне границы  $\partial S$  сферического сегмента  $S$ . Эти избыточности определяются точками  $P \in \Upsilon$ , для которых расстояние до границы  $\partial S$  равно  $\omega = \min_{P \in \Upsilon} \rho(A, P) - \theta$ . Для минимизации избыточности предлагается сдвинуть центры  $O_i$  в точку  $O_i^*$  вдоль геодезических линий в направлении центра  $A$  на расстояние  $\Delta$  и постепенно уменьшить радиус геодезических кругов. При этом предыдущие точки пересечения, лежащие за пределами границы  $P \in \Upsilon$  не оказались внутри, сохраняя условие  $\omega \geq 0$ . Радиус нового покрытия определяется как  $R^* = \max \left\{ \max_{\{i,j,k\} \in \Psi} \bar{R}_{O_i^* O_j^* O_k^*}; \max_{P \in \partial S} \min_{i=1, \dots, N} \rho(O_i^*, P) \right\}$ . Тогда, поскольку  $R^* \geq \max_{\{i,j,k\} \in \Psi} \bar{R}_{O_i^* O_j^* O_k^*}$ , новое покрытие также покрывает все сферические треугольники  $\Delta_{\theta} O_i^* O_j^* O_k^*$ , а  $R^* \geq \max_{P \in \partial S} \min_{i=1, \dots, N} \rho(O_i^*, P)$ , оно покрывает границу  $\partial S$ . Таким образом, выбирая подходящее  $\Delta$ , можно получить улучшенное покрытие с радиусом, не превышающим  $R'\theta$ . Это утверждение формулируется ниже.

**Утверждение 7.** Если  $\omega = \min_{P \in \Upsilon} \rho(A, P) - \theta$ , то:  $\exists \gamma, 0 < \gamma < 1$ ,  $\Delta = \gamma\omega$ ,  $\phi_i = \rho_i\theta - \Delta$ ,  $O_i^* \left( \frac{\pi}{2} - \phi_i, \alpha_i \right) \in S(A, \theta), \forall i = \overline{1, N}$ :

$$\bar{R}_{O_i^* O_j^* O_k^*} < R'\theta, \forall \{i, j, k\} \in \Psi. \quad (2.50)$$

и

$$\min_{i=1, \dots, N} \rho(O_i^*, P) < R'\theta, \forall P \in \partial S. \quad (2.51)$$

*Доказательство.* Покажем, что неравенство (2.50) выполняется для всех  $0 < \gamma < 1$ .

Пусть  $I_i^* = F(O_i^*)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , и  $R_{ijk}^*$ ,  $R_{ijk}$  – наименьшие радиусы кругов, покрывающих треугольники  $\Delta I_i^* I_j^* I_k^*$ ,  $\Delta I_i I_j I_k$ , соответственно. Поскольку для любого  $\gamma > 0$  точки  $I_i, I_j, I_k$  являются сдвигами точек  $I_i, I_j, I_k$  в направлении начала координат на расстояние  $\delta > 0$ , то расстояния между ними уменьшаются:  $|I_a I_b| > |I_a^* I_b^*|$ ,  $a, b \in \{i, j, k\}$ ,  $a \neq b$ . Следовательно, выполняется неравенство

$$R_{ijk} > R_{ijk}^*. \quad (2.52)$$

Пусть  $C'$  – центр круга наименьшего радиуса, покрывающей треугольник  $I_i^* I_j^* I_k^*$  и  $C^* = F^{-1}(C')$ , тогда из теоремы 1 следует, что

$$\rho(O_i^*, C^*) \leq |I_i^* C'|; \quad \rho(O_j^*, C^*) \leq |I_j^* C'|; \quad \rho(O_k^*, C^*) \leq |I_k^* C'|.$$

Таким образом,

$$R_{ijk}^* = \max_{a \in \{i, j, k\}} \{|I_a^* C'|\} \geq \max_{a \in \{i, j, k\}} \{\rho(O_a^*, C^*)\}. \quad (2.53)$$

Поскольку  $\bar{R}_{O_i^* O_j^* O_k^*}$  – наименьший возможный радиус геодезического круга, в который может быть вложен сферический треугольник  $\Delta_{\Theta} O_i^* O_j^* O_k^*$ , с учетом (2.52), (2.53) получаем

$$R'\theta \geq R_{ijk} > R_{ijk}^* \geq \max_{a \in \{i, j, k\}} \{\rho(O_a^*, C^*)\} \geq \bar{R}_{O_i^* O_j^* O_k^*}.$$

Неравенство (2.50) доказано.

Для доказательства неравенства (2.51) рассмотрим точку  $P(\frac{\pi}{2} - \theta, \alpha_P) \in \partial S$ . Согласно утверждению 3, для точки  $P$  существует такой индекс  $u$ , что  $\rho(O_u, P) < R'\theta$ .

Применяя формулу для нахождения длины ортодромии, получаем

$$\cos \rho(O_u^*, P) = \cos(\rho_u \theta - \Delta) \cos \theta + \sin(\rho_u \theta - \Delta) \sin \theta \cos(\alpha_u - \alpha_P).$$

Рассмотрим функцию

$$G(\Delta) = \cos(\rho_u \theta - \Delta) \cos \theta + \sin(\rho_u \theta - \Delta) \sin \theta \cos(\alpha_u - \alpha_P), \quad 0 \leq \Delta \leq \omega.$$

Функция  $G(\Delta)$  непрерывна на отрезке  $[0, \omega]$  и  $G(0) = \cos \rho(O_u, P) > \cos(R'\theta)$ , поскольку  $\rho(O_u, P) < R'\theta$  и функция косинуса убывает на  $[0, \pi]$ .

По теореме о промежуточном значении существует такое  $\Delta^* \neq 0$ , что  $G(\Delta^*) > \cos(R'\theta)$ , т.е.

$$\cos \rho(O_u^*, P) > \cos(R'\theta), \quad \rho(O_u^*, P) < R'\theta.$$

Утверждение 7 доказано. □

Таким образом, можно построить улучшенное покрытие, выбрав в качестве центров точки  $O_i^*$ ,  $i = \overline{1, N}$ , и назначив радиус равным

$$R_{imp} = \max \left\{ \max_{\{i,j,k\} \in \Psi} \bar{R}_{O_i^* O_j^* O_k^*}; \max_{P \in \partial S} \min_{i=1, N} \rho(O_i^*, P) \right\}. \quad (2.54)$$

Из утверждения 7 следует, что существует такое  $\gamma$  ( $0 < \gamma < 1$ ), что геодезические круги с центрами в точках  $O_i^*$  ( $\frac{\pi}{2} - (\rho_i \theta - \Delta)$ ,  $\alpha_i$ ) и радиусом  $R_{imp}$  образуют покрытие, более эффективное (имеющее меньший радиус), чем исходное покрытие с радиусом  $R'\theta$ .

**Процесс улучшения осуществляется следующим образом:**

Шаг 1:  $\gamma = \frac{1}{m}$  где  $m$  — заданный большой натуральный параметр.

Шаг 2: Вычисляется  $R_{imp}$  в формуле (2.54). Если значение  $R_{imp}$  меньше предыдущего, оно сохраняется в качестве решения задачи.

Шаг 3: Увеличивается значение  $\gamma = \gamma + \frac{1}{m}$  и выполняется переход к шагу 2.

Время работы алгоритма покрытие сферического сегмента равными геодезическими кругами складывается из времени выполнения алгоритма покрытие круга большего радиуса равными кругами и процесса улучшения. При этом, если используются известные оптимальные покрытия на плоскости, то первый этап не требуется, и выполняется только процесс улучшения. Отметим, что, поскольку координаты точки  $O_i^*$  зависят от единственного параметра  $\gamma = 1/m$ , а значения  $R'$ ,  $\theta$ ,  $\rho_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\bar{R}_i$  не изменяются после  $m$  циклов, то время выполнения процесса улучшения относительно невелико.

## 2.4 Геометрические методы для построения покрытия на поверхности вращения

В этом разделе рассматривается случай покрытия на поверхности  $S$  в евклидовой метрике, для которого описан алгоритм построения наилучшего покрытия для задачи покрытия поверхности равными шарами. Алгоритм включает в себя итеративное построение диаграммы Вороного на поверхности и нахождение центров шаров наименьшего радиуса ее областей.

В трехмерном пространстве задана поверхность  $S$ . Введем обозначение  $\Theta(O, r)$  и  $\partial\Theta(O, r)$  как шар и сфера с центром  $O \in S$  и радиусом  $r$ :

$$\Theta(O, r) = \{P \in \mathbb{R}^3 : |OP| \leq r\},$$

$$\partial\Theta(O, r) = \{P \in \mathbb{R}^3 : |OP| = r\},$$

где  $|\cdot|$  — длина отрезка.

**Определение 4.** Обозначим  $R(p, M) = \min\{r \geq 0 : M \subseteq \Theta(p, r)\}$  — наименьший радиус шара с центром в точке  $p \in M$ , в который может быть вложено множество  $M$ .

**Определение 5.** Обозначим  $R(M) = \min\{R(p, M), p \in M\}$  — наименьший возможный радиус шара, в который может быть вложено множество  $M$ ;  $c(M)$  — центр данного шара.

**Определение 6.** Обозначим  $H(M, W)$  — минимальное число  $\lambda$ , такое, что множество  $M$  может быть вложено в объединение шаров радиуса  $\lambda$  с центрами в точках из множества  $W$

$$H(M, W) = \max_{m \in M} \min_{w \in W} |mw|.$$

Пусть задано непустое множество  $M \subseteq S$  и набор из  $n$  точек  $W = \{w\}_{i=1}^n \subset M$ . Для набора из  $n$  точек  $W = \{w\}_{i=1}^n \subset M$ , составляющие диаграмму Вороного области Дирихле  $V_i$  с центрами  $w_i$  определяется следующим образом:

$$V_i = \{p \in M : |pw_i| \leq |pw_j|, \forall j \neq i\},$$

Вычисление нового массива точек  $\widehat{W} = \{\widehat{w}\}_{i=1}^n \subset M$  может быть реализовано с помощью геометрических процедур:

**Алгоритм 3 (GeoCover).** Построение покрытия на поверхности

*Шаг 1:* Для множества  $W$ , строим области диаграммы Вороного  $V_i, i = \overline{1, n}$  точек  $w_i, i = \overline{1, n}$  на множестве  $M \subseteq S$ .

*Шаг 2:* Для каждой области  $V_i$  находим покрывающий ее шар наименьшего радиуса  $R(M_i)$  с центром  $c(M_i)$ .

*Шаг 3:* Для каждого  $i = \overline{1, n}$  берем в качестве элемента нового массива точек  $\widehat{w}_i = c(M_i)$ ,

$$\widehat{W} = \{\widehat{w}_i \in M, i = \overline{1, n}\}.$$

□

Алгоритм **GeoCover** при программной реализации применяется многократно в цикле. Условием выхода является достаточно малое расстояние между точками  $w_i, \widehat{w}_i, i = \overline{1, n}$ . Получаем следствие из результата применения алгоритма:

**Следствие 2.** В результате применения алгоритма 1 для множества  $\widehat{W}$  выполняется оценка:

$$H(M, W) \geq H(M, \widehat{W}). \quad (2.55)$$

*Доказательство.* Из определения 5 следует что, для каждой области  $M_i$ :

$$R(w_i, M_i) \geq R(M_i), \forall i = \overline{1, n}. \quad (2.56)$$

Для каждой области  $M_i$ ,  $\widehat{w}_i = c(M_i)$  — центр шара наименьшего радиуса:

$$R(\widehat{w}_i, M_i) = R(M_i), \forall i = \overline{1, n}. \quad (2.57)$$

По построению областей Дирихле выполняются равенства:

$$H(M, W) = \max_{i=\overline{1, n}} R(w_i, M_i). \quad (2.58)$$

Из (2.57) вытекает неравенство:

$$H(M, \widehat{W}_i) \leq \max_{i=\overline{1, n}} R(M_i), \forall i = \overline{1, n}. \quad (2.59)$$

Из (2.58) и (2.59) можно записать:

$$H(M, W) - H(M, \widehat{W}_i) \geq \max_{i=\overline{1, n}} R(w_i, M_i) - \max_{i=\overline{1, n}} R(M_i). \quad (2.60)$$

Из неравенства (2.56) следует, что правая часть в неравенстве 2.60 не меньше, чем 0. Получаем оценку (2.55).

Если  $\max_{i=\overline{1, n}} R(w_i, M_i) > \max_{i=\overline{1, n}} R(M_i)$ , то неравенство (2.55) является строгим. В общем случае следствие означает, что алгоритм **GeoCover** при его применении к произвольному массиву точек по крайней мере не увеличивает радиус шаров, который нужен, чтобы шары с радиусом и центрами в элементах данного массива полностью покрывали  $M \subset S$ .

Рассмотрим некоторые типы поверхности вращения.

#### 2.4.1 Для сферы

Не ограничивая общности, можно считать, что поверхность  $S$  есть единичная сфера с центром  $O$  в начале координат.

**Лемма 2.** Пусть задана точка  $p \in M \subset S$ . Если  $|c(M)p| = \delta$  и

$$R(M) < \sqrt{2}, \quad (2.61)$$

то

$$R^2(p, M) \geq R^2(M) + \delta^2 - \frac{\delta^2 R^2(M)}{2}. \quad (2.62)$$

*Доказательство.* Если точка  $p$  совпадает с точкой  $c(M)$ , то неравенство (2.62) превращается в равенство. В противном случае поскольку  $p \neq c(M)$  существует единственную плоскость  $\Lambda$ , содержащую три точки  $O$ ,  $c(M)$  и  $p$ . Рассматриваем плоскость  $\Pi$ , содержащая две точки  $O$  и  $c(M)$  и перпендикулярная плоскости  $\Lambda$  (см. рис. 2.19а).

Тогда плоскость  $\Pi$  разделит сферу  $\partial\Theta(c(M), R(M))$  на две половины:  $\partial\Theta^+$  — полу-сфера, находящаяся по ту же сторону, что и точка  $p$  с плоскостью  $\Pi$ , а  $\partial\Theta^-$  — полусфера по другую сторону от точки  $p$ .

Докажем, что  $\partial\Theta^- \cap M \neq \emptyset$ . Предположим обратное, т.е.  $\partial\Theta^- \cap M = \emptyset$ .

Тогда все точки  $m \in M$  разделятся на 2 типа:  $m \in M \cap \partial\Theta(c(M), R(M))$  и  $m \notin M \cap \partial\Theta(c(M), R(M))$ .

Рассмотрим точки  $m \in M \cap \partial\Theta(c(M), R(M))$ :

Для точек  $m \in M \cap \partial\Theta(c(M), R(M))$ , поскольку  $\partial\Theta^- \cap M = \emptyset$ , точки  $m$  будут в множестве  $M \cap \partial\Theta^+$ . Докажем, что существует шар с радиусом меньше, чем  $R(M)$ , в который может быть вложены точки  $m$ .

Пусть  $\Phi$  — окружность, пересекающая единичную сферу  $S$  и сферу  $\partial\Theta(c(M), R(M))$ , а  $\Xi$  — плоскость, содержащая окружность  $\Phi$ . Окружность  $\Phi$  пересекает плоскость  $\Pi$  в двух точках  $o$  и  $1$ . Видим, что такая окружность имеет центр в точке  $X$ , которая является пересечением линии, соединяющей между точками  $O$  и  $c(M)$ , с плоскостью  $\Xi$ . Ее радиус  $r = \frac{|a_0 a_1|}{2} = \sqrt{R^2(M) - |c(M)X|^2}$  (рис. 2.19b).

Тогда точки  $m$  лежат на дуге сектора окружности  $\Phi$  с некоторым центральным углом  $\gamma < \pi$ , пусть  $\omega_1, \omega_2$  — концы дуги и  $X'$  — их середина. Отсюда видно, что все точки  $m$  находятся внутри в окружности с центром  $X'$  и радиусом  $r' = \frac{|\omega_1 \omega_2|}{2} < r$  (рис. 2.19с).

Рассмотрим прямую, проходящую через точку  $X'$  и перпендикулярную плоскости  $\Xi$ . Эта прямая пересекается множество  $M$  в точке  $O'$ . Видно, что шар с центром  $O'$  и радиусом  $R' = \sqrt{r'^2 + |O'X'|^2}$  будет шаром, содержащим все точки  $m$ .

Из условия (2.61) видим, что точка  $X$  лежит между двумя точками  $O$  и  $c(M)$ , а расстояние  $|c(M)X|$  является наибольшим расстоянием от всех точки множества  $M$  до плоскости  $\Xi$ . Тогда получим

$$R' = \sqrt{r'^2 + |O'X'|^2} < \sqrt{r^2 + |Xc(M)|^2} = R(M),$$

т.е. существует шар с центром в точке  $O'$  и радиусом  $R' < R(M)$ , в который может быть вложены точки  $m$ .

Рассмотрим точки  $m \notin M \cap \partial\Theta(c(M), R(M))$ :

Пусть  $R''$  — наибольшее расстояние от  $c(M)$  до всех этих точек:

$$R'' = \max\{|c(M)m|, m \notin M \cap \partial\Theta(c(M), R(M))\}.$$

Значение  $R''$  также меньше, чем  $R(M)$ , т.е.  $R'' < R(M)$ .

Отсюда, на геодезической линии между точками  $c(M)$  и  $O'$ , выберем точку  $O^*$  так, чтобы  $|c(M)O^*| < R(M) - \max\{R', R''\}$ .

Тогда если  $m \notin M \cap \partial\Theta(c(M), R(M))$ , получим:

$$|mO^*| \leq |c(M)m| + |O^*c(M)| < R'' + R(M) - \max\{R', R''\} \leq R(M).$$

Если  $m \in M \cap \partial\Theta(c(M), R(M))$ , получим:  $|mO^*| \leq R' < R(M)$ .

Таким образом, шар с центром  $O^*$  и радиусом, меньшим  $R(M)$ , будет покрывать множество  $M$ . Это противоречит определению  $R(M)$ . Следовательно,  $\partial\Theta^- \cap M \neq \emptyset$ .

Пусть  $\sigma \in \partial\Theta^- \cap M$  и  $a_0 \in \Pi \cap S \cap \partial\Theta(c(M), R(M))$  — одна из двух пересечений между сферой  $S$ , сферой  $\partial\Theta(c(M), R(M))$  и плоскостью  $\Pi$ . Тогда получим неравенство:

$$R^2(p, M) \geq |p\sigma|^2 \geq |pa_0|^2. \quad (2.63)$$

Применяя теорему Пифагора в прямоугольных треугольниках  $\triangle pXa_0$ ,  $\triangle a_0Xc(M)$ , получаем:

$$|pa_0|^2 = |pX|^2 + |Xa_0|^2 = |pX|^2 + R^2(M) - |c(M)X|^2. \quad (2.64)$$

Пусть  $K$  — проекция точки  $p$  на отрезок прямой, соединяющий  $O$  и  $c(M)$ , тогда из геометрии сферы:  $|c(M)K| = \frac{\delta^2}{2}$ ,  $|Xc(M)| = \frac{R^2(M)}{2}$ ,  $|XK| = \frac{R^2(M) - \delta^2}{2}$  и получим:

$$\begin{aligned} |pa_0|^2 &= R^2(M) + |pK|^2 + |KX|^2 - |c(M)X|^2 \\ &= R^2(M) + |c(M)p|^2 - |c(M)K|^2 + |KX|^2 - |c(M)X|^2 \\ &= R^2(M) + \delta^2 - \frac{\delta^4}{4} + \frac{(R^2(M) - \delta^2)^2}{4} - \frac{R^4(M)}{4} \\ &= R^2(M) + \delta^2 - \frac{\delta^2 R^2(M)}{2}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Из (2.63), (2.64) и (2.65) получим неравенство (2.62). Лемма доказана.

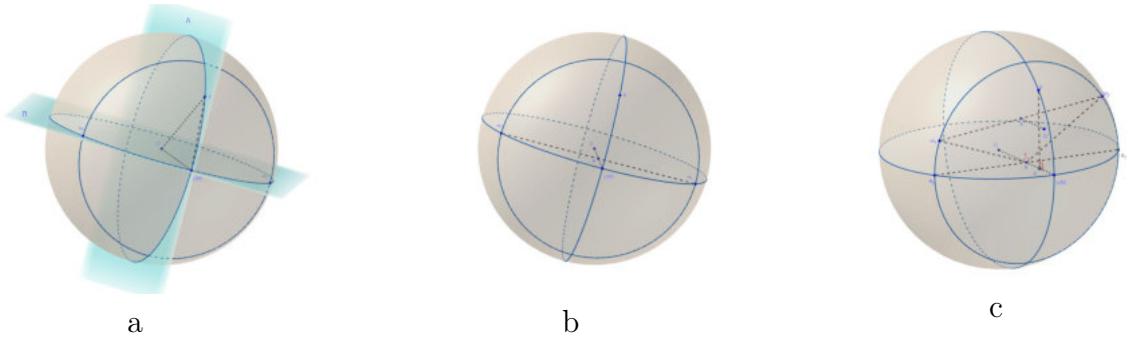


Рис. 2.19: Иллюстрация доказательства для сферы.

### 2.4.2 Для боковой поверхности цилиндра

Если поверхность  $S$  представляется собой боковую поверхность прямого цилиндра с радиусом основания  $r$  и высотой  $h$ , тогда  $S$  может быть описана как:

$$S = \{x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha, z = u : \alpha \in [0, 2\pi); u \in [0, h]\}, \quad (2.66)$$

**Лемма 3.** *Задана точка  $p(\alpha_1, u_1) \in M \subset S$  и пусть точка  $c(M)$  имеет параметры  $\alpha = 0, u = 0$ . Если*

$$R(M) < r\sqrt{2}, \quad (2.67)$$

то:

$$R^2(p, M) \geq R^2(M) + u_1^2. \quad (2.68)$$

*Доказательство.* Для упрощения предположим, что  $c(M) = \mathbf{0}$ . Если точка  $p$  совпадает с точкой  $\mathbf{0}$ , то неравенство (2.68) превращается в равенство.

В противном случае построим плоскость  $\Pi$  следующим образом: введем обозначение  $\Psi$  как осевая линия цилиндра, построим плоскость, проходящую через точку  $c(M)$  и перпендикулярную прямой  $\Psi$  в точке  $O$ , затем построим плоскость  $\Xi$ , содержащую 3 различные точки  $O, \mathbf{0}, p$ . Плоскость  $\Pi$  проходит через точки  $\mathbf{0}$  и  $p$ , и перпендикулярна плоскости  $\Xi$  (см. рис. 2.20).

Тогда плоскость  $\Pi$  разделит сферу  $\partial\Theta(\mathbf{0}, R(M))$  на две половины:  $\partial\Theta^+$  — полусфера, находящаяся по ту же сторону, что и точка  $p$  с плоскостью  $\Pi$ , а  $\partial\Theta^-$  — полусфера по другую сторону от точки  $p$ . Пусть  $a_1, a_2 \in \Pi \cap S \cap \partial\Theta(\mathbf{0}, R(M))$  — два пересечения между боковой поверхностью цилиндра  $S$ , сферой  $\partial\Theta(\mathbf{0}, R(M))$  и плоскостью  $\Pi$ .

Покажем, что  $\partial\Theta^- \cap M \neq \emptyset$ . Предположим обратное, т.е.  $\partial\Theta^- \cap M = \emptyset$ .

Тогда все точки  $m \in M$  разделятся на 2 типа:  $m \in M \cap \partial\Theta(\mathbf{0}, R(M))$  и  $m \notin M \cap \partial\Theta(\mathbf{0}, R(M))$ .

Рассмотрим точки  $m \in M \cap \partial\Theta(\mathbf{0}, R(M))$ :

Для точек  $m \in M \cap \partial\Theta(\mathbf{0}, R(M))$ , поскольку  $\partial\Theta^- \cap M = \emptyset$ , точки  $m$  будут в множестве  $M \cap \partial\Theta^+$ . Пусть  $\Phi$  — пересечение между полусферой  $\partial\Theta^+$  и поверхностью цилиндра  $S$ . Тогда все точки  $m \in M \cap \partial\Theta(\mathbf{0}, R(M))$  будут лежать на этой кривой  $\Phi$ . Покажем, что существует шар с радиусом, меньше чем  $R(M)$  содержит все эти точки.

Действительно, пусть  $\omega_1, \omega_2 \in M \cap \partial\Theta(\mathbf{0}, R(M))$  — две точки на кривой  $\Phi$ , где  $\omega_1$  ближе всего к  $a_1$ , а  $\omega_2$  ближе всего к  $a_2$ , а точка  $\xi$  — середина отрезка между  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Построим прямую  $\Lambda$ , проходящую через точку  $\xi$ , пересекающую осевую линию цилиндра и параллельную плоскости основания цилиндра. Прямая  $\Lambda$  единственна и пересекается множеством  $M$  в точкой  $\chi$  (см. рис. 2.20).

Тогда для всех точек  $m \in \Phi$  видим, что  $\angle m\mathbf{0}\chi \leq \angle \omega_1\mathbf{0}\chi$ . Тогда в треугольнике, образованный из точек  $m, \chi, \mathbf{0}$  получим:

$$\begin{aligned} |\chi m|^2 &= |\mathbf{0}m|^2 + |\mathbf{0}\chi|^2 - 2|\mathbf{0}m||\mathbf{0}\chi| \cos \angle m\mathbf{0}\chi \\ &\leq |\mathbf{0}\omega_1|^2 + |\mathbf{0}\chi|^2 - 2|\mathbf{0}\omega_1||\mathbf{0}\chi| \cos \angle \omega_1\mathbf{0}\chi \\ &= |\chi\omega_1|^2. \end{aligned}$$

С другой стороны из условия (2.67) видим, что расстояние между  $\xi$  и  $\chi$  — кратчайшее расстояние от точки  $\xi$  до боковой поверхности цилиндра, т.е.  $|\xi\chi| < |\xi\mathbf{0}|$ . Прямая  $\omega_1\omega_2$  перпендикулярна плоскости через 3 точки  $\mathbf{0}, \xi, \chi$ , поэтому:

$$\begin{aligned} |\chi\omega_1|^2 &= |\xi\chi|^2 + |\xi\omega_1|^2 \\ &< |\xi\mathbf{0}|^2 + |\xi\omega_1|^2 \\ &= |\mathbf{0}\omega_1|^2 = R^2(M). \end{aligned}$$

Итак  $|\chi m| < R(M)$ , т.е. существует шар с центром  $\chi$  и радиусом, меньше чем  $R(M)$  содержит все эти точки  $m \in M \cap \partial\Theta(\mathbf{0}, R(M))$ . Пусть  $\rho_1$  — радиус такого шара,  $\rho_1 < R(M)$ .

Рассмотрим точки  $m \notin M \cap \partial\Theta(\mathbf{0}, R(M))$ :

Для все точки  $m \notin M \cap \partial\Theta(\mathbf{0}, R(M))$ , пусть  $\rho_2$  — наибольшее расстояние от  $\mathbf{0}$  до всех этих точек:

$$\rho_2 = \max\{|\mathbf{0}m|, m \notin M \cap \partial\Theta(\mathbf{0}, R(M))\}.$$

Значение  $\rho_2$  также меньше, чем  $R(M)$ , т.е.  $\rho_2 < R(M)$ .

На геодезической линии между точками  $\mathbf{0}$  и  $\chi$ , выберем точку  $O^*$  так, чтобы  $|\mathbf{0}O^*| < R(M) - \max\{\rho_1, \rho_2\}$ .

Тогда если  $m \notin M \cap \partial\Theta(\mathbf{0}, R(M))$ , получим:

$$|mO^*| \leq |m\mathbf{0}| + |O^*\mathbf{0}| < \rho_2 + R(M) - \max\{\rho_1, \rho_2\} \leq R(M)$$

Если  $m \in M \cap \partial\Theta(\mathbf{0}, R(M))$ , получим :

$$|mO^*| \leq \rho_1 < R(M).$$

Таким образом, существует шар с центром  $O^*$  и радиусом, меньшим  $R(M)$ , в которых может быть вложено множество  $M$ . Это противоречит определению  $R(M)$ . Следовательно,  $\partial\Theta^- \cap M \neq \emptyset$ .

Пусть  $\sigma \in \partial\Theta^- \cap M$ , тогда получим неравенство:

$$R^2(p, M) \geq |p\sigma|^2 \geq |pa_0|^2. \quad (2.69)$$

Пусть  $a$  — середина между  $a_1, a_2$ , применяя теорему Пифагора в прямоугольных треугольниках  $\Delta pa_1, \Delta a_1a_0$ , получаем:

$$|pa_1|^2 = |pa|^2 + |aa_1|^2 = |pa|^2 + R^2(M) - |a_0|^2. \quad (2.70)$$

Пусть  $K$  — проекция точки  $p$  на отрезок прямой, соединяющий  $O$  и  $\mathbf{0}$ , тогда из геометрии цилиндра и условия (2.67):  $|a_0| \leq r$ ,  $|K\mathbf{0}| = \frac{|p\mathbf{0}|^2 - u_1^2}{2r}$  (см. рис. 2.21), получим:

$$\begin{aligned} |pa_0|^2 &= R^2(M) + |pK|^2 + |Ka|^2 - |a_0|^2 \\ &= R^2(M) + |p\mathbf{0}|^2 - |K\mathbf{0}|^2 + |Ka|^2 - |a_0|^2 \\ &= R^2(M) + |p\mathbf{0}|^2 - 2|K\mathbf{0}||a_0| \\ &\geq R^2(M) + |p\mathbf{0}|^2 - 2r|K\mathbf{0}| \\ &= R^2(M) + u_1^2. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Из (2.69), (2.70) и (2.71) получим неравенство (2.68). Лемма доказана.

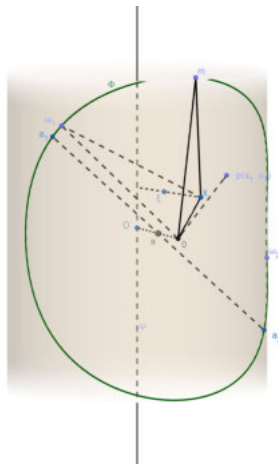


Рис. 2.20: Иллюстрация доказательства для боковой поверхности цилиндра.

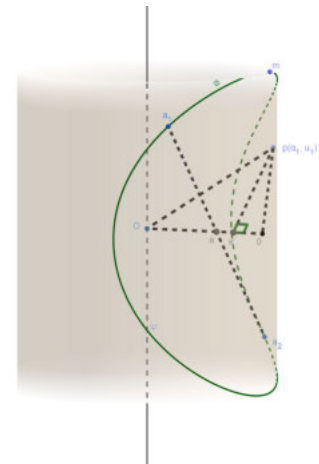


Рис. 2.21: Иллюстрация вычисления из геометрии цилиндра.

## 2.5 Вычислительные алгоритмы решения задач покрытия и упаковки

### 2.5.1 О методе решения задач о покрытии и об упаковке

Для решения задач о покрытии применяется оптико-геометрический подход [29], который является следствием физических принципов Ферма и Гюйгенса [67].

Решение задачи о покрытии включает два этапа: (1) поверхность  $S$  разбивается на  $n$  областей с помощью диаграммы Вороного, которая строится по произвольному набору начальных точек; (2) для каждой области диаграммы Вороного строится один покрывающий объект минимального радиуса, находится его центр. Далее строится новая диаграмма Вороного относительно найденных центров. Итерационный процесс продолжается до выполнения критерия останова.

*Алгоритмы построения покрытия равными шарами и геодезическими кругами состоят из одинаковых шагов. Ключевое отличие заключается в том, что в первом случае расстояния измеряются в обычном евклидовом смысле, а во втором — вдоль кратчайшего пути на поверхности — геодезической линии.*

Решение задачи об упаковке выполняется аналогично, но на этапе (2) находится объект максимального радиуса, который можно поместить в область диаграммы Вороного.

### 2.5.2 Задача о покрытии и об упаковке на сфере или сферическом сегменте

В данном разделе рассматриваются алгоритмы решения задачи о покрытии П1 и упаковке У1 для сферы. В этих двух задачах, учитывая, что свойства геометрий сферического сегмента и геодезического круга в евклидовой метрике одинаковы, задача покрытия или упаковки сферическими сегментами и геодезическими кругами становится эквивалентной, если используется евклидова метрика. Обычное евклидово и геодезическое расстояние связаны формулой:

$$\sigma(a, b) = 2 \sin \frac{\rho(a, b)}{2}, \forall a, b \in \Theta.$$

#### Построение диаграммы Вороного на сфере

Для набора из  $n$  точек  $O_i = (x_i, y_i, z_i) \in S, i = \overline{1, n}$ , составляющие диаграмму Вороного области Дирихле  $V_i$  с центрами  $O_i$  определяется следующим образом:

$$V_i = \{p \in S: \rho(p, O_i) \leq \rho(p, O_j), \forall j \neq i\}.$$

Наиболее известным алгоритмом построения классической диаграммы Вороного является алгоритм Форчуна [123]. В рамках данной диссертаций, предлагается обобщение

ние оптико-геометрического подхода и алгоритма построения диаграммы Вороного для множества точек, лежащих на сфере или сферическом сегменте.

Пусть заданы  $n$  точек  $O_i, i = \overline{1, n}$ , а промежутки изменения сферических координат  $\alpha$  и  $\beta$  определяют поверхность  $S$ : если  $0 \leq \alpha < 2\pi, -\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$ , то  $S$  — сфера, если  $0 < \alpha_* \leq \alpha \leq \alpha^* < 2\pi, -\pi/2 < \beta_* \leq \beta \leq \beta^* < \pi/2$  — различные сферические сегменты.

**Алгоритм 4 (SphereVoronoi).** Построение сферической диаграммы Вороного

*Шаг 1:* Вводится равномерная сетка с шагом по углу  $s\alpha$  и  $s\beta$ :  $S(s\alpha, s\beta) \subset S$ .

*Шаг 2:* Из каждой точки  $O_i \in S(s\alpha, s\beta), i = \overline{1, n}$ , выпускается световая волна с помощью алгоритма **WaveSurface** и определяется время достижения  $T_i(p)$  всех точек  $p(\alpha, \beta) \in S(s\alpha, s\beta)$ . Это позволяет найти вектор

$$T(p) = \{T_i(p), i = \overline{1, n}\}.$$

*Шаг 3:* Для каждой точки  $p \in S(s\alpha, s\beta)$  определяется номер волны, возможно не единственный, которая первой достигла данной точки, и формируется множество  $D(p) = \{k: T_k(p) = \min_i T_i(p)\}$  номеров таких волн.

*Шаг 4:* Определяются области Дирихле диаграммы Вороного  $V_i$  с центром  $O_i$  как

$$V_i = \{p \in S(s\alpha, s\beta): i \in D(p)\}.$$

□

### Построения покрытия областей диаграммы Вороного на сфере

Идея алгоритма основана на решении следующей смешанной экстремальной задачи: найти такую точку области Дирихле, из которой максимальное время достижения любой точки границы области минимально возможно (минимакс). Нахождение максимума гарантирует полное покрытие, а минимум — его оптимальность. Алгоритм состоит из шагов:

**Алгоритм 5 (SphereCover).** Построение покрытия равными сферическими сегментами / геодезическими кругами

*Шаг 0:* Задать сферу  $S(s\alpha, s\beta)$ , количество элементов покрытия  $n$ , параметр останова  $\delta > 0$ , максимальное число итераций  $N_{\max}$ . Задать параметр  $type = 0$  для покрытия сферическими сегментами или  $type = 1$  для покрытия геодезическими кругами. Установить  $R_{best} = +\infty, iter = 0$ .

*Шаг 1:* Случайным образом генерируются начальные координаты центров элементов  $O_i \in S(s\alpha, s\beta), i = \overline{1, n}$ .

Шаг 2: Для множества  $C = \{O_i \in S(s\alpha, s\beta), i = \overline{1, n}\}$ , строятся области Дирихле  $V_i, i = \overline{1, n}$  диаграммы Вороного с помощью алгоритма **Sphere Voronoi**.

Шаг 3: Определяются границы  $\partial V_i$  областей  $V_i$  и аппроксимируются замкнутыми ломаными с узлами в точках  $v_{i,k}, k = \overline{1, m}$ . Если при этом три точки или более оказываются лежащими на одной прямой, то средние точки исключаются из рассмотрения.

Шаг 4: Из каждой точки  $v_{i,k}$ , выпускаются световые волны. Если  $type = 0$ , используется алгоритм **Wave3D**, если  $type = 1$  – **WaveSurface**.

Для каждой точки  $p(\alpha, \beta) \in V_i$  определяется источник, выпущенная из которого волна первой достигла точки  $p$ , и время перемещения  $T(\alpha, \beta)$ :

$$T(\alpha, \beta) = \min_{k=\overline{1, m}} T_k(\alpha, \beta),$$

где  $T_k(\alpha, \beta)$  – время распространения световой волны из  $v_{i,k}$  до  $p(\alpha, \beta) \in V_i$ .

Шаг 5: Определяются радиус и центр покрывающих элементов области  $V_i$  по формулам:

$$R_i = \max_{p(\alpha, \beta) \in V_i} T(\alpha, \beta),$$

$$O_i^* = \arg \max_{p(\alpha, \beta) \in V_i} T(\alpha, \beta).$$

Шаги 3–5 выполняются независимо для каждой области  $V_i$ .

Шаг 6: Чтобы гарантировать полное покрытие множества  $S$ , в качестве радиуса покрытия выбирается максимальный

$$R = \max_{i=\overline{1, n}} R_i.$$

Шаг 7: Если  $\rho(O_i, O_i^*) < \delta, i = \overline{1, n}$ , переход к шагу 8, иначе  $O_i := O_i^*$  и переход к шагу 2.

Шаг 8: Если  $R < R_{best}$ , обновить  $R_{best} := R$  и сохранить текущие центры. Если  $iter < N_{max}$ , то выполнить новую генерацию начальных позиций и  $iter := iter + 1$ . Если  $iter = N_{max}$ , алгоритм завершается.  $\square$

Алгоритм **SphereCover** принадлежит семейству алгоритмов типа Ллойда и отличается от известных тем, что расстояние между точками здесь определяется из решения задачи о брахистохроне, которая, в свою очередь, решается с использованием оптико-геометрической аналогии. Здесь, в отличие от [217], выбор метрики оказывает существенное влияние на решение задачи.

Недостатком алгоритма является то, что он не гарантирует получения глобального решения. На каждой итерации находится локальный оптимум. Применение случайной

генерации начальных координат центров позволяет говорить о нахождении наилучшего из известных решений.

### Построения упаковки областей диаграммы Вороного на сфере

Области Дирихле диаграммы Вороного на сфере являются сферическими многогранниками. Упакуем сферический сегмент или геодезический круг с максимизацией его радиуса. В отличие от задачи покрытия, где находится чебышевский центр множества, т. е., определяется расстояние между точками, в задаче об упаковке необходимо определить расстояние между точкой и ребром. Здесь предлагается алгоритм нахождения центра и радиуса упакованного сферического сегмента или геодезического круга с использованием оптико-геометрического подхода.

Ключевая идея заключается в следующем: для каждой области Дирихле диаграммы Вороного находим аналог чебышевского центра [100] относительно метрики (2.1). Сначала центр случайно сгенерированного сегмента смещается в сторону увеличения минимального расстояния до границы области Дирихле. Это направление определяется как вектор суммы сил отталкивания от точек касания. Эта точка дает нам центр упакованного сферического сегмента или геодезического круга, имеющего максимально возможный радиус. Далее, используя все эти центры, перестраиваем диаграмму Вороного, пока радиус продолжает увеличиваться (см. рис. 2.22). Отметим, что расстояние между точкой  $C$  и кривой  $AB$  на сфере рассчитывается по формуле:

$$d(C, AB) = \min_{P \in AB} d(C, P).$$

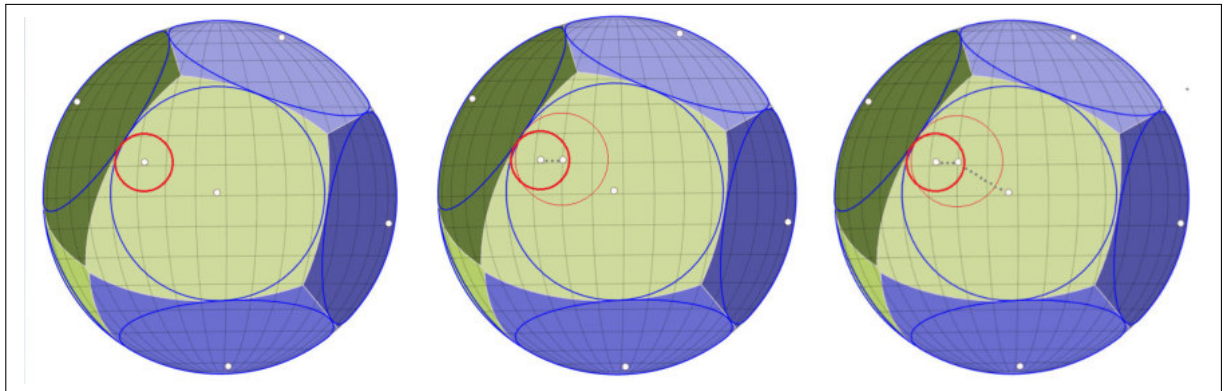


Рис. 2.22: Иллюстрация алгоритма упаковки областей диаграммы Вороного

**Алгоритм 6 (SpherePacking).** Построение упаковки равных сферических сегментов / геодезических кругов

Шаг 0: Задать сферу  $S(s\alpha, s\beta)$ , количество элементов упаковки  $n$ , параметр останова  $\delta > 0$ , максимальное число итераций  $N_{\max}$ . Задать параметр  $type = 0$  для упаковки сферических сегментов или  $type = 1$  для упаковки геодезических кругов. Установить  $R_{best} = 0$ ,  $iter = 0$ .

Шаг 1: Случайным образом генерируются начальные координаты центров элементов  $O_i \in S(s\alpha, s\beta)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Шаг 2: Для множества  $C = \{O_i \in S(s\alpha, s\beta), i = \overline{1, n}\}$ , строятся области Дирихле  $V_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  диаграммы Вороного с помощью алгоритма **Sphere Voronoi**.

Шаг 3: Определяются границы  $\partial V_i$  областей  $V_i$  и аппроксимируются замкнутыми ломаными с узлами в точках  $v_{i,k}$ ,  $k = \overline{1, m}$ . Таким образом, получаются наборы

$$P(\partial V_i) = \{v_{i,k}, k = \overline{1, m}\}.$$

Шаг 4: Из точек  $p(\alpha, \beta) \equiv O_i$  выпускается световая волна. Если  $type = 0$ , используется алгоритм **Wave3D**,  $type = 1$  – **WaveSurface**. Вычисляется минимальное время, необходимое для достижения  $P(\partial V_i)$ :

$$T(p, \partial V_i) = \min_{k=\overline{1, m}} T_i(p, v_{i,k}),$$

где  $T_i(p, v_{i,k})$  – время распространения световой волны из  $p$  до  $v_{i,k}$ .

Шаг 5: Множество соседних с точкой  $p(\alpha, \beta)$  точек определяется как

$$\Delta p = \{(\alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta) : \Delta\alpha \in \{-s\alpha, 0, s\alpha\}, \Delta\beta \in \{-s\beta, 0, s\beta\}\}.$$

Шаг 6: Вычисляется  $T(p_{new}, \partial V_i)$  для каждой точки  $p_{new} \in \Delta p$ .

Если  $T(p_{new}, \partial V_i) < T(p, \partial V_i)$ , то  $p := p_{new}$  и выполняется переход к шагу 4. В противном случае, элемент с центром  $O_i^* = p$  и радиусом  $R_i = T(p, \partial V_i)$  является оптимальным для области  $V_i$ .

Шаги 3–6 выполняются независимо для каждой области  $V_i$ .

