

На правах рукописи



НГУЕН ДЫК МИНЬ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ О ПОКРЫТИИ И УПАКОВКЕ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ
ВРАЩЕНИЯ**

Научная специальность 1.2.2. Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск — 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Иркутский национальный исследовательский технический университет»

Научный руководитель: **Казаков Александр Леонидович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор РАН

Официальные оппоненты: **Кочетов Юрий Андреевич**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории исследования операций, ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Хамисов Олег Валерьевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, заведующий отделом прикладной математики № 90, ФГБУН Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук

Защита состоится «10» декабря 2025 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 24.2.306.05, созданного на базе Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Иркутский государственный университет» по адресу: 664003, г. Иркутск, бульвар Гагарина, 20.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ФГБОУ ВО «ИГУ» по адресу: г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124 и на сайте <http://isu.ru/>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах с подписью составителя, заверенные печатью организации, просим направлять по адресу: 664003, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, д. 1, ИГУ, ИМИТ.

Автореферат разослан «_____» _____ 2025 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, кандидат физико-математических наук, доцент



Поплевко В. П.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. Исследование, анализ и эффективное распределение ресурсов на определенной территории является одной из современных задач оптимизации, которая с математической точки зрения есть задача размещения – поиск оптимального расположения объектов в заданном множестве. Двумя наиболее распространенными классами задач размещения являются задачи построения тончайших покрытий и плотнейших упаковок. Построение покрытия заключается в размещении геометрических объектов в ограниченном множестве таким образом, чтобы множество целиком лежало в объединении этих объектов. В задаче упаковки требуется разместить объекты так, чтобы они располагались внутри множества, не пересекаясь друг с другом.

Данные постановки возникают в различных прикладных задачах. Так, при проектировании спутниковых сетей расположение спутников на орбите, обеспечивающее покрытие ими поверхности Земли при движении, приводит к необходимости решения задачи о покрытии сферы равными кругами. В теории кодирования построение сферических кодов для различных алфавитов, позволяющего передавать информацию на большие расстояния, требует решения задачи упаковки равных кругов в сферу. Важным показателем для оценки качества размещения является плотность – отношение суммы площадей размещаемых объектов к площади множества. Качество покрытия тем лучше, чем плотность меньше, а для упаковки, наоборот – чем больше плотность, тем лучше.

Задачи покрытия и упаковки в некотором смысле являются взаимно обратными и имеют долгую историю исследований, которая началась в XVII веке с гипотезы Кеплера. В дальнейшем такие задачи рассматривали Л. Ф. Тот, Дж. Б. М. Мелиссен, К. Дж. Нурмела, Ш. И. Галиев, Ю. Г. Стоян, Т. Тарнай, В. С. Брусов, Э. Гаспар, Т. С. Хейлз и многие другие. Первоначально исследования были сосредоточены на решении задач покрытия и упаковки для простых геометрических объектов: круг и правильные многоугольники, в качестве покрывающих или упаковываемых объектов использовались равные круги. При малом числе кругов оптимальные покрытия найдены для квадрата, круга и равностороннего треугольника в работах Г. Ф. Тота, Дж. Б. М. Мелиссена, Ф. Фодора, М. К. Маркота и др. В случае большого числа кругов решения строились приближенно, применялись эвристический метод Вороного (В. С. Брусов, Ш. И. Галиев), методы линейного программирования (М. Кардей, М. Касацца), генетические алгоритмы (А. В. Подлазова, А. Бортфельдт),

методы непрерывной оптимизации (А. Л. Казаков, К. Дж. Нурмела) и другие.

В дальнейшем методы решения задач покрытия и упаковки были распространены на трехмерное и многомерные пространства. В работах Л. Ф. Тота, Ю. Г. Стояна, К. А. Роджерса, И. Думера, Дж. Х. Конвея, А. Бездека и др. рассматривались задачи покрытия равными шарами таких трехмерных поверхностей, как сфера и куб. Результаты исследования нашли практическое применение в области цифровой обработки и проектирования спутниковых сетей. В настоящее время активно изучается задача покрытия эллипсоида равными шарами, которая, в частности, возникает в медицине при настройке аппаратуры для лечения опухолей гамма-лучами.

Задача упаковки равных шаров на сфере, аналогичная известной задаче Таммеса, также активно изучалась в работах К. Берецкого, Л. Ф. Тота, К. Шутте, Л. Данцера, Р. М. Робинсона, О. Р. Мусина, Н. Дж. А. Слоана, Т. Тарнаи и др. Некоторые полученные результаты применялись при построении сферических кодов в теории кодирования и передачи информации на большие расстояния. Для решения таких задач покрытия и упаковки применяются метод итеративной оптимизации (М. Маккей, Б. Клэр), метод с наименьшей плотностью (И. Думер, К. А. Роджерс), подход к минимизации потенциальной функции (Э. Г. Биргин, А. Гроссо) и др. Отметим, что данные методы применимы только для решения задачи покрытия и упаковки для сферы и куба. Для поверхностей вращения, таких как эллипсоиды, конусы и цилиндры, не существует специального метода решения.

Наконец, в технологии цифровой съемки на больших расстояниях проектируется сферическая фокальная поверхность. Отсюда возникает задача плотнейшей упаковки в сферический сегмент специальных объектов – геодезических кругов. До настоящего времени изучались в двумерном пространстве в немногих работах И. Вигана, Г. Рабанки, М. Г. Боргельта и др. Задача упаковки геодезических кругов для поверхностей вращения изучена мало. Здесь обычно применяются сферические упаковки равных шаров (Х. С. Сон), однако этот метод не гарантирует получение оптимальных упаковок и требует больших затрат процессорного времени.