Шаг 7: Чтобы гарантировать, что элементы не пересекаются друг с другом, выбирается минимальный радиус упаковки  $R^* = \min_{i=\overline{1, n}} R_i$ .

Шаг 8: Если  $\rho(O_i, O_i^*) < \delta$ ,  $i = \overline{1, n}$ , выполняется переход к шагу 9, иначе  $O_i := O_i^*$  и переход к шагу 2.

Шаг 9: Если  $R > R_{best}$ , обновить  $R_{best} = R$  и сохранить текущие центры. Если  $k < N_{\max}$ , то выполнить новую генерацию начальных позиций и  $iter = iter + 1$ . Алгоритм завершается по достижении указанного количества генераций.  $\square$

### 2.5.3 Задача о покрытии и упаковке на поверхности цилиндра и конуса

#### Построение диаграммы Вороного на поверхности цилиндра и конуса

В данном разделе, предлагается обобщение оптико-геометрического подхода и алгоритма построения диаграммы Вороного для множества точек, лежащих на боковой поверхности цилиндра и конуса.

**Алгоритм 7 (CylConeVoronoi).** Построение геодезической диаграммы Вороного

*Шаг 1:* Вводится равномерная сетка с шагом по углу  $s\alpha$  и по высоте  $su$ :  $S(s\alpha, su) \subset S$ . Эта сетка одинакова для цилиндра и конуса.

*Шаг 2:* Выпускается световая волна из каждой точки  $O_i \in S(s\alpha, su)$ ,  $i = \overline{1, n}$  с помощью алгоритма **WaveSurface**. Для цилиндра используется геодезическое расстояние (2.24), а для конуса — (2.26). В результате подсчитывается время  $T_i(p)$ , затраченное на достижение каждой точки  $p(\alpha, u) \in S(s\alpha, su)$ , что позволяет найти вектор  $T(p) = \{T_i(p), i = \overline{1, n}\}$ .

*Шаг 3:* Для каждой точки  $p \in S(s\alpha, su)$  определяется номер волны, которая первой достигла данной точки. Данные номера образуют множество  $D(p) = \{k: T_k(p) = \min_i T_i(p)\}$ . Для каждого  $p$ ,  $D(p)$  содержит хотя бы один элемент.

*Шаг 4:* Области Дирихле диаграммы Вороного  $V_i$  относительно  $O_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  определяются как

$$V_i = \{p \in S(s\alpha, su): i \in D(p)\}.$$

□

#### Построения покрытия поверхности цилиндра и конуса равными шарами

Идея алгоритма аналогична алгоритму построения покрытия на сфере, который заключается в нахождении точки области Дирихле, из которой максимальное время достижения любой точки границы области минимально возможно (минимакс). Основное отличие заключается в использовании цилиндрических координат вместо сферических.

**Алгоритм 8 (CylConeCover).** Построение покрытия поверхности цилиндра и конуса равными шарами / геодезическими кругами

*Шаг 0:* Задать поверхность  $S(s\alpha, su)$ , количество элементов покрытия  $n$ , параметр останова  $\delta > 0$ , максимальное число итераций  $N_{\max}$ . Задать параметр  $type = 0$  для покрытия шарами или  $type = 1$  для покрытия геодезическими кругами. Установить  $R_{best} = +\infty$ ,  $iter = 0$ .

*Шаг 1: Случайным образом сгенерировать точки  $O_i \in S(s\alpha, su)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , которые являются начальными центрами элементов покрытия.*

*Шаг 2: Построить диаграмму Вороного и определить области Дирихле  $V_i$  относительно  $O_i, i = \overline{1, n}$  с помощью алгоритма **CylConeVoronoi**.*

*Шаг 3: Найти границу  $\partial V_i$  области  $V_i$ , которая состоит из точек  $v_{i,k}, k = \overline{1, m}$ .*

*Шаг 4: Из каждой точки  $v_{i,k}$  выпускается световая волна. Если  $type = 0$ , используется алгоритм **Wave3D**,  $type = 1$  – **WaveSurface**.*

*Это позволяет для каждой точки  $p(\alpha, u) \in V_i$  выяснить, какая волна достигла ее первой, и рассчитать время достижения*

$$T(\alpha, u) = \min_{k=\overline{1, m}} T_k(\alpha, u),$$

где  $T_k(\alpha, u)$  – время распространения световой волны от  $v_{i,k}$  до  $p(\alpha, u) \in V_i$ .

*Шаг 5: Радиус и центр элементов покрытия области определяются как*

$$R_i = \max_{p(\alpha, u) \in V_i} T(\alpha, u), \quad O_i^* = \arg \max_{p(\alpha, u) \in V_i} T(\alpha, u).$$

*Шаги 3–5 выполняются независимо для каждой области  $V_i$ .*

*Шаг 6: Для обеспечения полного покрытия множества  $S$  выбирается максимальный радиус покрытия:  $R = \max_{i=\overline{1, n}} R_i$ .*

*Шаг 7: Если  $\rho(O_i, O_i^*) < \delta, i = \overline{1, n}$ , переход к шагу 8, иначе  $O_i := O_i^*$  и переход к шагу 2.*

*Шаг 8: Если  $R < R_{best}$ , обновить  $R_{best} = R$  и сохранить текущие центры. Если  $k < N_{max}$ , то выполнить новую генерацию начальных позиций и  $iter = iter + 1$ . Алгоритм завершается по достижении указанного количества генераций.  $\square$*

В результате мы получаем набор равных шаров или геодезических кругов, объединение которых полностью покрывает поверхность  $S$ , а радиус покрытия минимален.

### **Построение упаковки равных шаров на поверхности цилиндра и конуса**

Построение упаковки на поверхности цилиндра и конуса, базируется на тех же принципах, что и построение упаковок на сфере. Ключевое отличие заключается в выборе системы координат и построении диаграммы Вороного.

**Алгоритм 9 (CylConePacking).** Построение упаковки равных шаров / геодезических кругов на поверхности цилиндра или конуса

*Шаг 0: Задать поверхность  $S(s\alpha, su)$ , количество элементов упаковки  $n$ , параметр останова  $\delta > 0$ , максимальное число итераций  $N_{max}$ . Задать параметр  $type = 0$  для*

упаковки шаров или  $type = 1$  для упаковки геодезических кругов. Установить  $R_{best} = 0$ ,  $iter = 0$ .

Шаг 1: Случайным образом сгенерировать точки  $O_i \in S(s\alpha, su)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , которые являются начальными центрами элементов упаковки.

Шаг 2: Построить диаграмму Вороного и определить области Дирихле  $V_i$  относительно  $O_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  с помощью алгоритма **CylConeVoronoi**.

Шаг 3: Найти границу  $\partial V_i$  области  $V_i$ , которая состоит из точек  $v_{i,k}$ ,  $k = \overline{1, m}$ .

Шаг 4: Из точек  $p(\alpha, u) \equiv O_i$  выпускаются световые волны. Если  $type = 0$ , используется алгоритм **Wave3D**,  $type = 1$  – **WaveSurface**. Вычисляется минимальное время, необходимое для достижения  $\partial V_i$ :

$$T(p, \partial V_i) = \min_{k=\overline{1, m}} T_i(p, v_{i,k}),$$

где  $T_i(p, v_{i,k})$  – время распространения световой волны из  $p$  до  $v_{i,k}$ .

Шаг 5: Множество ближайших точек к точке  $p(\alpha, u)$  определяется следующим образом  $\Delta p = \{(\alpha + \Delta\alpha, u + \Delta u) : \Delta\alpha \in \{-s\alpha, 0, s\alpha\}, \Delta u \in \{-su, 0, su\}\}$ .

Шаг 6: Вычисляется  $T(p_{new}, \partial V_i)$  для каждой точки  $p_{new} \in \Delta p$ .

Если  $T(p_{new}, \partial V_i) < T(p, \partial V_i)$  то  $p := p_{new}$  и выполняется переход к шагу 4. В противном случае, элемент с центром  $O_i^* = p$  и радиусом  $R_i = T(p, \partial V_i)$  является оптимальным для области  $V_i$ .

Шаги 3–6 выполняются независимо для каждой области  $V_i$ .

Шаг 7: Чтобы гарантировать, что элементы не пересекаются друг с другом, выбрать минимальный радиус упаковки  $R^* = \min_{i=\overline{1, n}} R_i$ .

Шаг 8: Если  $\rho(O_i, O_i^*) < \delta$ ,  $i = \overline{1, n}$ , переход к шагу 9, иначе  $O_i := O_i^*$  и переход к шагу 2.

Шаг 9: Если  $R > R_{best}$ , обновить  $R_{best} := R$  и сохранить текущие центры. Если  $k < N_{max}$ , то выполнить новую генерацию начальных позиций и  $iter := iter + 1$ . Алгоритм завершается по достижении указанного количества генераций.  $\square$

## Развертка боковых поверхностей

Для сравнения полученных результатов с наилучшими известными решениями задачи покрытия единичного квадрата, а также для визуализации найденных покрытий предлагается использовать метод развертки боковой поверхности.

Развертка и сама поверхность являются изометричными фигурами, между точками которых существует взаимно однозначное соответствие. Благодаря этому свойству, кратчайшему пути на поверхности соответствует прямая линия на ее развертке.

В контексте задачи покрытия поверхности вращения (цилиндра, конуса) это означает, что проекция сферического сечения — пересечения поверхности со сферой — представляет собой не окружность, как в классической двумерной задаче, а более сложную кривую. Данное пересечение является пространственной кривой четвертого порядка. В данном разделе описывается процедура построения таких кривых на развертке для случаев цилиндрической и конической поверхностей.

Рассмотрим цилиндр (2.66) и сферу с центром в точке  $O(\alpha_O, u_O)$  радиуса  $R$ . Для описания линии пересечения этих поверхностей введем окружность  $I$ , являющуюся направляющей цилиндра и проходящую через точку  $O$ .

Из произвольной точки  $M(\alpha_M, u_M) \in I$  проведем по цилиндрической поверхности прямолинейную образующую, перпендикулярную плоскости окружности  $I$ , до пересечения со сферой в точке  $N(\alpha_N, u_N)$  (см. рис. 2.23). По построению длина отрезка  $MN$  равна:

$$MN = \sqrt{ON^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - 4r^2 \sin^2 \frac{|\alpha_O - \alpha_M|}{2}}.$$

Заметим, что  $u_O = u_M$ , поскольку точки  $O$  и  $M$  лежат на одной направляющей, а  $\alpha_M = \alpha_N$ , так как точки  $M$  и  $N$  принадлежат одной образующей. Следовательно, координата  $u$  точки  $N$  определяется выражением:

$$u_N = u_O \pm \sqrt{R^2 - 4r^2 \sin^2 \frac{|\alpha_O - \alpha_M|}{2}}.$$

Когда точка  $M$  пробегает дугу  $\ell$  окружности  $I$ , удовлетворяющую условию

$$|\alpha_O - \alpha_M| \leq 2 \left| \arcsin \frac{R}{2r} \right|,$$

соответствующее множество точек пересечения описывается соотношением:

$$J_{cyl}(\alpha_O, u_O) = \left\{ (\alpha, u) : \alpha \in \ell; u = u_O \pm \sqrt{R^2 - 4r^2 \sin^2 \frac{|\alpha_O - \alpha|}{2}} \right\}. \quad (2.72)$$

Рассмотрим теперь поверхность конуса, заданную уравнением (2.25), и сферу с центром в точке  $O(\alpha_O, u_O)$  радиуса  $R$ . По аналогии со случаем цилиндра введем окружность  $I$ , являющуюся направляющей конуса и проходящую через точку  $O$ . Для каждой точки  $M(\alpha_M, u_M) \in I$  проведем прямолинейную образующую конуса, соединяющую  $M$  с его вершиной  $D$ , до пересечения со сферой в точке  $N(\alpha_N, u_N)$  (см. рис. 2.23).

Введем обозначение  $L = \sqrt{h^2 + r^2}$  для длины образующей конуса. Из построения следуют соотношения:

$$DM = DO = u_O \frac{L}{r}, MO = 2u_O \sin \frac{|\alpha_O - \alpha_M|}{2}.$$

Следовательно,  $\cos(\angle MDO) = 1 - \frac{MO^2}{2DO^2}$ . Таким образом, согласно теореме косинусов, получаем следующее квадратное уравнение для вычисления  $DN$ :

$$DN^2 - 2DNu_O \frac{L}{r} \left( 1 - \frac{2r^2 \sin^2\left(\frac{|\alpha_O - \alpha_M|}{2}\right)}{L^2} \right) + \left( u_O \frac{L}{r} \right)^2 - R^2 = 0. \quad (2.73)$$

Чтобы решить (2.73), найдем его дискриминант

$$\Delta = 4R^2 - 8u_O^2 \sin^2 \frac{|\alpha_O - \alpha_M|}{2}.$$

Когда точка  $M$  пробегает дугу  $\ell$  окружности  $I$ , удовлетворяющую ограничению  $\Delta \geq 0$ , соответствующее множество точек пересечения имеет вид

$$J_{con}(O(\alpha_O, u_O)) = \left\{ (\alpha, u) : \alpha \in \ell; u = \frac{r}{L} k_{\pm}; L = \sqrt{h^2 + r^2} \right\}, \quad (2.74)$$

где  $k_{\pm}$  — корни (2.73).

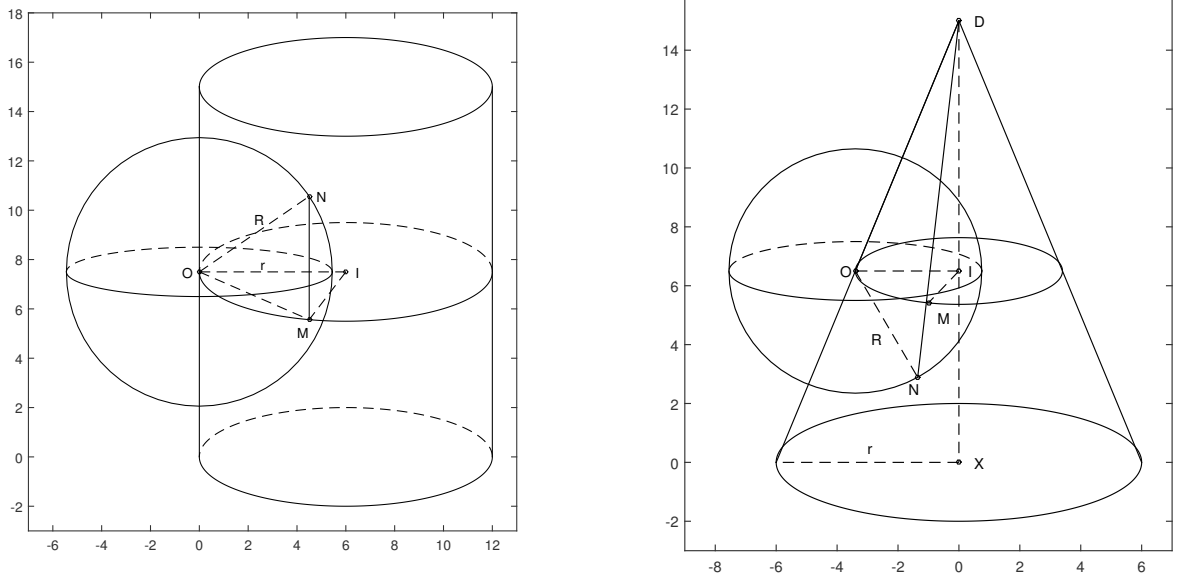


Рис. 2.23: Иллюстрация построения множества точек пересечения сферы с цилиндром и конусом

#### 2.5.4 Задача о покрытии и упаковке на эллипсоиде

##### Построение диаграммы Вороного для эллипсоида

Пусть на поверхности эллипсоида (2.27), определено множество из  $n$  точек  $O_i(x_i, y_i, z_i) \in S$ , где  $i = \overline{1, n}$ . Область определения параметров  $\theta$  и  $\mu$  задает тип рассматриваемой поверхности  $S$ :

- Если  $0 \leq \theta < 2\pi$  и  $-\pi/2 \leq \mu \leq \pi/2$ , то  $S$  представляет собой полный эллипсоид.

- Если  $0 < \theta_* \leq \theta \leq \theta^* < 2\pi$  и  $-\pi/2 < \mu_* \leq \mu \leq \mu^* < \pi/2$ , то  $S$  является сегментом эллипсоида.

**Алгоритм 10 (EllipsoidVoronoi).** Построение диаграммы Вороного на эллипсоиде

*Шаг 1:* Вводится равномерная сетка с шагами по углам  $s\theta$  и  $s\mu$ :  $S(s\theta, s\mu) \subset S$ .

*Шаг 2:* Из каждой точки  $O_i \in S(s\alpha, s\mu)$ ,  $i = \overline{1, n}$  выпускается световая волна с помощью алгоритма **WaveSurface**, в котором для вычисления геодезических расстояний используется метод, изложенный в разделе 2.2.4.

В результате для каждой точки  $p(\theta, \mu) \in S(s\theta, s\mu)$  вычисляется время  $T_i(p)$ , за которое волна из источника  $O_i$  достигает точки  $p$ . Это позволяет сформировать вектор времен  $T(p) = \{T_i(p), i = \overline{1, n}\}$ .

*Шаг 3:* Для каждой точки расчетной сетки  $p \in S(s\theta, s\mu)$  определяется источник, волна от которого достигла этой точки первой. Это множество индексов определяется как  $D(p) = \{k: T_k(p) = \min_i T_i(p)\}$ . Для всякой точки  $p$  множество  $D(p)$  содержит по крайней мере один элемент.

*Шаг 4:* Области Дирихле (ячейки диаграммы Вороного)  $V_i$ , соответствующие центрам  $O_i$ , где  $i = \overline{1, n}$ , определяются следующим образом:

$$V_i = \{p \in S(s\theta, s\mu) : i \in D(p)\}.$$

□

### Построение покрытия эллипсоида равными шарами

Идея алгоритма аналогична принципу построения покрытия на сфере и заключается в нахождении для каждой области Дирихле такой точки, для которой максимальное время достижения любой точки на границе этой области является минимально возможным (минимакс).

**Алгоритм 11 (EllipsoidCover).** Построение покрытия эллипсоида равными шарами / геодезическими кругами.

*Шаг 0:* Задать эллипсоид  $S(s\alpha, s\mu)$ , количество элементов покрытия  $n$ , параметр останова  $\delta > 0$ , максимальное число итераций  $N_{\max}$ . Задать параметр  $type = 0$  для покрытия шарами или  $type = 1$  для покрытия геодезическими кругами. Установить  $R_{best} = +\infty$ ,  $iter = 0$ .

*Шаг 1:* Случайным образом сгенерировать начальные центры элементов  $O_i \in S(s\theta, s\mu)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Шаг 2: Построить диаграмму Вороного и определить области Дирихле  $V_i$  относительно  $O_i, i = \overline{1, n}$  с помощью алгоритма **EllipsoidVoronoi**.

Шаг 3: Найти границу  $\partial V_i$  области  $V_i$ , которая состоит из точек  $v_{i,k}, k = \overline{1, m}$ .

Шаг 4: Из каждой точки  $v_{i,k}$  выпускаются световые волны. Если  $type = 0$ , используется алгоритм **Wave3D**,  $type = 1$  – **WaveSurface**. Это позволяет для каждой точки  $p(\alpha, u) \in V_i$  выяснить, какая волна достигла ее первой, и рассчитать время достижения

$$T(\theta, \mu) = \min_{k=\overline{1, m}} T_k(\theta, \mu),$$

где  $T_k(\theta, \mu)$  – время распространения световой волны от  $v_{i,k}$  до  $p(\theta, \mu) \in V_i$ .

Шаг 5: Радиусы и центры элементов покрытия области определяются как

$$R_i = \max_{p(\theta, \mu) \in V_i} T(\theta, \mu), \quad O_i^* = \arg \max_{p(\theta, \mu) \in V_i} T(\theta, \mu).$$

Шаги 3–5 выполняются независимо для каждой области  $V_i$ .

Шаг 6: Для обеспечения полного покрытия множества  $S$  выбирается максимальный радиус покрытия:  $R = \max_{i=\overline{1, n}} R_i$ .

Шаг 7: Если  $\sigma(O_i, O_i^*) < \delta, i = \overline{1, n}$ , выполняется переход к шагу 8, иначе  $O_i := O_i^*$  и выполняется переход к шагу 2.

Шаг 8: Если  $R < R_{best}$ , обновить  $R_{best} := R$  и сохранить текущие центры. Если  $k < N_{max}$ , то выполнить новую генерацию начальных позиций и  $iter := iter + 1$ . Алгоритм завершается по достижении указанного количества генераций.  $\square$

В результате получаем набор равных шаров или геодезических кругов, объединение которых полностью покрывает поверхность  $S$ , а радиус покрытия минимален.

**Алгоритм 12 (EllipsoidPacking)**. Построение упаковки равных шаров / геодезических кругов на эллипсоиде.

Шаг 0: Задать эллипсоид  $S(s\alpha, s\mu)$ , количество элементов упаковки  $n$ , параметр останова  $\delta > 0$ , максимальное число итераций  $N_{max}$ . Задать параметр  $type = 0$  для упаковки шаров или  $type = 1$  для упаковки геодезических кругов. Установить  $R_{best} = 0$ ,  $iter = 0$ .

Шаг 1: Случайным образом сгенерировать точки  $O_i \in S(s\theta, s\mu), i = \overline{1, n}$ , которые являются начальными центрами элементов упаковки.

Шаг 2: Построить диаграмму Вороного и определить области Дирихле  $V_i$  относительно  $O_i, i = \overline{1, n}$  с помощью алгоритма **EllipsoidVoronoi**.

Шаг 3: Найти границу  $\partial V_i$  области  $V_i$ , которая состоит из точек  $v_{i,k}, k = \overline{1, m}$ .

Шаг 4: Из точек  $p(\theta, \mu) \equiv O_i$  выпускается световая волна. Если  $type = 0$ , используется алгоритм **Wave3D**,  $type = 1$  – **WaveSurface**. Вычисляется минимальное время, необходимое для достижения  $\partial V_i$ :

$$T(p, \partial V_i) = \min_{k=\overline{1,m}} T_i(p, v_{i,k}),$$

где  $T_i(p, v_{i,k})$  – время распространения световой волны из  $p$  до  $v_{i,k}$ .

Шаг 5: Множество ближайших точек к точке  $p(\theta, \mu)$  определяется следующим образом  $\Delta p = \{(\theta + \Delta\theta, \mu + \Delta\mu) : \Delta\theta \in \{-s\theta, 0, s\theta\}, \Delta\mu \in \{-s\mu, 0, s\mu\}\}$ .

Шаг 6: Вычисляется  $T(p_{new}, \partial V_i)$  для каждой точки  $p_{new} \in \Delta p$ . Если  $T(p_{new}, \partial V_i) < T(p, \partial V_i)$ , то  $p := p_{new}$  и выполняется переход к шагу 4. В противном случае, элемент с центром  $O_i^* = p$  и радиусом  $R_i = T(p, \partial V_i)$  является оптимальным для области  $V_i$ .

Шаги 3–6 выполняются независимо для каждой области  $V_i$ .

Шаг 7: Чтобы гарантировать, что элементы не пересекаются друг с другом, выбирается минимальный радиус упаковки  $R^* = \min_{i=\overline{1,n}} R_i$ .

Шаг 8: Если  $\sigma(O_i, O_i^*) < \delta, i = \overline{1,n}$ , выполняется переход к шагу 10, иначе  $O_i := O_i^*$  и выполняется переход к шагу 2.

Шаг 9: Если  $R > R_{best}$ , то  $R_{best} := R$  и сохранить текущие центры. Если  $k < N_{max}$ , то выполнить новую генерацию начальных позиций и  $iter := iter + 1$ . Алгоритм завершается по достижении указанного количества генераций.  $\square$

### Пересечение эллипсоида и сферы

Для того чтобы корректно визуализировать результаты расчетов, необходимо найти линию пересечения сферы и эллипсоида. Поскольку полуоси эллипсоида различны, эта линия представляет собой пространственную кривую 4-ого порядка, для аналитического нахождения которой в настоящее время, насколько нам известно, методов не существует. Как правило, данная задача решается численно с использованием преобразований вращения, перемещения и расширения эллипсоида до сферы. Так, в работе [173] разработан численный метод с использованием алгебраических матриц и параметризации уравнения поверхностей для построения пересекающихся кривых. Однако данный метод не всегда может найти кривую пересечения, когда она сингулярна, и в некоторых случаях генерирует неверную параметризацию. Программное обеспечение Maple позволяет визуализировать пересечения эллипсоида и сферы и определять площадь участка эллипсоида, покрытого сферой, и наоборот, однако его можно применять только в случае евклидова

расстояния [235]. В данном разделе будет предложен численный метод построения кривых пересечения эллипсоида и сферы для рассматриваемой метрики (2.1).

Пусть заданы эллипсоид  $S$  в форме (2.27) и сфера  $(\Theta)$  с центром  $O(x_0, y_0, z_0) \in S$  и радиусом  $R$ . Сфера  $(\Theta)$  в параметрической виде задается как

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos \psi \cos \varphi \\ y = y_0 + R \cos \psi \sin \varphi \\ z = z_0 + R \sin \psi \end{cases}, \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in [0; 2\pi), \quad (2.75)$$

где  $\psi, \varphi$  – долгота и широта соответственно.

Сначала найдем линию пересечения сферы и эллипсоида. Каждая точка  $p(x, y, z) \in S \cap (\Theta)$ , лежащая на пересечении эллипсоида и сферы, должна удовлетворять как уравнению (2.27), так и (2.75). Подставим выражения для координат из (2.75) в (2.27), получим уравнение

$$\frac{(x_0 + R \cos \psi \cos \varphi)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + R \cos \psi \sin \varphi)^2}{b^2} + \frac{(z_0 + R \sin \psi)^2}{c^2} = 1.$$

Известно, что  $O(x_0, y_0, z_0) \in S$ , это значит  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$ , тогда:

$$A \cos^2 \varphi + B \cos \varphi + D = -C \sin \varphi, \quad (2.76)$$

где  $A = \frac{R^2 \cos^2 \psi}{a^2} - \frac{R^2 \cos^2 \psi}{b^2}$ ,  $B = \frac{2x_0 R \cos \psi}{a^2}$ ,  $C = \frac{2y_0 R \cos \psi}{b^2}$ ,  $D = \frac{2z_0 R \sin \psi + R^2 \sin^2 \psi}{c^2} + \frac{R^2 \cos^2 \psi}{b^2}$ .

Возведем в квадрат обе части уравнения (2.76) и сделаем замену  $\cos \psi = \chi$ , тогда (2.76) примет вид

$$A^2 \chi^4 + 2AB\chi^3 + (B^2 + 2AD + C^2)\chi^2 + 2BD\chi + D^2 - C^2 = 0 \quad (2.77)$$

Будем решать уравнение (2.77) численно. Значения  $A, B, C, D$  зависят только от  $\psi$ , поэтому введем равномерную сетку с шагом  $\Delta\psi$  на отрезке  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ . Для каждого узла сетки вычислим значения  $A, B, C, D$  и найдем действительные корни уравнения (2.77). Поскольку уравнение (2.77) имеет четвертый порядок, максимальное число действительных корней также четыре. Сделаем обратную замену  $\psi = \arccos \chi$  и вычислим значения  $x, y, z$  по формуле (2.75). Если эти значения  $x, y, z$  удовлетворяют (2.27), то лежит на кривой пересечения эллипсоида и сферы. На рисунках 2.24 и 2.25, показывается пересечение сферы и эллипсоида и проекция пересечения на плоскости  $Oxy$ .

Далее найдем площадь пересечения сферы и эллипсоида. Важным показателем близости аппроксимации к оптимальной служит величина плотности  $\Xi_n = \frac{\Sigma \Omega}{\Gamma}$  – отношение суммы площадей пересечения сферы и эллипсоида к площади поверхности эллипсоида.

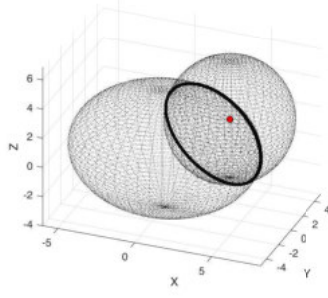
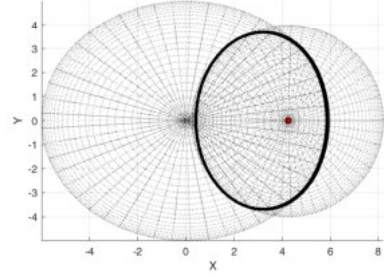


Рис. 2.24: Пересечение сферы и эллипсоида

Рис. 2.25: Проекция пересечения сферы и эллипсоида на плоскости  $Oxy$ 

Чем меньше значение плотности  $\Xi_n$ , тем ближе результат найденного покрытия к наилучшему. Отметим, что, в отличие от сферы, для нахождения площади эллипсоида не существует простой аналитической формулы.

Уравнение эллипсоида (2.27) в декартовых координатах имеет вид

$$z = \pm \sqrt{c^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} - \frac{c^2 y^2}{b^2}}.$$

Пусть  $(\Phi)$  - сегмент эллипсоида, лежащий внутри сферы  $(\Theta)$ . Сегмент  $(\Phi)$  может состоять из двух частей, разделенных плоскостью  $Oxy$ : положительный сегмент  $(\Phi^+)$  при  $z \geq 0$  и отрицательный сегмент  $(\Phi^-)$  при  $z < 0$ . Пусть  $(\Pi^+)$  и  $(\Pi^-)$  – проекции на плоскость  $Oxy$  сегментов  $(\Phi^+)$  и  $(\Phi^-)$ , соответственно. Проекция сегмента  $(\Phi)$  представлена на рисунке 2.25. Тогда площадь пересечения  $(\Phi)$  определяется как поверхностный интеграл первого рода

$$\begin{aligned} \Omega &= \iint_{(\Phi)} d\Phi = \iint_{(\Pi^+)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy dx + \iint_{(\Pi^-)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy dx \\ &= \iint_{(\Pi^+)} \Upsilon(x, y) dy dx + \iint_{(\Pi^-)} \Upsilon(x, y) dy dx, \end{aligned}$$

$$\text{где } \Upsilon(x, y) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{c^4 x^2}{a^4 z^2} + \frac{c^4 y^2}{b^4 z^2}} = \sqrt{1 + \frac{\frac{c^4 x^2}{a^4} + \frac{c^4 y^2}{b^4}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Площадь поверхности эллипсоида вычисляется по формуле

$$\Gamma = 8 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy dx = 8 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \Upsilon(x, y) dy dx. \quad (2.78)$$

## 2.6 Выводы по главе 2

Во второй главе выполнены постановка и математическая формализация предметных задач, приводящих к задачам о покрытии и упаковке для поверхностей вращения

в нескольких вариантах: покрытие сферы равными сферическими сегментами, упаковка равных сферических сегментов на сфере, упаковка равных геодезических кругов в сферический сегмент, покрытие боковой поверхности цилиндра и конуса равными шарами, упаковка равных шаров на боковой поверхности цилиндра и конуса, покрытие эллипсоида равными шарами.

В рамках исследования рассмотрены различные поверхности (сфера, эллипсоид, цилиндр, конус) и их сегменты. Общий подход к решению основан на разбиении поверхности на области Дирихле с использованием диаграмм Вороного и последующем анализе покрывающих или упакованных объектов. Важным аспектом предложенной модели является замена евклидова расстояния между точками на время перемещения между ними.

Для решения предложенных задач были разработаны 9 численных алгоритмов, основанных на оптико-геометрическом подходе, диаграммах Вороного и геометрических методах. Доказаны строгие математические утверждения о свойствах геодезического расстояния, на основе которых разработан метод построения начального приближения для решения задачи упаковки равных геодезических кругов в сферический сегмент.

## Глава 3: Описание и комплекса программ и решение тестовых задач

### 3.1 Описание комплекса программ

Алгоритмы реализованы в виде комплекса программ «Покрытия и упаковки для поверхностей вращения» (ПУПоВ), позволяющих решать задачи покрытия и упаковки для поверхностей вращения с евклидовой и заданной неевклидовой метрикой. Комплекс программ включает основные программы: «Построение покрытий трехмерных поверхностей шарами», «Построение покрытия эллипсоида равными шарами (ПЭРШ)» и «Построение упаковки равных гиперкругов на гиперсфере». Данные программы были зарегистрированы в Реестре программ для ЭВМ в 2024 и 2025 годах и представляют собой инструментарий для исследования моделей оптимального размещения.

Комплекс программ внедрен в учебный процесс Института информационных технологий и анализа данных Иркутского национального исследовательского технического университета. Он используется в курсах «Методы оптимизации», «Исследование операций» и «Системный анализ». Программа «ПЭРШ» применяется компанией «Onlife Co.» для тестирования и поддержки медицинских учреждений — клиентов компании.

Отметим, что программа «Построение упаковки равных гиперкругов на гиперсфере» позволяет решать задачу упаковки не только в трехмерном, но и в пространствах высших размерностей.

Копия Свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ и акты внедрения приведены в Приложении.

Комплекс программ предоставляет пользователям возможность строить покрытия и упаковки для различных поверхностей вращения с использованием как евклидовой, так и специальной неевклидовой метрик. Математической и алгоритмической базой комплекса являются алгоритмы, описанные в главе 2, позволяющие решать задачи:

- Построение диаграмм Вороного на сфере, на боковой поверхности цилиндра, на боковой поверхности конуса и на эллипсоиде;
- Построение оптимальных покрытий равными сферическими сегментами, шарами или геодезическими кругами указанных поверхностей в евклидовой и неевклидовой метриках;
- Построение оптимальных упаковок равных сферических сегментов, шаров, сферических сегментов или геодезических кругов на указанных поверхностях в евклидовой

и неевклидовой метриках

Помимо решения вышеперечисленных задач, комплекс программ также предоставляет визуальные средства для представления результатов расчетов в двумерном и трехмерном пространстве. Подробное описание общей структуры и обработки данных описываются в следующем разделе.

### 3.1.1 Общая структура комплекса программ

Каждая поверхность обладает специфическими геометрическими свойствами, что приводит к различиям в определении геодезического расстояния, построении диаграмм Вороного, поиске оптимальных покрытий и упаковок. Комплекс программ имеет модульную структуру, что обеспечивает возможность повторного использования общих вычислительных функций и позволяет адаптировать решение для работы с различными типами поверхностей. Каждая поверхность реализована в виде независимого модуля «Сфера», «Цилиндр», «Конус» и «Эллипсоид», что позволяет проводить их построение, тестирование и расширение функциональности независимо. Архитектура каждого модуля организована по многоуровневому принципу и состоит из четырех слоев (см. рис. 3.1). При этом слой «Общий вычислительный» является единым для всех модулей, что обеспечивает целостность и согласованность комплекса программ.

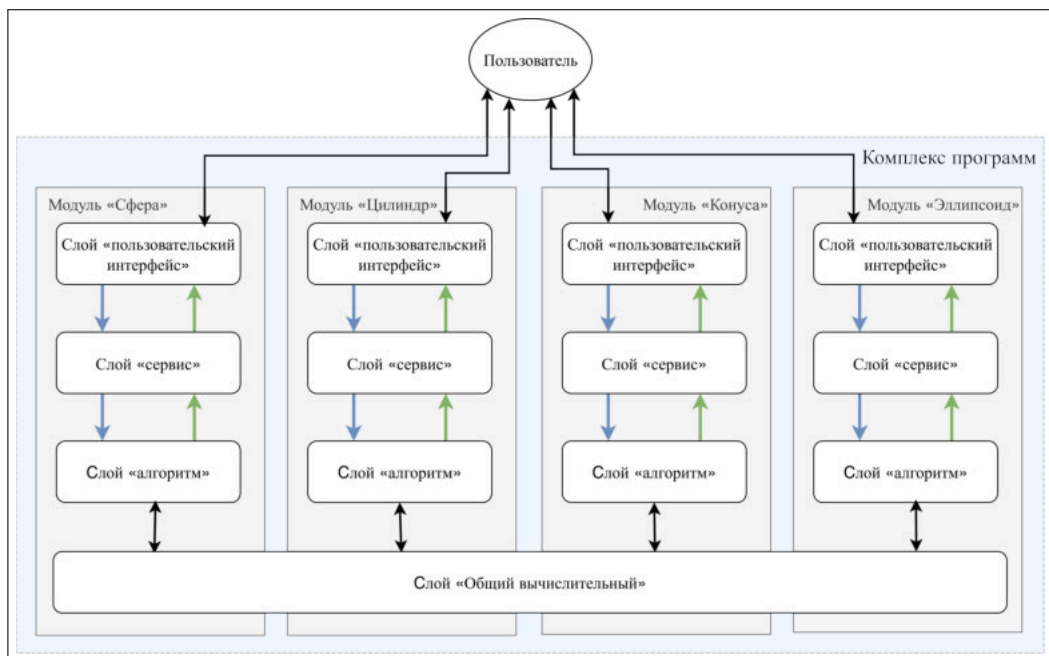


Рис. 3.1: Общая структура комплекса программ

1. Слой «Пользовательский интерфейс» реализован на платформе WPF (Windows Presentation Foundation) и предоставляет пользователю интуитивно понятный ин-

струмент для управления параметрами расчета. Интерфейс позволяет задавать: общие параметры поверхности, количество элементов, тип элемента (сферический сегмент, шар или геодезический круг), шаги равномерной сетки, максимальное количества итераций, параметр останова  $\delta$  и метрику. Для трехмерной визуализации конфигураций покрытия и упаковки, а также для манипуляций с ними (вращение, масштабирование) используется библиотека Helix Toolkit. Управление процессом осуществляется через панель кнопок, обеспечивающих выполнение основных операций: запуск расчета, визуализацию результатов и сохранение данных. Для каждого из модулей работы с различными поверхностями (сфера, цилиндр, конус, эллипсоид) разработан специализированный интерфейс, как показано на рисунках 3.3– 3.6.

2. **Слой «Сервис»** служит связующим звеном между слоями «Пользовательский интерфейс» и «Алгоритм». Он получает входные параметры от «Пользовательского интерфейса», обрабатывает их и передает на «Алгоритм». После получения результатов от слоя «Алгоритм» данные отправляются на слой «Пользовательский интерфейс» для отображения. Кроме того, если данные необходимо сохранить в текстовом файле, они также обрабатываются на этом слое.
3. **Слой «Алгоритм»** выполняет запрошенные пользователем алгоритмы с параметрами, полученными от слоя «Сервис». Слой выполняет основные функции: построение равномерной сетки, выполнение алгоритмов распространения световой волны, построения диаграмм Вороного, определения границ областей диаграммы Вороного, поиска оптимальной упаковки, оптимального покрытия для каждого типа элемента (шара или геодезического круга). Следует отметить, что в алгоритмах покрытия и упаковки начальные точки должны генерироваться случайным образом, поэтому на этом слое они генерируются с помощью функции Random, которая обеспечивает равномерное распределение. Кроме того, на этом слое выполняются вспомогательные расчеты: вычисление площади каждого элемента, плотности покрытия или упаковки, построение разверток поверхностей цилиндра и конуса, подсчет времени работы алгоритмов.

Определение центра и радиуса покрывающих или упакованных элементов для каждой ячейки диаграммы Вороного является вычислительно сложной задачей, требующей значительных ресурсов памяти, особенно в случае эллипсоида. Для оптимизации производительности ключевые этапы алгоритмов покрытия и упаковки реализованы с использованием параллельных вычислений.

Архитектурно слой «Алгоритм» разработан как независимый от конкретных модулей (сфера, цилиндр и т.д.), что обеспечивает возможность их независимого использования и тестирования.

4. **Слой «Общий вычислительный»** предоставляет общую инфраструктуру данных и базовых математических операций для всех модулей системы. Он отвечает за управление и предоставление доступа к единым структурам данных, таким как: координаты (сферические, цилиндрические, эллипсоидальные, декартовы); векторные величины; параметры и узлы равномерной сетки.

Кроме того, слой инкапсулирует общие вычислительные процедуры, используемые алгоритмическими модулями. К ним относятся: численное решение дифференциальных уравнений; вычисление евклидова расстояния между точками; расчет геодезического расстояния на различных типах поверхностей; преобразование координат между различными системами (включая приведение к декартовым координатам).

Таким образом, данный слой обеспечивает устранение дублирования кода, повышение согласованности вычислений и централизацию их управления.

Программный комплекс реализован с использованием следующих технологий:

- Язык программирования: C#,
- Среда разработки: Visual Studio 2022,
- Системные требования: Операционная система Microsoft Windows 7 или новее, ОЗУ 6 ГБ или более, платформа для разработки .NET 8.

### 3.1.2 Обработка данных в комплексе программ

Обработка данных осуществляется в замкнутом цикле, от момента ввода пользователем входных параметров до получения результатов в текстовом и графическом виде. Этот цикл показан на рисунке 3.2 и включает 4 этапа:

**Этап 1:** Пользователь вводит исходные данные в интерфейс каждого модуля, расположенного на слое «пользовательский интерфейс». На рисунках 3.3–3.6 представлены интерфейсы модулей «Сфера», «Цилиндр», «Конус» и «Эллипсоид», которые отображаются в виде соответствующих вкладок. Конструктивно каждый интерфейс состоит из двух частей: левой — для выбора задачи и ввода входных данных, и правой — для отображения результатов расчета. Входные данные, доступные для выбора, включают:

- Тип решаемой задачи (покрытие или упаковка).
- Тип элемента покрытия/упаковки *type*. Для сферы пользователь может выбрать сферический сегмент или геодезический круг, а для цилиндра, конуса или эллипсоида – шар или геодезический круг;
- Количество элементов покрытия/упаковки  $n$ ;
- Максимальное число итераций  $N_{\max}$ ;
- Значение параметра останова  $\delta$ ;
- Параметры поверхности. В модуле «Сфера» используется единичная сфера с центром в начале координат  $O(0, 0, 0)$ , либо сферический сегмент, определяемый с помощью параметров  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  и  $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$ .

В модуле «Эллипсоид» значения  $a, b, c$  соответствуют полуосям эллипсоида с центром в начале координат  $O(0, 0, 0)$ . Пользователь также может задать сегмент эллипсоида с помощью параметров  $0 \leq \theta \leq 2\pi, -\pi/2 \leq \mu \leq \pi/2$ .

Для цилиндров и конусов пользователь выбирает высоту  $h$  и радиус основания  $r$ .

- Параметры равномерной сетки. Для каждой поверхности эти параметры различны. Для сферы это « $s\alpha$ » и « $s\beta$ », для цилиндра и конуса – « $s\alpha$ » и « $su$ » – шаги по сферическим координатам, а для эллипсоида – « $s\theta$ » и « $s\mu$ ».
- Метрика. В каждом модуле метрики предварительно заданы. Для сферы пользователь может выбрать метрику с  $f(x, y, z) = 1, f(x, y, z) = \frac{1}{1+0.9z}, f(x, y, z) = \frac{1}{1+0.9z^2}, f(x, y, z) = 1 + \frac{1.5z}{1+z^2}, f(x, y, z) = \frac{0.9}{1.1-z^2}$ ; для цилиндра:  $f(x, y, z) = 1, f(x, y, z) = \frac{1}{1+0.9z^2}$  или  $f(x, y, z) = \frac{1}{1+2z}$ ; для конуса:  $f(x, y, z) = 1$  или  $f(x, y, z) = \frac{1}{1+0.5z}$ ; а для эллипсоида:  $f(x, y, z) = 1$  или  $f(x, y, z) = \frac{1}{1+|z|}$ .

Пользователь может использовать кнопки: «Выполнение» — для решения задачи по введенным данным, «Отображение 3D» — для отображения результатов в трехмерном пространстве, «Отображение 2D» — для отображения результатов при развертывании поверхности на плоскость (только для модулей «Цилиндр» и «Конус»), «Сохранение результатов» — для сохранения результатов расчета в текстовом файле. Визуальное представление или сохранение результатов возможно только после нажатия кнопки «Выполнение».

**Этап 2:** После получения данных на слое «Пользовательский интерфейс» они передаются на слой «Сервис» для проверки корректности и предварительной обработки.

Здесь выполняется валидация данных: например, проверяется, что количество элементов и максимальное число итераций являются положительными целыми числами, а параметры равномерной сетки поверхности — положительными вещественными числами. После успешного прохождения проверки данные передаются на слой «Алгоритм».

**Этап 3:** На слое «Алгоритм» задается равномерная сетка, на которой выполняются алгоритмы построения диаграммы Вороного, покрытия и упаковки, описанные в главе 2. Все основные вычислительные функции в этих алгоритмах реализуются общими классами, расположенными на слое «Общий вычислительный». Результаты выполнения алгоритмов возвращаются на слой «Сервис». Возвращаемые результаты содержат следующие данные для полного отображения и хранения:

- Координаты центров элементов в декартовых координатах;
- Радиус покрытия или упаковки;
- Координаты точек на геодезической окружности (для геодезического круга) или координаты точек пересечения шара с поверхностью (для шара);
- Для поверхностей цилиндра и конуса — координаты точек пересечения шара или геодезической окружности с поверхностью на ее развертке;
- Площадь покрытия/упаковки для каждого элемента на поверхности;
- Плотность покрытия или упаковки;
- Время работы алгоритмов.

Указанные данные необходимы для визуализации результатов расчетов в MatLab и для отображения результатов на плоскости (в случае развертываемых поверхностей).

**Этап 4:** После получения результатов, которые возвращаются со слоя «Алгоритм», на слой «Сервис», данные автоматически сохраняются во временной памяти операционной системы. Затем они отображаются на соответствующих компонентах слоя «Пользовательский интерфейс». Радиусы и координаты центра каждого элемента выводятся в текстовом виде в левой части вкладки. Важно отметить, что если пользователь запрашивает сохранение или отображение визуальных результатов, данные извлекаются из временной памяти. Это позволяет избежать повторного выполнения ранее выполненных алгоритмов. После нажатия кнопки «Отображение 3D» или «Отображение 2D», покрытие/упаковка отображается в правой части вкладки. Процесс рисования поверхностей и

покрытия/упаковки может занять несколько минут в зависимости от количества точек на равномерной сетке. После нажатия кнопки «Сохранение» все результаты будут сохранены в текстовом файле с именем «модуль»\_«тип-задачи»\_«тип-элемента»\_«количество-элементов»\_«время».txt.

**Этап 4:** После получения результатов со слоя «Алгоритм» данные автоматически сохраняются во временном кеше. Затем они отображаются на соответствующих компонентах слоя «Пользовательский интерфейс». Радиусы и координаты центров каждого элемента выводятся в текстовом виде в левой части вкладки. Если пользователь запрашивает сохранение или визуализацию результатов, данные извлекаются из кеша, что исключает необходимость повторного выполнения вычислений.

При нажатии кнопки «Отображение 3D» или «Отображение 2D» покрытие/упаковка визуализируется в правой части вкладки. Процесс построения поверхностей и покрытия/упаковки может занять несколько минут в зависимости от плотности равномерной сетки. При нажатии кнопки «Сохранение» все результаты сохраняются в текстовый файл с именем «модуль»\_«тип-задачи»\_«тип-элемента»\_«количество-элементов»\_«время».txt.

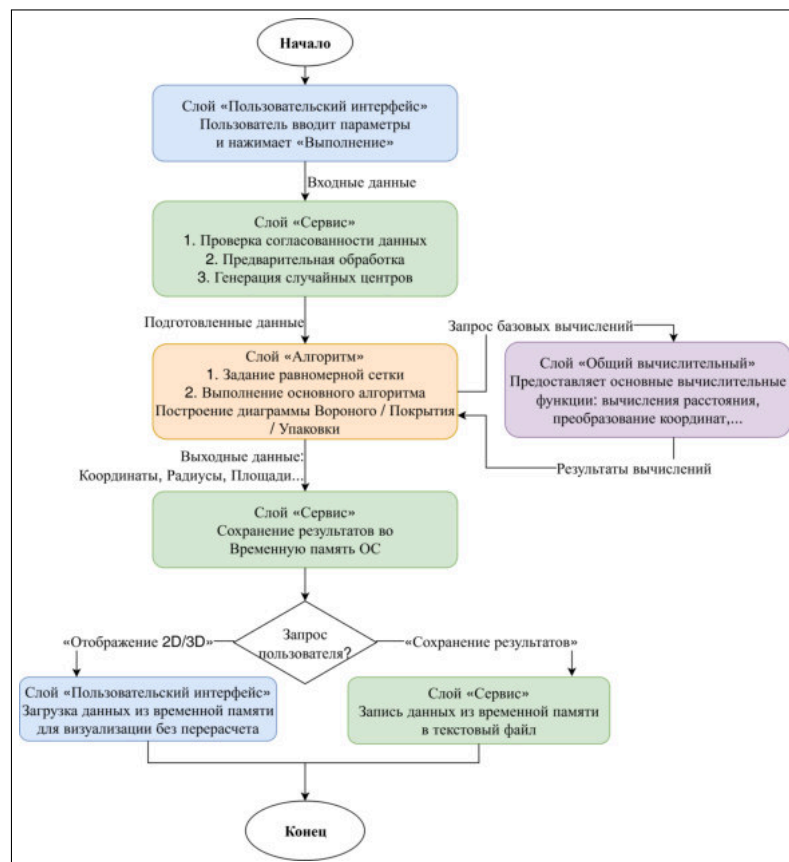


Рис. 3.2: Обработка данных в комплексе программ

Для сокращения времени вычислений, особенно при работе с большим количеством

элементов ( $n > 50$ ) или мелкой равномерной сеткой, вычислительно сложные участки кода реализованы с использованием параллельных вычислений. В частности, этапы расчета геодезических расстояний для каждой точки и нахождения центра оптимального покрытия (или упаковки) для каждой области диаграммы Вороного используют библиотеку Task Parallel Library (TPL) и конструкцию Parallel.For из .NET 8.0, что позволяет задействовать все доступные ядра процессора.

Вычислительная сложность задач покрытия и упаковки накладывает следующие ограничения:

- Максимальное количество элементов (шаров/геодезических кругов)  $n$ , рекомендуемое для обеспечения приемлемого времени вычислений: 200 для сферы, 150 для цилиндра и конуса, 50 для эллипсоида.
- Рекомендуемый максимальный размер равномерной сетки параметризации составляет 500 000 точек.
- Время расчета напрямую зависит от количества элементов, размера сетки и выбранной поверхности. Например, расчет покрытия эллипсоида 20 шарами на сетке  $180 \times 90$  за  $N_{\max} = 10$  итераций с параметром останова  $\delta = 10^{-3}$  может занять от 12 до 20 секунд в зависимости от производительности CPU.

Рекомендуется начинать тестирование с меньших значений  $n$  и размера сетки, постепенно увеличивая их до требуемых величин.

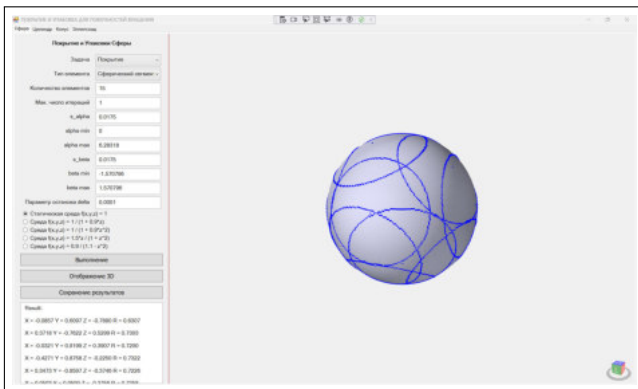


Рис. 3.3: Модуль «Сфера»

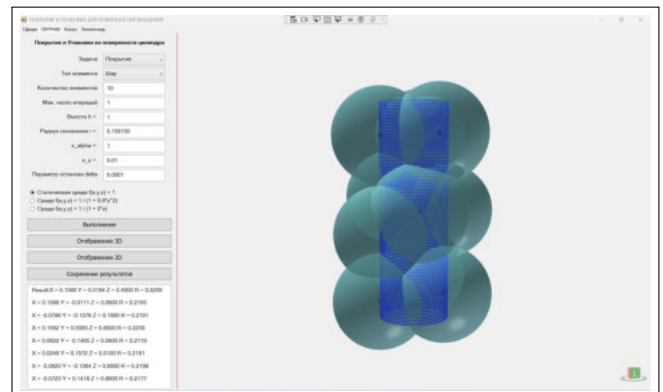


Рис. 3.4: Модуль «Цилиндр»

### 3.2 Вычислительные эксперименты

В данном разделе представлены примеры, позволяющие оценить точность предложенных алгоритмов и работоспособность разработанного комплекса программ. Расчеты проводились с использованием персонального компьютера следующей конфигурации:

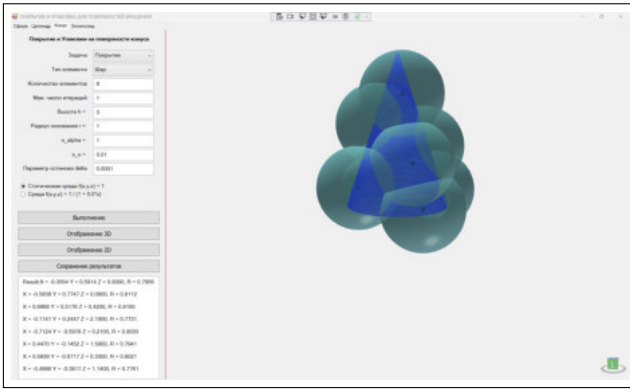


Рис. 3.5: Модуль «Конус»

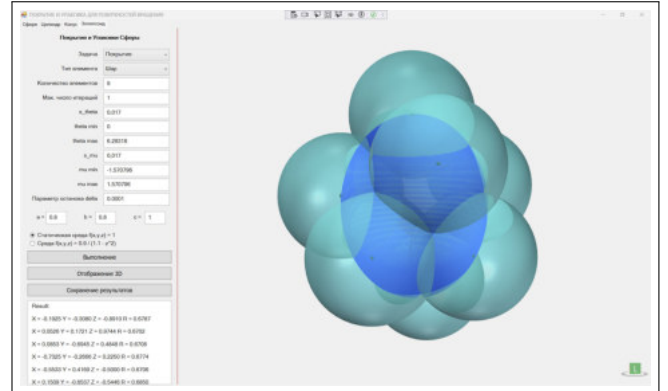


Рис. 3.6: Модуль «Эллипсоид»

Intel(R) Core(TM) i5-3570K с тактовой частотой 3,4 ГГц и 8 ГБ оперативной памяти, операционная система — Windows 10. Комплекс программ был реализован на языке программирования C# с использованием среды разработки Visual Studio 2022.

### 3.2.1 Покрытие сферы равными сферическими сегментами

**Пример 1.** Построим покрытие единичной полусферы

$$S^+ = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

шестнадцатью сферическими сегментами в случае, когда метрика является евклидовой, т.е.  $f(x, y, z) = 1$ .

Решение задачи выполнено с помощью разработанного комплекса программ посредством многократного запуска с применением алгоритмов **GeoCover** и **SphereCover**. Позиции центров сферических сегментов:

$$\begin{aligned} & (0.6611, -0.6657, 0.3461), (-0.8654, 0.3683, 0.3397), (0.4099, -0.4523, 0.7921), \\ & (-0.9451, -0.2366, 0.2252), (0.7676, 0.0756, 0.6365), (0.9940, -0.0930, 0.0570), \\ & (-0.5548, -0.7814, 0.2856), (-0.5304, -0.1798, 0.8285), (0.1150, -0.9782, 0.1730), \\ & (0.2046, 0.5908, 0.7805), (-0.4551, 0.5686, 0.6853), (0.1971, 0.9335, 0.2996), \\ & (-0.4735, 0.8592, 0.1938), (0.7432, 0.6161, 0.2609), (-0.0664, -0.6724, 0.7372), \\ & (0.0490, 0.0935, 0.9944). \end{aligned}$$

Геодезический радиус сферических сегментов  $R_{16} = 0.43643$ . Это на 0.54% улучшает результат  $\check{R}_{16} = 0.4388$ , полученный в статье [66]. Покрытие  $n = 16$  равными сферическими сегментами единичной полусферы представлено на рис. 3.7. Всего было выполнено более 500 запусков комплекса программ, в каждом из которых начальный массив точек генерировался случайным образом, точки были равномерно распределены по всей полусфере

$S^+$ . Численный эксперимент показал, что после первых двух десятков запусков результаты практически не улучшались. Тем не менее была проведена статистическая обработка результатов эксперимента. В качестве случайной величины рассматривалось отклонение радиуса покрытия от минимального. По виду гистограммы была высказана гипотеза, что это гамма-распределение, параметры которого были определены по методу моментов и оказались равными  $\theta = 0.0054$ ,  $k = 2.4413$ . Проверка гипотезы по критериям Пирсона и Колмогорова-Смирнова показала, что при уровне значимости 0.05 нет оснований отвергнуть высказанную гипотезу. Тогда математическое ожидание радиуса покрытия составит 0.44952, а дисперсия — 0.00007.

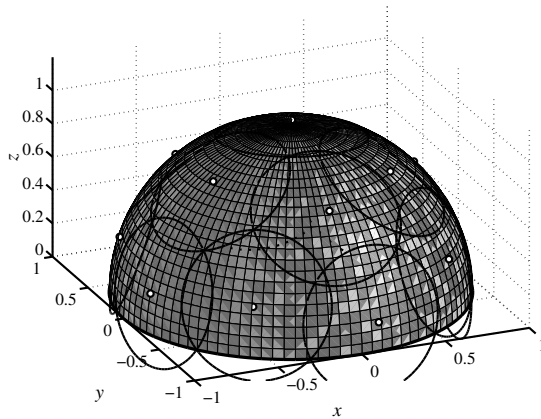


Рис. 3.7: Покрытие  $n = 16$  равными шарами единичной полусферы в примере 1.

**Пример 2.** Требуется решить задачу покрытия равными сферическими сегментами единичной сферы  $\Theta = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  в случае, когда метрика является евклидовой, т.е.  $f(x, y, z) = 1$ .

В таблице 3.1 приведены результаты расчетов. Здесь  $n$  — количество покрывающих сферических сегментов,  $R_2$  и  $R_3$  — наилучшие радиусы покрытий,  $t_2$  и  $t_3$  — время расчета (в секундах), для алгоритмов **SphereCover** и **GeoCover**, соответственно. Число случайных генераций начальных положений 500, величина  $\delta = 10^{-15}$ .

Алгоритм **GeoCover** работает намного быстрее, но несколько проигрывает в точности. Это показывает, что оптико-геометрический подход высокоэффективен при построении покрытия сферы. Покрытие для случая  $15 \leq n \leq 20$  элементов в примере 2 представлено на рис. 3.8.

**Пример 3.** Рассматривается задача покрытия единичной сферы  $\Theta$ . Пусть плотность среды задается функцией  $\rho(x, y, z) = 1 + 0.9z^2$ , тогда скорость распространения волны равна  $f(x, y, z) = \frac{1}{1+0.9z^2}$ .

Таблица 3.1: Результаты расчетов в примере 2

	Алгоритм <b>SphereCover</b>		Алгоритм <b>GeoCover</b>	
$n$	$R_2$	$t_2$	$R_3$	$t_3$
4	1.2322	4.62	1.1499	3.465
5	1.1071	7.65	1.1140	3.669
6	0.9569	8.67	1.0360	3.88
7	0.9005	14.69	0.9075	4.21
8	0.8485	19.06	0.8646	4.574
9	0.8061	23.13	0.8092	4.601
10	0.7406	29.04	0.7706	5.661
11	0.7254	38.72	0.7407	5.879
12	0.6783	41.57	0.6894	6.209
13	0.6661	45.95	0.6681	6.276
14	0.6279	50.40	0.6411	7.335
15	0.6100	62.29	0.6315	7.936
16	0.5900	68.10	0.6097	9.440
17	0.5660	74.92	0.5997	9.665
18	0.5515	81.48	0.5888	9.912
19	0.5380	89.55	0.5512	9.998
20	0.5247	93.35	0.5389	10.634
40	0.3703	210.95	0.3853	25.656
60	0.3107	370.41	0.3151	57.880
80	0.2640	415.29	0.2780	112.839
100	0.2355	498.04	0.2532	293.146
120	0.2162	502.11	0.2228	299.324

Нетрудно заметить, что скорость распространения волны уменьшается при движении от экватора к полюсу, при этом волновые фронты имеют эллиптическую форму. Если центр покрывающего сегмента расположен на экваторе, волновой фронт есть обычный эллипс; если центр покрывающего сегмента расположен в точке полюса, то волновой фронт есть окружность; во всех остальных случаях волновой фронт — это эллипс со смещенным в сторону ближайшего полюса центром. В таблице 3.2 представлены результаты расчетов для различного числа покрывающих сферических сегментов. Покрытие для случая 12 элементов представлено на рис. 3.9.

**Пример 4.** Рассматривается задача покрытия единичной сферы  $\Theta$  с метрикой, в которой плотность среды  $\rho(x, y, z) = \frac{1}{f(x, y, z)} = 1 + 0.9z$ .

В данном случае волновые фронты имеют яйцевидную форму, характерную для сферически-слоистых сред, и вытянуты к «южному» полюсу. В таблице 3.2 представлены результаты расчетов для различного числа покрывающих сегментов. Покрытие для случая 12 элементов представлено на рис. 3.10.

Отметим, что для одинакового количества сферических сегментов, наименьшие ра-

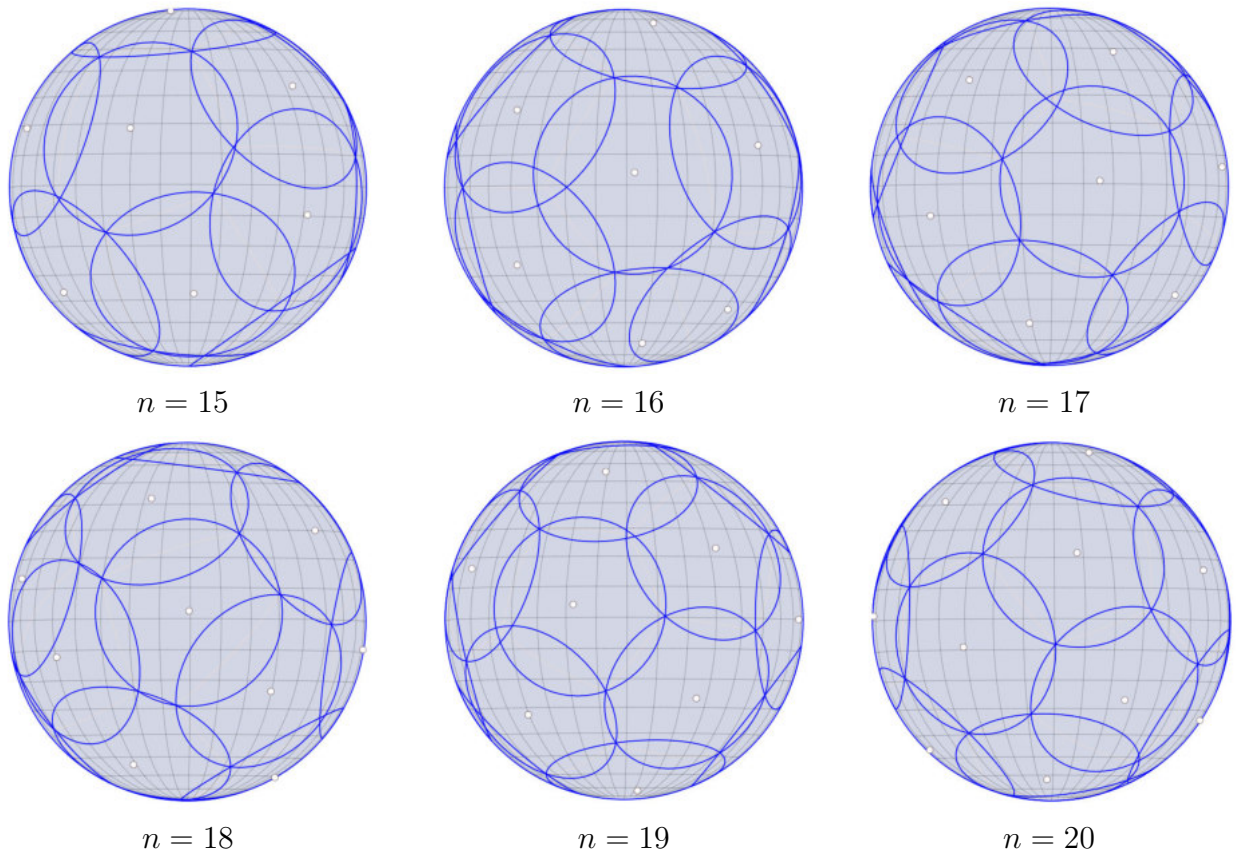


Рис. 3.8: Покрытие сферы равными сферическими сегментами в примере 2.

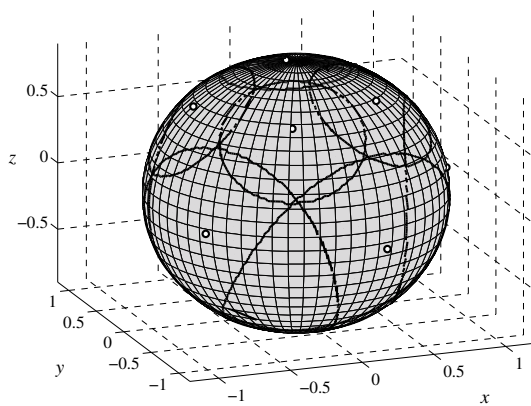


Рис. 3.9: Покрытие сферы набором из 12 шаров в неевклидовой метрике в примере 3.

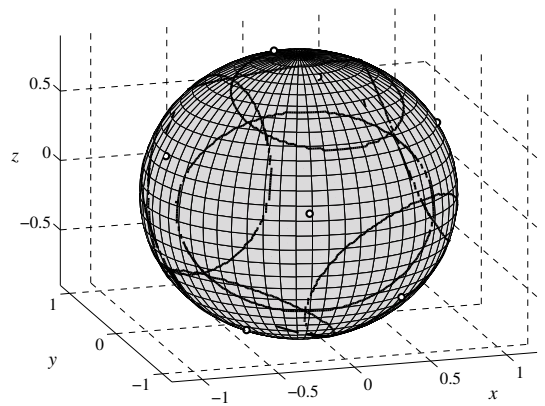


Рис. 3.10: Покрытие сферы набором из 12 шаров в неевклидовой метрике в примере 4.

диусы покрытий получаются для случая евклидовой метрики, поскольку из-за введения функции плотности, большей единицы, скорость движения волн уменьшается.

Для примеров с неевклидовой метрикой была проведена аналогичная примеру 1 статистическая обработка результатов эксперимента. Здесь также оказалось, что отклонения радиуса от минимальных описываются гамма-распределениями, причем их параметры оказались весьма близки:  $\theta_3 = 0.0176$ ,  $k_3 = 4.508$  и  $\theta_4 = 0.0185$ ,  $k_4 = 4.255$ . Проверка гипотез по критериям Пирсона и Колмогорова-Смирнова показала, что при уровне значимости

Таблица 3.2: Результаты покрытий единичной сферы с неевклидовой метрикой

$n$	Пример 3		Пример 4	
	$R$	$t$	$R$	$t$
6	1.3689	318.37	1.1471	305.74
7	1.2843	325.22	1.1089	311.31
8	1.1995	336.02	1.0030	318.90
9	1.1083	342.52	0.9999	326.55
10	1.0522	353.21	0.9636	337.45
11	1.0366	362.27	0.9341	344.40
12	1.0062	373.95	0.8857	351.21
13	0.9527	384.67	0.8750	358.45
14	0.9266	396.80	0.8136	377.49
15	0.8864	417.26	0.7927	384.27
16	0.8572	438.42	0.7413	390.16
17	0.8258	456.13	0.7386	395.42
18	0.8073	468.22	0.7243	400.86
19	0.8069	485.57	0.7075	407.43
20	0.7941	499.76	0.6674	414.67

0.05 нет оснований их отвергнуть.

### 3.2.2 Упаковка равных сферических сегментов на сфере

**Пример 5.** Построим упаковку  $n = 20$  равных сферических сегментов на единичной полусфере  $S^+$  с евклидовой метрикой.

Задача была решена с помощью разработанного комплекса программ с применением алгоритма **SpherePacking**. Позиции центров сферических сегментов при  $n = 20$ :

$$\begin{aligned}
&(-0.1533, -0.6915, 0.7059), (-0.7056, 0.0954, 0.7022), (0.0470, -0.9601, 0.2756), \\
&(0.6221, 0.4149, 0.6639), (0.1750, 0.7234, 0.6678), (-0.6347, -0.4427, 0.6334), \\
&(0.5557, 0.7849, 0.2740), (0.2318, 0.0392, 0.9720), (0.3756, -0.5631, 0.7361), \\
&(0.6882, -0.1189, 0.7157), (-0.8768, 0.3940, 0.2756), (0.5612, -0.7810, 0.2740), \\
&(-0.4966, 0.6687, 0.5534), (-0.1238, 0.9533, 0.2756), (-0.9468, -0.1601, 0.2790), \\
&(0.9415, 0.1915, 0.2773), (-0.1853, 0.3868, 0.9033), (-0.4833, -0.8304, 0.2773), \\
&(-0.2818, -0.1530, 0.9472), (0.8942, -0.3540, 0.2740).
\end{aligned}$$

Наилучший радиус упаковки  $R_{16} = 0.27357$ , что на 0.18% больше радиуса  $\check{R}_{20} = 0.26878$ , полученного в статье [79]. Проекция полусферы и упакованных сферических сегментов на плоскость  $Oxy$  представлены рис. 3.11. Диаграмма Вороного, соответствующая упакованным сферическим сегментам показана рис. 3.12.

**Пример 6.** Требуется решить задачу упаковки равных сферических сегментов на единичной сфере  $\Theta$  с евклидовой метрикой.

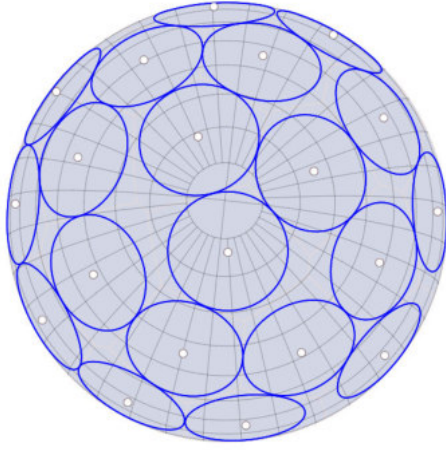


Рис. 3.11: Проекция полусферы и упакованных сферических сегментов на плоскость  $Oxy$  в примере 5

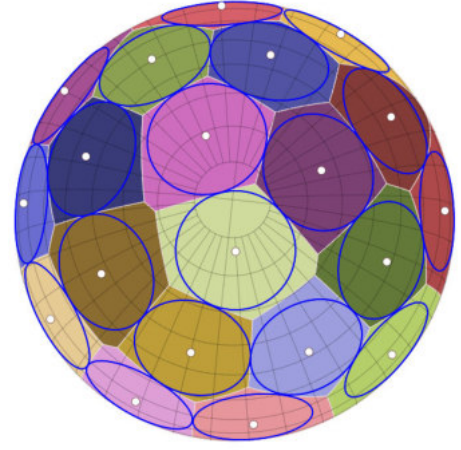


Рис. 3.12: Диаграмма Вороного соответственно упакованным сферическим сегментам в примере 5

В таблице 3.3 приведены результаты расчетов. Здесь  $n$  — количество упакованных сферических сегментов,  $R$  — наилучший радиус упаковок, найденный алгоритмом **SpherePacking**,  $R^*$  — известный наилучший радиус упаковок из статей [64, 190, 192, 237],  $\Delta R(\%) = \frac{R-R^*}{R^*} \times 100$ ,  $t$  — время расчета (в секундах). Число случайных генераций начальных положений 80, величина  $\delta = 10^{-6}$ . Упаковка для случая  $15 \leq n \leq 20$  элементов в примере 2 представлено на рис. 3.13. Результаты показали, что оптико-геометрический подход дает результаты, несколько уступающие лучшим известным, но расчеты выполняются достаточно быстро (не более нескольких минут на обычном ПК), отклонения не превышают 0.85%.

**Пример 7.** Рассматривается задача построения упаковок на единичной сфере с метрикой, в которой скорость распространения волны задается функцией  $f(x, y, z) = 1 + \frac{1.5z}{1+z^2}$ .

На рис. 3.14 сферические сегменты, расположенные ближе к южному полюсу, визуально выглядят больше, чем лежащие у северного полюса, однако в заданной метрике их радиус одинаков. Причина в том, что функция  $f(x, y, z) = 1 + \frac{1.5z}{1+z^2}$  возрастает на интервале  $z \in (-1; 1)$ , поэтому чем значение  $z$  ближе к  $-1$  (т.е. чем ближе центр к южному полюсу), тем меньше значение  $f$ , соответственно, скорость распространения волна увеличивается. В таблице 3.4 приведены результаты вычислений для различного числа упакованных сферических сегментов в данном примере.

**Пример 8.** Рассматривается задача построения упаковок на единичной сфере с метрикой, в которой скорость распространения волны задается функцией  $f(x, y, z) = \frac{0.9}{1.1-z^2}$ .

Таблица 3.3: Результаты упаковки равных сферических сегментов на единичной сфере с евклидовой метрикой в примере 6

$n$	$R$	$R^*$	$\Delta R(\%)$	$t$
4	0.9551	0.9553	-0.02	6.26
5	0.7853	0.7854	-0.01	9.77
6	0.7851	0.7854	-0.04	11.06
7	0.6779	0.6795	-0.23	16.23
8	0.6528	0.6533	-0.07	21.09
9	0.6152	0.6155	-0.04	25.05
10	0.5766	0.5772	-0.10	31.4
11	0.553	0.5545	-0.27	41.88
12	0.5527	0.5545	-0.32	45.79
13	0.4961	0.4986	-0.50	48.95
14	0.4826	0.4858	-0.65	53.17
15	0.4642	0.4682	-0.85	65.52
16	0.4478	—		71.42
17	0.4385	—		78.61
18	0.4247	—		85.98
19	0.4102	—		93.92
20	0.3983	—		97.25
24	0.3659	—		102.48
30	0.3243	—		110.85
40	0.2794	—		130.32
50	0.2503	—		143.11
60	0.2275	—		156.42

Нетрудно видеть, что в данном случае функция  $f$  в т.  $z = 0$  достигает минимума, а в т.  $z = \pm 1$  — максимума. Поэтому, если центр сферического сегмента находится ближе к экватору, то сферический сегмент выглядит больше, по сравнению с сегментами, расположенными ближе к полюсам (см. рис. 3.15). В таблице 3.4 приведены результаты вычислений для различного числа упакованных сферических сегментов в данном примере.

### 3.2.3 Упаковка равных геодезических кругов в сферический сегмент

**Пример 9.** Рассмотрим задачу упаковки равных геодезических кругов в сферические сегменты с угловыми размерами  $\theta = \frac{\pi}{6}$  и  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Решение найдено с помощью метода проекции и улучшения упаковки на основе теоремы 1.

В таблицах 3.5 и 3.6 приведены результаты расчетов для  $\theta = \frac{\pi}{6}$  и  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , соответственно. Используются следующие обозначения:  $N$  — количество кругов либо геодезических кругов, упаковываемых в круг или сферический сегмент, соответственно;  $R'$  — оптимальный радиус упаковки равных кругов в единичный круг из [132]. Отметим, что оп-

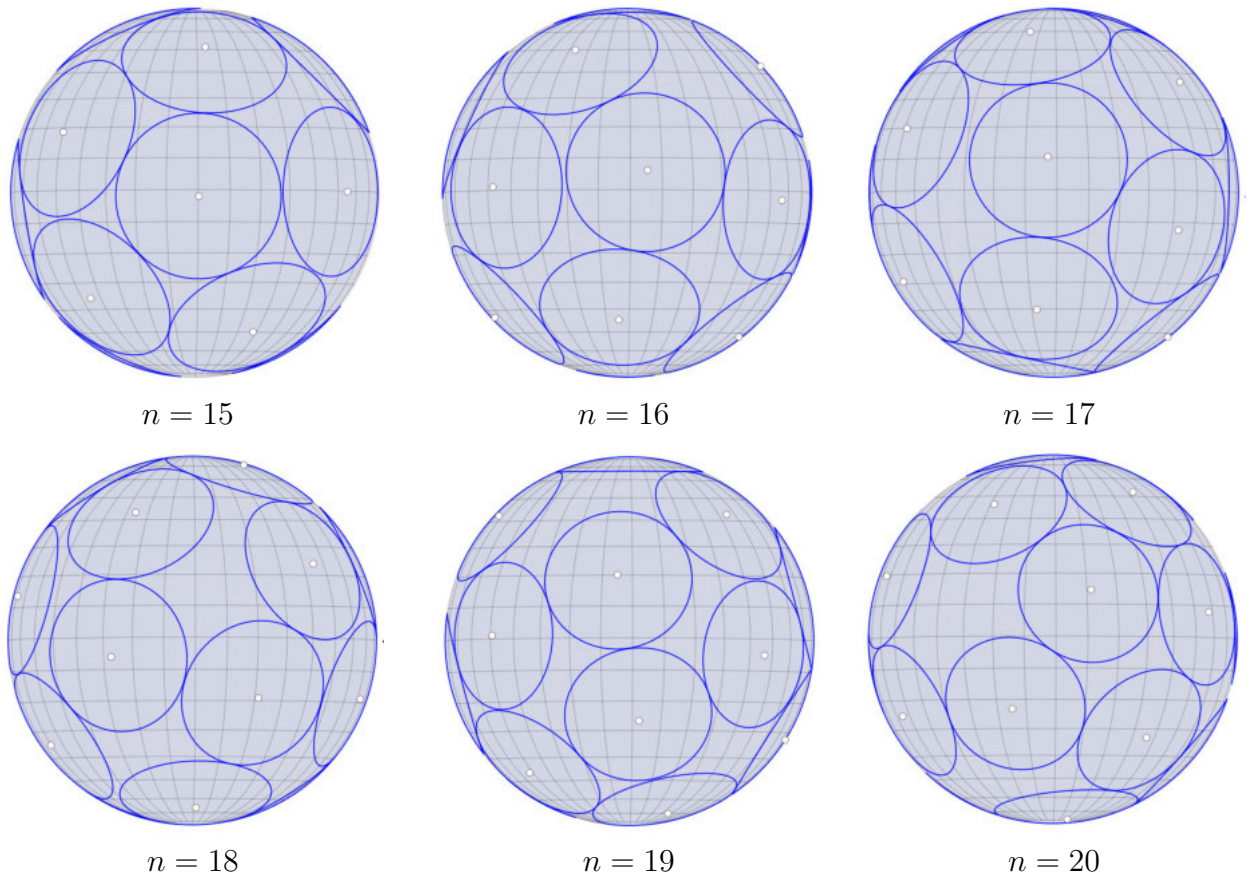
Рис. 3.13: Упаковки равных сферических сегментов на сфере в случае  $15 \leq n \leq 20$ 

Таблица 3.4: Результаты упаковок единичной сферы с метрикой в примерах 7 и 8

	Пример 7		Пример 8	
$n$	$R$	$t$	$R$	$t$
6	0.8372	162.99	1.4822	185.23
7	0.7663	169.84	1.3722	190.8
8	0.6924	180.64	1.2699	198.39
9	0.6398	187.14	1.2206	206.04
10	0.6288	197.83	1.0892	216.94
11	0.603	206.89	1.0829	223.89
12	0.5529	218.57	1.0641	230.7
13	0.5319	229.29	1.0012	237.94
14	0.5116	241.42	0.9442	256.98
15	0.4763	261.88	0.8662	263.76
16	0.4633	283.04	0.8554	269.65
17	0.4451	300.75	0.8015	274.91
18	0.4282	312.84	0.7441	280.35
19	0.4206	330.19	0.7296	286.92
20	0.377	343.78	0.681	294.16

тимальная конфигурация может быть неединственной, например, для  $N = 6$ .  $R$  — радиус начальной упаковки равных геодезических кругов в сферический сегмент, вычисленный по формулам (2.42)–(2.43);  $R_{imp}$  — наилучший радиус упаковки равных геодезических кру-

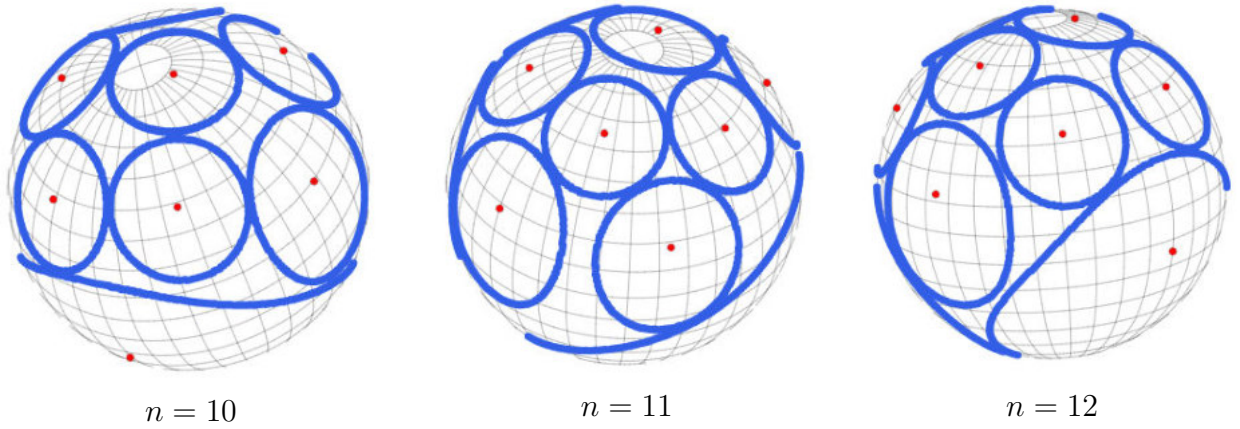
 $n = 10$  $n = 11$  $n = 12$ 

Рис. 3.14: Упаковки равных сферических сегментов на сфере в неевклидовой метрике в примере 7

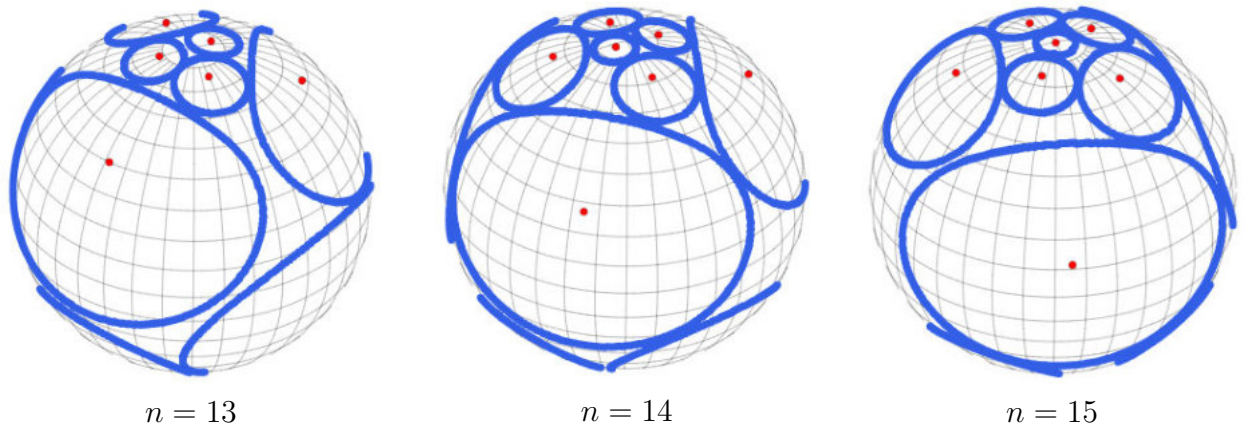
 $n = 13$  $n = 14$  $n = 15$ 

Рис. 3.15: Упаковки равных сферических сегментов на сфере в неевклидовой метрике в примере 8

гов в сферический сегмент после улучшения (2.44);  $R_{opt}$  — оптимальный радиус упаковки равных геодезических кругов в сферический сегмент из [75];  $t$  — время расчета.

Из таблиц 3.5, 3.6 видно, что процесс улучшения упаковки привел к увеличению радиуса во всех рассмотренных случаях. Следует отметить, что даже начальная упаковка без улучшения хуже оптимальной или наилучшей из известных не более, чем на 1.6% для  $\theta = \frac{\pi}{6}$  и 4% для  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . После процедуры улучшения в ряде случаев найдены оптимальные упаковки, средняя относительная погрешность составила 0.57% для  $\theta = \frac{\pi}{6}$  и 1.43% для  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , а максимальная — не превысила 4%. При этом время расчетов сократилось на три порядка.

### 3.2.4 Покрытие сферического сегмента равными геодезическими кругами

**Пример 10.** Построим покрытие сферических сегментов с угловыми размерами  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$  и  $\frac{\pi}{6}$  равными геодезическими кругами.

Для построения покрытие в этом примере применяется метод проекции и улуч-

Таблица 3.5: Результаты расчета для  $\theta = \frac{\pi}{6}$ 

N	$R'$	$R$	$R_{imp}$	$R_{opt}$	$\frac{R_{imp}-R}{R_{imp}}$	$\frac{R_{imp}-R_{opt}}{R_{opt}}$	$t$ (секунд)
4	0.41421	0.21390	0.21586	0.21586	0.00905	0	12.7
5	0.37019	0.19063	0.19235	0.19235	0.00894	0	13.7
6	0.33333	0.17122	0.17453	0.17453	0.00867	0	15
7	0.33333	0.17122	0.17272	0.17272	0.00867	0	16.1
8	0.30259	0.15510	0.15640	0.15640	0.00834	0	19.3
9	0.27677	0.14160	0.14274	0.14274	0.00799	0	19.9
10	0.26226	0.13403	0.13608	0.13656	0.01504	-0.00352	19.8
11	0.25485	0.13017	0.13117	0.13220	0.00762	-0.00776	21.6
12	0.24816	0.12669	0.12865	0.12956	0.01522	-0.00699	21.3
13	0.23607	0.12041	0.12129	0.12275	0.00727	-0.01187	22.3
14	0.23103	0.11779	0.11864	0.12038	0.00717	-0.01446	22.4
15	0.22117	0.11268	0.11347	0.11536	0.00697	-0.01638	24
16	0.21666	0.11035	0.11111	0.11260	0.00687	-0.01324	25.1
17	0.20868	0.10621	0.10693	0.10886	0.00669	-0.01769	25.9
18	0.20560	0.10462	0.10532	0.10674	0.00662	-0.01332	26.4
19	0.20560	0.10462	0.10532	0.10532	0.00662	0	26.4
20	0.19522	0.09926	0.09990	0.10094	0.00639	-0.01027	27.3

Таблица 3.6: Результаты расчета для  $\theta = \frac{\pi}{4}$ 

N	$R'$	$R$	$R_{imp}$	$R_{opt}$	$\frac{R_{imp}-R}{R_{imp}}$	$\frac{R_{imp}-R_{opt}}{R_{opt}}$	$t$ (секунд)
4	0.41421	0.31527	0.32174	0.32175	0.02012	0	12.7
5	0.37019	0.27995	0.28557	0.28557	0.01968	0	13.7
6	0.33333	0.25066	0.26180	0.26180	0.04257	0	15
7	0.33333	0.25066	0.25549	0.25550	0.01893	0	16.1
8	0.30259	0.22643	0.23059	0.23060	0.01804	0	19.3
9	0.27677	0.20624	0.20983	0.21112	0.01713	-0.00609	19.9
10	0.26226	0.19495	0.19824	0.20354	0.01656	-0.02607	19.8
11	0.25485	0.18921	0.19234	0.19619	0.01625	-0.01963	21.6
12	0.24816	0.18404	0.18702	0.19234	0.01594	-0.02767	21.3
13	0.23607	0.17470	0.17744	0.18332	0.01540	-0.03209	22.3
14	0.23103	0.17083	0.17346	0.17744	0.01517	-0.02242	22.4
15	0.22117	0.16326	0.16569	0.17224	0.01468	-0.03801	24
16	0.21666	0.15980	0.16215	0.16522	0.01444	-0.01862	25.1
17	0.20868	0.15370	0.15589	0.16242	0.01404	-0.04024	25.9
18	0.20560	0.15135	0.15348	0.15865	0.01387	-0.03257	26.4
19	0.20560	0.15135	0.15348	0.15348	0.01387	0	26.4
20	0.19522	0.14344	0.14538	0.14943	0.01332	-0.02709	27.3

шения покрытия, которые описаны в разделе 2.3.3. В таблицах 3.7–3.10 приведены результаты расчетов для  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$  и  $\frac{\pi}{6}$ , соответственно. Используются следующие обозначения:  $N$  — количество кругов либо геодезических кругов, покрывающих в круг или сферический сегмент, соответственно;  $\tilde{R}'$  — оптимальный радиус покрытия единичного круга равными кругами из [120, 126]. Отметим, что в некоторых случаях, когда оптималь-

ной конфигурации не существует, для ее нахождения используется оптико-геометрический подход [13, 52].  $\tilde{R} = \tilde{R}'\theta$  — радиус начального покрытия сферического покрытия геодезическими кругами;  $\tilde{R}_{imp}$  — наилучший радиус покрытия сферического сегмента равными геодезическими кругами после улучшения и определяется по формуле (2.44);  $R_w$  — радиус покрытия сферического сегмента равными геодезическими кругами с использованием оптико-геометрического подхода;

$t_{imp}$  — время расчета (в секундах) для улучшения покрытия.  $t_w$  — время расчета (в секундах) с помощью оптико-геометрического подхода.