При решении ряда задач покрытия и упаковки, возникающих в приложениях, например, в логистике, необходимо учитывать неравномерную скорость перемещения по поверхности, что, в свою очередь, приводит к необходимости введения специальной неевклидовой метрики, в которой мерой удаленности двух точек служит наименьшее время перемещения между ними. Задачи о покрытии и упаковке с неевклидовыми метриками относительно

мало изучены, отметим в этой связи работы А. Л. Казакова, А. А. Лемперт, П. Д. Лебедева, однако поверхности вращения, кроме сферы (в евклидовом пространстве), в них не рассматриваются.

Таким образом, задача построения оптимальных покрытий и упаковок для поверхностей вращения, в том числе с неевклидовой метрикой, равными шарами или геодезическими кругами является актуальной как с точки зрения вычислительной математики, так и математического моделирования.

Объект и предмет исследования. Объект исследования: поверхности вращения, для которых необходимо определить оптимальное расположение покрывающих и упаковываемых фигур – шаров или геодезических кругов. Предмет исследования: математические модели размещения покрывающих и упаковываемых фигур на поверхностях вращения, представленные в виде задач непрерывной оптимизации и численные методы их решения.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является разработка модельно-алгоритмического инструментария решения задач размещения фигур с предопределенными свойствами в трехмерном пространстве на основе построения покрытий и упаковок для поверхностей вращения, и его применение для решения прикладных задач. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Выполнить математическую формализацию задач о покрытии и упаковке для поверхностей вращения в форме задач непрерывной оптимизации.

2. Доказать теорему и утверждения о свойствах геодезического расстояния, на основе чего разработать метод построения начального приближения для решения задач покрытия и упаковки геодезических кругов в сферический сегмент.

3. Разработать вычислительные алгоритмы для решения задачи оптимизации на основе оптико-геометрического подхода и диаграммы Вороного и доказать для них теоремы о релаксационности.

4. Создать комплекс программ, реализующий предложенные численные алгоритмы. Провести вычислительные эксперименты, чтобы проверить работоспособность алгоритма и убедиться в корректности вычислений.

5. Идентифицировать модели для конкретных прикладных задач из области медицины и цифровой обработки. Исследовать эти модели, используя созданный комплекс программ.

Методы исследования. Исследования выполнены с использованием методов математического моделирования, непрерывной оптимизации, теории аппроксимации и математической статистики. Для реализации модели используются методы вычислительной геометрии, численные методы решения

дифференциальных уравнений и бильярдное моделирование. Оценка результатов расчетов проводилось с использованием методов статистической обработки данных.

Тематика работы соответствует следующим пунктам паспорта специальности 1.2.2: пункт 1. «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений» – в части математической формализации задачи о покрытии равными объектами поверхностей вращения и задачи об упаковке равных объектов на поверхностях вращения; пункт 3. «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента» – в части разработки и реализации численных алгоритмов в виде комплекса программ «Покрытия и упаковки для поверхностей вращения»; пункт 8. «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента» – в части решения модельных и прикладных задач из области медицины и цифровой обработки изображений.

Научная новизна исследования раскрывается в следующих аспектах:

1. Построены математические модели покрытия и упаковки равными шарами и геодезическими кругами для поверхностей вращения. Впервые для решения рассматриваемых задач были предложены модели, допускающие использование специальной метрики, характеризующей свойства моделируемого объекта.

2. Впервые предложены численные методы для построения геодезической диаграммы Вороного на поверхностях вращения с помощью оптико-геометрического подхода, учитывающие различные скорости световой волны, для которых доказаны теоремы о релаксационности.

3. На основе оптико-геометрического подхода были созданы новые численные алгоритмы, позволяющие решать задачи о покрытии и упаковке для поверхностей вращения. В отличие от известных методов, эти алгоритмы могут работать не только на сфере, но и на других поверхностях вращения.

4. Доказаны строгие математические утверждения о свойствах геодезического расстояния, на основе которых разработан метод построения начального приближения для задач покрытия и упаковки геодезических кругов в сферический сегмент.

5. Разработан новый комплекс программ, который использует предложенные численные алгоритмы и позволяет получать решения различных прикладных задач.

Достоверность и обоснованность. Достоверность подтверждается

сопоставлением с известными научными результатами. Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными и не противоречат результатам других исследователей. В предложенном методе используются корректные математические преобразования и строго доказанные утверждения.

Теоретическая значимость заключается в том, что полученные результаты способствуют развитию методов математического моделирования, численных методов оптимизации, а также вносят вклад в развитие численных методов для решения различных задач покрытия и упаковки. Способ введения равномерной сетки для построения диаграммы Вороного на поверхностях вращения вносит вклад в развитие теории аппроксимации и вычислительной геометрии. Доказанные утверждения о свойствах геодезического расстояния вносят вклад в развитие теории оптимизации, а утверждения о свойствах алгоритмов – вычислительной математики.

Практическая значимость состоит в том, что разработанный комплекс программ позволяет построить решение задачи настройки гамма-излучения при лечении опухоли головного мозга и задачи проектирования сферической фокальной поверхности с большим количеством датчиков. Кроме того, предложенные численные алгоритмы могут быть использованы для решения других прикладных задач, таких как создание сферических кодов, проектирование систем видеонаблюдения и физической защиты.

Результаты диссертационного исследования могут быть использованы студентами различных специальностей при изучении курсов «Методы оптимизации», «Исследование операций», «Системный анализ».