Таблица 3.7: Результаты расчета для  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$N$	$\tilde{R}'$	$\tilde{R} = \tilde{R}'\theta$	$\tilde{R}_{imp}$	$R_w$	$\frac{\tilde{R} - \tilde{R}_{imp}}{\tilde{R}_{imp}}$ (%)	$\frac{\tilde{R}_{imp} - R_w}{R_w}$ (%)	$t_{imp}$ (s)	$t_w$ (s)
4	0.70847	1.11285	0.97228	0.93225	14.46	4.29	2.0	9.2
5	0.61187	0.96112	0.88866	0.83840	8.15	5.99	2.2	15.0
6	0.55823	0.87686	0.84331	0.73143	3.98	15.30	2.4	22.5
7	0.50537	0.79384	0.67555	0.66483	17.51	1.61	3.2	30.8
8	0.44579	0.70025	0.63419	0.62696	10.42	1.15	3.8	39.9
9	0.41649	0.65421	0.61810	0.58734	5.84	5.24	3.6	50.4
10	0.39804	0.62525	0.60257	0.55821	3.76	7.95	4.6	62.0
11	0.38120	0.59879	0.56670	0.52299	5.66	8.36	4.7	74.4
12	0.36425	0.57216	0.53722	0.50774	6.50	5.81	4.8	88.4
13	0.34822	0.54698	0.52332	0.48651	4.52	7.57	5.2	105.2
14	0.33504	0.52628	0.49111	0.46767	7.16	5.01	6.0	121.3
15	0.32151	0.50503	0.48499	0.45074	4.13	7.60	6.4	139.3
16	0.31266	0.49113	0.47968	0.43643	2.39	9.91	6.4	157.0
17	0.30487	0.47889	0.46230	0.41981	3.59	10.12	7.2	176.1
18	0.29671	0.46607	0.44405	0.40428	4.96	9.84	7.4	197.7
19	0.28434	0.44665	0.42758	0.39330	4.46	8.72	8.3	220.5
20	0.27648	0.43429	0.41543	0.38692	4.54	7.37	8.6	245.3

Из таблиц 3.7 - 3.10 видно, что процесс улучшения покрытия привел к уменьшению радиуса во всех рассмотренных случаях. Следует отметить, что начальные покрытия хуже улучшенного покрытия в среднем не более чем на 6.6% для  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , 3.5% для  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , 2.1% для  $\theta = \frac{\pi}{4}$  и 1% для  $\theta = \frac{\pi}{6}$ . После процесса улучшения в некоторых случаях было найдено лучшее покрытие по сравнению с результатами оптико-геометрического подхода, при этом средняя относительная погрешность составила 0.07% для  $\theta = \frac{\pi}{4}$  и 0.70% для  $\theta = \frac{\pi}{6}$ . Кроме того, время выполнения алгоритма намного меньше, чем для оптико-геометрический подхода.

Таблица 3.8: Результаты расчета для  $\theta = \frac{\pi}{3}$ 

$N$	$\tilde{R}'$	$\tilde{R} = \tilde{R}'\theta$	$\tilde{R}_{imp}$	$R_w$	$\frac{\tilde{R}-\tilde{R}_{imp}}{\tilde{R}_{imp}}$ (%)	$\frac{\tilde{R}_{imp}-R_w}{R_w}$ (%)	$t_{imp}$ (s)	$t_w$ (s)
4	0.70711	0.74190	0.69012	0.68143	7.50	1.28	2.0	8.9
5	0.60938	0.64075	0.61640	0.60939	3.95	1.15	2.2	14.1
6	0.55617	0.58457	0.57230	0.55261	2.15	3.56	2.4	21.3
7	0.50000	0.52922	0.48069	0.48943	10.10	-1.79	3.2	29.0
8	0.44524	0.46683	0.44396	0.45243	5.15	-1.87	3.8	37.8
9	0.41421	0.43614	0.42478	0.42680	2.67	-0.47	3.6	47.6
10	0.39494	0.41683	0.40875	0.40057	1.98	2.04	4.6	57.7
11	0.38120	0.39920	0.38793	0.37891	2.90	2.38	4.7	70.1
12	0.36425	0.38144	0.36860	0.36010	3.48	2.36	4.8	84.0
13	0.34822	0.36466	0.35596	0.35028	2.44	1.62	5.2	99.0
14	0.33504	0.35085	0.33586	0.32983	4.46	1.83	6.0	115.1
15	0.32151	0.33669	0.32906	0.32293	2.32	1.90	6.4	131.4
16	0.31266	0.32742	0.32241	0.31280	1.55	3.07	6.4	148.4
17	0.30487	0.31926	0.31334	0.30620	1.89	2.33	7.2	166.6
18	0.29671	0.31071	0.30232	0.29447	2.78	2.66	7.4	184.7
19	0.27739	0.29776	0.29047	0.28487	2.51	1.96	8.3	205.6
20	0.27648	0.28953	0.28310	0.28025	2.27	1.02	8.6	228.0

Таблица 3.9: Результаты расчета для  $\theta = \frac{\pi}{4}$ 

$N$	$\tilde{R}'$	$\tilde{R} = \tilde{R}'\theta$	$\tilde{R}_{imp}$	$R_w$	$\frac{\tilde{R}-\tilde{R}_{imp}}{\tilde{R}_{imp}}$ (%)	$\frac{\tilde{R}_{imp}-R_w}{R_w}$ (%)	$t_{imp}$ (s)	$t_w$ (s)
4	0.70847	0.55643	0.53270	0.54011	4.45	-1.37	2.0	8.8
5	0.61187	0.48056	0.46964	0.46856	2.33	0.23	2.2	13.6
6	0.55823	0.43843	0.43295	0.43146	1.27	0.35	2.4	19.2
7	0.50537	0.39692	0.37513	0.37694	5.81	-0.48	3.2	26.7
8	0.44579	0.35012	0.34076	0.34108	2.75	-0.09	3.8	34.1
9	0.41649	0.32711	0.32156	0.32751	1.72	-1.82	3.6	43.2
10	0.39804	0.31262	0.30889	0.30501	1.21	1.27	4.6	52.7
11	0.38120	0.29940	0.29432	0.29137	1.73	1.01	4.7	62.8
12	0.36425	0.28608	0.28010	0.28345	2.14	-1.18	4.8	74.4
13	0.34822	0.27349	0.26958	0.26960	1.45	-0.01	5.2	88.4
14	0.33504	0.26314	0.25599	0.25588	2.79	0.04	6.0	102.2
15	0.32151	0.25251	0.24897	0.24821	1.42	0.31	6.4	115.9
16	0.31266	0.24557	0.24312	0.24661	1.00	-1.41	6.4	133.3
17	0.30487	0.23945	0.23679	0.23315	1.12	1.56	7.2	150.3
18	0.29671	0.23304	0.22922	0.22876	1.67	0.20	7.4	169.9
19	0.28434	0.22332	0.21996	0.22000	1.53	-0.02	8.3	188.7
20	0.27648	0.21714	0.21480	0.21450	1.09	0.14	8.6	210.7

### 3.2.5 Покрывание поверхности цилиндра и конуса равными шарами

**Пример 11.** Построим покрытие боковой поверхности цилиндра, имеющего радиус оснований  $r = \frac{1}{2\pi}$  и высоту  $h = 1$ :

$$S_{cyl} = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 = \frac{1}{4\pi^2}, 0 \leq z \leq 1 \right\}.$$

Таблица 3.10: Результаты расчета для  $\theta = \frac{\pi}{6}$ 

$N$	$\tilde{R}'$	$\tilde{R} = \tilde{R}'\theta$	$\tilde{R}_{imp}$	$R_w$	$\frac{\tilde{R} - \tilde{R}_{imp}}{\tilde{R}_{imp}}$ (%)	$\frac{\tilde{R}_{imp} - R_w}{R_w}$ (%)	$t_{imp}$ (s)	$t_w$ (s)
4	0.70847	0.37095	0.36401	0.36243	1.91	0.44	2.0	8.6
5	0.61187	0.32037	0.31701	0.31715	1.06	-0.04	2.2	13.1
6	0.55823	0.29229	0.29058	0.29286	0.59	-0.78	2.4	18.6
7	0.50537	0.26461	0.25806	0.25544	2.54	1.03	3.2	24.3
8	0.44579	0.23342	0.23059	0.23863	1.23	-3.37	3.8	31.4
9	0.41649	0.21807	0.21630	0.21755	0.82	-0.58	3.6	40.4
10	0.39804	0.20842	0.20724	0.20961	0.57	-1.13	4.6	50.2
11	0.38120	0.19960	0.19801	0.19929	0.80	-0.64	4.7	59.2
12	0.36425	0.19072	0.18881	0.19217	1.01	-1.75	4.8	71.1
13	0.34822	0.18233	0.18112	0.18403	0.67	-1.58	5.2	83.3
14	0.33504	0.17543	0.17305	0.17446	1.37	-0.81	6.0	94.8
15	0.32151	0.16834	0.16723	0.16882	0.67	-0.94	6.4	109.4
16	0.31266	0.16371	0.16290	0.16308	0.50	-0.11	6.4	123.1
17	0.30487	0.15963	0.15881	0.15823	0.52	0.37	7.2	137.1
18	0.29671	0.15536	0.15418	0.15561	0.77	-0.92	7.4	155.1
19	0.28434	0.14888	0.14782	0.14906	0.72	-0.83	8.3	173.5
20	0.27648	0.14476	0.14405	0.14435	0.49	-0.21	8.6	190.3

равными шарами в случае, когда метрика является евклидовой.

Задача была решена с использованием разработанного комплекса программ алгоритмом **CylConeCover**. Число случайных генераций начальных положений 50, величина  $\delta = 10^{-5}$ . Если предположить, что нижнее основание цилиндра принадлежит плоскости  $Oxy$ , а его центр является началом координат, то центры покрывающих шаров ( $n = 20$ ) следующие:

$$\begin{aligned}
&(0.127, 0.095, 0.900), (-0.158, 0.019, 0.520), (0.106, -0.118, 0.280), (-0.127, -0.095, 0.280), \\
&(0.046, 0.152, 0.640), (0.143, -0.069, 0.040), (-0.016, -0.158, 0.480), (-0.095, -0.127, 0.0800), \\
&(0.011, 0.158, 0.420), (0.077, -0.139, 0.960), (0.157, -0.022, 0.840), (0.153, -0.043, 0.600), \\
&(0.098, 0.125, 0.140), (-0.033, -0.155, 0.700), (-0.102, 0.121, 0.020), (-0.128, 0.093, 0.240), \\
&(-0.069, 0.143, 0.920), (-0.146, 0.062, 0.720), (-0.145, -0.064, 0.900), (0.157, 0.024, 0.400)
\end{aligned}$$

Радиус шаров  $R_{20} = 0.1535$ . На рисунке 3.16 показано минимальное покрытие 20-ю шарами.

При развертке поверхности цилиндра  $S_{cyl}$  на плоскость получаем единичный квадрат. Хотя визуально пересечение цилиндра и сферы выглядит как круг, на самом деле оно представляет собой пространственные кривые четвертого порядка [169].

Выполним сравнение полученных результатов с оптимальными известными покрытиями единичного квадрата равными кругами [196, 232] (см. таблицу 3.11). В таблице использованы следующие обозначения:

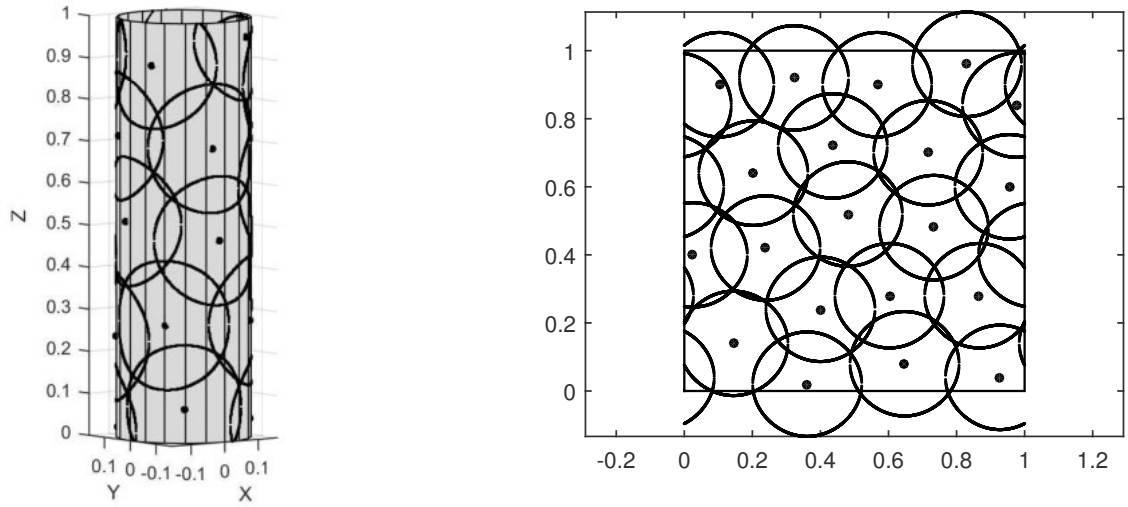


Рис. 3.16: Покрытие поверхности цилиндра (слева) и его развернутой поверхности (справа) 20 одинаковыми шарами и кругами соответственно.

$n$  — количество покрывающих шаров (для пространственного случая) или кругов (для плоского случая);

$R$  — оптимальный радиус покрытия, найденный алгоритмом **CylConeCover**;

$R^*$  — наилучший известный радиус покрытия из работ [196, 232];

$\Delta R(\%) = \frac{R-R^*}{R^*} \times 100$  — относительная погрешность в процентах.

Таблица 3.11: Покрытие поверхности цилиндра равными шарами в евклидовой метрике

$n$	$R$	$R^*$	$\Delta R(\%)$	$n$	$R$	$R^*$	$\Delta R(\%)$
3	0.4997	0.5039	-0.83	12	0.2032	0.2023	0.44
4	0.3397	0.3535	-3.90	13	0.1952	0.1943	0.46
5	0.3117	0.3261	-4.41	14	0.1862	0.1855	0.38
6	0.2900	0.2989	-2.98	15	0.1805	0.1797	0.45
7	0.2736	0.2742	-2.22	16	0.1705	0.1694	0.65
8	0.2595	0.2605	-0.38	17	0.1668	0.1657	0.66
9	0.2300	0.2306	-0.26	18	0.1617	0.1606	0.69
10	0.2180	0.2182	-0.09	19	0.1592	0.1578	0.89
11	0.2129	0.2125	-0.19	20	0.1535	0.1522	0.85

Как видно из таблицы 3.11, предложенный метод демонстрирует лучшие результаты по сравнению с известными решениями [196, 232] при количестве элементов покрытия  $n \leq 11$ . Это преимущество объясняется особенностью геометрического преобразования: при развертке цилиндра на плоскость один сферический элемент покрытия может од-

новременно охватывать две смежные стороны квадрата, что невозможно в классической задаче покрытия плоских областей.

Однако с ростом числа элементов покрытия ( $n > 11$ ) данное преимущество нивелируется. В этом случае наблюдаемые отклонения от оптимальных радиусов, хотя и остаются незначительными (не превышая 0,89%), демонстрируют тенденцию к увеличению. Следует подчеркнуть, что величина этих отклонений находится в прямой зависимости от выбранного шага дискретизации расчетной сетки.

**Пример 12.** Построим покрытие цилиндра  $S_{cyl}$  равными шарами в случае неевклидовой метрики. Пусть  $f(x, y, z) = \frac{1}{1+0.9z^2}$ . Нетрудно заметить, что скорость распространения волны уменьшается в вертикальном направлении при движении от нижнего основания цилиндра. Если центр шара расположен ближе к нижнему основанию, то визуально этот шар выглядит большим (см. рис. 3.17). Однако в данной метрике все шары имеют одинаковый радиус. В таблице 3.12 приведены результаты вычислений для различного числа покрывающих шаров в данном примере.

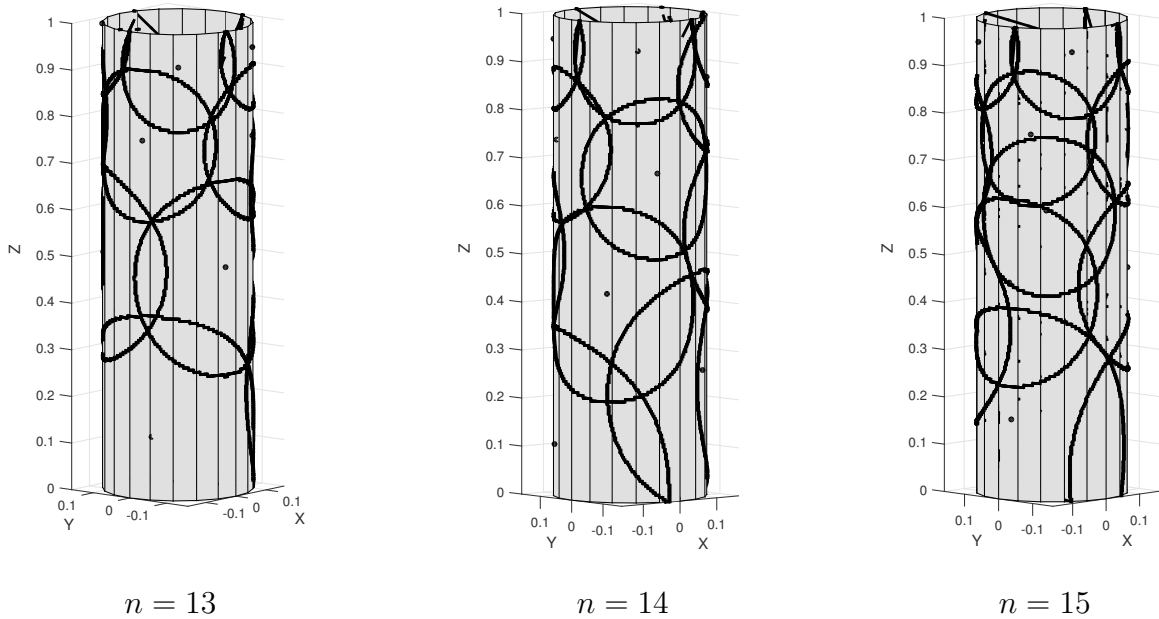


Рис. 3.17: Покрытия поверхности цилиндра равными шарами в неевклидовой метрике в примере 12.

**Пример 13.** Построим покрытие боковой поверхности конуса, имеющего радиус основания  $r = 1$  и высоту  $h = 3$ :

$$S_{cone} = \{(x, y, z) : z^2 = 9(x^2 + y^2), 0 \leq z \leq 3\}.$$

10 равными шарами в случае, когда метрика является евклидовой.

Таблица 3.12: Результаты покрытия поверхности цилиндра в примере 12

$n$	$R$	$t$	$n$	$R$	$t$
3	0.8638	87.32	12	0.5003	113.23
4	0.7734	90.77	13	0.4902	119.02
5	0.6758	94.64	14	0.4624	126.24
6	0.6225	95.70	15	0.4211	127.23
7	0.5994	99.94	16	0.3744	129.83
8	0.5519	105.19	17	0.3704	132.74
9	0.5331	108.31	18	0.3629	134.85
10	0.5222	110.22	19	0.3616	135.36
11	0.5158	111.58	20	0.3585	137.03

Аналогично примеру 11, решение задачи выполнено с помощью алгоритма **CylCone-Cover**. Для конуса, в котором основание лежит на плоскости  $Oxy$ , а центром является начальным координатном  $Oxyz$ , при  $n = 10$ , радиус наилучший  $R_{10} = 0.7157$  и позиции центров шаров:

$$\begin{aligned}
 &(-0.2944, 0.3270, 1.6800), (-0.3191, 0.9266, 0.0600), \\
 &(-0.8180, 0.0572, 0.5400), (0.5599, -0.0098, 1.3200), \\
 &(-0.2367, -0.4853, 1.3800), (0.0000, 0.7000, 0.9000), \\
 &(0.8300, 0.4413, 0.1800), (-0.4500, -0.7794, 0.3000), \\
 &(0.5865, -0.6290, 0.4200), (0.1532, -0.1286, 2.4000)
 \end{aligned}$$

Покрытие конуса набором из 10 шаров приведено на рис. 3.18. В таблице 3.13 показаны результаты расчетов.

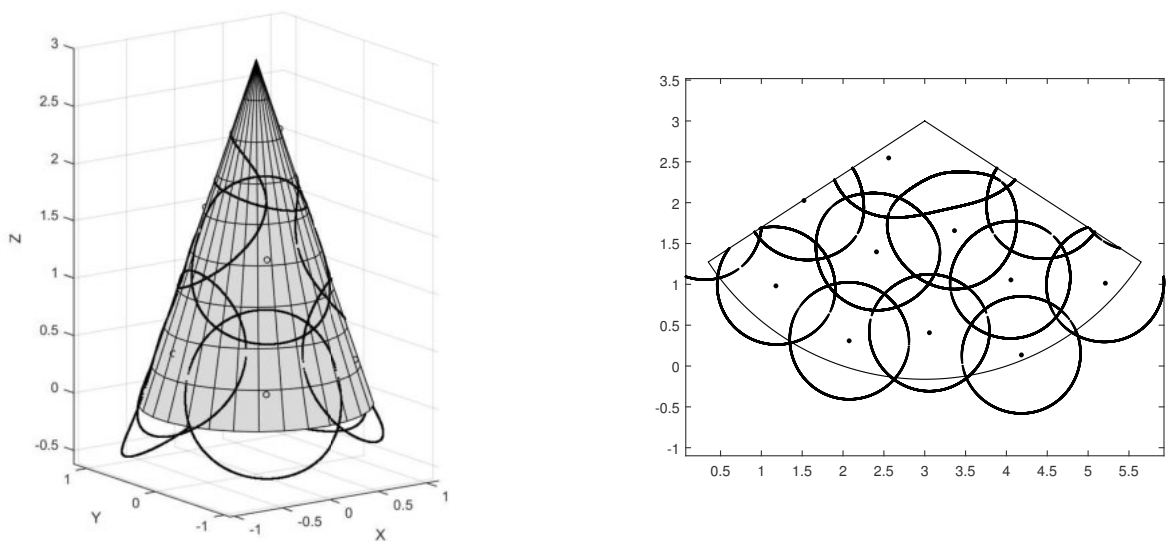


Рис. 3.18: Покрытие конуса 10 равными шарами в трехмерном и при разворачивании поверхности в примере 10

Таблица 3.13: Покрытие поверхности конуса равными шарами в евклидовой метрике

$n$	$R$	$t(\text{секунд})$	$n$	$R$	$t(\text{секунд})$
3	1.5070	48.08	12	0.6584	75.61
4	1.1757	50.07	13	0.6307	84.43
5	1.0263	52.83	14	0.6071	87.57
6	0.9468	53.97	15	0.5888	89.85
7	0.9287	54.63	16	0.5791	92.01
8	0.8271	60.58	17	0.5712	94.16
9	0.7207	65.17	18	0.5533	95.67
10	0.7157	68.63	19	0.5278	98.45
11	0.6684	72.78	20	0.5212	103.98

**Пример 14.** Построим покрытие поверхности конуса  $S_{cone}$  равными шарами в случае неевклидовой метрики с  $f(x, y, z) = \frac{1}{1+0.5z}$ .

Нетрудно видеть, что в диапазоне  $z \in [0; 3]$  данная функция принимает наибольшее значение при  $z = 0$  и наименьшее — при  $z = 3$ . Следовательно, скорость распространения волны уменьшается по мере движения от нижнего основания конуса к его вершине. В случае, если центр шара находится вблизи основания, то визуально этот шар выглядит большим (см. рис. 3.19). Тем не менее, в рамках такой метрики все шары остаются равными. В таблице 3.14 приведены наилучшие найденные покрытия.

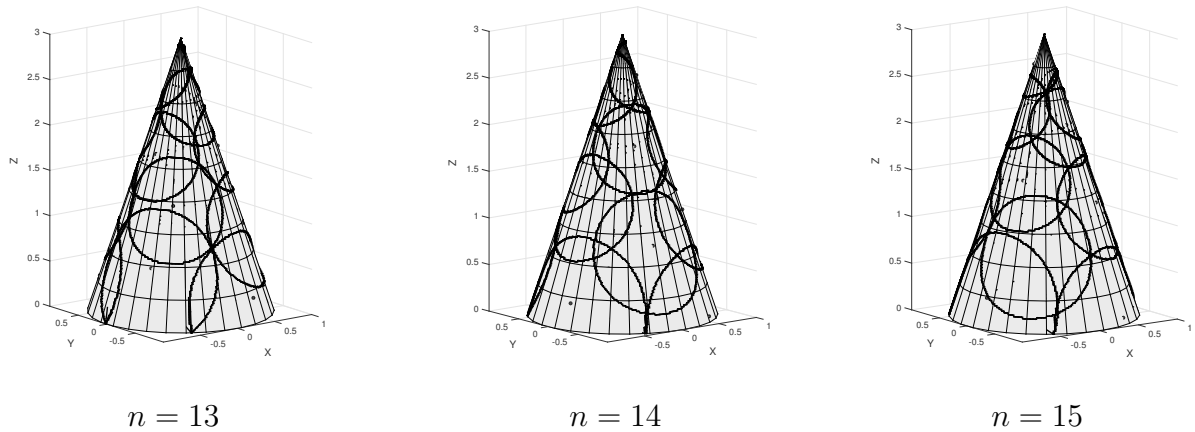


Рис. 3.19: Покрытие поверхности конуса одинаковыми шарами в примере 14 для  $n = 13, 14, 15$ .

### 3.2.6 Упаковка равных шаров на боковой поверхности цилиндра и конуса

**Пример 15.** Требуется построить упаковки равных шаров на боковой поверхности цилиндра  $S_{cyl}$  в случае евклидовой метрики.

Для построения упаковки равных шаров на поверхности цилиндра  $S_{cyl}$  применяется алгоритм **CylConePacking**, в котором число случайных генераций начальных положений 50, величина  $\delta = 10^{-5}$ . Если предположить, что нижнее основание цилиндра принад-

Таблица 3.14: Покрывание поверхности конуса с неевклидовой метрикой в примере 14

$n$	$R$	$t$	$n$	$R$	$t$
3	1.9337	50.64	12	1.0139	103.25
4	1.7885	54.34	13	0.9777	119.54
5	1.5209	66.04	14	0.9649	136.49
6	1.4429	70.70	15	0.9197	147.23
7	1.3116	73.59	16	0.8654	159.53
8	1.1952	80.98	17	0.8587	172.47
9	1.1652	84.31	18	0.8313	188.87
10	1.0659	87.22	19	0.7863	196.11
11	1.0478	92.58	20	0.7834	204.82

лежит плоскости  $Oxy$ , а его центр является началом координат, то центры упакованных шаров ( $n = 14$ ) следующие:

$$\begin{aligned}
 &(0.0674, 0.1442, 0.8722), (-0.0052, -0.1591, 0.3940), (-0.1582, 0.0177, 0.3822), \\
 &(0.0052, 0.1591, 0.4890), (-0.1152, 0.1099, 0.7071), (0.0152, -0.1584, 0.1393), \\
 &(0.1567, 0.0276, 0.1277), (0.0706, -0.1426, 0.7856), (0.1590, 0.0073, 0.3822), \\
 &(-0.1591, -0.0027, 0.1277), (-0.1124, -0.1127, 0.6201), (-0.1410, -0.0739, 0.8722), \\
 &(-0.0152, 0.1584, 0.2344), (0.1524, 0.0458, 0.6537).
 \end{aligned}$$

Радиус шаров  $R_{14} = 0.12769$ . На рисунке 3.20 показана самая плотная упаковка 14 шаров.

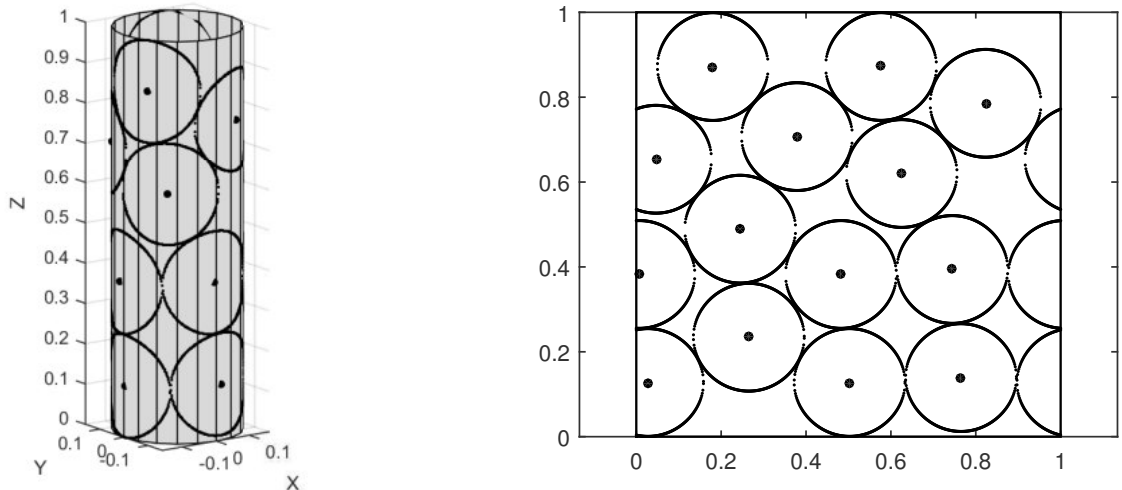


Рис. 3.20: Упаковка на поверхности цилиндра (слева) и его на развернутой поверхности (справа) 14 равных шаров и кругов соответственно.

Развернув поверхность цилиндра в плоскость, получим единичный квадрат. Далее сравним полученные результаты с наилучшими упаковками равных кругов в единичный квадрат [203] (см. таб. 3.15). Здесь  $n$  — количество упакованных шаров или кругов соответственно;  $R$  — наилучший радиус упаковки, найденный с помощью предложенного алгоритма **CylConePacking**,  $R^*$  — наилучший известный радиус из [203] для соответствующего количества кругов;  $\Delta R(\%) = \frac{R-R^*}{R^*} \times 100$ .

Таблица 3.15: Упаковка равных шаров на поверхности цилиндра в евклидовой метрике

$n$	$R$	$R^*$	$\Delta R(\%)$	$n$	$R$	$R^*$	$\Delta R(\%)$
3	0.25053	0.25433	-1.50	12	0.14202	0.13996	1.47
4	0.23100	0.25000	-7.60	13	0.13343	0.13399	-0.42
5	0.20186	0.20711	-2.54	14	0.12769	0.12933	-1.27
6	0.19512	0.18768	3.96	15	0.12513	0.12717	-1.60
7	0.17464	0.17446	0.11	16	0.12274	0.12500	-1.81
8	0.16767	0.17054	-1.69	17	0.11598	0.11720	-1.04
9	0.16252	0.16667	-2.49	18	0.11395	0.11552	-1.36
10	0.15006	0.14820	1.25	19	0.11254	0.11227	0.25
11	0.14263	0.14240	0.16	20	0.11211	0.11138	0.65

Из таблицы 3.15 видно, что в некоторых случаях радиус шаров в предлагаемом методе больше известных радиусов ( $\Delta R > 0$ ), поскольку поверхность цилиндра при разворачивании трансформируется в квадрат, один круг на левом краю квадрата может касаться круга на правом краю. Это невозможно в классической задаче упаковки на плоскости.

С другой стороны, при  $3 \leq n \leq 9$  можно видеть, что отклонение  $\Delta R$  имеет большой разброс, наименьшее значение равно  $-7.60\%$ , а наибольшее —  $3.96\%$ . Что касается  $10 \leq n \leq 20$ , то отклонение меняется незначительно,  $|\Delta R| \leq 1.81\%$ . Это вполне объяснимо, поскольку чем больше количество шаров  $n$ , тем меньше их радиус, тогда при разворачивании цилиндра на плоскости пересечения сферы и цилиндра будет приближено к окружности.

**Пример 16.** Рассмотрим задачу упаковки равных шаров на боковой поверхности цилиндра  $S_{cyl}$  в неевклидовой метрике с  $f(x, y, z) = \frac{1}{1+2z}$ .

В рассматриваемом примере применяется метрика, эквивалентная использованной в примере 12. В интервале  $z \in (0; 1)$  функция уменьшается, поэтому, если центр шара расположен ближе к нижнему основанию ( $z \approx 0$ ), то визуально этот шар также выглядит большим (см. рис. 3.21). Однако в данной метрике все шары имеют одинаковый радиус.

**Пример 17.** Требуется решить задачу упаковки равных шаров на боковой поверхности конуса  $S_{cone}$  в случае евклидовой метрики.

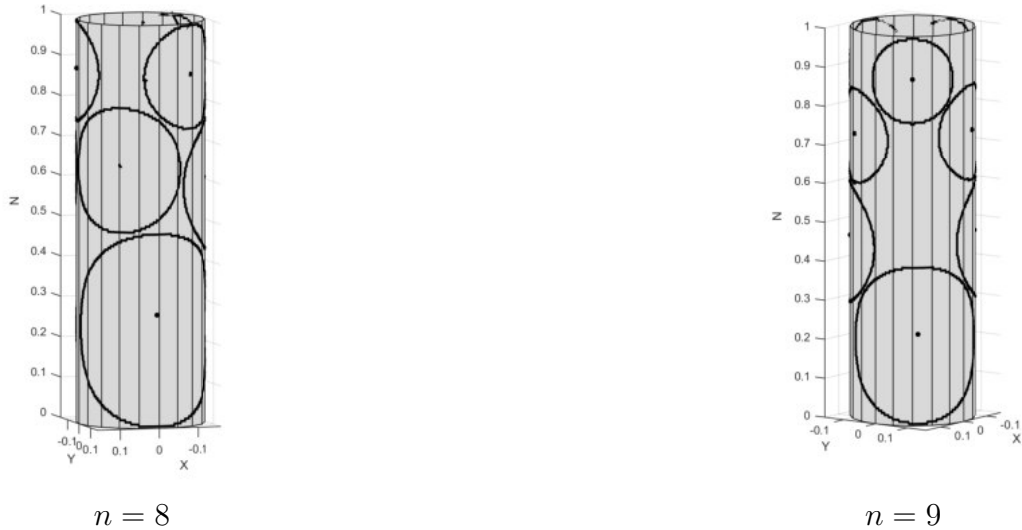


Рис. 3.21: Упаковки одинаковых шаров на поверхности цилиндра в примере 16 для  $n = 8, 9$ .

Для построения упаковки равных шаров на поверхности конуса  $S_{cone}$  используется алгоритм **CylConePacking**, в котором число случайных генераций начальных положений 60, величина  $\delta = 10^{-4}$ . Если предположить, что нижнее основание цилиндра принадлежит плоскости  $Oxy$ , а его центр является началом координат, то центры упакованных шаров ( $n = 8$ ) следующие:

$$(0.2770, -0.5209, 1.2300), (0.0767, -0.1573, 2.4750), (0.1005, 0.8189, 0.5250),$$

$$(0.3084, 0.3808, 1.5300), (-0.4793, -0.0251, 1.5600), (0.8205, 0.0862, 0.5250),$$

$$(-0.7752, 0.2822, 0.5250), (-0.4548, -0.7003, 0.4950).$$

Радиус шаров  $R_8 = 0.5218$ . На рисунке 3.22 показана самая плотная упаковка 8 шаров.

В таблице 3.16 показаны результаты расчетов. Здесь  $n$  – количество покрывающих шаров,  $R$  – наилучший радиус покрытия, найденный из алгоритма **CylConePacking**,  $t$  – время работы алгоритма (в секундах).

Сравнивая с таблицей 3.13, видим, что время расчета в алгоритме покрытия значительно меньше, чем в алгоритме упаковки. Это объясняется тем, что в алгоритме упаковки для нахождения центра упакованных шаров необходимо многократно распространять световую волну из каждой точки области Дирихле во все точки на границе. В алгоритме покрытия достаточно однократного распространения волны из всех точек на границе до всех точек области Дирихле.

**Пример 18.** Построим упаковку равных шаров на поверхности конуса  $S_{cone}$  с неевклидовой метрикой с  $f(x, y, z) = 1/(1 + 0.5z)$ .

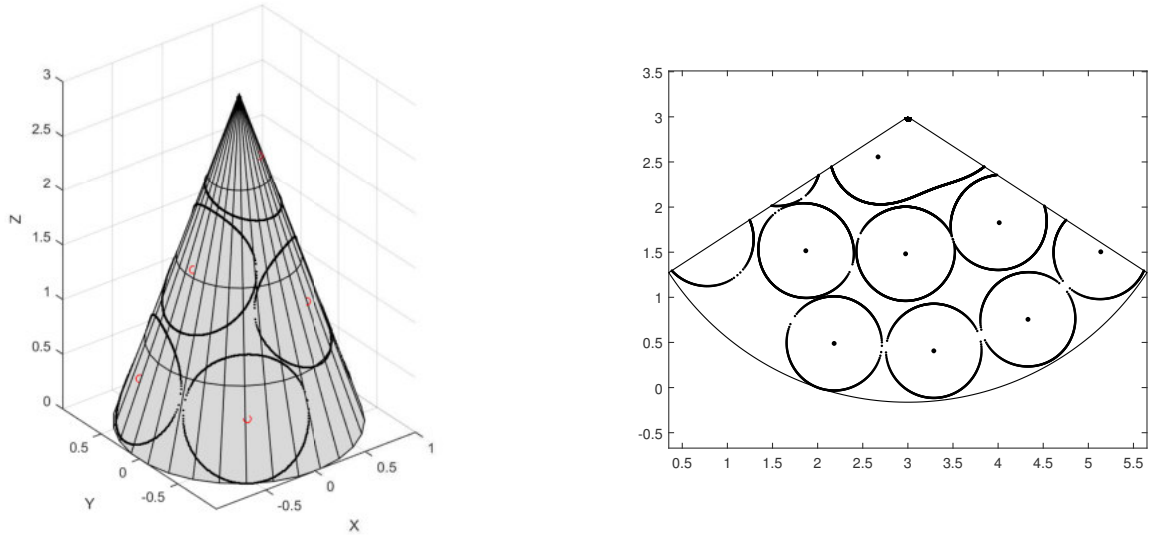


Рис. 3.22: Упаковки 8 равных шаров на поверхности конуса и при разворачивании поверхности в примере 17

Таблица 3.16: Упаковки равных шаров на поверхности конуса в евклидовой метрике

$n$	$R$	$t(\text{секунд})$	$n$	$R$	$t(\text{секунд})$
3	0.8222	102.8	12	0.4120	686.4
4	0.7589	183.9	13	0.3992	690.5
5	0.6122	263.9	14	0.3800	787.5
6	0.5745	335.7	15	0.3650	842.1
7	0.5254	435.8	16	0.3479	854.8
8	0.5218	476.8	17	0.3060	902.6
9	0.4840	484.6	18	0.2768	912.8
10	0.4436	513.1	19	0.2530	934.7
11	0.4209	625.7	20	0.2397	957.8

На рисунке 3.23 показаны упаковки на поверхности конуса  $S_{cone}$  с метрикой  $f(x, y, z) = 1/(1 + 0.5z)$ . Легко видеть, что шар с центром ближе к основанию конуса будет казаться больше, хотя их радиусы одинаковы. Как и в примере 14, в этом примере свойства рассматриваемой метрики приводит к уменьшению скорости распространения световой волны при движении от нижнего основания к вершине конуса.

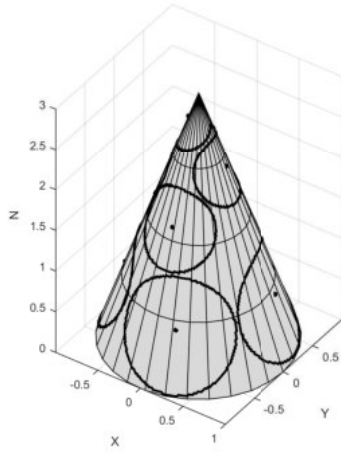
### 3.2.7 Покрывание эллипсоида равными шарами

**Пример 19.** Рассматривается задача покрытия  $n = 9$  равными шарами сегмента эллипсоида

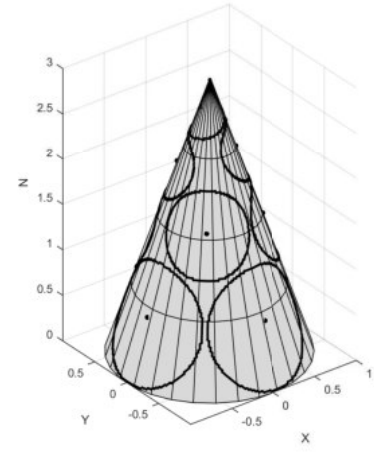
$$(S_{E1}^+) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1, z \geq 0,$$

в случае, когда метрика является евклидовой.

Поскольку  $z \geq 0$  для решения задачи используются алгоритмы **EllipsoidVoronoi**



$$n = 8$$



$$n = 9$$

Рис. 3.23: Упаковки одинаковых шаров на поверхности конуса в примере 18 для  $n = 8, 9$ .

и **EllipsoidCover**, где  $0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \mu \leq \pi/2$ . В алгоритме **EllipsoidCover** число случайных генераций начальных положений  $N_{\max} = 80$ , величина  $\delta = 10^{-3}$ . Позиции центров шаров:

$$\begin{aligned} &(-0.7071, 1.2247, 0.7071), (0.7357, -1.0705, 0.7604), (-1.2673, -0.7766, 0.6691), \\ &(-1.8853, 0.6676, 0.0000), (-0.2578, 0.1772, 0.9877), (0.1564, 1.9877, 0.0785), \\ &(-0.2588, -1.9659, 0.1305), (1.9208, -0.4611, 0.1564), (1.2304, 0.8939, 0.6494). \end{aligned}$$

Радиус шаров равен  $R_9 = 1.0755$ . Центры шаров были равномерно распределены по всей верхней эллипсоида ( $S_{E1}^+$ ).