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертационного исследования были представлены на следующих научных конференциях: X Международный семинар «Критические инфраструктуры в цифровом мире IWCI–2023» (Иркутская область, п. Большое Голоустное, 2023); Международная (55-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (г. Екатеринбург, 2024); XI Международный семинар «Критические инфраструктуры в цифровом мире IWCI–2024» (Иркутская область, п. Большое Голоустное, 2024); XXIII Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций MOTOR–2024» (г. Омск, 2024); 6-я международная конференция «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения DYSC–2024» (г. Иркутск, 2024); Baikal Solver Workshop 2024 «Mathematical Optimization and Operations Research» (г. Красноярск, 2024); Международная (57-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (г. Екатеринбург, 2025);

XII Международный семинар «Критические инфраструктуры в цифровом мире IWCИ–2025» (Иркутская область, п. Большое Голоустное, 2025), Всероссийская конференция «Теория управления и математическое моделирование» (г. Ижевск, 2025), XXIV Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций МОТОР–2025» (г. Новосибирск, 2025).

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 16 научных работах, из них 4 статьи в журналах, входящих в Перечень ВАК по профилю 1.2.2; 4 статьи в изданиях, индексируемых в международных базах WoS и Scopus. Получены 3 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ и 1 сертификат о победе в первом этапе челлендж-конкурса по решению прикладных задач 23-й Международной конференции МОТОР-2024.

Личный вклад. Все результаты, представленные в данной диссертации, получены лично соискателем.

Постановки задач о покрытии и об упаковке для поверхностей вращения выполнены А. Л. Казаковым. В совместных работах А. А. Лемперт принадлежит алгоритм распространения волны в оптически неоднородной среде, П. Д. Лебедеву – геометрический метод построения покрытия и упаковки. В комплексе программ архитектура разработана А. Л. Казаковым, интерфейс разработан А. А. Лемперт, разработка алгоритма поддержки и программная реализация всех модулей принадлежит автору диссертации.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 255 наименований. Объем диссертации — 176 страниц, включая 82 рисунка и 29 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, формулируется цель и задачи, определяются объект и предмет исследования, методы исследования, раскрывается научная новизна и практическая значимость результатов исследования. Также излагаются основные научные положения, выносимые на защиту, приводится структура и краткий обзор содержания работы.

В главе 1 представлен обзор исследований, посвященных задачам покрытия и упаковки на плоскости, сфере и для выпуклых объектов. Описаны наиболее известные и эффективные численные методы решения задач покрытия и упаковки на плоскости и сфере. Приведено описание оптико-

геометрического подхода и метода бильярдного моделирования, а также обсуждена возможность их применения для решения задач покрытия и упаковки для поверхностей вращения.

В главе 2 в п. 2.1 выполнена математическая формализация задач о покрытии и упаковке для поверхностей вращения в форме задач непрерывной оптимизации. Обсуждаются различные варианты постановок задач, которые приводят к необходимости применения различных типов и способов модификации математической модели.

Рассматриваются поверхности вращения второго порядка (квадрики) – единичная сфера, эллипсоид, боковые поверхности цилиндра и конуса. Фактически под покрываемым или упаковываемым объектом понимают зону действия некоторого устройства, расположенного на поверхности. В зависимости от постановки задачи может быть сферическим сегментом, шаром или геодезическим кругом.

Пусть в трехмерном метрическом пространстве X заданы поверхность вращения $S \subset X$; n – количество объектов; $O_i(x_i, y_i, z_i) \in S$, $i = \overline{1, n}$ – координаты i -ого объектов, которые принадлежат на поверхности вращения S и непрерывная функция $0 < f(x, y, z) \leq \beta$, определяющая мгновенную скорость движения в каждой точке $(x, y, z) \in X$. Минимальное время перемещения между двумя точками $a, b \in X$ по поверхности S определяется из решения задачи

$$\rho(a, b) = \min_{\Gamma \in G(a, b)} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{f(x, y, z)}, \quad (1)$$

где $G(a, b)$ – множество непрерывных кривых, принадлежащих S и соединяющих точки a и b . Поверхность S обычно задается параметрически, и тогда $x = x(\alpha, u)$, $y = y(\alpha, u)$, $z = z(\alpha, u)$. Если $f(x, y, z) = 1$, интеграл из (1) легко вычисляется и выражение $\rho(a, b)$ определяется наименьшее расстояние на поверхности S между двумя точками a и b – *геодезическое расстояние*. В остальных случаях (1) определяет минимальное время перемещения между a и b , которое будет использоваться как мера удаленности этих точек.

Постановка задачи о покрытии. Необходимо разместить n устройств с одинаковыми радиусами действия R на поверхности S так, чтобы поверхность S принадлежала объединению устройств и радиус действия устройств был минимально возможным.

В этой постановке зона действия i -го устройства определяется как

$$D_i = \{p \in S : \rho(O_i, p) \leq R\}, \quad (2)$$

тогда условие, гарантирующее, что поверхность S принадлежала объединению устройств, можно записать как $S \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$. Кроме того, поскольку устройства находятся на поверхности, $O_i \in S, i = \overline{1, n}$.

С другой стороны, необходимо минимизировать радиус действия устройств, поэтому целевая функция задачи может быть описана следующим образом:

$$F_{cov} = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{p \in D_i} \rho(O_i, p) \rightarrow \min. \quad (3)$$

Функция (3) минимизирует время распространения волны от устройства до границы его зоны действия. Если рассматривать зону покрытия устройства как объект, то радиус зоны действия – радиус объекта, тогда решение задачи с целевой функцией (3) аналогично решению задачи о покрытии поверхности равными объектами с минимальным радиусом. Задача о покрытии переформулируется следующим образом:

$$R \rightarrow \min, \quad (4)$$

$$\forall p \in S, \exists i: \rho(O_i, p) \leq R, \quad (5)$$

$$O_i \in S, i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Вариант П1. Поверхность S является единичной сферой, а покрывающие объекты C_i – сферические сегменты. Тогда радиус R покрытия является угловым размером сегмента.