**Пример 20.** Требуется решить задачу покрытия эллипсоида

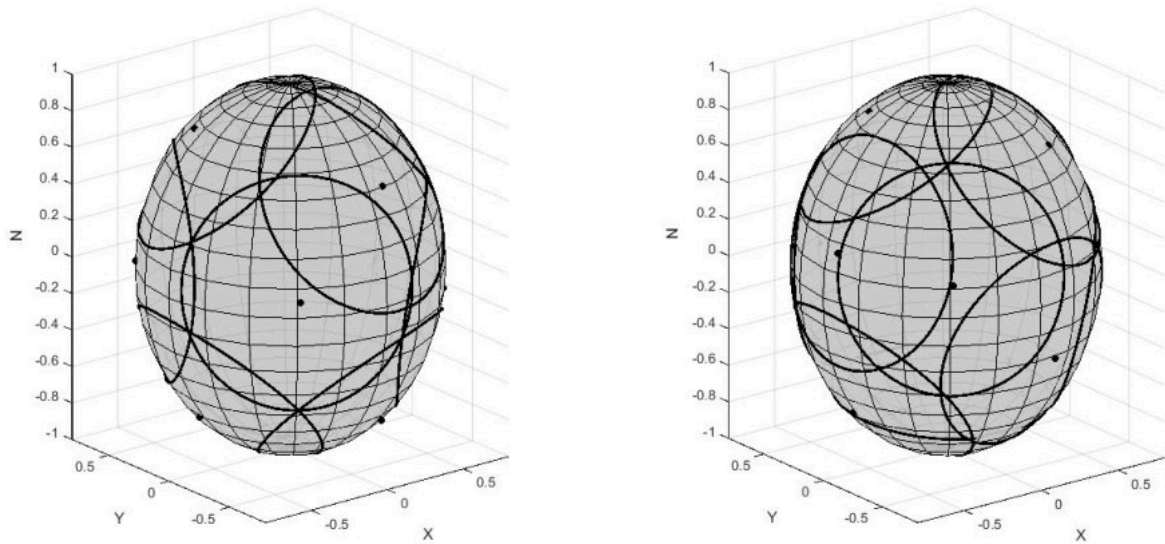
$$(S_{E2}) : \frac{x^2}{0.64} + \frac{y^2}{0.64} + \frac{z^2}{1} = 1$$

с евклидовой метрикой.

Для решения данной задачи также используются алгоритмы **EllipsoidVoronoi** и **EllipsoidCover**. Покрытие эллипсоида шарами в случае  $n = 10, 11$  представлено на рисунке 3.24.

В рассматриваемом примере, поскольку до сих пор теоретических оценок на радиус оптимальных покрытий для эллипсоида не получено, то покрытие эллипсоида сравнится с покрытием сферы с такой же площадью. Такое сравнение позволит оценить качество построенных покрытий, так как оценки радиуса оптимального покрытия единичной сферы известны [231].

В таблице 3.17 приведены результаты расчетов. Здесь  $n$  – количество покрывающих шаров;  $R$  – наилучшие радиусы покрытий эллипсоида;  $R^*$  – оптимальный радиус



$n = 10$

$n = 11$

Рис. 3.24: Покрытие эллипсоида в евклидовой метрике в примере 20.

шаров, покрывающих сферу с такой же площадью [231];  $\Delta = \frac{R-R^*}{R} \times 100\%$  — отношение наилучших радиусов покрытий эллипсоида к оптимальному радиусу кругов  $R^*$ ;  $\Xi_n$  — отношение суммы площадей покрытий к площади поверхности эллипсоида;  $t$  — время расчета (в секундах), для алгоритмов **EllipsoidVoronoi** и **EllipsoidCover**. Число случайных генераций начальных положений 80, величина  $\delta = 10^{-3}$ .

Таблица 3.17: Результаты покрытий эллипсоида в примере 20.

$n$	$R$	$R^*$	$\Delta$	$\Xi$	$t(\text{секунд})$
4	1,0030	1,0157	-1,25	1,323	73.2
5	0,8938	0,9219	-3,05	1,309	81.8
6	0,8012	0,8034	-0,28	1,233	93.7
7	0,7503	0,7518	-0,20	1,244	105.4
8	0,7093	0,7112	-0,27	1,372	112.1
9	0,6736	0,6792	-0,82	1,365	131.1
10	0,6276	0,6282	-0,10	1,268	145.4
11	0,6143	0,6156	-0,21	1,439	162.2
12	0,5902	0,5571	5,94	1,423	181.1
13	0,5650	0,5526	2,23	1,444	191.9
14	0,5404	0,5216	3,60	1,44	205.1
15	0,5268	0,5085	3,60	1,401	219.3
16	0,5103	0,4905	4,03	1,315	231.4
17	0,4989	0,4800	3,92	1,496	239.8
18	0,4810	0,4642	3,62	1,517	249.0
19	0,4666	0,4549	2,58	1,427	261.5
20	0,4537	0,4437	2,24	1,366	289.5

Из таблицы 3.17 видно, что радиус покрытия эллипсоида может как превышать,

так и быть меньше оптимального радиуса покрытия сферы. Минимальная плотность покрытия наблюдается при  $n = 6$ , тогда как максимальная достигается при  $n = 18$ ; с увеличением количества покрывающих шаров плотность варьируется в интервале от 1.233 до 1.517. Поскольку оптимальная плотность покрытия сферы равными кругами также лежит в диапазоне  $(1.23, 1.5]$  [231], полученные покрытия можно считать хорошими.

**Пример 21.** Рассмотрим задачу покрытия эллипсоида  $(S_{E1})$  в случае, когда метрика является неевклидовой. Пусть задана функция  $f(x, y, z) = \frac{1}{1+|z|}$ .

Нетрудно заметить, что скорость распространения волны уменьшается при движении от экватора эллипсоида к полюсам по оси  $Oz$ , причем этот эллипсоид является сфероидом с полуосями  $a = b = 2, c = 1$ , поэтому, если центр покрывающего шара расположен на экваторе, волновой фронт есть обычный эллипс; если центр покрывающего шара расположен в точке полюса, то волновой фронт есть окружность. Шар с центром около экватора визуально выглядит больше, чем шар с центром около полюсов.

В таблице 3.18 представлены результаты расчетов для различного числа покрывающих шаров. Здесь в алгоритме **EllipsoidCover** используются число случайных генераций начальных положений  $N_{\max} = 60$ , величина  $\delta = 10^{-3}$ .

Таблица 3.18: Результаты покрытий эллипсоида с неевклидовой метрике в примере 21

$n$	$R$	$t(\text{секунд})$	$n$	$R$	$t(\text{секунд})$
5	2.7525	64.23	13	1.7781	84.56
6	2.4498	66.59	14	1.7057	86.14
7	2.2618	68.33	15	1.6646	90.36
8	2.1949	70.39	16	1.5642	93.48
9	2.0978	72.66	17	1.5114	97.60
10	1.955	74.07	18	1.4803	98.77
11	1.8491	76.41	19	1.4434	103.47
12	1.8166	80.20	20	1.3431	105.95

В таблице видно, что в этом примере радиусы больше, чем в примере 20 для того же количества шаров. Потому, что скорость распространения волны в этой метрике меньше, чем в евклидовой.

### 3.2.8 Упаковка равных шаров на эллипсоиде

**Пример 22.** Требуется построить упаковки равных шаров на эллипсоиде  $(S_{E2})$  с евклидовой метрикой.

Для построения упаковки в рассматриваемом применяются алгоритмы **Ellipsoid-Voronoi** и **EllipsoidPacking**. Число случайных генераций начальных положений 40, ве-

личина  $\delta = 10^{-3}$ . Упаковки равных шаров на эллипсоиде в случае  $n = 11, 12$  представлены на рисунке 3.25.

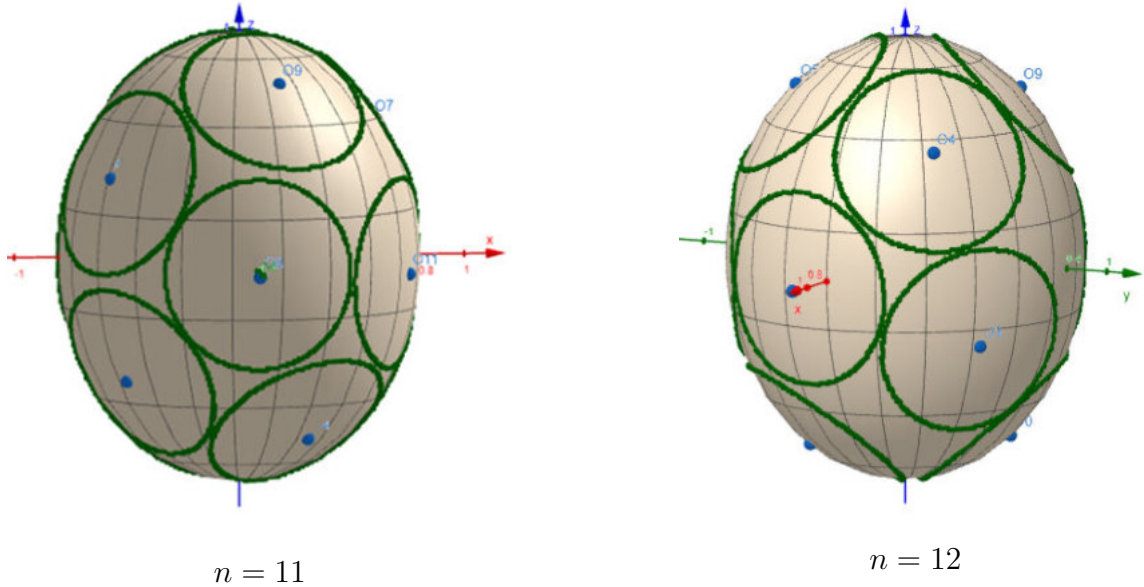


Рис. 3.25: Упаковка равных шаров на эллипсоиде в евклидовой метрике.

Как и в примере 20, упаковка эллипсоида сравнивается с упаковкой сферы с такой же площадью. Такая упаковка позволит оценить качество построенных упаковок, так как оценки радиуса оптимальной упаковки единичной сферы известны [64, 190, 192, 237].

Таблица 3.19: Результаты упаковки равных шаров на эллипсоиде в примере 22.

$n$	$R$	$R^*$	$\Delta$	$\Xi$	$t(\text{секунд})$
4	0.7417	0.8033	-7.67	0.746	94.6
5	0.6710	0.6666	0.65	0.756	105.2
6	0.6152	0.6666	-7.72	0.834	115.7
7	0.5626	0.5796	-2.94	0.782	120.5
8	0.5290	0.5578	-5.16	0.817	128.2
9	0.4910	0.5263	-6.71	0.682	135.7
10	0.4814	0.4943	-2.62	0.733	148.8
11	0.4437	0.4745	-6.49	0.808	159.4
12	0.4281	0.4745	-9.78	0.818	173.8
13	0.4075	0.4281	-4.82	0.825	198.1
14	0.3911	0.4173	-6.27	0.673	205.3
15	0.3690	0.4024	-8.30	0.678	220.4
16	0.3616	0.3920	-7.74	0.750	248.7
17	0.3557	0.3834	-7.22	0.809	262.2
18	0.3431	0.3721	-7.79	0.727	284.4
19	0.3348	0.3582	-6.54	0.684	301.8
20	0.3216	0.3563	-9.73	0.678	324.9

В таблице 3.19 приведены результаты расчетов. Здесь  $n$  – количество упакованных

шаров;  $R$  – наилучшие радиусы упаковки эллипсоида;  $R^*$  – оптимальный радиус шаров, упакованных на сфере с такой же площадью [64, 190, 192, 237];  $\Delta = \frac{R-R^*}{R} \times 100\%$  – отношение наилучших радиусов упаковки эллипсоида к оптимальному радиусу кругов  $R^*$ ;  $\Xi_n$  – отношение суммы площадей упаковок к площади поверхности эллипсоида;  $t$  – время расчета (в секундах), для алгоритмов **EllipsoidVoronoi** и **EllipsoidPacking**.

Из таблицы 3.19 видно, что радиус упаковки эллипсоида существенно меньше радиуса упаковки сферы, кроме  $n = 5$ . С ростом количества упакованных шаров плотность варьируется в промежутке  $[0.673, 0.834]$ . Оптимальная плотность упаковки для сферы также варьируется в промежутке  $[0.77, 0.91]$ , поэтому упаковки с такой плотностью считаются хорошими.

### 3.3 Выводы по главе 3

В главе представлен комплекс программ «Покрытия и упаковки для поверхностей вращения», разработанный на C# в среде Visual Studio 2022. Комплекс состоит из модулей, предназначенных для работы с четырьмя типами поверхностей: сферой, эллипсоидом, боковыми поверхностями цилиндра и конуса, которые позволяют строить как покрытия, так и упаковки. В качестве элементов покрытия и упаковки могут выступать сферические сегменты (для сферы и ее частей), геодезические круги или шары. Каждый модуль обеспечивает ввод данных, настройку параметров алгоритмов и сохранение результатов.

Проведенный вычислительный эксперимент подтвердил точность и работоспособность предложенных алгоритмов для решения широкого круга задач. Исследование проводилось с использованием евклидовой метрики и ряда неевклидовых метрик. Результаты показывают, что предложенные алгоритмы находят решения, близкие к оптимальным. В ряде случаев найденные решения являются оптимальными, а в остальных — отклонение полученных результатов от наилучших известных (если таковые имеются) незначительно. Представленные алгоритмы позволяют решать задачи о покрытии и упаковке для поверхностей вращения с различными неевклидовыми метриками.

Выполнена статистическая обработка результатов расчетов: в качестве случайной величины рассматривалось отклонение найденного радиуса покрытия от минимального из известных. Показано, что она подчиняется гамма-распределению, параметры которого оказались близки для всех рассмотренных случаев.

## Глава 4: Решение прикладных задач

### 4.1 Применение покрытия эллипсоида в медицине при настройке генераторов гамма-излучения

#### 4.1.1 Предметное описание объекта исследования

Рассмотрим задачу настройки генераторов гамма-излучения для стереотаксической лучевой терапии при лечении опухолей головного мозга. Данная методика реализуется с помощью специализированного нейрохирургического инструмента — радиохирургической системы «Гамма-нож». Этот аппарат предназначен для высокоточного воздействия на патологические очаги, в первую очередь опухоли головного мозга, путем фокусировки гамма-излучения от радиоактивных источников кобальта-60 в единой точке, называемой изоцентром (см. рис. 4.1). В модели Leksell Gamma Knife Perfexion (2007 г.) конструкция системы имеет следующий вид. Радиационная полость, фиксирующая голову пациента, выполнена в форме усеченного конуса с коллимационными отверстиями, расположенными в пяти концентрических кольцах. Расстояние от этих отверстий до изоцентра варьируется в диапазоне от 374 до 433 мм. Коллиматор разделен на 8 секторов, каждый из которых содержит 24 отверстия. Всего в системе используется 192 источника кобальта-60, равномерно распределенных по секторам над поверхностью коллиматора. Управление активацией источников осуществляется с помощью серводвигателей, что позволяет врачу избирательно включать или отключать отдельные элементы системы, а также точно позиционировать их относительно зоны опухоли (см. рис. 4.2) [53].

Для точного определения местоположения стереотаксическая головная рама фиксируется в черепе пациента и остается неподвижной как на этапе планирования процедуры, так и во время лечения. После позиционирования врач выбирает опухоль в качестве изоцентра и определяет зоны облучения на ее поверхности, чтобы настроить серводвигатель для равномерного воздействия на всю область опухоли.

Поскольку опухоли часто имеют сложную форму, их обычно аппроксимируют эллипсоидом. Ключевая задача на этом этапе — распределить лучи таким образом, чтобы поверхность опухоли получала равномерную дозу радиации, избегая переоблучения отдельных участков, что может негативно сказаться на процессе лечения. Затем, учитывая состояние пациента и особенности окружающих тканей, определяется оптимальная доза облучения [113, 174].

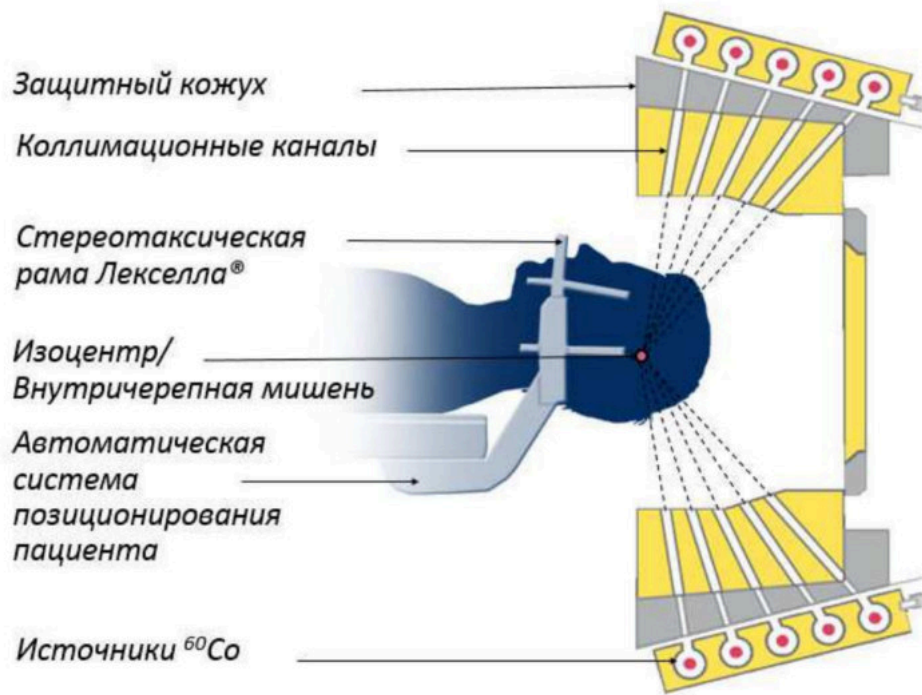


Рис. 4.1: Схема радиационного модуля установки Гамма-нож Perfexion.

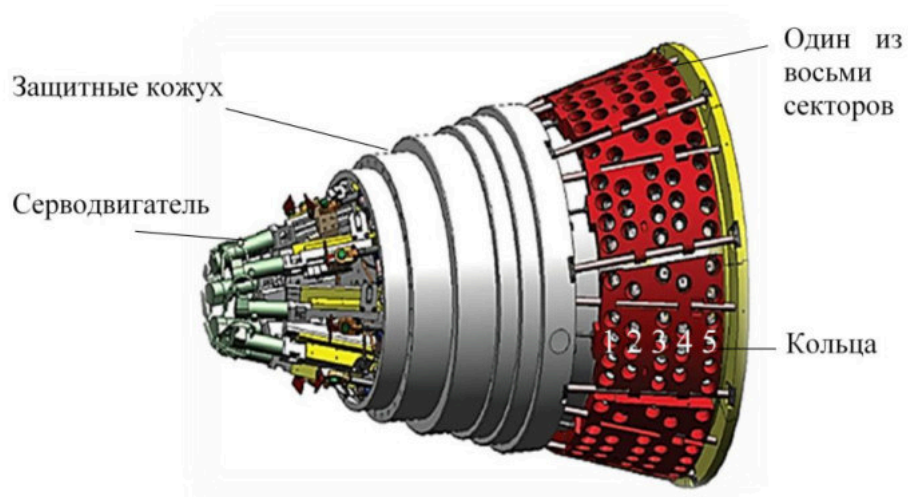


Рис. 4.2: Устройство коллиматора установки Гамма-нож модели Perfexion

Основная сложность лечения связана с фиксированным диаметром коллимационных отверстий (4, 8 или 16 мм), из-за чего некоторые участки опухоли могут получать неравномерную дозу, а в отдельных случаях поверхность не охватывается облучением на 100% [113]. Однако в более современных моделях, таких как CyberKnife и LINAC, диаметр коллимационных отверстий можно регулировать в широком диапазоне от 5 мм до 60 мм [161].

В данной прикладной задаче для полного облучения поверхности опухоли требуется от 8 до 15 гамма-лучей, оптимально распределенных по ее площади. Ключевое требование

— обеспечить равномерную дозу радиации, исключая переоблучение отдельных участков, что может негативно повлиять на здоровые ткани и снизить эффективность лечения [174].

Эта задача математически аналогична проблеме покрытия эллипсоида одинаковыми шарами, где радиус шара соответствует диаметру коллимационного отверстия, а расположение шаров на поверхности эллипсоида моделирует точки воздействия гамма-лучей на опухоль. Таким образом, оптимальное планирование облучения сводится к поиску конфигурации, при которой вся поверхность опухоли покрывается минимальным числом лучей с заданными фиксированными апертурами, обеспечивая при этом равномерность дозы.

#### 4.1.2 Математическая модель

Если моделировать поверхность опухоли эллипсоидом с полуосями  $a, b, c > 0$ , гамма-лучи — шарами, а центры шаров — точками проекции гамма-лучей на поверхность опухоли, то данная задача может быть сведена к задаче покрытия эллипсоида равными шарами в следующей постановке: требуется покрыть эллипсоид  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$   $8 \leq n \leq 15$  равными шарами так, чтобы плотность покрытия  $\Xi_E$  была минимальной. В этом случае метрика является евклидовой, т.е.  $f(x, y, z) = 1$ . Пусть  $O_i \in E, i = \overline{1, n}$  — центры шаров,  $R_E$  — радиус шаров,  $\Xi_E$  — плотность покрытия эллипсоида.

Математическая модель имеет вид

$$\Xi_E \rightarrow \min, \quad (4.1)$$

$$\forall p \in E, \exists i: |O_i p| \leq R_E, \quad (4.2)$$

$$O_i \in E, i = \overline{1, n}. \quad (4.3)$$

Целевая функция (4.1) минимизирует плотность покрытия. Однако поскольку при уменьшении радиуса шаров избыточность покрытия поверхности эллипсоида также уменьшается, то целевая функция (4.1) достигает минимума одновременно с функцией

$$R_E \rightarrow \min. \quad (4.4)$$

Рассмотрим теперь случай, когда поверхность опухоли имеет форму близкую к сферической. В этом случае будем ее моделировать сферой и решать задачу покрытия равными шарами или сферическими сегментами. Если  $r$  — радиус сферы, а  $\tilde{R}$  — угловой размер сферического сегмента, то радиус  $R_S$  покрывающих шаров на сфере вычисляется по формуле:

$$R_S = 2r \sin \frac{\tilde{R}}{2}. \quad (4.5)$$

Математическая модель для сферического случая имеет вид

$$\Xi_S \rightarrow \min, \quad (4.6)$$

$$\forall p \in S, \exists i: |O_i p| \leq R_S, \quad (4.7)$$

$$O_i \in S, i = \overline{1, n}. \quad (4.8)$$

Плотность покрытия шарами  $\Xi_S$  в данном случае совпадает с плотностью покрытия сферическими сегментами и рассчитывается по формуле:

$$\Xi_S = n \sin^2 \frac{\tilde{R}}{2} = n \frac{R_S^2}{4r^2}.$$

Из данной формулы следует, что целевая функция (4.6) может быть замена целевой функцией

$$R_S \rightarrow \min. \quad (4.9)$$

#### 4.1.3 Вычислительный эксперимент

В ходе вычислительного эксперимента были проанализированы более 100 различных опухолей головного мозга. Ниже приведем результаты расчетов для трех типичных случаев.

**№1:** Данные об опухоли взяты из диссертации [44]. На рисунке 4.3 показана опухоль головного мозга в трех проекциях, ее размер  $86.9 \times 47.7 \times 55.7$ (мм). Будем считать, что это эллипсоид с полуосями  $a = 43.45$ (мм),  $b = 23.85$ (мм) и  $c = 27.85$ (мм). В этом случае необходимо решить задачу (4.2) – (4.4). Будем использовать алгоритм **EllipsoidCover** построения покрытия эллипсоида равными шарами, который описан в разделе 2.5.4. Число случайных генераций начальных положений 50, величина  $\delta = 10^{-3}$ .

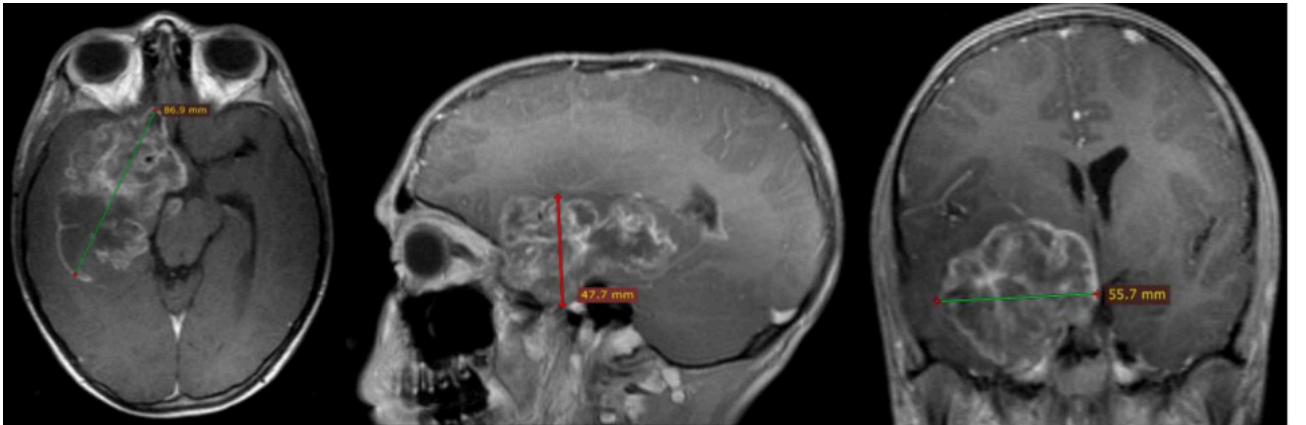


Рис. 4.3: Рентгеновский снимок опухоли №1

Таблица 4.1: Результаты расчетов для эллипсоида с размерами  $86.9 \times 47.7 \times 55.7$ (мм).

$n$	$R_E$ (мм)	$\Xi_E$	$t$
8	<b>26.93</b>	<b>1.3359</b>	121.5
9	<b>24.73</b>	<b>1.3829</b>	129.7
10	23.53	1.4119	131.2
11	22.73	1.4900	133.6
12	21.45	1.5070	135.9
13	20.68	1.4931	142.8
14	20.38	1.6278	151.6
15	19.59	1.6149	154.0

В таблице 4.1 представлены результаты расчетов покрытия эллипсоида 8–15 равными шарами. Здесь  $n$  – число шаров, соответствующее количеству источников гамма-излучения;  $R_E$  – радиус покрывающих шаров (в миллиметрах);  $\Xi_E$  – плотность покрытия эллипсоида;  $t$  – время расчета (в секундах) для алгоритма **EllipsoidCover**. На рисунках 4.4 показаны покрытия эллипсоида для различного числа шаров.

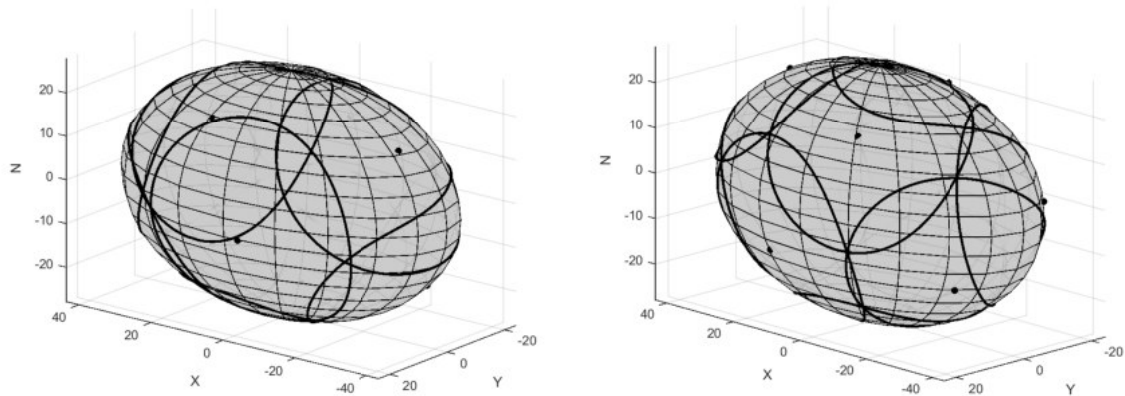
Из таблицы 4.1 можно видеть, что минимальная плотность покрытия  $\Xi_{E8} = 1.3359$  достигается при 8 покрывающих шарах. Таким образом, в рассматриваемом случае достаточно использовать 8 гамма-излучателей с радиусом  $R_{E8} = 26.93$  (мм) и положением проекции (см. рис. 4.4):

$$(5.43, -10.40, -24.81), (-33.36, 4.22, 17.14), (8.61, 16.49, 19.34), \\ (8.61, 16.49, 19.34), (-32.17, -7.13, -16.76), (40.77, -1.17, 9.52), \\ (-3.74, 23.46, -4.35), (35.14, -0.33, -16.36).$$

Кроме того, заметим, что хотя при  $n = 9$  плотность покрытия  $\Xi_{E9} = 1.3829$  не является наименьшей, но превосходит наименьшее значения всего на 3%. При этом радиус покрытия  $R_{E9} = 24.73$  меньше на 8.12%, чем при  $n = 8$ . Положения проекции шаров:

$$(-2.20, -6.86, -26.63), (5.17, -23.15, -5.79), (11.69, 20.99, -10.88), \\ (-8.99, -11.63, 23.61), (40.52, -2.73, -9.52), (-33.55, 10.62, -12.64), \\ (-37.03, -12.21, 2.91), (27.33, -0.26, 21.64), (-10.84, 17.28, 17.90).$$

Согласно расчетным данным (таб. 4.1, рис. 4.4), для эффективного лечения опухоли требуется применение 8 гамма-лучей с радиусом воздействия  $R_{E8} = 26.93$  мм. При этом центр опухоли фиксируется в начале координат  $O(0, 0, 0)$ , а точки фокусировки на поверхности опухоли соответствуют центрам покрывающих шаров. Такая конфигурация обеспечивает оптимальное распределение радиационного воздействия по всей поверхности новообразования, гарантируя при этом минимальное влияние на окружающие здоровые ткани, поскольку плотность покрытия является достаточно низкой.



$$n = 8$$

$$n = 9$$

Рис. 4.4: Покрытия эллипсоида равными шарами в случае  $n = 8, 9$ .

**№2:** Данные об опухоли № 2 взяты с сайта больницы общего профиля Куангнинь, Вьетнам (веб-сайт: <https://www.benhviendakhoatinhquangninh.vn>). Поверхность опухоли имеет форму, близкую к сферической (рис. 4.5), ее размер составляет  $36.5 \times 36.9 \times 36.5$ (мм). Будем считать, что опухоль имеет форму эллипсоида с полуосями  $a = 18.25$ (мм),  $b = 18.25$ (мм) и  $c = 18.45$ (мм). Поскольку полуоси эллипсоида примерно равны, можно рассматривать его как сферу с площадью, равной площади эллипсоида. Радиус такой сферы равен  $r = \sqrt{\frac{S_E}{4\pi}} = 18.31$ (мм), где  $S_E$  – площадь эллипсоида.

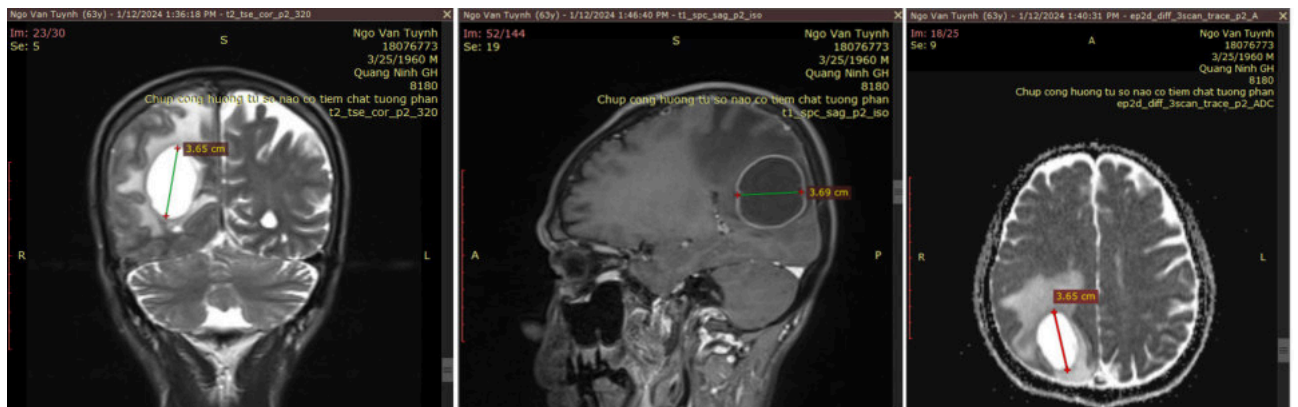


Рис. 4.5: Рентгеновский снимок опухоли №2

В данном случае решим одновременно задачи покрытия эллипсоида и задачи покрытия сферы равными шарами. Для построения покрытия эллипсоида (4.1) - (4.4) используется алгоритм **EllipsoidCover**, а для покрытия сферы – алгоритм **SphereCover**. В алгоритме **SphereCover** радиус покрывающего шара будет преобразован из углового размера сферических сегментов по формуле (4.5).

Результаты расчетов покрытия эллипсоида и сферы равными шарами представлены в таблице 4.1.3. Здесь  $n$  – число шаров;  $R_E$  – радиус покрывающих шаров на эллипсоиде;  $\Xi_E$  – плотность покрытия эллипсоида;  $t_E$  – время расчета (в секундах) для алгоритма **EllipsoidCover**,  $R_S$  – радиус покрывающих шаров на сфере;  $\Xi_S$  – плотность покрытия сферы;  $\Delta R(\%) = \frac{R_E - R_S}{R_S} \times 100$  – отклонение радиуса покрывающих шаров на эллипсоиде и на сфере,  $\Delta \Xi = \frac{\Xi_E}{\Xi_S}$  – отношение между плотностями покрытия на эллипсоиде и на сфере. Покрытие сферы выполнено в разделе 3.2.1 (см. табл. 3.1).

Таблица 4.2: Результаты расчетов для покрытия эллипсоида  $E$  с размерами  $18.25 \times 18.25 \times 18.45$ (мм) и покрытия сферы  $S$  с радиусом 18.31(мм).

$n$	$R_E$ (мм)	$\Xi_E$	$t_E$	$R_S$ (мм)	$\Xi_S$	$\Delta R(\%)$	$\Delta \Xi$
8	15.08876	1.451	112.1	14.986509	1.340	0.68232	1.08
9	14.84945	1.568	114.8	14.364309	1.385	3.37740	1.13
<b>10</b>	<b>13.24519</b>	<b>1.421</b>	<b>115.2</b>	<b>13.220638</b>	<b>1.303</b>	<b>0.18570</b>	<b>1.09</b>
11	13.19609	1.612	116.2	12.993834	1.385	1.55656	1.16
12	12.42659	1.678	116.4	12.183806	1.328	1.99271	1.26
13	12.32114	1.745	117.3	11.973736	1.390	2.90145	1.25
14	11.55723	1.691	119.5	11.309164	1.335	2.19356	1.26
15	11.17023	1.651	121.1	10.997131	1.353	1.57409	1.22

Из таблицы видно, что при  $n = 10$  плотность покрытия как на эллипсоиде, так и на сфере является наименьшей и составляет  $\Xi_E = 1.421$  и  $\Xi_S = 1.303$ , соответственно. При этом радиусы шаров  $R_E = 13.24$  и  $R_S = 13.22$  (мм).

Для всех  $n$  отношение плотностей покрытия на эллипсоиде и сфере близко. Наибольшее отношение составляет 1.26, а наименьшее – 1.08. Отклонение радиуса между этими двумя покрытиями варьируется от 0.18 до 3.37%. Это свидетельствует о том, что если эллипсоид приближается к сфере, то использование альтернативного покрытия сферы становится возможным. На рисунке 4.6 показаны покрытия на эллипсоиде и на сфере при  $n = 10$ .

При  $n = 10$  положения проекции шаров на сфере:

$$\begin{aligned}
 &(-0.3749, -0.9268, 0.0205), (-0.9956, -0.0523, 0.0772), (-0.2177, -0.3757, -0.9008), \\
 &(-0.4955, 0.6217, -0.6067), (0.7919, 0.1491, 0.5921), (0.6959, -0.7140, -0.0767), \\
 &(-0.0689, -0.4087, 0.9101), (0.3294, 0.9442, 0.0061), (-0.4155, 0.5953, 0.6877), \\
 &(0.7062, 0.1856, -0.6833).
 \end{aligned}$$

**№3:** Здесь данные об опухоли также взяты с сайта больницы общего профиля Куангинь, Вьетнам. На рисунке 4.7 показана опухоль головного мозга в трех проекциях,

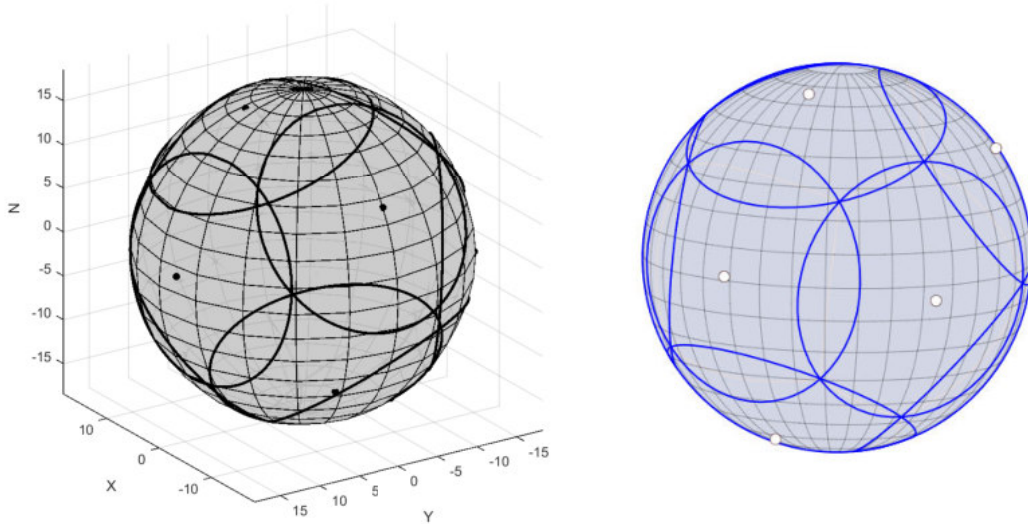


Рис. 4.6: Покрытие эллипсоида (слева) и сферы (справа) 10 равными шарами

ее размер составляет  $45.5 \times 42.4 \times 41.5$ (мм). Будем считать, что опухоль имеет форму эллипсоида с полуосями  $a = 22.75$ (мм),  $b = 21.2$ (мм) и  $c = 20.75$ (мм). Результаты расчетов представлены в таблице 4.3.

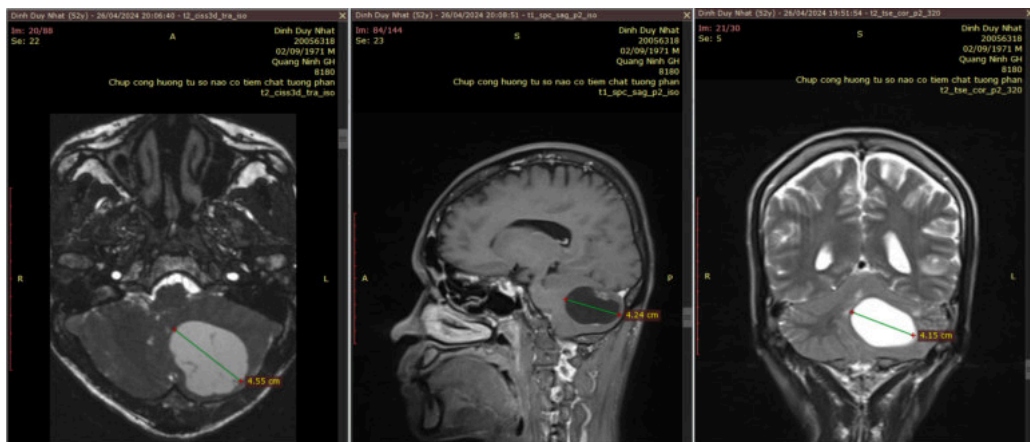


Рис. 4.7: Рентгеновский снимок опухоли №3

В данном случае наименьшая плотность покрытия достигается при использовании 9 излучателей.

Результаты проведенного вычислительного эксперимента показали, что для всех рассмотренных задач плотность покрытия минимальна при  $n = 8, 9, 10$ , со средним значением 1.3834 для  $n = 8$ ; 1.432 для  $n = 9$  и 1.392 для  $n = 10$ . В остальных случаях средняя плотность покрытия превышает 1.48.

В таблице 4.4 представлены усредненные результаты покрытия 160 опухолей, которые моделировались эллипсоидами с полуосями от 5 до 50 (мм). Здесь  $n$  — число по-

Таблица 4.3: Результаты расчетов №3.

$n$	$R_E$ (мм)	$\bar{\Xi}_E$	$t$
8	17.56	1.3634	121.5
9	<b>16.81</b>	<b>1.3222</b>	131.2
10	15.81	1.3453	131.2
11	15.36	1.3372	133.6
12	14.59	1.4346	135.9
13	13.99	1.3521	142.8
14	13.45	1.3833	151.6
15	13.06	1.5753	154.0

крывающих шаров;  $\bar{\Xi}$ ,  $\Xi_{min}$ , и  $\Xi_{max}$  — средняя минимальная и максимальная плотности покрытия, соответственно;  $S_{\bar{\Xi}}$  — среднее квадратическое отклонение.

Таблица 4.4: Результаты статистического анализа.

$n$	$\bar{\Xi}$	$\Xi_{min}$	$\Xi_{max}$	$S_{\bar{\Xi}}$
8	1.4335	1.25	1.8	0.0873
9	1.4500	1.24	1.73	0.0759
10	1.4634	1.26	1.79	0.0912
11	1.4701	1.23	1.71	0.0881
12	1.4771	1.27	1.73	0.0878
13	1.4793	1.25	1.82	0.094
14	1.4784	1.31	1.7	0.0816
15	1.4863	1.27	1.72	0.0875

Из таблицы 4.4 видно, что среднее значение плотности возрастает с 1.43 до 1.48 при увеличении  $n$  с 8 до 15, т.е. покрытие небольшим количеством шаров обеспечивает наилучшую плотность. При этом наименьшее среднее квадратическое отклонение составляет 0.0759 при  $n = 9$ , что говорит об устойчивости покрытия эллипсоида при использовании 9 шаров. Расчет корреляции между радиусом шара и плотностью покрытия показывает сильную линейную зависимость ( $R^2 = 0.9991$ ). Следовательно, переход в модели от минимизации плотности к минимизации радиуса покрытия является оправданным.

Проведенные эксперименты показали, что разработанный комплекс программ может быть успешно применен для планирования радиотерапии, обеспечивая равномерное облучение всей поверхности опухоли с минимальной необходимой плотностью. Несмотря на то, что универсальной методики облучения выработать не удалось, наглядное визуальное представление результатов позволяет врачу быстро определить оптимальные мишени для облучения, что, в свою очередь, повышает эффективность и точность процесса планирования лечения.