Вариант П2. Поверхность S является сферическим сегментом с угловым размером θ , а C_i – геодезические круги. Тогда радиус покрытия R – радиус геодезического круга.

Вариант П3. Поверхность S является эллипсоидом, боковой поверхностью цилиндра или боковой поверхностью конуса, а объекты C_i – шары. Тогда зона действия устройства понимается как пересечение шара C_i и поверхности S , поэтому радиус покрытия R – радиус шара. Данный вариант соответствует задаче покрытия поверхности S равными шарами.

Отметим, что поверхность S , вообще говоря, не обязана иметь второй порядок и может являться тором, катеноидом, псевдосферой, овоидом и т.д.

Постановка задачи об упаковке. Необходимо разместить n устройств с одинаковыми радиусами действия R на поверхности S так, чтобы радиус действия R был максимальным, все зоны действия устройств не пересекались и не выходили за границу поверхности S . В этой постановке задачи устройства находятся на поверхности, поэтому $O_i \in S, i = \overline{1, n}$, зона действия i -го

устройства определяется формулой (2). Тогда условие, гарантирующее, что все зоны действия устройств не пересекаются, имеет вид

$$\rho(O_i, O_j) \geq 2R, \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j.$$

Условие, гарантирующее, что все зоны действия устройств не выходят за границу поверхности, задается следующими образом. Пусть ∂S — граница поверхности S , тогда

$$\rho(O_i, \partial S) \leq R, \forall i = \overline{1, n}.$$

Отметим, что в случае, когда поверхность S замкнута (например, сфера или эллипсоид), данное условие выполняется автоматически.

Необходимо максимизировать радиус действия устройств, поэтому целевая функция задачи может быть описана следующим образом:

$$F_{pack} = \min_{1 \leq i \leq n} \max_{p \in D_i} \rho(O_i, p) \rightarrow \max \quad (7)$$

Если рассматривать зону покрытия устройства как единый объект, то радиус зоны действия – радиус объекта, и решение задачи с целевой функцией (7) аналогично решению задачи размещения равных шаров с максимальным радиусом на поверхности с метрикой (1). Тогда задача переформулируется следующим образом:

$$R \rightarrow \max, \quad (8)$$

$$\rho(O_i, O_j) \geq 2R, \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j \quad (9)$$

$$\rho(O_i, \partial S) \leq R, \forall i = \overline{1, n} \quad (10)$$

$$O_i \in S, i = \overline{1, n}, \quad (11)$$

Вариант У1. Множество S является единичной сферой, а упаковываемые объекты C_i – сферические сегменты. Тогда радиус упаковки R является угловым размером сегмента.

Вариант У2. Множество S является сферическим сегментом с угловым размером θ , а C_i – геодезические круги. Тогда радиус упаковки R – радиус геодезического круга.

Вариант У3. Множество S является эллипсоидом, боковой поверхностью цилиндра или боковой поверхностью конуса, а C_i – шары. Тогда радиус упаковки R – радиус шара.

В п. 2.2 вводится геодезическое расстояние для каждой рассматриваемой поверхности. Для сферы геодезическое расстояние между двумя точками a и b вычисляется как $d_{sph}(a, b) = \arccos(\vec{a} \cdot \vec{b})$, где $\vec{a} \cdot \vec{b}$ – скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} .

Для боковой поверхности цилиндра с радиусом основания r и высотой h : $S = \{x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha, z = u : \alpha \in [0, 2\pi); u \in [0, h]\}$, где α – угол вращения, и u – высота точки, геодезическое расстояние между двумя точками $a(\alpha_1, u_1)$ и $b(\alpha_2, u_2)$ определяется как

$$d_{cyl}(a, b) = \sqrt{\pi^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (u_1 - u_2)^2}.$$

Для боковой поверхности конуса с радиусом основания r и высотой h : $S = \{x = u \cos \alpha, y = u \sin \alpha, z = h(1 - \frac{u}{r}) : \alpha \in [0, 2\pi); u \in [0, r]\}$, где α – угол вращения, и u – отношение радиуса к высоте, геодезическое расстояние между двумя точками $a(\alpha_1, u_1)$ и $b(\alpha_2, u_2)$ определяется как

$$d_{con}(a, b) = \sqrt{\left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right) \left(u_1^2 + u_2^2 - 2u_1u_2 \cos \frac{r|\alpha_1 - \alpha_2|}{\sqrt{h^2 + r^2}}\right)}.$$

Эллипсоид с центром в начале координат имеет вид

$$x = a \cos \mu \cos \theta, y = b \cos \mu \sin \theta, z = c \sin \mu, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \frac{-\pi}{2} \leq \mu \leq \frac{\pi}{2},$$

где величины a, b, c – полуоси эллипсоида, θ – долгота и μ – широта.

Геодезическое расстояние на эллипсоиде ds определяется из решения уравнения $ds^2 = Hd\mu^2 + Gd\theta^2$, где s – искомая функция, θ – независимая переменная, а $\mu = \mu(\theta)$. Для трехосного эллипсоида с полуосями $a > b > c$ параметры H и G определяются по следующим формулам:

$$H = H_\mu(h_y^2 \cos^2 \mu + h_z^2 \sin^2 \theta), G = G_\theta(h_y^2 \cos^2 \mu + h_z^2 \sin^2 \theta),$$

$$H_\mu = \frac{b^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu}{h_x^2 - h_y^2 \sin^2 \mu}, G_\theta = \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}{h_x^2 - h_z^2 \sin^2 \theta},$$

$$h_x = \sqrt{a^2 - c^2}, h_y = \sqrt{b^2 - c^2}, h_z = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Уравнение, определяющее геодезическое расстояние, приводится к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка и решается численно.

В п. 2.3 разработан метод выбора начального приближения, на основе проектирования сферического сегмента на плоскость, и доказанной теоремы о свойствах геодезического расстояния. Предложенный метод используется для решения задачи в вариантах П2 и У2.

Проектирование сферического сегмента на плоскость

Задана единичная сфера с центром O в начале координат

$\Theta = \{(\varphi, \beta) : 0 \leq \varphi < 2\pi, -\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2\}$, где (φ, β) — долгота и широта соответственно. На сфере задан сферический сегмент $S(A, \theta) \subset \Theta$, где A — центр сегмента и одновременно северный полюс сферы, θ — угловой размер сегмента ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$). Пусть Π — координатная плоскость $z = 0$. Зададим отображение $F : S(A, \theta) \rightarrow \Pi$ следующим образом. Сначала спроецируем центр A сегмента в начало координат O на плоскость Π . Каждой точке $P(\varphi_0, \beta_0) \in S(A, \theta)$ с геодезическим расстоянием до центра сегмента $\rho(A, P) = \rho_0$ и углом вращения φ_0 будет соответствовать одна и только одна точка $P'(\rho_0, \alpha_0)$ на плоскости, где $\rho_0 = \frac{\pi}{2} - \beta_0$, $\alpha_0 = \varphi_0$ (см. рис. 1).

Пусть точки B_1, C_1 принадлежат сферическому сегменту $S(A, \theta)$, причем $\rho(A, B_1) = \rho_1, \rho(A, C_1) = \rho_2$. Точки $B_2, C_2 \in \Pi$, причем $B_2 = F(B_1), C_2 = F(C_1)$. Пусть $\rho(B_1, C_1) = a_1$ и $B_2C_2 = a_2$. (см. рис. 2).

Лемма 1. Пусть $\rho_1 = \rho_2 = q$. Тогда: $\sin \frac{a_1}{2} = \frac{a_2 \sin q}{2q}$.

Теорема 1. Геодезическое расстояние между двумя точками на сегменте не превосходит расстояния между двумя их образами на плоскости.

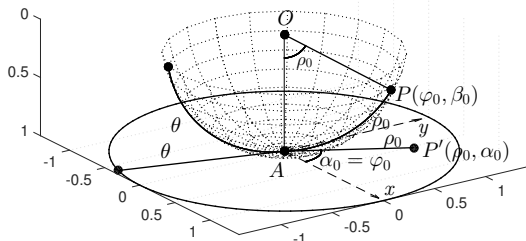


Рис. 1: Метод проекции

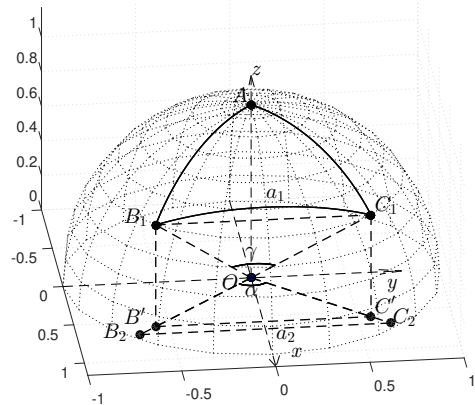


Рис. 2: Иллюстрация леммы

Преобразование упаковки равных кругов в круг в упаковку геодезических кругов в сферический сегмент. Пусть M_0 — множество из n равных кругов, упакованных в единичный круг: $M_0 = \{(J_i, R'), i = \overline{1, n}\}$, где (J_i, R') , $i = \overline{1, n}$ — круг с центром $J_i \in \Pi$, имеющий полярные координаты (ρ_i, α_i) и радиус R' . Тогда M_1 — множество n равных кругов, упакованных в круг радиуса θ определяется как $M_1 = \{(I_i, R'\theta), i = \overline{1, n}\}$, где $I_i \in \Pi$ имеет полярные координаты $(\rho_i\theta, \alpha_i)$ и $M_2 = \{O_i = F^{-1}(I_i), i = \overline{1, n}\}$ — множество точек $O_i(\frac{\pi}{2} - \rho_i\theta, \alpha_i) \in S(A, \theta)$, которые находятся обратной проекцией точек $I_i \in \Pi$.

Из леммы 1 и теоремы 1 следует, что геодезические круги с центрами $O_i \in M_2$ и радиуса $\bar{R}_i = 2 \arcsin \left(\frac{R'}{2\rho_i} \sin(\rho_i\theta) \right)$ образуют упаковку для сферического сегмента $S(A, \theta)$. Для того чтобы упаковываемые круги были равными, выберем $R = \min_{i=\overline{1, n}} \bar{R}_i$.

Построенная упаковка, вообще говоря, не является оптимальной, ее улучшение выполняется методом бильярдного моделирования с использованием следующих утверждений.