## 4.2 Применение упаковки сферического сегмента для проектирования сферической фокальной поверхности

### 4.2.1 Предметное описание объекта исследования

Рассмотрим задачу проектирования сферической фокальной поверхности при создании гигапиксельной камеры. Гигапиксельная камера – это устройство, которое позволяет делать снимки с разрешением до миллиардов пикселей. Поскольку каждое изображение, созданное гигапиксельной камерой, содержит огромное количество информации, такая структура камер применяется в конструкции телескопов и на спутниках для воздушного наблюдения [110].

В конструкции обычных камер оптические датчики устанавливаются на плоской фокальной поверхности, однако плоская фокальная поверхность имеет ограничения по полю зрения (FOV), а разрешение камеры зависит от разрешения оптического датчика, установленного на ней. Для преодоления этого ограничения в конструкции гигапиксельной камеры используется сферическая фокальная поверхность. В работах [110, 222] описывается сферическая фокальная поверхность следующим образом: на сферической линзе камеры установлены микро-оптические устройства так, чтобы они не перекрывались. Такие микро-оптические устройства представляют собой круглые датчики, способные захватывать изображения с разрешением в десятки или сотни мегапикселей. Тогда поле зрения будет покрыто относительно небольшими микро-оптическими устройствами. При съемке каждое изображение, полученное с помощью микро-оптического устройства, будет иметь определенную кривизну. Однако, поскольку такие устройства имеют небольшой размер, величина коррекции кривизны, необходимая для отображения каждого подполя на плоской фокальной плоскости, минимальна. С другой стороны, такие микро-оптические устройства установлены на сферической линзе, поэтому получаемое изображение имеет очень широкое поле зрения, которое может превышать 180 градусов. Комбинация изображений, полученных с помощью десятков мегапиксельных микро-оптических устройств, будет скорректирована с учетом кривизны и создаст изображение с разрешением до тысяч мегапикселей (т.е. больше 1 гигапикселя). На рисунке 4.8 показана структура сферической фокальной поверхности.

Для такой конструкции необходимо расположить на сферической фокальной поверхности микро-оптические устройства, имеющие форму круга, так, чтобы они были упакованы как можно плотнее. Потому что тогда будет улавливаться максимальное количество света, что облегчит коррекцию и комбинирование изображений с устройства, в

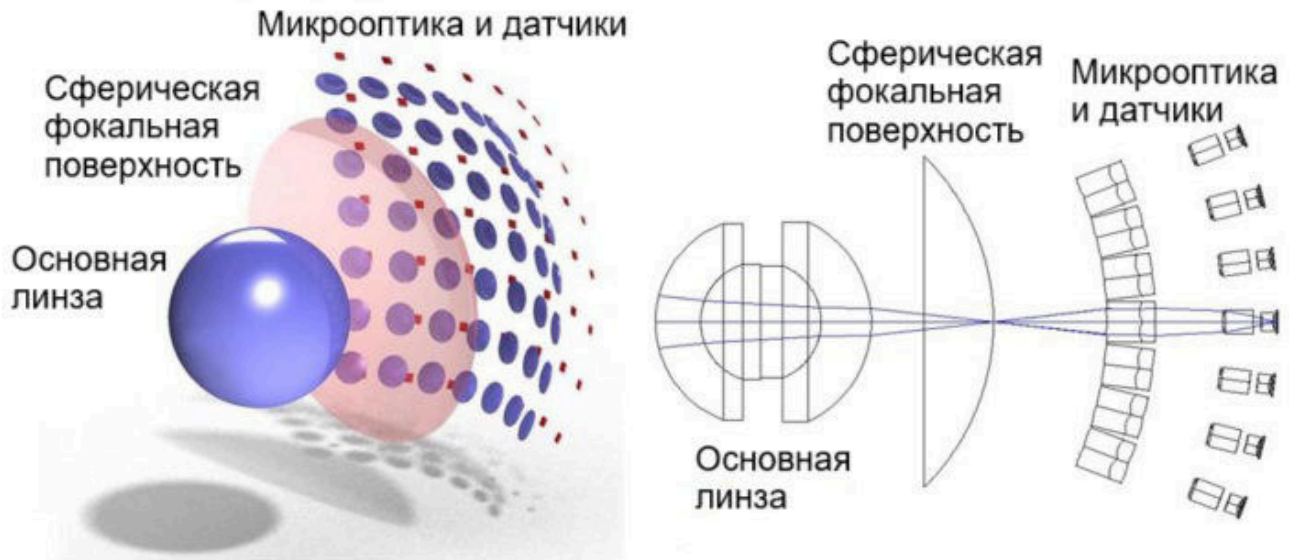


Рис. 4.8: Схема сферической фокальной поверхности.

свою очередь, улучшает качество изображения [222]. Значение плотности при этом должно превышать 0.76 [148, 222]. Кроме того, необходимо минимизировать относительное отклонение максимального и минимального расстояний между центрами упакованных кругов  $D = (d_{max} - d_{min})/d_{min}$  (см. рис. 4.9). Цель минимизации значения  $D$  заключается в том, что если значение  $D$  больше, то есть круг окажется значительно дальше от своих соседей, это приведет к большому разрыву в диапазоне изображения микро-оптических устройств, что приведет к искажению полученного изображения, получению неверной информации или перекрытию на поле зрения.

В работе [222] предложен метод для проектирования этой поверхности на основе искаженной икосаэдрической геодезии. Плотность найденной упаковки оказалась ниже ранее известного оптимального значения, но соотношение расстояний между центрами кругов значительно улучшилось. Для практического применения этого метода необходимо решить задачу упаковки для большого количества геодезических кругов на сфере. Например, чтобы спроектировать сферическую фокусную поверхность с полем зрения  $\frac{\pi}{2}$  с использованием 200 10-мегапиксельных сенсорных камер, требуется выполнить алгоритм с параметром  $n = 800$ , что в четыре раза превышает заданное количество сенсорных камер [222]. Это существенно увеличивает время вычислений и усложняет алгоритм.

#### 4.2.2 Математическая модель

Рассмотрим задачу размещения  $N = 200 \div 210$  датчиков на сферической фокальной поверхности с полем зрения  $FOV \frac{\pi}{6}$ . Данная задача эквивалентна задаче построения упаковки  $N$  равных геодезических кругов в сферический сегмент с угловым размером  $\theta = \frac{\pi}{6}$  с

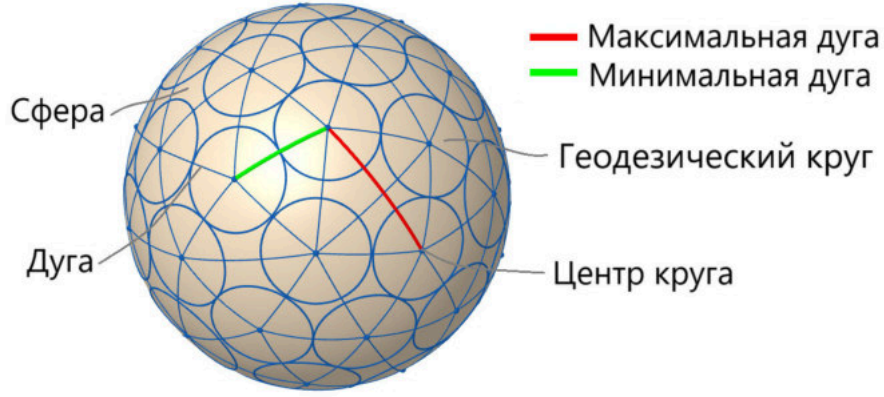


Рис. 4.9: Соотношение расстояния между датчиков

максимизацией их радиуса  $R$ . Пусть  $S$  – сферический сегмент с угловым размером  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ,  $\partial S$  – замкнутая кривая на сфере, ограничивающая сферический сегмент  $S$ , тогда задача описывается следующим образом:

Требуется упаковать  $N$  геодезических кругов с центрами  $O_i \in S$  и радиусом  $R$  в сферический сегмент  $S$ , чтобы плотность упаковки  $\Xi$  была максимальной, геодезические круги не пересекались друг с другом и не пересекались границу  $\partial S$  поверхности  $S$ :

$$\Xi \rightarrow \max, \quad (4.10)$$

$$\rho(O_i, O_j) \geq 2R, \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j \quad (4.11)$$

$$\rho(O_i, \partial S) \leq R, \forall i = \overline{1, n} \quad (4.12)$$

$$O_i \in S, i = \overline{1, n}, \quad (4.13)$$

Плотность упаковки  $\Xi$  определяется как отношение суммы площади геодезических кругов  $S_i$  к площади  $S_\Sigma$  сферического сегмента

$$\Xi = N \frac{S_i}{S_\Sigma} = N \frac{\sin^2 \frac{R}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Поэтому максимизация плотности упаковки эквивалентна максимизации радиуса геодезических кругов:

$$R \rightarrow \max. \quad (4.14)$$

С другой стороны необходимо минимизировать относительное отклонение  $D$  максимального и минимального расстояний между центрами упакованных кругов. Данное отклонение  $D$  определяется следующим образом:

$$D = \frac{d_{max} - d_{min}}{d_{min}},$$

где  $d_{max}, d_{min}$  – максимальная и минимальная дуга. Дуга является геодезическим расстоянием между центром круга и центрами соседних с ним кругов (см. рис. 4.9). Поэтому в задаче добавится условие:

$$D \rightarrow \min. \quad (4.15)$$

### 4.2.3 Вычислительный эксперимент

Для решения данной задачи применяется метод, включающий построение начального приближения и последующую процедуру улучшения упаковки, описанные в разделе 2.3.2. Результаты представлены в таблице 4.5 и на рисунках 4.11, 4.13.

В таблице 4.5 приведены результаты упаковки геодезических кругов в сферический сегмент  $S$  с угловым размером  $\theta = \frac{\pi}{6}$ . Обозначения:  $R'$  – оптимальный радиус упаковки кругов в круг из [132],  $R$  – оптимальный радиус упаковки геодезических кругов в сферический сегмент  $S$  после преобразования и улучшения,  $t$  – время расчета в секундах.

Таблица 4.5: Результаты расчета

N	$R'$	$R$	$\Xi$	$D$	$t(\text{сек.})$
200	0.064669	0.03257	<b>0.791726</b>	0.49484	125.4
201	0.064432	0.03245	0.789832	<b>0.48518</b>	126.5
202	0.064234	0.03235	0.788878	0.48978	129.4
203	0.064056	0.032259	0.788329	0.48560	131.7
204	0.063928	0.032194	0.789024	0.48705	133.6
205	0.063731	0.032094	0.787974	0.49469	135.7
206	0.063554	0.032004	0.787383	0.49558	137.3
207	0.063411	0.031932	0.787650	0.49673	139.0
208	0.063244	0.031847	0.787247	0.49735	143.1
209	0.063132	0.03179	0.788203	0.49981	146.5
210	0.062977	0.031712	0.788093	0.49564	147.7

Таблица 4.5 показывает, что максимальная плотность упаковки  $\Xi = 0.791726 > 0.76$  достигается при  $N = 200$  ( $R = 0.03257$ ,  $D = 0.49484$ ); соответствующая конфигурация представлена на рис. 4.10 и 4.11.

При  $N = 201$  относительное отклонение максимального и минимального расстояний между центрами упакованных кругов минимально  $D = 0.48518$ , плотность при этом упаковки также удовлетворяет заданному ограничению  $\Xi = 0.789832 > 0.76$ . В этом случае радиус геодезических кругов  $R = 0.03245$  (см. рис. 4.12, 4.13).

С другой стороны, минимальная плотность  $\min \Xi = 0.7872 > 0.76$ , средняя плотность упаковки во всех случаях составила  $0.7885 > 0.76$  и значение  $D$  колеблется от 0.485 до 0.495. Полученные значения  $D$  указывают на то, что максимальное расстояние между

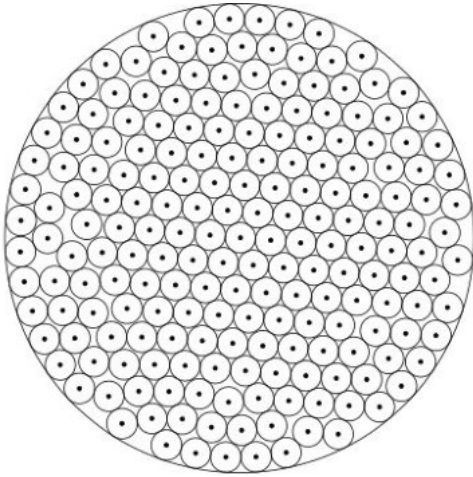


Рис. 4.10: Упаковка 200 кругов в единичный круг

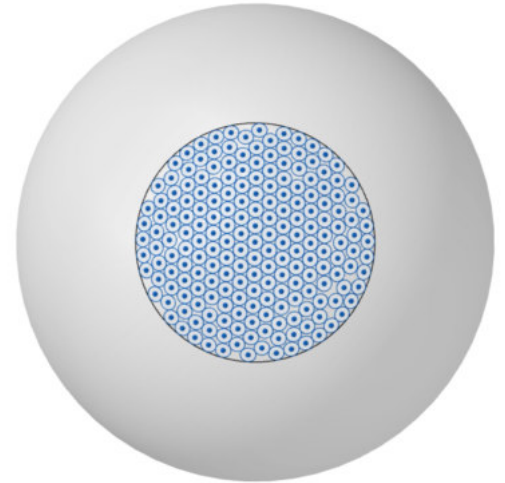


Рис. 4.11: Упаковка 200 геодезических кругов на сферическом сегменте после улучшения

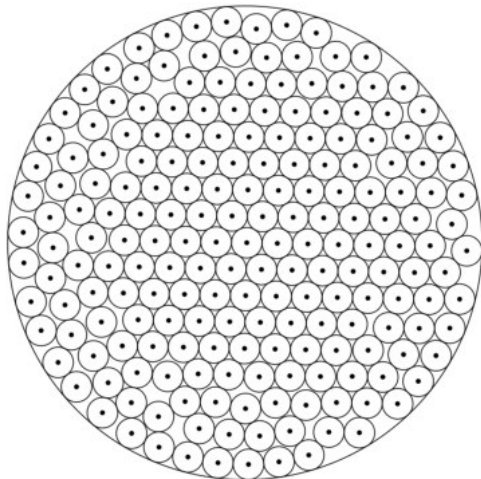


Рис. 4.12: Упаковка 201 кругов в единичный круг

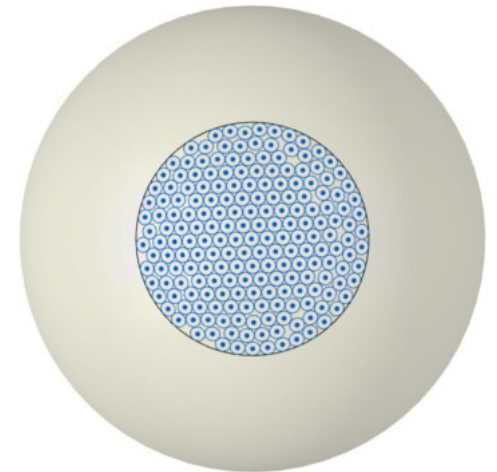


Рис. 4.13: Упаковка 201 геодезических кругов на сферическом сегменте после улучшения.

центрами кругов не более чем в 1.5 раза превышает минимальное, что свидетельствует об их достаточно сбалансированном пространственном распределении. Временные затраты на расчет при этом оказались невелики (в среднем 135.9 с) по сравнению с результатами, полученными, в частности, в работе [168].

Таким образом, требования к плотности упаковки и значению отклонения  $D$  в этой задаче обеспечивают начальные требования при проектировании сферической фокальной поверхности, что помогает свести к минимуму проблемы, возникающие при создании гигапиксельной камеры.

### 4.3 Применение упаковки сферы для построения равноугольных жестких фреймов и сферических кодов в пространстве $E^3$

#### 4.3.1 Предметное описание объекта исследования

Равноугольный жесткий фрейм (Equiangular Tight Frame, ETF) – это система векторов  $M = [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_N] \in \mathbb{E}^{D \times N}$ ,  $D < N$ ,  $\mathbb{E} = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , которая удовлетворяет следующим условиям [162]:

$$|\mathbf{m}_i| = 1, \forall i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.16)$$

$$|\langle \mathbf{m}_i, \mathbf{m}_j \rangle| = \mu > 0, \forall i \neq j \quad (4.17)$$

$$MM^T = \frac{N}{D}I, \quad (4.18)$$

где  $M^T$  – транспонированная матрица,  $I$  – единичная матрица порядка  $N$ .

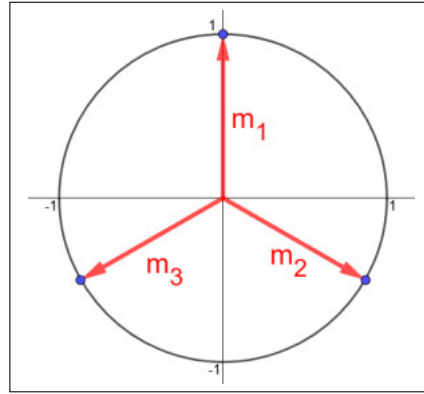


Рис. 4.14: Пример равноугольного жесткого фрейма,  $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ,  $D = 2$ ,  $N = 3$ .

На рис. 4.14 представлен простейший пример ETF для  $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ,  $D = 2$ ,  $N = 3$ , известный как фрейм Мерседес-Бенц в двумерном пространстве [84]. Равноугольные жесткие фреймы находят применение в различных областях, включая теорию кодирования и численный анализ, коммуникации и разреженные приближения [147, 223, 243].

Поиск и построение ETFs представляет собой сложную задачу. Существование ETFs доказано лишь для определенных пар  $(N, D)$ ; для некоторых пар известны явные конструкции, а для других – доказано их отсутствие [250]. В трехмерном пространстве ( $D = 3$ ) задача построения ETFs тесно связана с проблемой проектирования сферических кодов.

Сферические коды используются для защиты информации от искажений при передаче на большие расстояния (например, со спутника на Землю) [45]. Их можно описать следующим образом:

- Центральная сфера представляет приемник.

- Каждый внешний шар касается центральной сферы; точка касания соответствует символу алфавита.
- Вокруг каждой точки касания на поверхности центральной сферы формируется контактная область (сферический сегмент).

При передаче сигналов в каждый момент времени передается слово, состоящее из набора символов. Из-за искажений на больших расстояниях принятая точка может смещаться относительно истинной точки касания. Однако если контактные области достаточно велики, то даже искаженный сигнал с большой вероятностью попадет в предназначенную для него область. Это позволяет корректно определить переданный символ.

Для увеличения объема передаваемых данных необходимо расширить алфавит, т. е. увеличить количество внешних шаров (и, соответственно, контактных областей). Чтобы избежать ошибок передачи, требуется минимизировать радиус этих областей (или, что эквивалентно, максимизировать угловой размер сферических сегментов). Таким образом, задача сводится к плотной упаковке больших равных сферических сегментов на сфере (см. рис. 4.15).

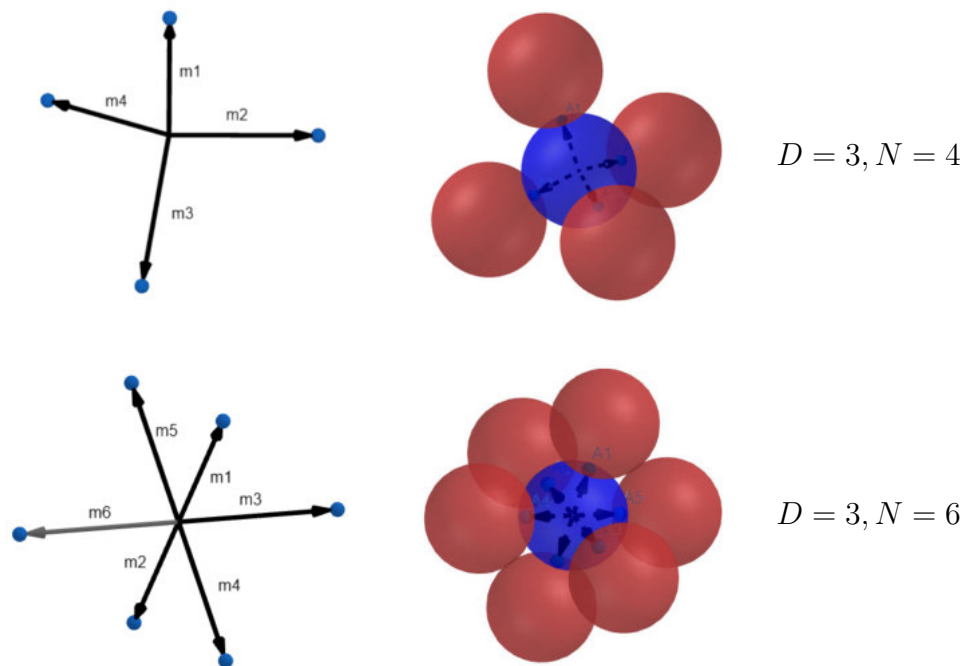


Рис. 4.15: Равноугольный жесткий фрейм (слева) и иллюстрация сферических кодов (справа).

### 4.3.2 Математическая модель

В этом разделе построим равноугольные жесткие фреймы (ETFs) для количества векторов  $25 \leq N \leq 128$  в трехмерном пространстве  $\mathbb{E}^3$  ( $D = 3$ ). На основе полученных фреймов спроектируем сферические коды для представления символов английского, вьетнамского, русского алфавитов и кодов ASCII.

Из условия (4.16) следует, что все векторы  $\mathbf{m}_i$  имеют единичную длину. Если поместить их начала в начало координат  $O$ , то их концы будут лежать на единичной сфере  $S$ . Условие (4.17) означает, что угол  $\theta_{ij}$  между любой парой векторов  $\mathbf{m}_i$  и  $\mathbf{m}_j$  постоянен и определяется из соотношения

$$\theta_{ij} = \arccos \frac{|\langle \mathbf{m}_i, \mathbf{m}_j \rangle|}{|\mathbf{m}_i| |\mathbf{m}_j|} = \arccos \mu.$$

Таким образом, задача построения ETF сводится к нахождению на единичной сфере  $S$  конфигурации из  $N$  точек  $O_1, O_2, \dots, O_N$ , таких, что:

- Все точки лежат на сфере (условие (4.16)).
- Угол между любыми двумя различными радиус-векторами точек одинаков и равен  $\theta = \arccos \mu$  (условие (4.17)).
- Матрица Грама полученной системы векторов удовлетворяет условию (4.18).

С геометрической точки зрения, условие постоянства угла  $\theta$  между точками эквивалентно условию, что угловое расстояние (наименьшее расстояние по сфере) между любыми двумя точками  $O_i$  и  $O_j$  равно  $2R$ , где  $R$  — некоторый угловой размер. Это приводит к формулировке задачи плотнейшей упаковки равных непересекающихся сферических сегментов на сфере.

Каждой точке  $O_i$  ставится в соответствие сферический сегмент углового радиуса  $R$  с центром в  $O_i$ . Цель — максимизировать угловой радиус  $R$  при фиксированном числе точек  $N$ :

$$R \rightarrow \max, \tag{4.19}$$

при ограничениях

$$\rho(O_i, O_j) \geq 2R, \quad \forall i, j = \overline{1, N}, \quad i \neq j, \tag{4.20}$$

$$O_i \in S, \quad i = \overline{1, N}, \tag{4.21}$$

где  $\rho(O_i, O_j)$  — угловое расстояние между точками  $O_i$  и  $O_j$ .

Максимально достижимый угловой радиус  $R$  в такой конфигурации называется радиусом кода и непосредственно определяет помехоустойчивость сферического кода. Полученные точки  $O_1, O_2, \dots, O_N$  будут центрами сферических сегментов, образующих алфавит сферического кода.

### 4.3.3 Вычислительный эксперимент

Для построения упаковки равных сферических сегментов в единичную сферу используются алгоритм **SphereVoronoi** построения диаграммы Вороного и алгоритм **SpherePacking** построения упаковки равных сферических сегментов на сфере. Результаты решения данной задачи представлены в таблице 4.6 для  $25 \leq N \leq 50$ , в таблице 4.7 – для  $51 \leq N \leq 90$ , в таблице 4.8 – для  $90 \leq N \leq 128$ . Здесь  $N$  — количество упакованных сферических сегментов,  $R$  — наилучший угловой размер, найденный из алгоритма **SpherePacking**,  $R^*$  — известный наилучший радиус в сферических кодах [220],  $\Delta R = R - R^*$ ,  $t$  — время расчета (в секундах). Число случайных генераций начальных положений 80, величина  $\delta = 10^{-6}$ . Отметим, что такие наиболее известные результаты, полученные предыдущими исследователями с использованием различных методов. Большинство из них были собраны и доступны на веб-сайте [220].

Для построения упаковки равных сферических сегментов на единичной сфере использовались алгоритмы **SphereVoronoi** (построение сферической диаграммы Вороного) и **SpherePacking** (построение упаковки). Результаты решения задачи для  $25 \leq N \leq 128$  представлены в таблицах 4.6–4.8.

В таблицах приняты следующие обозначения:

$N$  — количество сферических сегментов (размерность кода);

$R$  — найденный в работе угловой радиус сегмента;

$R^*$  — рекордное значение радиуса, известное из литературы [220];

$\Delta R = R - R^*$  — отклонение полученного результата от рекордного значения;

$t$  — время расчета в секундах.

Эксперименты проводились со следующими параметрами: количество случайных генераций начальных конфигураций — 80, точность вычислений  $\delta = 10^{-6}$ . Для сравнения приведены наилучшие известные результаты, полученные другими исследователями и собранные на специализированном ресурсе [220].

Таблицы 4.6, 4.7 и 4.8 показывают, что во всех случаях найденные значения радиуса  $R$  близки к известным рекордным значениям  $R^*$ . Абсолютное отклонение  $|\Delta R|$  варьируется в пределах от 0.00088 (при  $N = 25$ ) до 0.009713 (при  $N = 72$ ). Средние отклонения для

групп значений  $N$  составляют  $-0.005424$ ,  $-0.006530$  и  $-0.006622$ , что указывает на незначительное отклонение результатов алгоритма от оптимальных известных конфигураций.

С точки зрения вычислительной эффективности алгоритм показал высокую скорость работы. Время расчета  $t$  во всех случаях остается ниже 700 секунд. Наблюдается ожидаемый рост времени вычислений с увеличением  $N$ , однако этот рост является умеренным, что свидетельствует о хорошей масштабируемости метода. Полученные результаты по скорости работы являются конкурентными по сравнению с существующими подходами. Так, в работе [168] время выполнения аналогичных вычислений для некоторых конфигураций может достигать тысяч секунд. Таким образом, предложенный алгоритм демонстрирует стабильную производительность и приемлемое время расчета даже для больших значений  $N$ .

Таблица 4.6: Результаты упаковки равных сферических сегментов в единичную сферу при  $25 \leq N \leq 50$

$N$	$R$	$R^*$	$\Delta R$	$t$
25	0.36244925	0.36332922	-0.000880	102.5
26	0.35643200	0.35812116	-0.001689	107.0
27	0.34571126	0.35497903	-0.009268	111.3
28	0.33854633	0.34343842	-0.004892	115.8
29	0.33338761	0.33784034	-0.004453	120.2
30	0.33080068	0.33682338	-0.006023	124.7
31	0.32533839	0.32908034	-0.003742	129.2
32	0.31866221	0.32703294	-0.008371	133.9
33	0.31035547	0.31638066	-0.006025	138.5
34	0.30723493	0.31248187	-0.005247	143.1
35	0.30539185	0.30822347	-0.002832	147.8
36	0.29826322	0.30708835	-0.008825	152.5
37	0.29418752	0.30039218	-0.006205	157.1
38	0.29067283	0.29889340	-0.008221	162.0
39	0.28757583	0.29224706	-0.004671	166.8
40	0.28501144	0.28936125	-0.004350	171.5
41	0.28076170	0.28561523	-0.004854	176.4
42	0.27916438	0.28367173	-0.004507	181.1
43	0.27422524	0.28004353	-0.005818	185.9
44	0.27081691	0.27910802	-0.008291	190.9
45	0.26967611	0.27334545	-0.003669	195.7
46	0.26495092	0.27016967	-0.005219	200.5
47	0.26126326	0.26862202	-0.007359	205.4
48	0.26002633	0.26845595	-0.008430	210.3
49	0.25819053	0.26113254	-0.002942	215.4
50	0.25540103	0.25964353	-0.004242	220.5

Таблица 4.7: Результаты упаковки равных сферических сегментов в единичную сферу при  $51 \leq N \leq 90$

$N$	$R$	$R^*$	$\Delta R$	$t$
51	0.25189609	0.25628770	-0.004392	225.6
52	0.24876606	0.25477232	-0.006006	230.8
53	0.24849437	0.25144869	-0.002954	236.1
54	0.24173325	0.25060241	-0.008869	241.3
55	0.23903141	0.24663938	-0.007608	246.6
56	0.23897191	0.24563805	-0.006666	251.6
57	0.23646799	0.24283356	-0.006366	256.7
58	0.23445117	0.24047509	-0.006024	261.9
59	0.23182985	0.23906626	-0.007236	267.3
60	0.23214481	0.23730221	-0.005157	272.7
61	0.22922931	0.23451359	-0.005284	278.1
62	0.22556455	0.23286180	-0.007297	283.5
63	0.22445876	0.23114200	-0.006683	289.0
64	0.22343922	0.22894394	-0.005505	294.4
65	0.22217396	0.22750218	-0.005328	299.9
66	0.22082982	0.22643416	-0.005604	305.5
67	0.21651591	0.22413502	-0.007619	310.9
68	0.21432242	0.22221379	-0.007891	316.3
69	0.21532704	0.22107768	-0.005751	321.9
70	0.21379829	0.21965771	-0.005859	327.5
71	0.21193502	0.21806090	-0.006126	333.3
72	0.20781128	0.21752463	-0.009713	338.7
73	0.20821916	0.21427215	-0.006053	344.1
74	0.20664580	0.21311290	-0.006467	349.9
75	0.20598881	0.21207254	-0.006084	355.7
76	0.20548240	0.21055822	-0.005076	361.5
77	0.20213615	0.20945071	-0.007315	367.1
78	0.20088369	0.20883759	-0.007954	372.8
79	0.19998523	0.20615822	-0.006173	378.6
80	0.19932524	0.20553929	-0.006214	384.3
81	0.19762641	0.20374658	-0.006120	389.9
82	0.19546174	0.20241113	-0.006949	395.7
83	0.19590332	0.20143716	-0.005534	401.6
84	0.19253285	0.20116430	-0.008631	407.4
85	0.19164322	0.19878569	-0.007142	413.3
86	0.19087444	0.19787120	-0.006997	419.2
87	0.18981444	0.19675670	-0.006942	425.1
88	0.18946164	0.19606925	-0.006608	431.1
89	0.18615594	0.19474909	-0.008593	437.3
90	0.18690920	0.19333032	-0.006421	443.2

Таблица 4.8: Результаты упаковки равных сферических сегментов в единичную сферу при  $91 \leq N \leq 128$

$N$	$R$	$R^*$	$\Delta R$	$t$
91	0.18496337	0.19243823	-0.007475	449.3
92	0.18481191	0.19222691	-0.007415	455.2
93	0.18303199	0.19033147	-0.007299	461.4
94	0.18383286	0.18957516	-0.005742	467.5
95	0.18118162	0.18844800	-0.007266	473.8
96	0.18141504	0.18780275	-0.006388	479.7
97	0.17846934	0.18675590	-0.008287	486.0
98	0.17898747	0.18649769	-0.007510	492.4
99	0.17642059	0.18444611	-0.008026	498.4
100	0.17733209	0.18353186	-0.006200	504.8
101	0.17711380	0.18263722	-0.005523	511.4
102	0.17554666	0.18200022	-0.006454	517.4
103	0.17482168	0.18097555	-0.006154	523.8
104	0.17382787	0.18026302	-0.006435	530.2
105	0.17320782	0.17923530	-0.006027	536.3
106	0.17208535	0.17836749	-0.006282	542.9
107	0.17175354	0.17768502	-0.005931	549.1
108	0.17061959	0.17718971	-0.006570	555.8
109	0.17054850	0.17583598	-0.005287	562.2
110	0.16862566	0.17550444	-0.006879	568.8
111	0.16857166	0.17447833	-0.005907	575.6
112	0.16741713	0.17358438	-0.006167	582.3
113	0.16597258	0.17283648	-0.006864	588.6
114	0.16541808	0.17230771	-0.006890	595.3
115	0.16479308	0.17125165	-0.006459	601.7
116	0.16472156	0.17060416	-0.005883	608.5
117	0.16362174	0.16983180	-0.006210	615.4
118	0.16322175	0.16920540	-0.005984	622.0
119	0.16274696	0.16864900	-0.005902	628.9
120	0.16134894	0.16863389	-0.007285	635.9
121	0.16069095	0.16709232	-0.006401	642.5
122	0.16054883	0.16646898	-0.005920	649.2
123	0.15888290	0.16586203	-0.006979	656.2
124	0.15813983	0.16540408	-0.007264	663.3
125	0.15799514	0.16445218	-0.006457	669.9
126	0.15820941	0.16390025	-0.005691	677.0
127	0.15620635	0.16310376	-0.006897	683.8
128	0.15328915	0.16262081	-0.009332	690.7

На основании полученных результатов сферические коды могут быть применены для кодирования алфавитов различных языков, размерность которых варьируется. На рис. 4.16 представлена конфигурация сферического кода, соответствующая английскому алфавиту (25 символов). На рис. 4.17 показана упаковка для вьетнамского алфавита (29 символов), а на рис. 4.18 — для русского алфавита (33 символа). Для кодирования расширенного набора символов, такого как таблица ASCII (128 символов), построенная конфигурация демонстрируется на рис. 4.19. В случае  $N = 33$  (русский алфавит) положения центров сферических сегментов следующие:

$(-0.2745, 0.1624, 0.9478)$ ,  $(-0.1412, -0.9797, -0.1426)$ ,  $(-0.6455, -0.6947, -0.3173)$ ,  
 $(-0.4969, 0.7740, -0.3923)$ ,  $(-0.9572, -0.1843, -0.2233)$ ,  $(-0.7347, 0.3287, 0.5934)$ ,  
 $(-0.0326, -0.8896, 0.4555)$ ,  $(-0.1734, -0.6956, -0.6972)$ ,  $(0.6732, 0.5203, 0.5255)$ ,  
 $(0.6351, 0.7705, -0.0541)$ ,  $(0.2385, 0.0289, -0.9707)$ ,  $(0.0948, -0.3774, 0.9212)$ ,  
 $(-0.7383, 0.1868, -0.6481)$ ,  $(0.4088, -0.7345, -0.5417)$ ,  $(0.3290, 0.1757, 0.9278)$ ,  
 $(0.0995, 0.9308, -0.3518)$ ,  $(-0.4905, -0.3833, 0.7826)$ ,  $(0.4302, -0.9019, 0.0384)$ ,  
 $(0.3853, 0.5627, -0.7314)$ ,  $(-0.2175, 0.4602, -0.8607)$ ,  $(-0.9018, -0.2098, 0.3778)$ ,  
 $(0.7013, -0.2238, -0.6769)$ ,  $(0.7710, -0.0974, 0.6293)$ ,  $(-0.9071, 0.4058, -0.1115)$ ,  
 $(0.8442, 0.3106, -0.4368)$ ,  $(-0.0119, 0.9715, 0.2368)$ ,  $(0.5127, -0.6376, 0.5750)$ ,  
 $(0.8813, -0.4608, -0.1045)$ ,  $(0.0266, 0.6621, 0.7490)$ ,  $(-0.6057, -0.7400, 0.2924)$ ,  
 $(-0.3329, -0.1609, -0.9291)$ ,  $(-0.5809, 0.7822, 0.2250)$ ,  $(0.9833, 0.1364, 0.1201)$ .

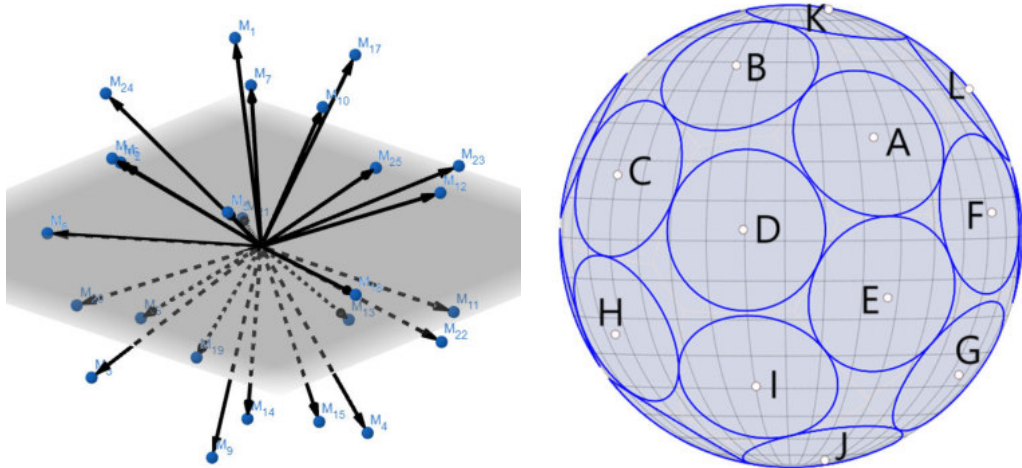


Рис. 4.16: Равноугольный жесткий фрейм и иллюстрация сферических кодов в случае  $D = 3$ ,  $N = 25$  для английского алфавита.

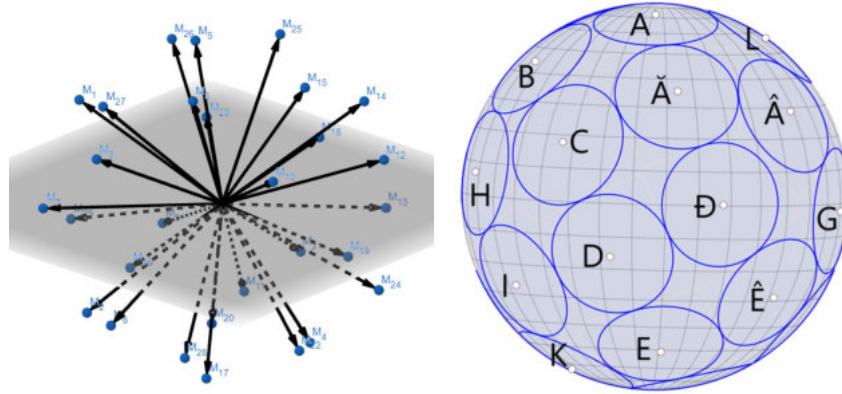


Рис. 4.17: Равноугольный жесткий фрейм и иллюстрация сферических кодов в случае  $D = 3, N = 29$  для вьетнамского алфавита.

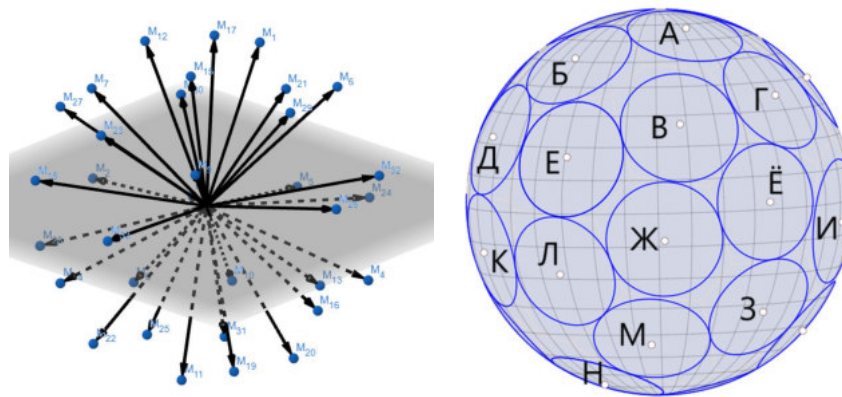


Рис. 4.18: Равноугольный жесткий фрейм и иллюстрация сферических кодов в случае  $D = 3, N = 33$  для русского алфавита.

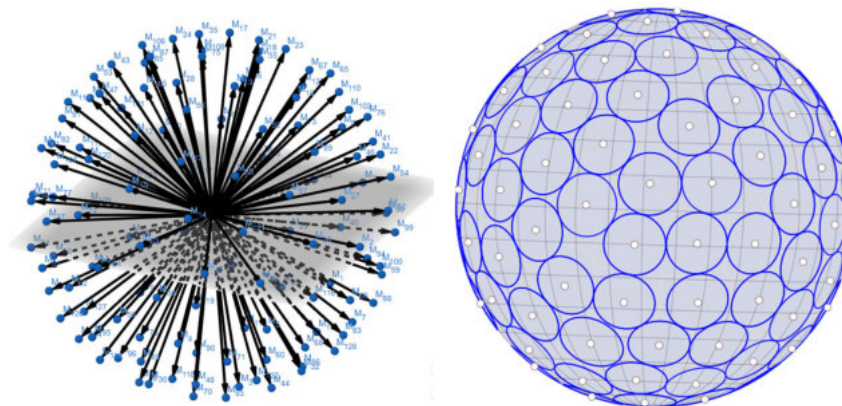


Рис. 4.19: Равноугольный жесткий фрейм и иллюстрация сферических кодов в случае  $D = 3, N = 128$  для таблицы кодов ASCII.

## 4.4 Применение упаковки полусферы и сферы для проектирования геодезического спутника.

### 4.4.1 Предметное описание объекта исследования

Спутник LARES-2 (Laser Relativity Satellite) был успешно запущен 13 июля 2022 года. Это геодезический лазерный спутник-отражатель нового поколения, основной целью которого является проведение важных измерений в области гравитационной физики и проверка общей теории относительности Эйнштейна. LARES-2 также имеет важные приложения в космической геодезии и геодинاميке, например, при изучении формы Земли и определении Международного эталона Земли [105]. Ранее многие из этих спутников были разработаны и успешно выведены на орбиту с первоначальной целью исследования геодезии Земли и проведения специализированных геодезических экспериментов. К таким спутникам относятся LAGEOS-1 (США, запущен в 1976 году), LAGEOS-2 (США, запущен в 1992 году), ЭТАЛОН-1/ЭТАЛОН-2 (Россия, 1989 год), LARES (Италия, 2012 год), WESTPAC (Австралия и Россия, 1998 год) и другие. На рисунке 4.20 изображены спутники LARES и LARES-2, заимствованные с веб-сайта [170]. Кроме спутников ЭТАЛОН-1 и ЭТАЛОН-2, остальные спутники имеют сферическую форму. На их поверхности установлены уголкового типа отражатели, которые позволяют принимать и отражать лазерные лучи во время движения по орбите. Распределение отражателей на поверхности каждого спутника различно. На спутниках серии LAGEOS отражатели расположены рядами на каждой полусфере, в то время как на других спутниках они расположены квази-случайным образом по всей сфере.