Утверждение 1. Если $\rho_i \geq \rho_j$, то $\bar{R}_i \leq \bar{R}_j, \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

Утверждение 2. Если $\Delta = \gamma(R'\theta - R), 0 < \gamma < 1, \phi_i = \rho_i\theta + \Delta, O_i^* \left(\frac{\pi}{2} - \phi_i, \alpha_i \right) \in S(A, \theta), \forall i = \overline{1, n}, R_{imp} = \min \left\{ \min_{i, j = \overline{1, n}, i \neq j} \frac{\rho(O_i^*, O_j^*)}{2}, R'\theta - \Delta \right\}$, то $R_{imp} > R$.

Из утверждений 1 и 2 следует, что для всех значений $0 < \gamma < 1$ геодезические круги с новыми центрами $O_i^* \left(\frac{\pi}{2} - \rho_i\theta - \Delta, \alpha_i \right)$ и радиусом R_{imp} образуют упаковку лучше, чем предыдущая упаковка с радиусом R .

Нетрудно видеть, что при увеличении коэффициента γ значение $R'\theta - \Delta$ уменьшается, а $\min_{i, j = \overline{1, n}, i \neq j} \rho(O_i^*, O_j^*)$ увеличивается. Наилучший радиус упаковки достигается при выполнении равенства

$$R'\theta - \Delta = \min_{i, j = \overline{1, n}, i \neq j} \rho(O_i^*, O_j^*).$$

Процесс улучшения осуществляется следующим образом:

Шаг 1: $\gamma = \frac{1}{m}$, где m — заданный большой натуральный параметр.

Шаг 2: Вычисляется R_{imp} из утверждения 2. Если значение R_{imp} больше предыдущего, он сохраняется в качестве решения задачи.

Шаг 3: Увеличивается значение $\gamma = \gamma + \frac{1}{m}$, и переход к шагу 2.

В п. 2.4 рассмотрен случай геодезического расстояния на сфере в евклидовой метрике, для которого описан алгоритм построения наилучшего покрытия для задачи П1. Алгоритм включает в себя итеративное построение сферической диаграммы Вороного и отыскание чебышевских центров ее областей. Представлена теорема о релаксационности алгоритма.

В п. 2.5 предложены алгоритмы для решения задач, поставленных в п. 2.1. Для решения задач о покрытии применяется оптико-геометрический подход, являющийся следствием физических принципов Ферма и Гюйгенса.

Решение задачи о покрытии включает два этапа: (1) поверхность S разбивается на n областей с помощью диаграммы Вороного, которая строится по произвольному набору начальных точек; (2) для каждой области диаграммы Вороного строится один покрывающий объект минимального радиуса,

находится его центр. Далее строится новая диаграмма Вороного относительно найденных центров. Итерационный процесс продолжается до выполнения критерия останова.

Алгоритмы построения покрытия равными шарами и геодезическими кругами состоят из одинаковых шагов. Ключевое отличие заключается в том, что в первом случае расстояния измеряются в обычном евклидовом смысле, а во втором — вдоль кратчайшего пути на поверхности — геодезической линии.

Решение задачи об упаковке выполняется аналогично, но на этапе (2) находится объект максимального радиуса, который можно поместить в область диаграммы Вороного.

Общий алгоритм построения геодезической диаграммы Вороного

Шаг 1: Вводится равномерная сетка на поверхности $S_h \in S$. Отметим, что на сфере и эллипсоиде равномерная сетка выполнена по долготе и широте, а для боковой поверхности цилиндра и конуса — по углу вращения и высоте точки.

Шаг 2: Из каждой точки $O_i \in S_h, i = \overline{1, n}$, выпускается световая волна и определяется время достижения $T_i(p)$ всех точек $p \in S_h$. Это позволяет найти вектор $T(p) = \{T_i(p), i = \overline{1, n}\}$.

Шаг 3: Для каждой точки $p \in S_h$ определяется номер волны, возможно не единственный, которая первой достигла данной точки, и формируется множество $D(p) = \{k: T_k(p) = \min_i T_i(p)\}$ номеров таких волн.

Шаг 4: Определяются области Дирихле диаграммы Вороного V_i с центром O_i как $V_i = \{p \in S_h: i \in D(p)\}$.

Общий алгоритм покрытия областей диаграммы Вороного

Идея алгоритма основана на решении задачи: найти такую точку области Дирихле, из которой максимальное время достижения любой точки границы области минимально возможно (минимакс). Нахождение максимума гарантирует полное покрытие, а минимум — его оптимальность.

Шаг 0: Задаются поверхность вращения, количество элементов покрытия n , параметр останова $\delta > 0$, максимальное число итераций N_{\max} , параметр $type = 0$ для покрытия сферическими сегментами или $type = 1$ для покрытия геодезическими кругами, $R_{\text{best}} = +\infty, iter = 0$.

Шаг 1: Случайным образом генерируются начальные координаты центров объектов $O_i \in S_h, i = \overline{1, n}$.

Шаг 2: Для множества $C = \{O_i \in S, i = \overline{1, n}\}$, строятся области Дирихле $V_i, i = \overline{1, n}$ диаграммы Вороного.

Шаг 3: Определяются границы ∂V_i областей V_i и аппроксимируются замкнутыми ломаными с узлами в точках $v_{i,k}, k = \overline{1, m}$. Таким образом, мы

получаем наборы $P(\partial V_i) = \{v_{i,k}, k = \overline{1, m}\}$.

Шаг 4: Из каждой точки $v_{i,k}$, выпускаются световые волны. Для каждой точки $p \in V_i$ определяется источник, выпущенная из которого волна первой достигла точки p , и время перемещения $T(p)$: $T(p) = \min_{k=\overline{1, m}} T_k(p)$, где $T_k(p)$ — время распространения световой волны из $v_{i,k}$ до $p \in V_i$.