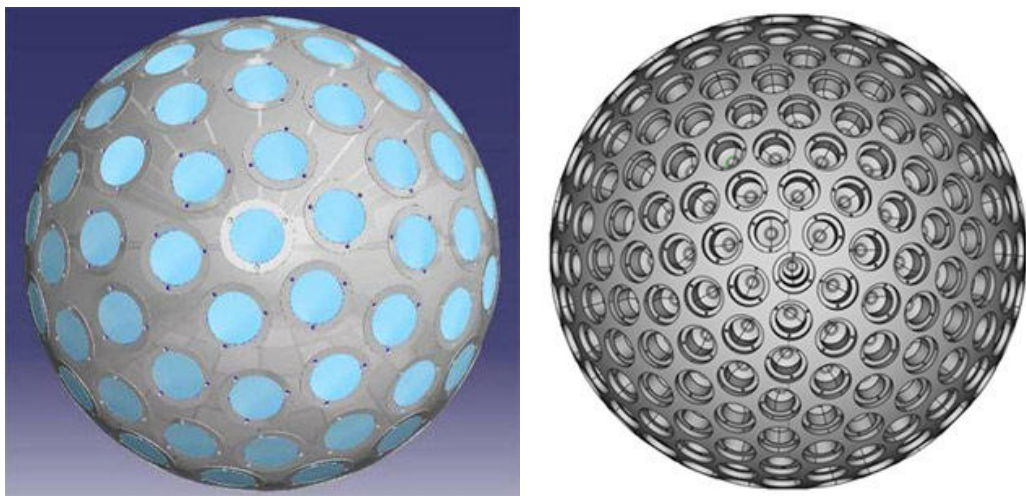


Рис. 4.20: Иллюстрация спутника LARES-1 (слева) и LARES-2 (справа)

Спутник LAGEOS-1 представляет собой аппарат первого поколения среди геоде-

зических спутников, разработанных Национальным управлением по авиации и исследованию космического пространства (NASA). Впоследствии он был исследован и адаптирован для различных целей. В работе [189] базовая конструкция спутника LAGEOS-1 описывается следующим образом: необходимо разместить ряд отражателей на сфере, которые обеспечат устойчивую точку в пространстве для отражения импульсов лазерного излучения. Целью проектирования является размещение максимального количества отражателей для достижения разумной степени симметрии, т.е. расстояния между центрами всех соседних отражателей должны находиться в некотором допустимом диапазоне. Полная симметрия достигается, когда расстояние между центрами любых двух соседних отражателей постоянно. Если рассматривать отражатель как сферический сегмент, то расстановка отражателей аналогична задаче упаковки на сфере максимального числа равных неперекрывающихся сферических сегментов. Однако существует ограничение: ни одно из отверстий для крепления отражателя не должно пересекать стык между двумя полусферами. Общее количество отражателей, установленных на спутнике LAGEOS, составляет 426. Для установки отражателей сфера была разделена на две полусферы, после чего на каждой из них были установлены отражатели. Отражатели будут расположены по окружности вокруг полушария. Схема размещения предполагала, что в первом поясе можно разместить 40 отражателей, во втором — 39 и так далее по направлению к полюсу полушария (см. рис. 4.21 [189]). Необходимо расположить отражатели таким образом, чтобы они помещались внутри одной окружности и между окружностей. Однако впоследствии выяснилось, что принятая конфигурация в большей степени уменьшила симметрию отражения, чем увеличила количество установленных отражателей.

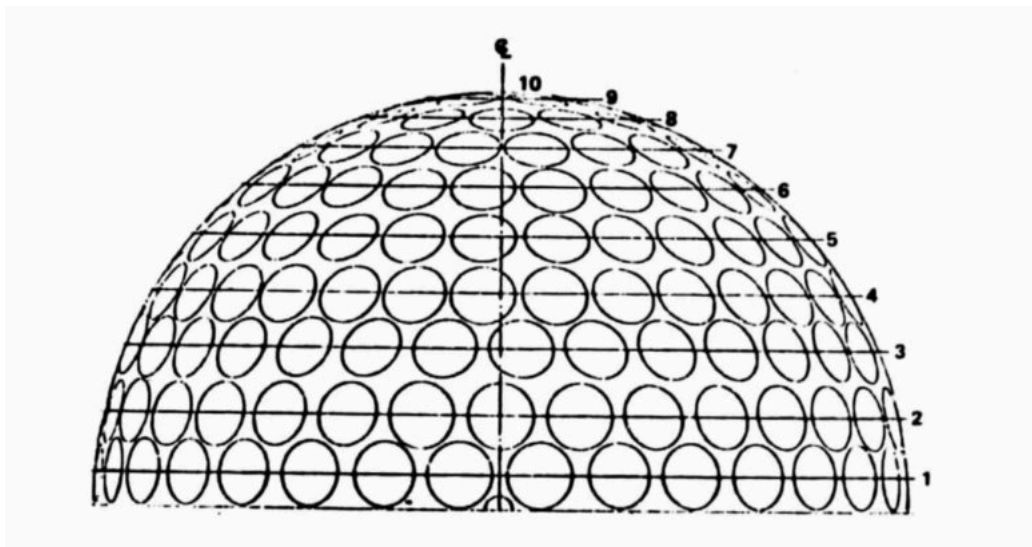


Рис. 4.21: Структура дизайна LAGEOS на полусфере [189].

Расположение отражателей на спутниках серий ЭТАЛОН и LARES также существенно отличается от такового на LAGEOS. Оно более эффективно, плотность отражателей выше за счет использования метода упаковки сферических сегментов на полную сферу. Фактически, классическое расположение отражателей концентрическими рядами на полусфере, как на спутнике LAGEOS (плотность упаковки составляет 0.435), было отвергнуто в пользу методов упаковки по всей сфере. Отражатели размещаются в местах, определяемых из решения задачи упаковки сферических сегментов на сфере. Однако теоретически оптимальную упаковку пришлось скорректировать для размещения конструктивных элементов оптической системы и других подсистем спутника [105]. Таким образом, плотная упаковка большого количества отражателей на сфере поможет свести к минимуму возникающие проблемы. Количество отражателей на спутниках разное: на LASER — 92, на LARES-2 — 303, на WESTPAC — 60.

#### 4.4.2 Математическая модель

Рассматривается модель поверхности спутника — сфера  $S$  радиуса  $r$ . В соответствии с существующими конфигурациями спутников-отражателей, рассматриваются две постановки задачи о плотной упаковке сферических сегментов:

1. *Упаковка на полной сфере.* Для заданного числа сегментов  $N \in 426, 303, 92, 60$  требуется найти такое их расположение на сфере  $S$ , при котором плотность упаковки  $\Xi_S$  достигает максимума. Данная постановка соответствует спутникам, у которых отражатели распределены по всей поверхности (например, ЭТАЛОН, LARES).
2. *Упаковка на полусфере.* Для заданного числа сегментов  $N \in 213, 151, 46, 30$  требуется найти такое их расположение на полусфере  $\widehat{S}$ , при котором плотность упаковки  $\Xi_{\widehat{S}}$  достигает максимума. Данная постановка соответствует спутникам, у которых отражатели расположены на двух отдельных полусферах (например, LAGEOS).

В первом случае плотность упаковки  $\Xi_S$  определяется как отношение суммы площадей геодезических кругов  $S_i$  к площади сферы  $S_\Sigma$ :

$$\Xi_S = N \frac{S_i}{S_\Sigma} = N \frac{2\pi r^2 \sin^2 \frac{R}{2}}{4\pi r^2} = \frac{N}{2}(1 - \cos R),$$

где  $R$  — угловой размер упакованных сферических сегментов.

Таким образом, при фиксированном числе сегментов  $N$  максимизация плотности упаковки  $\Xi_S$  эквивалентна максимизации углового размера  $R$ . Однако увеличение  $R$  ограничено условием непересечения сегментов. Пусть  $O_i$  — центр  $i$ -го сферического сегмента

на сфере. Тогда математическая постановка задачи плотной упаковки имеет вид:

$$R \rightarrow \max, \quad (4.22)$$

$$\rho(O_i, O_j) \geq 2R, \forall i, j = \overline{1, N}, i \neq j \quad (4.23)$$

$$O_i \in S, i = \overline{1, N}, \quad (4.24)$$

Для второго случая плотность упаковки  $\widehat{\Xi}$  определяется как отношение суммы площадей геодезических кругов  $S_i$  к площади полусферы  $S_{\widehat{S}}$ :

$$\widehat{\Xi} = N \frac{S_i}{S_{\widehat{S}}} = N \frac{2\pi r^2 \sin^2 \frac{\widehat{R}}{2}}{\pi r^2} = 2N(1 - \cos \widehat{R}),$$

где  $\widehat{R}$  — угловой размер упакованных сферических сегментов.

Пусть  $O_i$  — центр  $i$ -го сферического сегмента, а  $\partial S$  — граница полусферы  $\widehat{S}$  (замкнутая кривая, являющаяся ее экватором). Тогда задача упаковки на полусфере формулируется следующим образом:

$$\widehat{R} \rightarrow \max, \quad (4.25)$$

$$\rho(O_i, O_j) \geq 2\widehat{R}, \forall i, j = \overline{1, N}, i \neq j \quad (4.26)$$

$$\rho(O_i, \partial \widehat{S}) \leq \widehat{R}, \forall i = \overline{1, N} \quad (4.27)$$

$$O_i \in \widehat{S}, i = \overline{1, N}. \quad (4.28)$$

#### 4.4.3 Вычислительный эксперимент

Для построения упаковки равных сферических сегментов на сфере  $S$  и полусфере  $\widehat{S}$  были использованы алгоритмы, описанные в разделе 2.5.2.

В таблице 4.9 представлены результаты вычислительного эксперимента для упаковки на полной сфере. Здесь  $N$  — количество сегментов,  $R$  — найденный алгоритмом **SpherePacking** максимальный угловой радиус,  $R^*$  — рекордное значение радиуса из [220],  $\Delta R = R - R^*$  — отклонение найденного значения от рекордного,  $\Xi_S$  — достигнутая плотность упаковки,  $t$  — время расчета в секундах. Параметры алгоритма: число случайных генераций начальных условий — 80, точность определения радиуса  $\delta = 10^{-6}$ .

Анализ данных таблицы 4.9 показывает, что разработанный алгоритм позволяет находить конфигурации с высокой плотностью упаковки ( $\Xi_S > 0.72$ ), которая существенно превышает плотность упаковки, достигнутую в конструкции спутника LAGEOS ( $\Xi \approx 0.435$ ). На рисунках 4.22 показаны упаковки на сфере для  $N = 60, 92, 303, 426$ .

Таблица 4.9: Результаты упаковки равных сферических сегментов на единичной сфере

$N$	$R$	$R^*$	$\Delta R$	$\Xi$	$t$
60	0.23214481	0.23730221	-0.005157	0.808	272.7
92	0.18481191	0.19222691	-0.007415	0.785	455.2
303	0.09878536	0.10621049	-0.007425	0.739	1422.4
426	0.08258897	0.08965312	-0.007064	0.726	1482.4

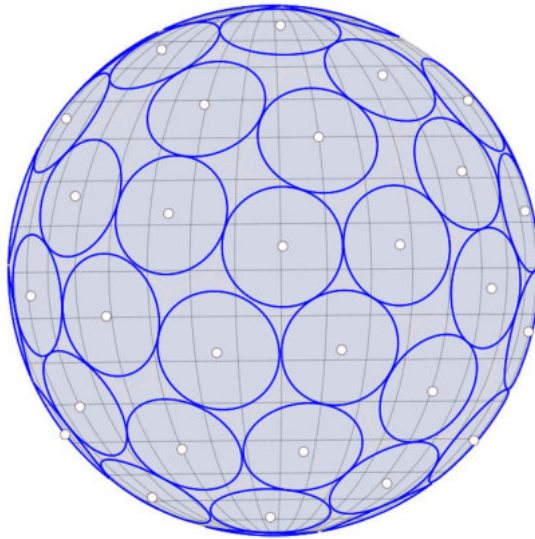
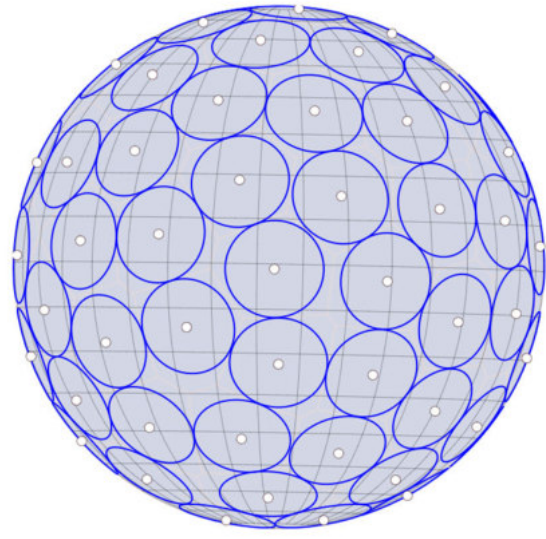
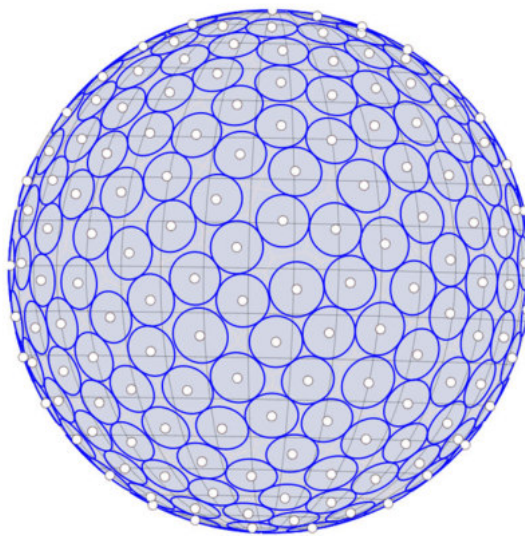
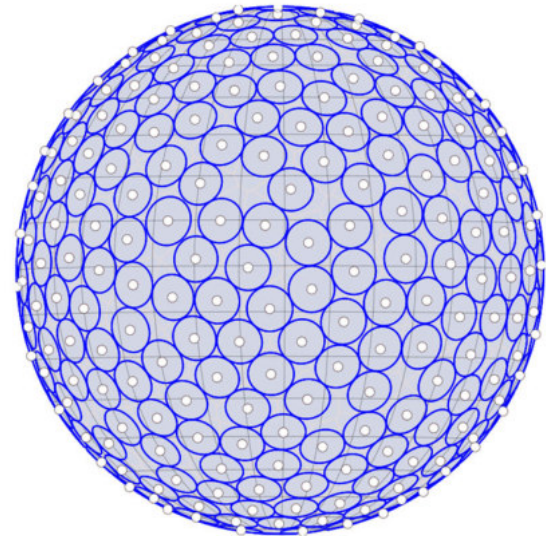
 $N = 60$  $N = 92$  $N = 303$  $N = 426$ 

Рис. 4.22: Упаковка равных сферических сегментов в единичную сферу

В таблице 4.10 представлены результаты решения задачи упаковки на полусфере, соответствующей конфигурации спутника с отдельным размещением отражателей на двух полусферах. Здесь  $\hat{R}$  — наилучшие радиусы упаковок, найденный алгоритмом **SpherePacking**,  $\hat{R}^*$  — рекордные значения радиусов из [75], остальные обозначения и параметры расчета аналогичны использованным выше.

Таблица 4.10: Результаты упаковки равных сферических сегментов в полусферу

$N$	$\widehat{R}$	$\widehat{R}^*$	$\Delta\widehat{R}$	$\widehat{\Xi}$	$t$
30	0.22495105	0.23038576	-0,0054347	0.759	72.3
46	0.17708474	0.1874751	-0,0103903	0.721	85.6
151	0.09666985	0.10506963	-0,0083997	0.705	252.4
213	0.08043069	—	—	0.688	261.7

При  $N = 30$  положения центров сферических сегментов на полусфере:

(-0.3563, -0.2814, 0.8910), (-0.5667, 0.7916, 0.2284), (0.0071, -0.8171, 0.5764),  
 (0.1088, -0.4677, 0.8771), (-0.6154, 0.5219, 0.5906), (0.9243, 0.3057, 0.2284),  
 (0.6860, 0.6908, 0.2284), (0.4480, -0.1404, 0.8829), (-0.4228, -0.6873, 0.5906),  
 (0.7319, -0.3633, 0.5764), (0.9599, -0.1555, 0.2334), (-0.6887, -0.6887, 0.2267),  
 (0.2292, 0.7403, 0.6320), (-0.7116, -0.3410, 0.6143), (-0.8458, 0.0829, 0.5270),  
 (0.2555, -0.9403, 0.2250), (0.0033, -0.0260, 0.9997), (-0.2553, -0.9395, 0.2284),  
 (-0.1473, 0.9624, 0.2284), (-0.2239, 0.7510, 0.6211), (0.2974, 0.3069, 0.9041),  
 (0.6065, 0.4911, 0.6252), (-0.1474, 0.4028, 0.9033), (-0.8754, 0.4251, 0.2300),  
 (0.7320, -0.6431, 0.2250), (0.7954, 0.0822, 0.6004), (0.4398, -0.7039, 0.5577),  
 (-0.9377, -0.2618, 0.2284), (-0.5219, 0.1506, 0.8396), (0.3010, 0.9263, 0.2267).

Сравнительный анализ данных в таблицах 4.9 и 4.10 показывает, что конфигурация на основе упаковки на полной сфере позволяет достичь значительно более высокой плотности размещения отражателей, чем конфигурация на основе двух независимых упаковок на полусферах. Следовательно, с точки зрения максимизации плотности упаковки подход с размещением на всей сфере является предпочтительным.

Кроме того, важно отметить, что во всех рассмотренных случаях для полной сферы плотность упаковки превышает 0.72. Это указывает на то, что данный метод обеспечивает высокоэффективное покрытие поверхности, что, в свою очередь, позволяет ослабить жесткие требования к минимально необходимой плотности при проектировании и предоставляет инженерам большую степень свободы для оптимизации других параметров спутника.

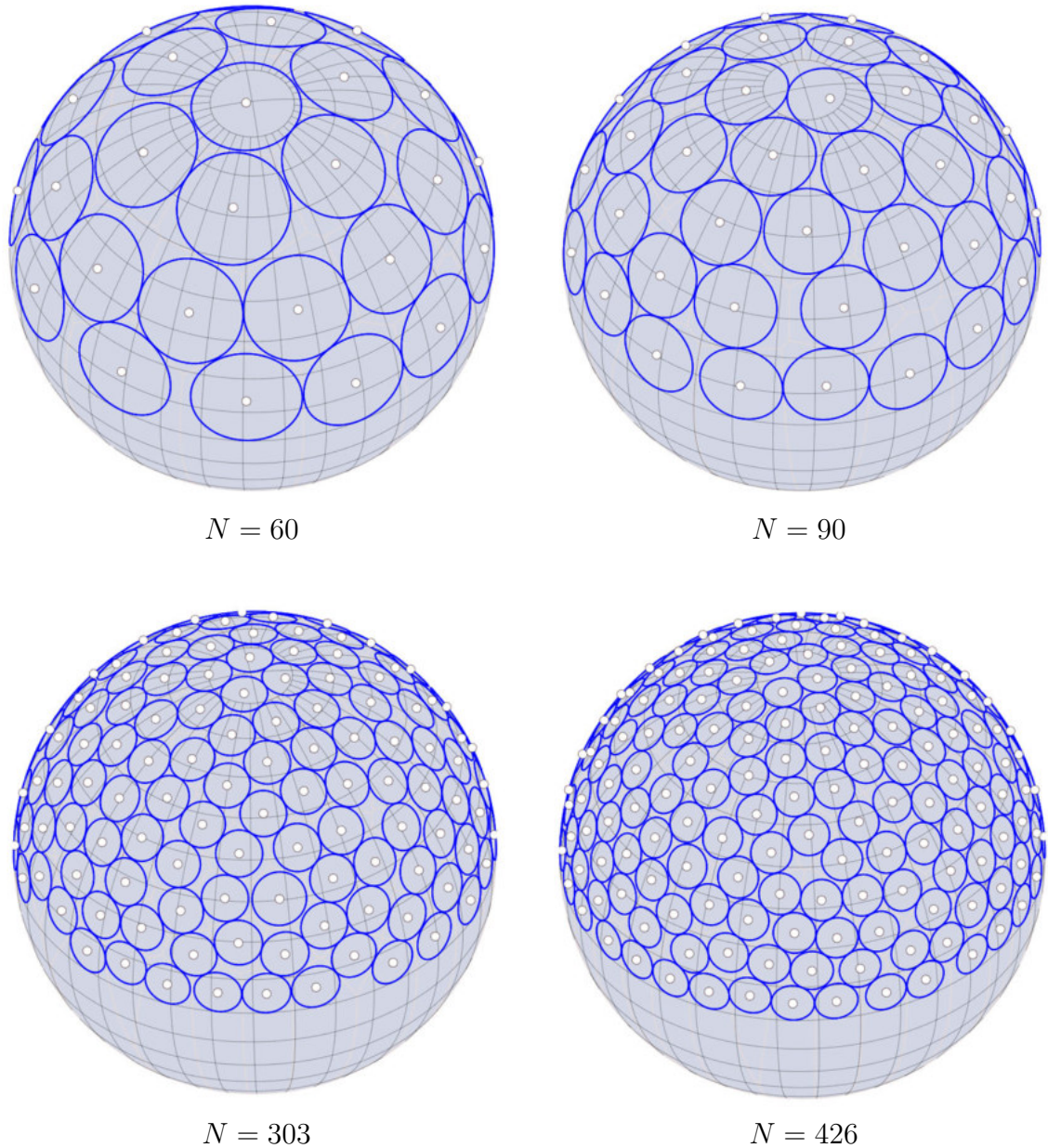


Рис. 4.23: Упаковка равных сферических сегментов в единичную полусферу

#### 4.5 Выводы по главе 4

В данной главе представлено описание решения 4 прикладных задач: задача о настройке оборудования для лечения опухолей головного мозга гамма-излучением, задача упаковки равных геодезических кругов в сферический сегмент для проектирования сферической фокальной поверхности, задача упаковки сферы для построения равноугольных жестких фреймов в пространстве  $E^3$  и задача упаковки полусферы и сферы для проектирования геодезического спутника.

Для всех задач представлены предметные и математические модели, выполнено численное решение с помощью Комплекса программ, описанного в главе 3. По результатам расчетов сделаны выводы и высказаны содержательные рекомендации.

## Заключение

В ходе диссертационного исследования были получены следующие основные научные результаты:

1. Проведена математическая формализация задач покрытия и упаковки для поверхностей вращения с различными метриками в форме задач непрерывной оптимизации.

2. Разработаны численные алгоритмы, основанные на оптико-геометрическом подходе, которые позволяют решать задачи о покрытии равными фигурами и об упаковке равных фигур для поверхностей вращения.

3. На основе оптико-геометрического подхода разработаны новые алгоритмы построения диаграмм Вороного для поверхностей вращения: сфера, эллипсоид и их сегменты, боковые поверхности цилиндра и конуса.

4. Доказаны строгие математические утверждения о свойствах геодезического расстояния, на основе которых разработан метод построения начального приближения для задач покрытия и упаковки геодезических кругов в сферический сегмент.

5. Создан комплекс программ «Покрытия и упаковки для поверхностей вращения» (ПУПоВ), в котором реализованы разработанные численные алгоритмы. Выполнены вычислительные эксперименты, показавшие эффективность предложенного программно-алгоритмического инструментария.

6. С использованием комплекса «ПУПоВ» решен ряд прикладных задач: оптимальной настройки генераторов гамма-излучения в нейрохирургии, размещения микрооптических элементов на сферической фокальной поверхности, построения равноугольных жестких фреймов и компоновки отражателей на поверхности геодезического лазерного спутника.

Приложение А: Свидетельства

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024613801

**Построение покрытий трехмерных поверхностей  
шарами**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский национальный исследовательский технический университет» (ФГБОУ ВО «ИРНИТУ»)* (RU)

Авторы: *Нгуен Дык Минь (VN), Лемперт Анна Ананьевна (RU), Казаков Александр Леонидович (RU)*

Заявка № 2024612682

Дата поступления 13 февраля 2024 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 15 февраля 2024 г.



*Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ  
Сертификат 429fb6a0fe3853164baf96f83b73b4aa7  
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**  
Действителен с 10.05.2023 по 02.08.2024

*Ю.С. Зубов*

## РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2025617354

**Построение покрытий эллипсоида равными шарами  
«ПЭРШ»**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский национальный исследовательский технический университет» (Иркутск, RU)*

Авторы: *Нгуен Дык Минь (VN), Казаков Александр Леонидович (RU), Лемперт Анна Ананьевна (RU)*

Заявка № 2025615135

Дата поступления 14 марта 2025 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 25 марта 2025 г.



Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ  
Сертификат: 0692e7610c33001b5472401670b502026  
Владелец: **Зубов Юрий Сергеевич**  
Действителен с 10.07.2024 по 03.10.2025

Ю.С. Зубов

## РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2025617890

**Построение упаковки равных гиперкругов на гиперсфере**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский национальный исследовательский технический университет» (RU)*

Авторы: *Нгуен Дык Минь (VN), Лемперт Анна Ананьевна (RU), Казаков Александр Леонидович (RU)*

Заявка № 2025615157

Дата поступления 14 марта 2025 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 31 марта 2025 г.



Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ  
Сертификат: 0692e7610c300b15472401670b502026  
Владелец: **Зубов Юрий Сергеевич**  
Действителен с 10.07.2024 по 03.10.2025

Ю.С. Зубов

Dostoevsky Omsk State University

# CERTIFICATE

**Duc Minh Nguyen**

is the winner of the first stage of the Challenge Competition of  
the 23-th International conference  
Mathematical Optimization Theory and Operations Research  
MOTOR-2024, Omsk, Russia

Prof. **Anton Ereemeev**  
PC Chair



**Alexander Kabanov**  
Dean of Faculty of Digital Technology  
and Cybersecurity  
Dostoevsky Omsk State University



С.Э.23.3277

## Приложение Б: Акт



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе  
ФГБОУ ВО «ИРНТУ»

Смирнов В. В.

«14» Апреля 2025 г.

### АКТ ВНЕДРЕНИЯ

Настоящим актом подтверждается, что программа для ЭВМ «Построение покрытий трехмерных поверхностей шарами» (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024613801), используется при проведении лабораторных занятий по дисциплинам «Исследование операций» (направление подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии»), «Методы оптимизации» (направление подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника») для исследования оптимизационных моделей в форме задач покрытия и упаковки в Институте информационных технологий и анализа данных ФГБОУ ВО «Иркутский национальный исследовательский технический университет» (ФГБОУ ВО «ИРНТУ»).

Директор института  
ИТиАД ИРНТУ

Говорков А. С.

ONLIFE TECHNOLOGY SERVICE  
TRADING COMPANY LIMITED

SOCIALIST REPUBLIC OF VIET NAM  
Independence – Freedom – Happiness

No: 250507 / GCN

### CERTIFICATE

#### on software implementation “Covering Ellipsoid by Equal Balls”

ONLIFE TST CO., LTD certifies the software product “Covering Ellipsoid by Equal Balls” developed by **Mr. Kazakov Alexander Leonidovich, Ms. Lempert Anna Ananievna, Mr. Nguyen Duc Minh** (The certificate of state No 2025617354 dated March 25<sup>th</sup> 2025), implemented at the company. The use of the software allows us to support our customers who are medical facilities in Vietnam, especially in improving the quality of software and treatment techniques for patients at hospitals.

The software module has a simple, user-friendly and intuitive interface. The main users are oncologists, biomedical engineering students and our principal researchers. In particular, the software has actively supported the company in expanding research and development of information technology applications in medicine./.

Receiver:

- Mr. Nguyen Duc Minh (01);
- Store: VP.01./.

Viet Nam, Ho Chi Minh city, 07 May 2025

Company Director  
  
Pham Van Dung

## Литература

- [1] Алдыноол, Т.А. Покрытие плоской области случайно распределенными сенсорами / Т.А. Алдыноол, А.И. Ерзин, В.В. Залюбовский // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. – 2010. – Т. 10, № 4. – С. 7–25.
- [2] Александров, А.Д. О разбиениях и покрытиях плоскости / А.Д. Александров // Матем. сб. – 1937. – Т. 44, № 2. – С. 307–318.
- [3] Александров, А.Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел / А.Д. Александров // Матем. сб. – 1938. – Т. 3, № 1. – С. 27–46.
- [4] Александров, А.Д. Гладкость выпуклой поверхности с ограниченной гауссовой кривизной / А.Д. Александров // ДАН СССР. – 1942. – Т. XXXVI, № 7. – С. 211–216.
- [5] Арестов В.В. О схеме Дельсарта оценки контактных чисел / В.В. Арестов, А.Г. Бабенко // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. – 1997. – Т. 219. – Р. 44–73.
- [6] Арнольд, В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – Москва: Эдиториал УРСС, 2000. – 408 с.
- [7] Астраков, С.Н. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами / С.Н. Астраков, А.И. Ерзин, В.В. Залюбовский // Дискретн. анализ и исслед. опер. – 2009. – Т. 16, № 3. – С. 3–19.
- [8] Астраков, С.Н. Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяженных объектов / С.Н. Астраков, А.И. Ерзин // Вычислительные технологии. – 2012. – Т. 17, № 1. – С. 26–34.
- [9] Астраков, С.Н. Сенсорные сети и покрытие полосы эллипсами / С.Н. Астраков, А.И. Ерзин // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 8, № 2. – С. 3–11.
- [10] Башуров, В.В. Применение методов геометрической оптики для решения задач безопасности объекта / В.В. Башуров // Вычислительные технологии. – 2006. – № 4. – С.23–28.
- [11] Брусов, В.С. Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости / В.С. Брусов, С.А. Пиявский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1971. – Т.11, № 2. – С. 304–313.
- [12] Бычков, И.В. Интеллектуальная система управления развитием транспортно-логистической инфраструктурой региона / И.В. Бычков, А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Д.С. Бухаров, А.Б. Столбов // Проблемы управления. – 2014. – № 1. – С. 27–35.
- [13] Бухаров, Д.С. Программная система «ВИГОЛТ» для решения задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике / Д.С. Бухаров, А.Л. Казаков // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2012. – Т.13, № 3. – С. 65–74.
- [14] Быховский, М.А. Гиперфазовая модуляция – оптимальный метод передачи цифровых сообщений (Часть 1) / М.А. Быховский // Цифровая обработка сигналов. – 2018. – № 1. – С. 8–17.
- [15] Вебер, А. Теория размещения промышленности / А. Вебер. – М.: Л.: Книга, 1926.
- [16] Галиев, Ш.И. О непрерывном обзоре поверхности Земли / Ш.И. Галиев, В.И. Заботин // Исслед. Земли из космоса. – 1983. – № 1. – С. 117–120.
- [17] Галиев, Ш.И. Системы из минимального числа спутников для многократного обзора Земли / Ш.И. Галиев, В.И. Заботин // Исслед. Земли из космоса. – 1990. – № 5. – С. 102–108.

- [18] Галиев, Ш.И. Многократные упаковки и покрытия сферы / Ш.И. Галиев // Дискретная математика. – 1996. – Т.8, № 3. – С. 148–160.
- [19] Галиев, Ш.И. Нахождение глобального экстремума и субоптимальных решений для задач размещения станций скорой помощи / Ш.И. Галиев, Л.Ю. Емалетдинова, М.А. Разина // Вестник КГТУ. – 2004. – № 3. – С. 40–45.
- [20] Галиев, Ш.И. Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами / Ш.И. Галиев, М.А. Карпова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50, № 4. – С. 757–769.
- [21] Галиев, Ш.И. Многократные покрытия кругами равностороннего треугольника, квадрата и круга / Ш.И. Галиев, А.В. Хорьков // Дискретный анализ и исследование операций. – 2015. – Т. 22, № 6. – С. 5–28.
- [22] Галиев, Ш.И. Численный метод оптимизации упаковок правильных выпуклых многоугольников / Ш.И. Галиев, М.С. Лисафина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – Т. 56, № 8. – С. 1416–1427.
- [23] Гениатулин, К.А. Применение метода координационных колец при частотно-территориальном планировании системы спутниковой связи с зональным обслуживанием / К.А. Гениатулин, В.И. Носов // Вестн. СибГУТИ. – 2014. – № 1. – С. 35–45.
- [24] Ерзин, А.И. Сенсорные сети и покрытие полосы эллипсами / А.И. Ерзин, С.Н. Астраков // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 18, № 2. – С. 3–11.
- [25] Ерзин, А.И. О плотности покрытия полосы одинаковыми секторами / А.И. Ерзин, Н.А. Шабельникова // Дискретн. анализ и исслед. опер. – 2015. – № 22. – С. 21–34.
- [26] Заботин, В.И. Модели спутниковых систем глобальной связи на эллиптических орбитах / В.И. Заботин // Исследования Земли из космоса. – 1994. – № 5. – С. 70–77.
- [27] Зикратова, И.А. Оптимизация зоны покрытия сети сотовой связи на основе математического программирования / И.А. Зикратов, Ф.Н. Шаго, А.В. Гуртов, И.И. Ивановская // Науч.-техн. вестн. информ. технологий, механики и оптики. – 2015. – Т. 15, № 2. – С. 313–321.
- [28] Иванушкин, М.А. Оценка эффективности многоспутниковых космических систем дистанционного зондирования Земли / М.А. Иванушкин, И.С. Ткаченко // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. – 2023. – Т. 20, № 4. – С. 101–110.
- [29] Казаков, А.Л. Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 7. – С. 50–57. – URL: <https://www.mathnet.ru/links/e1677577c2e7319ca780ec0ca675d1d9/at2243.pdf> (дата обращения 29.12.2023).
- [30] Казаков, А.Л. К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Д.С. Бухаров // Автоматика и телемеханика. – 2013. – Т. 74, № 6. – С. 87–100. – URL: <https://www.mathnet.ru/links/d1c6f63496abd51a9f1a3a5125415d3b/at5161.pdf> (дата обращения 29.12.2023).
- [31] Казаков, А.Л. Оптимизация системы коммуникаций с учетом региональных особенностей: математическая модель и численный метод / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Г.Л. Нгуен // Вестник ИрГТУ. – 2014. – № 12. – С. 17–22.
- [32] Казаков, А.Л. Программный модуль оптимального размещения логистических центров / А.Л. Казаков, Г.Л. Нгуен, А.А. Лемперт // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. № 2015616554 от 15 июня 2015 г. Москва: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, 2015.

- [33] Казаков, А.Л. Алгоритмы построения оптимальных упаковок для компактных множеств на плоскости / А.Л. Казаков, П.Д. Лебедев // Выч. мет. программирование. 2015. – Т. 16, Вып. 2. – С. 307–317.
- [34] Казаков, А.Л. Алгоритм построения оптимальных покрытий равными кругами невыпуклых многоугольников с неевклидовой метрикой / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Г.Л. Нгуен // Вестник ИрГТУ. – 2016. – № 5. – С. 45–55. – URL: [https://journals.istu.edu/vestnik\\_irgtu/journals/2016/05/articles/04](https://journals.istu.edu/vestnik_irgtu/journals/2016/05/articles/04) (дата обращения 29.12.2023).
- [35] Казаков, А.Л. Об одном алгоритме построения упаковки конгруэнтных кругов в неодносвязное множество с неевклидовой метрикой / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Г.Л. Нгуен // Вычислительные методы и программирование. – 2016. – Т. 17, Вып. 2. – С. 177–188. – URL: <https://www.mathnet.ru/links/41fc9ae3a7dc14b366aab3d252ec2968/vmp825.pdf> (дата обращения 29.12.2023).
- [36] Казаков, А.Л. Программный модуль построения оптимальных покрытий и упаковок в оптически неоднородной среде / А.Л. Казаков, Г.Л. Нгуен, А.А. Лемперт // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. № 2016614997 от 13 мая 2016 г. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, 2016.
- [37] Казаков, А.Л. Алгоритмы построения наилучших  $n$ -сетей в метрических пространствах / А.Л. Казаков, П.Д. Лебедев // Автоматика и телемеханика. – 2017. – № 7. – С. 141–155.
- [38] Казаков, А.Л. «КУПОЛ-М»: кратные упаковки и покрытия, оптимизация, логистика / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, К.М. Ле // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. № 2018666830 от 21 ноября 2018 г. Москва: Федеральная служба по интеллектуальной собственности. 2018.
- [39] Казаков, А.Л. Вычислительный алгоритм для решения задачи упаковки шаров двух различных типов в трехмерное множество с неевклидовой метрикой / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Ч.Т. Та // Вычислительные методы и программирование. – 2020. – Т. 21. – С. 152–163.
- [40] Казаков, А.Л. О задачах упаковок неравных шаров в трехмерном пространстве / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Ч.Т. Та // Управление большими системами. – 2020. – Вып. 87. – С. 47–66.
- [41] Казаков, А.Л. «ТУШОЛ»: Трехмерные Упаковки Шаров, Оптимизация, Логистика / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Ч.Т. Та // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. № 202061112 от 27 января 2020 г. Москва: Федеральная служба по интеллектуальной собственности. 2020.
- [42] Казаковцев, Л.А. Задача выбора оптимального размещения элементов беспроводной сети / Л.А. Казаковцев, М.Н. Гудыма, А.А. Ступина, Ю.И. Кириллов // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – №. 3. – С. 85–92.
- [43] Казаковцев, Л.А. Постановка задачи оптимального размещения сети датчиков мониторинга загрязнения воздуха и воды / Л.А. Казаковцев, М.Н. Гудыма // Перспективы развития информационных технологий. – 2013. – №. 13. – С. 19–24.
- [44] Ким, А.В. Рецидив нейроэпителиальных опухолей головного мозга у детей: специальность 14.01.18 «Нейрохирургия»: диссертация на соискание ученой степени доктора медицинских наук / Ким Александр Вонгиевич; Национальный медицинский исследовательский центр им. В. А. Алмазова. — Санкт-Петербург, 2020. — 373 с. — URL: <http://www.almazovcentre.ru/wp-content/uploads/Диссертация-Ким-А.В..pdf> (дата обращения 03.10.2024).
- [45] Кокорева Д.С. Разработка и исследование методов и программных средств вписывания многогранных трехмерных объектов: специальность 05.13.18 «Математическое

- моделирование, численные методы и комплексы программ»: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Кокорева Дениса Сергеевича; Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича. — Москва, 2018. — 137 с. — URL: <http://iitp.ru/upload/content/1420/DK%20dissertation%20PDF.pdf> (дата обращения 11.04.2025).
- [46] Костин, А.В. Задача Таммеса и контактное число сферы в пространствах постоянной кривизны / А.В. Костин, Н.Н. Костина // Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — С. 1–84.
- [47] Кочетов, Ю.А. Вероятностный поиск с запретами для задач упаковки в контейнеры / Ю.А. Кочетов, А.Р. Усманова // Труды Байкальской международной конференции, Иркутск. — 2001. — Т. 6 — С. 22–26.
- [48] Кочетов, Ю.А. Верхние и нижние оценки оптимума для задачи динамической упаковки в контейнеры / Ю.А. Кочетов, А.В. Ратушный // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2024. — Т. 30, № 1. — С. 109–127.
- [49] Ланцош, К. Вариационные принципы механики / К. Ланцош. — Москва: Физматгиз, 1965. — 408 с.
- [50] Лебедев П.Д. Программа вычисления оптимального покрытия полусферы набором сферических сегментов. Программа для ЭВМ. Регистрационный номер 2015661543. Дата регистрации 29.10.2015.
- [51] Лебедев, П.Д. Итерационные алгоритмы построения оптимальных упаковок в неоднородной метрике / П.Д. Лебедев, А.А. Лемперт // Труды Международной (48-й Всероссийской) молодежной школы-конференции, Екатеринбург, 2017. — С. 98–108. — URL: <https://ceur-ws.org/Vol-1894/geo1.pdf> (дата обращения 29.12.2023).
- [52] Лемперт, А.А. Математическая модель и программная система для решения задачи размещения логистических объектов / А.А. Лемперт, А.Л. Казаков, Д.С. Бухаров // Управление большими системами, 2013. — Вып. 41. — С. 270–284.
- [53] Меджадж, Т. Разработка модели источника кобальтовой установки гамма-нож для верификации радиохирургических планов облучения: специальность 05.14.03 «Ядерные энергетические установки, включая проектирование, эксплуатацию и вывод из эксплуатации»: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Меджадж Туфик; Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ». — Москва, 2022. — 113 с.
- [54] Можаяев, Г.В. Задача о непрерывном обзоре Земли и кинематически правильные спутниковые системы / Г.В. Можаяев // Космические исследования. — 1972. — Т. 10, № 6. — С. 833–840.
- [55] Можаяев, Г.В. Задачи о непрерывном обзоре Земли и кинематически правильные спутниковые системы / Г.В. Можаяев // Космические исследования. — 1973. — Т. 11, № 1. — С. 59–69.
- [56] Пиявский, С.А. Об оптимизации сетей / С.А. Пиявский // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. — 1968. — № 1. — С. 68–80.
- [57] Погорелов, А.В. Вложение «мыльного пузыря» внутрь тетраэдра / А.В. Погорелов // Математические заметки. — 1994. — Т. 56, № 2. — С. 90–93.
- [58] Подлазова, А.В. Генетические алгоритмы на примерах решения задач раскроя / А.В. Подлазова // Проблемы управления. — 2008. — Вып. 2. — С. 57–63.
- [59] Препарата, Ф. Вычислительная геометрия. Введение / Ф. Препарата, М. Шеймос. — Москва: Мир, 1989. — 478 с.

- [60] Ревякин, А.М. Подходы к разработке системы распознавания для решения задачи определения контента цифровых изображений / А.М. Ревякин, А.В. Скурнович // Интернет-журнал «Наукведение». – 2016. – Т.8, № 4. – С. 345–405. – URL: <https://naukovedenie.ru/PDF/30TVN416.pdf> (дата обращения 29.12.2023).
- [61] Руднев, А.С. Вероятностный поиск с запретами для задачи упаковки кругов и прямоугольников в полосу / А.С. Руднев // Дискретн. анализ и исслед. опер. – 2009. – Т. 16, № 4. – С. 61–86.
- [62] Соловьев, В.В. Планирование траектории подвижного объекта с применением диаграммы Вороного / В.В. Соловьев, И.О. Шаповалов, В.В. Шадрин // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2015. – Т. 163, № 2. – С. 29–40. – URL: [https://elibrary.ru/download/elibrary\\_23574569\\_45970284.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_23574569_45970284.pdf) (дата обращения 29.12.2023).
- [63] Стоян, Ю.Г. Метод покрытия выпуклого многогранного множества минимальным количеством одинаковых шаров / Ю.Г. Стоян, В.Н. Пацук // Reports of the National Academy of Science of Ukraine. – 2009. – Т. 123. – С. 41–45.
- [64] Тот, Л.Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. / Л.Ф. Тот // М.: Физматлит. – 1958.
- [65] Ушаков, В.Н. Алгоритмы построения оптимальных упаковок в эллипсы / В.Н. Ушаков, П.Д. Лебедев, Н.Г. Лавров // Вестник ЮУрГУ ММП. – 2017. – Т.10, № 3. – С. 67–79.
- [66] Ушаков, В.Н. Оптимизация хаусдорфова расстояния между множествами в евклидовом пространстве / В.Н. Ушаков, А.С. Лахтин, П.Д. Лебедев // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 291–308.
- [67] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Том 3: Излучение. Волны. Кванты. – Москва: Либроком, 2013.
- [68] Хамисов, О.В. Алгебраическое решение задач невыпуклого квадратичного программирования / О. В. Хамисов // Автоматика и телемеханика. – 2004. – Т. 2. – С. 69–78.
- [69] Хамисов, О.В. Численное решение специальных задач невыпуклого квадратичного программирования / О. В. Хамисов // Дискретный анализ и исследование операций. – 2005. – Т. 12, № 4. – С. 81–91.
- [70] Чернышев, А.С. Алгоритмы получения коротких сферических кодов на основе троек Штейнера / А.С. Чернышев // Журнал Радиоэлектроники. – 2008. – № 2.
- [71] Addis, A. Efficiently packing unequal disks in a circle: a computational approach which exploits the continuous and combinatorial structure of the problem / A. Addis, M. Locatelli, F. Schoen // Operations Research Letters. – 2006. – Vol. 36. – P. 37–42.
- [72] Akeb, H. A Basic Heuristic for Packing Equal Circles into a Circular Container / H. Akeb, Y. Li // Int. Conf. Service Systems and Service Management, New York, NY. – 2006. – Vol. 2. – P. 922–927.
- [73] Akeb, H. A beam search algorithm for the circular packing problem / H. Akeb, M. Hifi, R. MHallah // Computers & Operations Research. – 2009. – Vol. 36, No. 5. – P. 1513–1528. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2008.02.003> (access data: 20.01.2025).
- [74] Alexandrov, D. Behavior of the Ant Colony Algorithm for the Set Covering Problem / D. Alexandrov, Y. Kochetov // Operations Research Proceedings, Springer. – 1999. Vol. 1999. P. 255–260.
- [75] Amore, P. Circle packing on spherical caps / P. Amore // Physics of Fluids. – 2024. – Vol. 36, No. 9 – P. 97–113. – URL: <https://doi.org/10.1063/5.0221997> (access data: 29.12.2024).