Шаг 5: Определяются радиус и центр покрывающих фигур области V_i по формулам: $R_i = \max_{p \in V_i} T(p)$, $O_i^* = \arg \max_{p \in V_i} T(p)$.

Шаги 3–5 выполняются независимо для каждой области V_i .

Шаг 6: Чтобы гарантировать полное покрытие равными фигурами множества S , в качестве радиуса покрывающего сегмента выбирается максимальный $R = \max_{i=\overline{1, n}} R_i$.

Шаг 7: Если $\rho(O_i, O_i^*) < \delta, i = \overline{1, n}$, переход к шагу 8, иначе $O_i := O_i^*$ и переход к шагу 2.

Шаг 8: Если $R < R_{\text{best}}$, то $R_{\text{best}} := R$ и сохранить текущие центры. Если $iter < N_{\text{max}}$, то выполнить новую генерацию начальных позиций и $iter := iter + 1$. Если $iter = N_{\text{max}}$, алгоритм завершается.

Общий алгоритм упаковки областей диаграммы Вороного

Принцип работы алгоритма упаковки аналогичен алгоритму покрытия, поэтому укажем ключевые отличия.

Шаг 0: $R_{\text{best}} = 0$.

Шаги 1–3 аналогичны.

Шаг 4.1: Из точек $p \equiv O_i$ выпускаются световые волны и вычисляется минимальное время, необходимое для достижения $P(\partial V_i)$: $T(p, \partial V_i) = \min_{k=\overline{1, m}} T_i(p, v_{i,k})$, где $T_i(p, v_{i,k})$ — время распространения волны из p и $v_{i,k}$.

Шаг 4.2: Множество соседних с точкой $p(\alpha, \beta)$ точек определяется как $\Delta p = \{(\alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta) : \Delta\alpha \in \{-s\alpha, 0, s\alpha\}, \Delta\beta \in \{-s\beta, 0, s\beta\}\}$.

Шаг 5: Вычисляется $T(p_{\text{new}}, \partial V_i)$ для каждой точки $p_{\text{new}} \in \Delta p$. Если $T(p_{\text{new}}, \partial V_i) > T(p, \partial V_i)$, то $p := p_{\text{new}}$ и выполняется переход к шагу 4.1. В противном случае, элемент с центром $O_i^* = p$ и радиусом $R_i = T(p, \partial V_i)$ является оптимальным для области V_i .

Шаг 6: $R = \min_{i=\overline{1, n}} R_i$.

Шаг 7 аналогичен.

Шаг 8: Если $R > R_{\text{best}}$, то $R_{\text{best}} := R$.

Если покрывающие и упаковываемые объекты — геодезические круги и сферические сегменты, на шаге 4 используется геодезическое расстояние, введенное в п. 2.2, а в случае шаров применяется евклидово расстояние.

В главе 3 в п. 3.1 представлен комплекс программ «ПУПоВ» (Покрытия и упаковки для поверхностей вращения), включающий 3 программы «Построение покрытие трехмерных поверхностей шарами», «Построение покрытия эллипсоида равными шарами» и «Построение упаковки равных гиперкругов на гиперсфере». Комплекс разработан на языке программирования C# в среде Visual Studio 2022 и включает четыре модуля, соответствующих четырем поверхностям: сфера, эллипсоид, боковая поверхность цилиндра и конуса. Каждый модуль содержит функции для ввода данных, настройки параметров алгоритма и сохранения результатов.

В п. 3.2 представлены примеры, позволяющие оценить точность предложенных алгоритмов и работоспособность разработанного комплекса программ. Рассматривались задачи: покрытие сферы равными сферическими сегментами, упаковка равных сферических сегментов на сфере, упаковка равных геодезических кругов в сферический сегмент, покрытие боковой поверхности цилиндра и конуса равными шарами, упаковка равных шаров на боковой поверхности цилиндра и конуса, покрытие эллипсоида равными шарами. При исследовании использовались как евклидова, так и различные неевклидовы метрики.

Результаты вычислительного эксперимента показывают, что предложенные алгоритмы находят решения, близкие к оптимальным. В ряде случаев найденные решения являются оптимальными, а в остальных — отклонение полученных результатов от наилучших известных (если таковые имеются) незначительно.

Выполнена статистическая обработка результатов расчетов: в качестве случайной величины рассматривалось отклонение найденного радиуса покрытия от минимального из известных. Показано, что она подчиняется гамма-распределению, параметры которого оказались близки для всех рассмотренных случаев.

В главе 4 в п. 4.1 представлено решение прикладной задачи о настройке оборудования для лечения опухолей головного мозга гамма-излучением. Требуется разместить от 8 до 15 радиационных лучей так, чтобы они покрывали всю поверхность опухоли, и при этом плотность покрытия была минимальной для уменьшения площади переоблученных участков. Опухоль моделируется трехосным эллипсоидом, для которого строится оптимальное покрытие равными шарами. Рассмотрены 160 различных опухолей, для которых найдены покрытия с плотностью, не превышающей 1.49. Оптимальное число лучей варьировалось от 8 до 10.

В п. 4.2 решена задача размещения датчиков на сферической фокаль-

ной поверхности. Необходимо упаковать $n = 200 \div 210$ датчиков, область действия которых имеет вид геодезического круга. Плотность упаковки требуется максимизировать, и при этом она должна быть не менее 0.76, а расстояние между датчиками следует минимизировать. Наилучшая плотность упаковки $\Xi_\theta = 0.791726$ достигается при $n = 200$, радиус геодезических кругов $R_{imp} = 0.03257$.

В п. 4.3 представлено решение задачи построения равноугольных жестких фреймов для создания сферических кодов. Для русского алфавита с 33 символами построены сферические коды с наилучшим угловым размером $R_{33} = 0.31035$, а для вьетнамского алфавита ($n = 29$) – $R_{29} = 0.33338$.

В п. 4.4 представлено решение прикладной задачи о проектировании поверхности геодезического спутника. Поверхность спутника принимается за единичную сферу, на которой требуется разместить $n = 60, 92, 303$ или 426 отражателей – сферических сегментов, чтобы плотность упаковки Ξ была максимальной. Найдены упаковки с наилучшими плотностями $\Xi_{60} = 0.808$, $\Xi_{92} = 0.785$, $\Xi_{303} = 0.739$, $\Xi_{426} = 0.726$.

В заключении представлены основные научные результаты, полученные в ходе выполнения данной диссертационной работы.

ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Математическая формализация задач покрытия и упаковки для поверхностей вращения с различными метриками в форме задач непрерывной оптимизации.

2. Численные алгоритмы, основанные на оптико-геометрическом подходе, которые позволяют решать задачи о покрытии равными фигурами и об упаковке равных фигур для поверхностей вращения.

3. Новые алгоритмы построения диаграмм Вороного для поверхностей вращения: сфера, эллипсоид и их сегменты, боковые поверхности цилиндра и конуса, на основе оптико-геометрического подхода.

4. Математические утверждения о свойствах геодезического расстояния, на основе которых разработан метод построения начального приближения для решения задач покрытия и упаковки геодезических кругов в сферический сегмент.

5. Комплекс программ «Покрытия и упаковки для поверхностей вращения» (ПУПоВ), в котором реализованы разработанные численные алгоритмы. Выполнены вычислительные эксперименты, показавшие эффективность предложенного программно-алгоритмического инструментария.

6. Решения прикладных задач: оптимальной настройки генераторов гамма-излучения в нейрохирургии, размещения микрооптических элементов на сферической фокальной поверхности, построения равноугольных жестких фреймов и компоновки отражателей на поверхности геодезического лазерного спутника с использованием комплекса программ «ПУПоВ».

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Издания, входящие в Перечень ВАК по специальности 1.2.2:

1. Нгуен Д. М. О задаче покрытия сферических фигур равными сферическими сегментами / А. А. Лемперт, П. Д. Лебедев, Д. М. Нгуен // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2024. – Т. 30, No. 1. – С. 142-155. DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-142-155.

2. Nguyen D. M. On Covering of Cylindrical and Conical Surfaces with Equal Balls / A. L. Kazakov, A. A. Lempert, D. M. Nguyen // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. – 2024. – Vol. 48. – P. 34–48. DOI: 10.26516/1997-7670.2024.48.34.

3. Нгуен Д. М. О методе упаковки геодезических кругов в сферический сегмент с использованием плоской проекции / А. Л. Казаков, А. А. Лемперт, Д. М. Нгуен // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2025. – Т. 65. – С. 36–53. DOI: 10.35634/2226-3594-2025-65-03.

4. Нгуен Д. М. Покрытие эллипсоида равными шарами / Д. М. Нгуен // System Analysis & Mathematical Modeling. – 2025. – Т. 7, No. 2. – С. 274–289. DOI: 10.17150/2713-0.1734.2025.7(2).274-289.

Издания, индексируемые в базе данных WoS:

5. Nguyen D. M. On the problem of the densest packing of spherical segments into a sphere / D. T. Vu, T. B. Phung, A. A. Lempert, D. M. Nguyen // Management and Administrative Professional Review. – 2023. – Vol. 14, Iss. 11. – P. 19307–19323. DOI: 10.7769/gesec.v14i11.3021.

Издания, индексируемые в базе РИНЦ:

6. Nguyen D. M. Numerical Algorithm for Covering Surfaces of Revolution by Balls with Equal Radii / Nguyen D. M. // Modern Technologies and Scientific and Technological Progress, 2024. Vol. 2024, № 1. P. 156–158.

7. Нгуен Д. М. О покрытии поверхностей вращения равными шарами / А. Л. Казаков, А. А. Лемперт, Д. М. Нгуен // Современные проблемы математики и ее приложений. Тезисы докладов Международной молодежной школы-конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2024. – С. 48-49.

8. Нгуен Д. М. О построении покрытия эллипсоида равными шарами / А. Л. Казаков, А. А. Лемперт, Д. М. Нгуен // Материалы 6-й Международной конференции «Динамические системы и компьютерные науки: Теория и приложения – DYSC 2024». Иркутск: ИГУ, 2024. – Р. 111–113.

9. Нгуен Д. М. О методе упаковки геодезических кругов в сферический сегмент с использованием плоской проекции / Д. М. Нгуен // Современные проблемы математики и ее приложений: Тезисы докладов Международной молодежной школы-конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2025.

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ:

10. Нгуен Д. М. Построение покрытий трехмерных поверхностей шарами / Нгуен Д. М., А. А. Лемперт, А. Л. Казаков // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2024613801 от 15.02.2024. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности. — 2024.

11. Нгуен Д. М. Покрытие эллипсоида равными шарами / Нгуен Д. М., А. Л. Казаков, А. А. Лемперт // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2025617354 от 25.03.2025. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности. — 2025.

12. Нгуен Д. М. Упаковки равных кругов на гиперсфере / Нгуен Д. М., А. А. Лемперт, А. Л. Казаков // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2025617890 от 31.03.2025. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности. — 2025.