- [76] Antal, J. Covering the Unit Cube by Equal Balls / J. Antal // *Beitrage zur Algebra und Geometrie*. – 2008. – Vol. 49. – P. 599–605. – URL: <https://www.emis.de/journals/BAG/vol.49/no.2/b49h2joo.pdf> (access data: 29.12.2023).
- [77] Antal, J. Covering the  $k$ -skeleton of the 3-dimensional unit cube by six balls / J. Antal // *Discrete Mathematics*. – 2014. – Vol. 336. – P. 85–95. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.07.017> (access data: 29.12.2023).
- [78] Antal, J. Covering the 5-dimensional unit cube by eight congruent balls / J. Antal // *Periodica Mathematica Hungarica* – 2018. – Vol. 77. – P. 77–82.
- [79] Appelbaum, J. The packing of circles on a hemisphere / J. Appelbaum, Y. Weiss // *Meas. Sci. Technol.* – 1999. – Vol. 10. – P. 1015–1019.
- [80] Asano, T. Disc covering problem with application to digital halftoning / T. Asano, P. Brass, S. Sasahara // *Theory Comput Syst* – 2010. – Vol. 46. – P. 157–173. – URL: <https://doi.org/10.1007/s00224-008-9123-0> (access data: 29.12.2023).
- [81] Aurenhammer, F. Voronoi diagrams: A survey of a fundamental geometric data structure / F. Aurenhammer // *ACM Comput. Surveys*. – 1991. – V.4, № 2. – C. 345–405.
- [82] Bachoc, C. Semidefinite programming, multivariate orthogonal polynomials, and codes in spherical caps / C. Bachoc, F. Vallentin // *European Journal of Combinatorics*. – 2009. – V. 30, № 3. – P. 625–637. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2008.07.017> (access data: 20.01.2025).
- [83] Banhelyi, B. Optimal circle covering problems and their applications / B. Banhelyi, E. Palatinus, B.L. Levai // *CEJOR*. – 2015. – V. 23. – P. 815–832.
- [84] Bhatt, G. Mercedes-Benz Frames in as a direct sum of a pair orthogonal tight frames / G. Bhatt // *J Math Sci*. – 2023. – V. 271. – P. 48-55. – URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06260-0> (access data: 11.04.2025).
- [85] Barg, A. Codes in spherical caps / A. Barg, O.R. Musin // *Advances in Mathematics of Communications*. – 2007. – V. 1, № 1. – P. 131–149. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0606734> (access data: 20.01.2025).
- [86] Bereczky, K. The problem of Tammes for  $n = 11$  / K. Bereczky // *Stud. Sci. Math. Hungar* – 1983. – Vol. 18. – P. 165–171.
- [87] Berg, M.D. *Computational Geometry: Algorithms and Applications* / M.D. Berg, M.V. Kreveld, M. Overmars. – Springer Verlag, Berlin, 2008. – 386 p.
- [88] Bezdek, K. *Über einige Kreisiiberdeckungen* / K. Bezdek // *Beitrage zur Algebra und Geometrie*. – 1983. – Vol. 14. – P. 7–13.
- [89] Bezdek, K. Improving Rogers upper bound for the density of unit ball packings via estimating the surface area of Voronoi cells from below in Euclidean  $d$ -space for all  $d \geq 8$  / K. Bezdek // *Discrete and Computational Geometry*. – 2002. – V.28, № 1. – P. 75–106.
- [90] Bezdek, A. On the multiplicity of arrangements of congruent zones on the sphere / A. Bezdek, F. Fodor, V. Vigh, T. Zarnocz // *Metric Geometry*. – 2017. – URL: <https://arxiv.org/abs/1705.02172> (access data: 29.12.2023).
- [91] Birgin, E.G. Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container: A nonlinear approach / E.G. Birgin, J.M. Martinez, D.P. Ronconi // *European Journal of Operational Research*. – 2005. – Vol. 160. – P. 19–33.
- [92] Birgin, E.G. Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems / E.G. Birgin, F. Sobral // *Computers & Operations Research*. – 2008. – Vol. 35. – P. 2357–2375.

- [93] Birgin, E.G. A Shape Optimization Approach to the Problem of Covering a Two-Dimensional Region with Minimum-Radius Identical Balls / E.G. Birgin, A. Laurain, R. Massambone, A.G. Santana // *SIAM Journal on Scientific Computing*. – 2021. – V.43, № 3. – P. 2047–2078.
- [94] Bleicher, M.N. Circle packing and circle covering on a cylinder / M.N. Bleicher, L.F. Toth // *Michigan Math. J.* – 1964. – Vol. 11. – P. 337–341. – URL: <https://doi.org/10.1307/mmj/1028999186> (access data: 29.12.2023).
- [95] Blundon, W.J. Multiple covering of the plane by circles / W.J. Blundon // *Mathematika*. – 1957 – Vol. 4, № 1. – P. 7–16. – URL: <https://doi.org/10.1112/S0025579300001042> (access data: 20.01.2025).
- [96] Boll, D.W. Improving dense packings of equal disks in a square [Electronic resource] / D.W. Boll, J. Donovan, R.L. Graham, B.D. Lubachevsky // *The electronic Journal of combinatorics*. – 2000 – Vol. 7. – URL: <http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v7i1r46> (access data: 20.01.2025).
- [97] Bondarenko, A. Spherical coverings and X-raying convex bodies of constant width / A. Bondarenko, A. Prymak, D. Radchenko // *Canad. Math. Bull.* – 2021. – Vol. 65. – P. 1–7. – URL: <https://arxiv.org/abs/2011.06398> (access data: 29.12.2023).
- [98] Borgelt, M.G. Geodesic disks and clustering in a simple polygon. / M.G. Borgelt, M. J. van Kreveld, J. Luo // *Int. J. Comput. Geometry Appl.* – 2011. – Vol. 21, № 6. – P. 595–608.
- [99] Bortfeldt, A.A Genetic algorithm for the two-dimensional strip packing problem with rectangular pieces / A. Bortfeldt // *Eur. J. Oper. Research*. – 2006. – Vol. 172. – P. 814–837.
- [100] Boyd S.P., Vandenberghe L. *Convex Optimization*. – Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [101] Bulusu, N. GPS-less low cost outdoor localization for very small devices / N. Bulusu, J. Heidemann, D. Estrin // *Technical report, Computer science department. University of Southern California* – 2000.
- [102] Cardei, M. Improving network lifetime using sensors with adjustable sensing ranges / M. Cardei, J. Wu, M. Lu // *Int. J. Sensor Networks*. – 2006. – Vol. 1. – P. 41–49.
- [103] Casazza, M. Mathematical programming algorithms for bin packing problems with item fragmentation / M. Casazza, A. Ceselli // *Computers & Operations Research*. – 2014. – Vol. 46. – P. 1–11.
- [104] Castillo, I. Solving circle packing problems by global optimization: numerical results and industrial applications / I. Castillo, F.J. Kampas, J.D. Pinter, // *European Journal of Operational Research*. – 2008. – Vol. 191. – P. 786–802.
- [105] Ciufolini, I. The LARES 2 satellite, general relativity and fundamental physics./ I. Ciufolini, A. Paolozzi, E.C. Pavlis // *The European Physical Journal C*. – 2023 – Vol. 83. – URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11230-6> (access data: 11.04.2025).
- [106] Clare, B. The closest packing of equal circles on a sphere / B. Clare, D. Keper // *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. – 1986. – Vol. 405. – P. 329–344.
- [107] Conway, J.H. *Sphere Packings, Lattices and Groups* / J.H. Conway, N.J.A. Sloane // NY: Springer. – 2013. – 444 p. – URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4757-6568-7> (access data: 29.12.2023).
- [108] Cohen, S.C. LAGEOS Scientific Results: Introduction / S.C. Cohen, D.E. Smith // *J. Geophys. Res.* – 1985. – Vol. 90. – P. 9217–9220. – URL: <https://doi.org/10.1029/JB090iB11p09217> (access data: 20.01.2025).

- [109] Correia, M.H. Cylinder packing by simulated annealing / M.H. Correia, J.F. Oliveira, J.S. Ferreira // *Pesquisa Operacional*. – 2000. – Vol. 20. – P. 269–286.
- [110] Cossairt, O. Gigapixel Computational Imaging / O. Cossairt, D. Miao, S.K. Nayar // 2011 IEEE International Conference on Computational Photography (ICCP), Pittsburgh, PA, USA. – 2011. – P. 1–8. – URL: <https://doi.org/10.1109/ICCPHOT.2011.5753115> (access data: 01.01.2024).
- [111] Coxeter, H.S.M. Arrangements of equal spheres in non-Euclidean spaces / H.S.M. Coxeter // *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*. – 1954. – Vol. 5, № 3. – P. 263–274. – URL: <https://doi.org/10.1007/BF02020413> (access data: 20.01.2025).
- [112] Danzer, L. Finite Point-Sets on  $S^2$  with Minimum Distance as Large as Possible / L. Danzer // *Discrete Math*. – 1986. – Vol. 60. – P. 3–66.
- [113] do Nascimento, R.Q. The discrete ellipsoid covering problem: A discrete geometric programming approach / R.Q. do Nascimento, A.F.U. dos Santos Macambira, L.D.A.F. Cabral, R.V. Pinto // *Discrete Applied Mathematics*. – 2014. – Vol. 164. – P. 276–285.. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.10.016> (access data: 20.01.2025).
- [114] Dowsland, K.A. Optimising the palletisation of cylinders in cases / K.A. Dowsland // *OR Spectrum*. – 1991. – Vol. 13. – P. 204–212.
- [115] Dumer, I. On coverings of ellipsoids in Euclidean spaces / I. Dumer, M.S. Pinski, V.V. Prelov // *Journal of Combinatorial Theory, Series A*. – 2004. – Vol. 50, № 10. – P. 2348–2356. – URL: <https://doi.org/10.1109/TIT.2004.834759> (access data: 20.01.2025).
- [116] Dumer, I. Covering an ellipsoid with equal balls / I. Dumer // *Journal of Combinatorial Theory*. – 2006. – Vol. 113. – P. 1667–1676. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2006.03.021> (access data: 20.01.2025).
- [117] Dumer, I. Covering spheres with spheres / I. Dumer // *Discrete & Computational Geometry*. – 2007. – Vol. 38. – P. 665–679. – URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00454-007-9000-7> (access data: 29.12.2023).
- [118] Dumer, I. Covering a sphere with caps: Rogers bound revisited / I. Dumer // *Mathematika*. – 2011. – URL: <http://iitp.ru/upload/content/839/Dumer.pdf> (access data: 29.12.2023).
- [119] Erich's Packing Center – URL: <https://erich-friedman.github.io/packing/> (access data: 20.01.2025).
- [120] Circles Covering Circles – URL: <https://erich-friedman.github.io/packing/circovcir/> (access data: 20.01.2025).
- [121] Fejes, L. Uber die dichteste Kugellagerung / L. Fejes // *Mathematische Zeitschrift*. 1942. Vol.48. – P. 676–684.
- [122] Fekete, S.P. Worst-Case Optimal Covering of Rectangles by Disks / S.P. Fekete, U. Gupta, P. Keldenich // *Discrete Comput Geom*. 2024. Vol. 72. – P. 1232–1283 . – URL: <https://doi.org/10.1007/s00454-023-00582-1> (access data: 01.01.2025).
- [123] Fortune, S. A sweepline algorithm for Voronoi diagrams / S. Fortune // *Algorithmica*. 1987. Vol.2. – P. 153–174. – URL: <https://doi.org/10.1007/BF01840357> (access data: 29.12.2023).
- [124] Garey, M.R. Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness / M.R. Garey, D.S. Jonson // NY: W.H. Freeman & Co. – 1990. – 338 p.
- [125] Gaspar, Z. Some new multi-symmetric packings of equal circles on a 2-sphere / Z. Gaspar // *Acta Crystallographica Section B: Structural Science*. – 1989. – Vol. 45. – P. 452–453.

- [126] Gaspar, Z. Partial Covering of a Circle by 6 and 7 Congruent Circles / Z. Gaspar, T. Tarnai, K. Hincz // *Symmetry*. – 2021. – Vol. 13., No. 11. – P. 2133.
- [127] Gensane, T. Dense packings of equal spheres in a cube / T. Gensane // *Electronic Journal of Combinatorics*. – 2004. – Vol. 11, № 1.
- [128] Goldberg, M. The Packing of Equal Circles in a Square / M. Goldberg // *Math. Mag.* – 1970. – Vol. 43, No. 1. – P. 24–30. – URL: <https://doi.org/10.1080/0025570X.1970.11975991> (access data: 20.11.2024).
- [129] Graham, R.L. Dense Packings of Equal Disks in an Equilateral Triangle: From 22 to 34 and Beyond / R.L. Graham, B.D. Lubachevsky // *The Electronic Journal of Combinatorics*. – 1995. – Vol. 2.
- [130] Graham, R.L. Repeated patterns of dense packings of equal disks in a square / R.L. Graham, B.D. Lubachevsky // *The Electronic Journal of Combinatorics*. – 1996. – Vol. 3, № 1. – P. 1–17.
- [131] Graham, R.L. Lubachevsky, Dense packings of  $3k(k+1)+1$  equal disks in a circle for  $k = 1, 2, 3, 4$  and  $5$  / R.L. Graham, B.D. Lubachevsky // *Proc. First Int. Conf. "Computing and Combinatorics" COCOON 95, Springer Lecture Notes in Computer Science*. – 1996. – Vol. 959. – P. 303–312.
- [132] Graham, R.L. Dense packings of congruent circles in a circle / R.L. Graham, B.D. Lubachevsky, K.J. Nurmela, P.R.J. Ostergard // *Discrete Mathematics*. – 1998. – Vol. 181, No. 1–3. – P. 139–154. – URL: [https://doi.org/10.1016/s0012-365x\(97\)00050-2](https://doi.org/10.1016/s0012-365x(97)00050-2) (access data: 29.12.2024).
- [133] Grosso, A. Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container / A. Grosso, A.R.M.J.U. Jamali, M. Locatelli, F. Schoen // *J Glob Optim.* – 2010. – Vol. 47. – P. 63–81. – URL: <https://doi.org/10.1007/s10898-009-9458-3> (access data: 20.01.2025).
- [134] Gunther, S. Ein sterometrisches Problem / S. Gunther // *Archiv der Mathematik und Physik (Grunert)*. – 1875. – Vol. 57. – P. 209–215.
- [135] Hales, T.C. A formal proof of the Kepler conjecture / T.C. Hales and partner // *Annals of Mathematics*. – 2005. – Vol. 162. – P. 1065–1185. – URL: <https://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v162-n3-p01.pdf> (access data: 29.12.2023).
- [136] Hales, T.C. The Kepler Conjecture: The Hales-Ferguson Proof / T.C. Hales, S.P. Ferguson // New York: Springer. – 2011. 470 p.
- [137] Hales, T.C. The strong dodecahedral conjecture and Fejes Toth's conjecture on sphere packings with kissing number twelve / T.C. Hales // *Discrete Geometry and Optimization, Fields Institute Communications, Berlin Heidelberg:Springer*. – 2013. – Vol. 69. – P. 121–132. – URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-00200-2\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-319-00200-2_8) (access data: 29.12.2023).
- [138] Henry, C. The sphere packing problem in dimension 24 / C. Henry, K. Abhinav, D. M. Stephen, R. Danylo, V. Maryna // *Annals of Mathematics* – 2017. – Vol. 185, No. 3. – P. 1017–1033.
- [139] Heppes, A. Covering a rectangle with equal circles / A. Heppes, J.B.M. Melissen // *Period. Math. Hungar.* – 1997. – Vol. 34, № 1-2. – P. 65–81.
- [140] Hifi, M. Approximate algorithms for constrained circular cutting problems / M. Hifi, R. MHallah // *Computers & Operations Research*. – 2004 – Vol. 31. – P. 675–694.
- [141] Hopper, E. An empirical investigation of meta-heuristic and heuristic algorithms for a 2D packing problem / E. Hopper, B.C.H. Turton // *European Journal of Operational Research*. – 2001. – Vol. 128. – P. 34–57.

- [142] Hougardy, S. The Bottom-Left Algorithm for the Strip Packing Problem / S. Hougardy, B. Zondervan // *Combinatorial Algorithms. IWOCA 2024. Lecture Notes in Computer Science.* – 2024. – Vol. 14764. – P. 433–445.
- [143] Huang, W. A new heuristic algorithm for rectangle packing / W. Huang, D. Chen, R. Xu // *Computers & Operat. Research.* – 2007. – Vol. 34. – P. 3270–3280.
- [144] Huang, W. Greedy vacancy search algorithm for packing equal circles in a square / W. Huang, Y. Tao // *Opt. Express* – 2011. – Vol. 38, No. 5. – P. 378–382. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.optl.2010.07.004> (access data: 11.12.2024).
- [145] Hui, S.S. Design of a spherical focal surface using close-packed relay optics / S.S. Hui, L.M. Daniel, H. Joonku, K. Jungsang, J.B. David // *Operations Research Letters* – 2010. – Vol. 38, No. 5. – P. 16132–16138.
- [146] Ikebe, Y. Mixed-integer DC programming based algorithms for the circular packing problem / Y. Ikebe, S. Masuda, T. Okuno // *Journal of the Operations Research Society of Japan.* – 2023 – Vol. 66, No. 3. – P. 153–175. – URL: <https://doi.org/10.15807/jorsj.66.153> (access data: 11.12.2024).
- [147] Isaacs, J.C. Constructions of equiangular tight frames with Genetic Algorithms / J.C. Isaacs, R. Roberts // *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, San Antonio, TX, USA.* – 2009. – P. 595–598. doi: – URL: <https://doi.org/10.1109/ICSMC.2009.5346613> (access data: 11.04.2025).
- [148] Jia, S. Optimization of spherically arranged lens arrays based on class II and III geodesic polyhedra / S. Jia, W. Huang, M. Xu, X. Qin // *Opt. Express.* – 2024. – Vol. 32, No. 16. – P. 28753–28768. – URL: <https://doi.org/10.1364/OE.529638> (access data: 01.01.2025).
- [149] Karabulut, K. A Hybrid Genetic Algorithm for Packing in 3D with Deepest Bottom Left with Fill Method / K. Karabulut, M.M. Inceoglu // *Advances in Information Systems. ADVIS 2004. Lecture Notes in Computer Science.* – 2004. – Vol. 3261. – P. 441–450.
- [150] Karoly, B.J. Covering the Sphere by Equal Spherical Balls / B.J. Karoly, W. Gergely // *Discrete and Computational Geometry.* – 2003. – Vol. 25. – P. 235–251. – URL: [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-55566-4\\_10](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-55566-4_10) (access data: 29.12.2023).
- [151] Karoly, B.J. Covering the crosspolytope by equal balls / B.J. Karoly, F. Ildiko, W. Gergely // *Periodica Mathematica Hungarica.* – 2006. – Vol. 53. – P. 103–113.
- [152] Karoly, B. On the X-ray number of almost smooth convex and of convex bodies of constant width / B. Karoly, Gyorgy K. // *Canad. Math. Bull.* – 2009. – Vol. 52. – P. 342–348. – URL: <https://arxiv.org/abs/0903.4830> (access data: 29.12.2023).
- [153] Kazakov, A.L. An algorithm for packing circles of two types in a fixed size container with Non-Euclidean metric / A.L. Kazakov, A.A. Lempert, Q.M. Le // *CEUR-Workshop Proceedings.* – 2017. – Vol. 1975. – P. 281–292.
- [154] Kazakov, A.L. Congruent circles packing and covering problems for multiconnected domains with non-euclidean metric, and their applications to logistics / A.L. Kazakov, A.A. Lempert, P.D. Lebedev // *CEUR Workshop Proceedings.* – 2017. – Vol. 1839. – P. 334–343.
- [155] Kazakov, A.L. The sphere packing problem into bounded containers in three-dimension non-Euclidean space / A.L. Kazakov, A.A. Lempert, T.T. Ta // *IFAC-PapersOnLine.* – 2018. – Vol. 51, No. 32. – P. 782–787.
- [156] Kazakov, A.L. On the Algorithm for Equal Balls Packing into a Multi-connected Set / A.L. Kazakov, A.A. Lempert, T.T. Ta // *Advances in Intelligent Systems Research.* – 2019. – Vol. 169. – P. 216–222. DOI: 10.2991/iwci-19.2019.38.

- [157] Kazakov, A.L. On the thinnest covering of fixed size containers with Non-Euclidean metric by incongruent circles / A.L. Kazakov, A.A. Lempert, Q.M. Le // *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2019. Communications in Computer and Information Science.* 2019. – Vol. 1090. – URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-33394-2\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-33394-2_15) (access data: 01.01.2025).
- [158] Kazakov, A.L. On Multiple Coverings of Fixed Size Containers with Non-Euclidean Metric by Circles of Two Types / A.L. Kazakov, A.A. Lempert, Q.M. Le // *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2020. Communications in Computer and Information Science.* 2020. – Vol. 1275. – URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-58657-7\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-58657-7_12) (access data: 01.01.2025).
- [159] Kepler, J. *Strena seu de nive Sexangula*, Frankfurt, Jos. Tampach 1611. Translation as: *The Six-Cornered Snowflake: A New Year's Gift* (Colin Hardie, Translator) / J. Kepler // Clarendon Press: Oxford, 1966.
- [160] Kershner, R. The number of circles covering a set / R. Kershner // *American Journal of Mathematics* – 1939. – Vol. 61, № 3. – P. 665–671.
- [161] King, W. A technical overview of the CyberKnife system / W. Kilby, M. Naylor, JR. Dooley, Jr. Maurer, S. Sayeh // *Handbook of Robotic and Image-Guided Surgery*, Elsevier. – 2020. P. 15–38. – URL: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-814245-5.00002-5> (access data: 23.08.2025).
- [162] King, E.J. 2- and 3-Covariant Equiangular Tight Frames / E.J. King // *13th International conference on Sampling Theory and Applications.* – 2019. P. 1–4. – URL: <https://arxiv.org/pdf/1901.10612> (access data: 11.04.2025).
- [163] Klein, R. Abstract Voronoi diagrams and their applications / R. Klein // *Proc. of the Workshop on Computational Geometry and Its Applications, Lecture Notes in Computer Science, Berlin Heidelberg:Springer.* – 1988. – Vol.333. – P. 29–40. – URL: [https://doi.org/10.1007/3-540-50335-8\\_31](https://doi.org/10.1007/3-540-50335-8_31) (access data: 29.12.2023).
- [164] Kochetov, Y.A. VNS matheuristic for a bin packing problem with a color constraint / Y. A. Kochetov, Kondakov A. // *Electronic Notes in Discrete Mathematics.* – 2017. – Vol. 58. – P. 39–46. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.endm.2017.03.006> (access data: 15.09.2025).
- [165] Kochetov, Y.A. A hybrid vns matheuristic for a bin packing problem with a color constraint / Y. A. Kochetov, Kondakov A. // *Yugoslav Journal of Operations Research.* – 2021. – Vol. 31 (3). – P. 285–298. – URL: <https://doi.org/10.2298/YJOR200117009K> (access data: 15.09.2025).
- [166] Kottwitz, D.A. The densest packing of equal circles on a sphere / D.A. Kottwitz // *Acta Crystallographica Section A: Foundations of Crystallography.* – 1991. – Vol. 45. – P. 158–165.
- [167] Lai, X. Iterated dynamic thresholding search for packing equal circles into a circular container / X. Lai, J.K. Hao, D. Yue, Z. Lu, Z.H. Fu // *European Journal of Operational Research.* – 2022. – Vol. 299, № 1. – P. 137–153.
- [168] Lai, X. Iterated dynamic neighborhood search for packing equal circles on a sphere / X. Lai, D. Yue, J.K. Hao, Z. Lu // *Computers & Operations Research.* – 2023. – Vol. 151. – P. 106–121.
- [169] Lamarche, F., Leroy C. Evaluation of the volume of intersection of a sphere with a cylinder by elliptic integrals / F. Lamarche, C. Leroy // *Comput. Phys. Commun.* – 1990. – Vol. 59, No 2. – P. 359–369.
- [170] LARES - Laser Relativity Satellite. – URL: [https://ilrs.gsfc.nasa.gov/missions/satellite\\_missions/current\\_missions/lars\\_general.html](https://ilrs.gsfc.nasa.gov/missions/satellite_missions/current_missions/lars_general.html) (access data: 29.12.2023).

- [171] Lempert, A.A. Multiple covering of a closed set on a plane with non-Euclidean metrics / A.A. Lempert, Q.M. Le // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, № 32. – P. 850–854.
- [172] Lempert, A.A. On reserve and double covering problems for the sets with non-Euclidean metrics / A.A. Lempert, A.L. Kazakov, Q.M. Le // Yugoslav Journal Operation Research. – 2019. – Vol. 29, № 1. – P. 69–79.
- [173] Levin, J.Z. Mathematical models for determining the intersections of quadric surfaces / J.Z. Levin // Comput. Graph. Image Process – 1979 – Vol. 11. P. 73–87.
- [174] Liberti, L. Optimal configuration of gamma ray machine radiosurgery units: the sphere covering subproblem / L. Liberti, N. Maculan, Y. Zhang // Optimization Letter – 2009. – Vol. 3. – P. 109–121.
- [175] Liu, Y. A faster algorithm for the constrained minimum covering circle problem to expedite solving  $p$ -center problems in an irregularly shaped area with holes. / Y. Liu // Naval Research Logistics – 2022. – Vol. 69, No 3. – P. 431–441.
- [176] Locatelli, M. Packing equal circles in a square: a deterministic global optimization approach. / M. Locatelli // Discrete Applied Mathematics – 2002. – Vol. 122. – P. 139–166.
- [177] Lopez, C.O. A heuristic for the circle packing problem with a variety of containers / C.O. Lopez, J.E. Beasley // European Journal of Operational Research. – 2011. – Vol. 214, No 3. – P. 512–525.
- [178] Lubachevsky, B.D. How to simulate billiards and similar systems / B.D. Lubachevsky // Journal of Computational Physics. – 1991. – Vol. 94. – P. 255–283.
- [179] Lubachevsky, B.D. Curved Hexagonal Packings of Equal Disks in a Circle / B.D. Lubachevsky, R.L. Graham // Discrete Comput. Geom. – 1997. – Vol. 18. – P. 179–194.
- [180] Mackay, A. The closest packing of equal spheres on a spherical surface / A. Mackay, J. Finney, K. Gotoh // Acta Crystallographica Section A: Crystal Physics, Diffraction, Theoretical and General Crystallography. – 1977. – Vol. 33. – P. 98–100.
- [181] Megiddo, N. On the complexity of some common geometric location problems / N. Megiddo, K.J. Supowit // SIAM J. Comput. – 1984. – V.13, № 1. – P. 182–196.
- [182] Melissen, H. Densest packings of congruent circles in an equilateral triangle / H. Melissen // American Mathematical Monthly. – 1993. – Vol. 100. – P. 916–925.
- [183] Melissen, J.B.M. Densest packing of eleven congruent circles in a circle / J.B.M. Melissen // Geometriae Dedicata. – 1994. – Vol. 50. – P. 15–25.
- [184] Melissen, J.B.M. Optimal packings of eleven equal circles in an equilateral triangle / J.B.M. Melissen // Acta Mathematica Hungarica. – 1994. – Vol. 65. – P. 389–393.
- [185] Melissen, J.B.M. Loosest circle coverings of an equilateral triangle / J.B.M. Melissen // Math. Mag. – 1997. – Vol. 70. – P. 119–125.
- [186] Melissen, J.B.M. How different can colours be? Maximum separation of points on a spherical octant / J. B. M. Melissen // Proc. R. Soc. Lond. A – 1998. – V.454. – P. 1499–1508.
- [187] Miles, R.E. Random Points, Sets and Tessellations on the Surface of a Sphere / R.E. Miles // The Indian Journal of Statistics Series A. – 1971. – V.12. – P. 401.
- [188] Mlaiki, N. On the Fixed Circle Problem on Metric Spaces and Related Results / N. Mlaiki, N. Ozgur, N. Tas, D. Santina // Axioms . – 2023. – V.33, № 2. – P. 145–174. URL: <https://doi.org/10.3390/axioms12040401> (access data: 20.01.2025).

- [189] Moore, J.E. Placement of retroreflectors on the Lageos satellite / J.E. Moore // NTRS - NASA Technical Reports Server. – 2013. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19760018219> (access data: 11.04.2025).
- [190] Musin, O.R. The Strong Thirteen Spheres Problem / O.R. Musin, A.S. Tarasov // Discrete & Comput. Geom. – 2012. – Vol. 48. – P. 128–141.
- [191] Musin, O.R. Enumerations of irreducible contact graphs on the sphere / O. Musin, A.S. Tarasov // Fundam. Prikl. Mat. – 2013. – V. 18, № 2. – P. 125–145.
- [192] Musin, O.R. The Tammes problem for  $N=14$  / O.R. Musin, A.S. Tarasov // Experimental Mathematics. – 2015. Vol. 24. – P. 460–468.
- [193] Na, H. Voronoi Diagrams on the Sphere / H. Na, C.N. Lee, O. Cheong // Computational Geometry. – 2002. – V.23, Iss. 2.– P. 183–194. – URL: [https://doi.org/10.1016/S0925-7721\(02\)00077-9](https://doi.org/10.1016/S0925-7721(02)00077-9) (access data: 29.12.2023).
- [194] Neville, E.H. On the Solution of Numerical Functional Equations / E.H. Neville // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1915. – Vol.14, No.1. – P. 308–326
- [195] Nurmela, K.J. Packing up to 50 equal circles in a square / K.J. Nurmela, P.R.J. Ostergard // Discrete and Computational Geometry. – 1997. – Vol. 18. – P. 111–120.
- [196] Nurmela, K.J. Covering a square with up to 30 equal circles / K. J. Nurmela, R.J.O. Patric // Lab. Technol. Helsinki Univ. – 2000. – 20p.
- [197] Nurmela, K.J. Conjecturally optimal coverings of an equilateral triangle with up to 36 equal circles / K. J. Nurmela // Experimental Math. – 2000. – Vol.9, No.2. – P. 241–250. – URL: <https://doi.org/10.1080/10586458.2000.10504649> (access data: 01.01.2025).
- [198] Okabe, A. Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams / A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara // U.K.:Wiley. – 1992.
- [199] Pach, J. Indecomposable Coverings / J. Pach, G. Tardos, G. Toth // Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory. – 2007. – Vol. 4381. – URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-540-70666-3\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-540-70666-3_15) (access data: 20.01.2025).
- [200] Panou G. Solving the geodesics on the ellipsoid as a boundary value problem / G. Panou, D. Delikaraoglou, R. Korakitis // Journal of Geodetic Science – 2013 – Vol. 3, No. 1. P. 40–47.
- [201] Panou G. The geodesic boundary value problem and its solution on a triaxial ellipsoid / G. Panou // Journal of Geodetic Science – 2013 – Vol. 3, No. 3. – P. 240-249.
- [202] Papadopoulou, E. The  $L_\infty$  Voronoi diagram of segments and VLSI applications / E. Papadopoulou, D.T. Lee // Internat. J. Comput. Geom. Appl. – 2001. – Vol.11. – C. 503–528. – URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0218195901000626> (access data: 29.12.2023).
- [203] Peikert, K. Packing Circles in a Square: A Review and New Results. In: Davisson, L.D., et al. System Modelling and Optimization. Lecture Notes in Control and Information Sciences / R. Peikert, D. Würtz, M. Monagan, C. de Groot // Springer, Berlin, Heidelberg – 1992. – Vol.180. – C. 45–54. – URL: <https://doi.org/10.1007/BFb0113271> (access data: 10.12.2024).
- [204] Pirl, U. Der Mindestabstand von  $n$  in der Einheitskreisscheibe gelegenen Punkten / U. Pirl // Mathematische Nachrichten. – 1969. Vol. 40. – P. 111–124.
- [205] Rabanca, G. Covering the Boundary of a Simple Polygon with Geodesic Unit Disks / G. Rabanca, I. Vigan // arXiv. – 2014. – URL: <https://arxiv.org/abs/1407.0614> (access data: 20.02.2025).

- [206] Robinson, R.M. Arrangement of 24 circles on a sphere / R.M. Robinson // *Math. Ann.* – 1961. – V. 144. – P. 14–48.
- [207] Rochal, P. Circle covering using medial axis / P. Rocha, A. Gomes, R. Rodrigues, F. Toledo // *Proceedings of the 11th IFAC Workshop on Intelligent Manufacturing Systems.* – 2013. – V. 11. – P. 402–407. – URL: <https://doi.org/10.3182/20130522-3-BR-4036.00081> (access data: 20.01.2025).
- [208] Rochal, S.B. Close packings of identical proteins in small spherical capsids and similar proteinaceous shells / S.B. Rochal, O.V. Konevtsova, I.Y. Golushko, R. Podgornik // *Soft Matter.* – 2023. – V. 19, № 44. – P. 8649–8658. – URL: <https://doi.org/10.1039/D3SM01106B> (access data: 20.01.2025).
- [209] Rogers, C.A. Covering a sphere with spheres / C.A. Rogers // *Mathematika.* – 1963. – Vol. 10. – P. 157–164. – URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00454-007-9000-7> (access data: 29.12.2023).
- [210] Saulskiy, V.K. Multisatellite systems with linear structure and their application for continuous coverage of the earth / V.K. Saulskiy // *Cosmic Research* – 2005. – Vol. 43, No. 1. – P. 34–51.
- [211] Schaer, J. On a geometric extremum problem / J. Schaer, A. Meir // *Canad. Math. Bull.* – 1965. – Vol. 8. – P. 21–27.
- [212] Schaer, J. The densest packing of five spheres in a cube / J. Schaer // *Canad. Math. Bull.* – 1966. – Vol. 9. – P. 271–274. – URL: <https://doi.org/10.4153/CMB-1966-034-8> (access data: 29.12.2023).
- [213] Schaer, J. The densest packing of six spheres in a cube / J. Schaer // *Canad. Math. Bull.* – 1966. – Vol. 9. – P. 275–280. – URL: <https://doi.org/10.4153/CMB-1966-035-5> (access data: 29.12.2023).
- [214] Schutte, K. Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7,8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand 1 Platz? / K. Schutte, B.L. Waerden van der // *Mathematische Annalen.* – 1951. – Vol. 123. – P. 96–124.
- [215] Sethian, J.A. Level set methods and fast marching methods: Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science / J.A. Sethian // Cambridge University Press, Cambridge. – 1999. – Vol. 3.
- [216] Shannon, C.E. A Mathematical Theory of Communication / C.E. Shannon // *The Bell System Technical Journal.* – 1948. – Vol. 27. – P. 379–423, 623–656.
- [217] Shkaberina, G. Clustering algorithm with a greedy agglomerative heuristic and special distance measures / G. Shkaberina, L. Verenev, E. Tovbis, N. Rezova, L. Kazakovtsev // *Algorithms.* – 2022. – Vol. 15, No 6. – P. 191.
- [218] Sloane, N.J.A. The packing of spheres / N.J.A. Sloane // *Scientific American.* – 1984. – Vol. 50, No 1. – P. 116–125.
- [219] Sloane, N.J.A. Sphere packings, lattices and groups. / N.J.A. Sloane, J.H. Conway. – NY: Springer New York, 1988.
- [220] Spherical Codes – URL: <https://spherical-codes.org/> (access data: 11.04.2025).
- [221] Skoge, M. Packing hyperspheres in high-dimensional Euclidean spaces / M. Skoge, A. Donev, F. H. Stillinger, S. Torquato // *Physical Review E* – 2006. – Vol. 74, iss. 4.
- [222] Son, H.S. Design of a spherical focal surface using close-packed relay optics / H.S. Son, D.L. Marks, J. Hahn, J. Kim, D.J. Brady // *Opt. Express.* – 2011. – Vol. 19, No. 17. – P. 16132–16138. – URL: <https://doi.org/10.1364/OE.19.016132> (access data: 01.01.2024).

- [223] Strohmer, T. Grassmannian frames with applications to coding and communication / T. Strohmer, R. W. Heath // *Appl. Comp. Harmonic Anal.* – 2003. – Vol. 14. – P. 257–275.
- [224] Specht, E. Packomania [Электронные ресурсы]. – 2025. – URL: <http://www.packomania.com> (access data: 20.01.2025).
- [225] Stoyan, Y.G. Covering a compact polygonal set by identical circles / Y.G. Stoyan, V.M. Patsuk // *Comput. Optim. Appl.* – 2010. – Vol. 46. – P. 75–92.
- [226] Stoyan, Y. Optimized Packings in Space Engineering Applications: Part I / Y. Stoyan // *Modeling and Optimization in Space Engineering. Springer Optimization and Its Applications.* – 2019. – Vol. 144. – P. 395–437.
- [227] Szabo, P.G. Packing up to 200 Equal Circles in a Square / P.G. Szabo, E. Specht // *Models and Algorithms for Global Optimization, Springer-Verlag, Berlin* – 2007. – Vol. 4. – P. 141–156.
- [228] Szabo, P.G. New approaches to circle packing in square with program codes / P.G. Szabo, M.Cs. Markot, T. Csendes, E. Specht, L.G. Casado, I. Garcia. – N.Y.: Springer Verlag, 2007. – 390 p.
- [229] Tammes, P.M.L. On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen-grains / P.M.L. Tammes // *Recueil des travaux botaniques neerlandais.* – 1930. – Vol. 27. – P. 1–84.
- [230] Tarnai, T. Multi-symmetric close packings of equal spheres on the spherical surface / T. Tarnai, Z. Gaspar // *Acta Crystallographica Section A: Foundations of Crystallography.* – 1987. – Vol. 43. – P. 612–616. – URL: <http://dx.doi.org/10.1107/S0108767387098842> (access data: 01.01.2025).
- [231] Tarnai, T. Covering a sphere by equal circles, and the rigidity of its graph / T. Tarnai, Z. Gaspar // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* – 1991. – Vol. 110, No 1. – P. 71–89.
- [232] Tarnai, T. Covering a Square by Equal Circles / T. Tarnai, G. Zsolt // *Elemente der Mathematik.* – 1995. – Vol. 50, № 4. – P. 167–170.
- [233] Tarnai, T. Symmetry of Golf Balls / T. Tarnai // *Katachi U Symmetry, Springer, Tokyo.* – 1996. – P. 207–214. – URL: [https://doi.org/10.1007/978-4-431-68407-7\\_22](https://doi.org/10.1007/978-4-431-68407-7_22) (access data: 01.01.2025).
- [234] Teshima, Y. Dense packing of equal circles on a sphere by the Minimum-Zenith method: symmetrical arrangement / Y. Teshima, T. Ogawa // *Forma.* – 2000. – Vol. 15, № 4. – P. 347–364.
- [235] Thompson, S. The area of the solid of intersection of a sphere and an ellipsoid, a first approach / S. Thompson // *Electronic Journal of Mathematics and Technology* – 2013 – Vol. 7, No. 3. – P. 221-231.
- [236] Toregas, C. The Location of Emergency Service Facilities / C. Toregas, R. Swain, C. ReVelle, L. Bergman // *Operations Research.* – 1971. – Vol.19, № 6. – P. 1363–1373.
- [237] Toth, L.F. Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum / L.F. Toth // *Berlin: Springer-Verlag.* – 1953.
- [238] Toth, L.F. Remarks on a theorem of R. M. Robinson / L.F. Toth // *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.* – 1969. – Vol. 4. – P. 441–445.
- [239] Toth, G.F. Multiple packing and covering of the plane with circles / G.F. Toth // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* – 1976. – V.27, № 1–2. – P. 135–140.
- [240] Toth, G.F. Multiple packing and covering of spheres / G.F. Toth // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* – 1979. – V.34, № 1–2. – P. 165–176.

- [241] Toth, G.F. Thinnest covering of a circle by eight, nine, or ten congruent circles / G.F. Toth // Combinatorial and Computational Geometry. – 2005. – V. 52. – P. 361–376.
- [242] Toth, G.F. Packing and covering [Электронный ресурс] / G.F. Toth // Handbook of Discrete and Computational Geometry. – URL: <https://www.csun.edu/~ctoth/Handbook/chap2.pdf> (access data: 20.01.2025).
- [243] Tropp, J.A. Designing structured tight frames via an alternating projection method / J.A. Tropp, I.S. Dhillon, R.W. Heath, T. Strohmer // IEEE Transactions on Information Theory. – 2005. – V. 51, № 1. – P. 188–209.
- [244] Verblunsky, S. On the Least Number of Unit Circles Which Can Cover a Square / S. Verblunsky // J. Lond. Math Soc. – 1949. – Vol. 24. – P. 164–170. – URL: <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-24.3.164> (access data: 29.12.2023).
- [245] Verger-Gaugry, J.L. Covering a Ball with Smaller Equal Balls in  $R^n$  / J.L. Verger-Gaugry // Discrete & Computational Geometry. – 2005. – Vol. 33. – P. 143–155. – URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00454-004-2916-2> (access data: 29.12.2023).
- [246] Viazovska, M.S. The sphere packing problem in dimension 8 / M.S. Viazovska // Annals of Mathematics – 2017. – V.185, № 3. – P. 991–1015.
- [247] Vigan, I. Packing and Covering a Polygon with Geodesic Disks / I. Vigan // arXiv. – 2013. – URL: <https://arxiv.org/abs/1311.6033> (access data: 20.02.2025).
- [248] Xavier, A.E. Optimal Covering of Plane Domains by Circles Via Hyperbolic Smoothing. / A.E. Xavier, A.A.F.D. Oliveira // J Glob Optim. – 2005. – Vol. 31. – P. 493–504. – URL: <https://doi.org/10.1007/s10898-004-0737-8> (access data: 25.01.2025).
- [249] Wang, H. An improved algorithm for the packing of unequal circles within a larger containing circle/ H. Wang, W. Huang, Q. Zhang , D. Xu // European Journal of Operational Research. – 2002 – Vol. 141. – P. 440–453.
- [250] Welch, L. Lower bounds on the maximum cross correlation of signals / L. Welch // IEEE Transactions on Information Theory. – 1974 – Vol. 20, No 3. – P. 397–399. – URL: <https://doi.org/10.1109/TIT.1974.1055219> (access data: 11.04.2025).
- [251] WenQi, H. Quasi-physical global optimization method for solving the equal circle packing problem / H. WenQi, Y. Tao // ISCIENTIA SINICA Informationis – 2011 – V.41. – P. 686–693. – URL: <https://doi.org/10.1360/zf2011-41-6-686> (access data: 20.11.2024).
- [252] Whittemore, J.K. A Note on Geodesic Circles / J.K. Whittemore // Annals of Mathematics. – 1901 – Vol. 3, No. 1. – P. 21–24. – URL: <https://doi.org/10.2307/1967629> (access data: 29.12.2024).
- [253] Wu, J. Energy-Efficient Node Scheduling Models in Sensor Networks with Adjustable Ranges / J. Wu, S. Yang // Int. J. of Foundations of Computer Science – 2005 – Vol. 6, No 1. – P. 3–17. – URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0129054105002838> (access data: 29.12.2023).
- [254] Zalubovsky, V. Energy-efficient Area Coverage by Sensors with Adjustable Ranges / V. Zalubovsky, S. Astrakov, A. Erzin // Sensors – 2009 – Vol. 9, No 4. – P. 2446–2460. – URL: <https://doi.org/10.3390/s90402446> (access data: 29.12.2023).
- [255] Zitha P., Banhart J., Verbist G. Foams, Emulsions and their Applications. MIT-Verlag, Bremen, 2000. . – Bremen: MIT-Verlag, 2000.